МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Ильютко Денис Петрович

УДК 514.77+517.982.22+519.711.72

ГЕОМЕТРИЯ ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С НОРМАМИ

01.01.04 — геометрия и топология

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
профессор, доктор физико-
-математических наук,
А. А. Тужилин

Москва – 2005

Введение

Задачи, связанные с изучением локально минимальных сетей, т.е. кратчайших в малом, и экстремальных сетей, т.е. критических точек функционала нормированной длины, строгое определение которых см. ниже, появляются при обобщении следующей классической задачи, известной в литературе как проблема Штейнера: *среди всех сетей, затягивающих данное конечное множество X точек евклидовой плоскости, найти сеть наименьшей длины.* Решение этой задачи называется *кратчайшей* или *абсолютно минимальной сетью*, затягивающей множество X. Отметим, что с точки зрения римановой геометрии, локально минимальные сети являются естественным обобщением обычных геодезических. Действительно, локально минимальная сеть, затягивающая две произвольные точки на некотором римановом многообразии, представляет собой обычную геодезическую, т.е. кратчайшую в малом кривую. Более подробный исторический обзор, посвященный проблеме Штейнера, можно найти в [4, 5, 25, 31].

Традиционно больше внимания уделяется изучению локально минимальных и кратчайших сетей, чем изучению экстремальных сетей. Это связано с тем, что в случае функционала римановой длины, если разрешено расщеплять вершины, классы локально минимальных и экстремальных сетей совпадают, см. [15]. В данной работе рассматриваются сети на λ-нормированных плоскостях, т.е. на нормированных плоскостях $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, для которых единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \ \rho_\lambda(x) = 1\}$ совпадает с правильным 2λ-угольником, одна из осей симметрии которого лежит на оси абсцисс. Важными отличиями этих нормированных плоскостей от стандартной евклидовой плоскости являются отсутствия гладкости единичной окружности Σ и строгой выпуклости единичного круга, ограниченного Σ. Часто нормы, для которых единичная окружность Σ является гладкой, называют *гладкими*, а нормы, для которых единичный круг строго выпуклый, — *строго выпуклыми.* Оказывается, на этих λ-нормированных плоскостях, ввиду отсутствия гладкости нормы, класс локально минимальных сетей существенно шире класса экстремальных сетей.

Первые работы, посвященные изучению проблемы Штейнера на нормированных плоскостях, появились в 60-е годы XX века, см. [6], в связи с бурным развитием электроники и робототехники. В 1966 г. Ханан [8] провел исследование *кратчайших прямоугольных деревьев*, т.е. кратчайших сетей на 2-нормированной, так называемой манхеттенской, плоскости, и описал несколько важных общих геометрических свойств таких сетей. Он указал максимальную степень, которую могут иметь как внутренние, так и граничные вершины кратчайшей сети на манхеттенской плоскости, а именно, что эта степень равна 4 для всех вершин. Также Ханан показал, что всегда существует кратчайшее прямоугольное дерево, которое является подмножеством *решетки Ханана* — множества всех вертикальных и горизонтальных прямых, проходящих через граничные точки. Позже Хванг [9] описал структуру некоторых кратчайших сетей на манхеттенской плоскости, но эффективный алгоритм, строящий кратчайшую сеть, найти не удалось. В 1977 г. Гэри и Джонсон [7] показали, что задача поиска кратчайшего прямоугольного дерева, затягивающего n различных точек плоскости, является NP-полной. Последнее означает, что, скорее всего, для этой проблемы не существует полиномиального алгоритма, т.е. алгоритма, решающего задачу за время $O(n^k)$, где k — некоторое фиксированное число. Тем не менее, на практике приходится строить кратчайшие деревья, затягивающие большое количество точек плоскости, поэтому изучение ограничений на структуру кратчайших сетей является важным для приложений. Эти ограничения позволяют сокращать набор претендентов на кратчайшую сеть. Например, хорошо известно, что степени вершин кратчайших сетей на стандартной евклидовой плоскости должны быть не больше 3, что существенно снижает перебор при построении кратчайшего дерева. Такие же эффекты можно получить, исходя из геометрии граничного множества. Например, если в качестве граничного множества X рассматривается правильный многоугольник, то для такого X удается получить полный список кратчайших сетей, его затягивающих, см. [4]. Также имеются существенные продвижения и в задаче описания локально минимальных сетей, затягивающих X, см. [13, 14, 35, 36].

В 90-х годах XX века проблемой Штейнера на нормированных плоскостях занимались многие ученые. Опишем некоторые важные результаты, касающиеся сетей на нормированных плоскостях.

Рассмотрим вопрос о максимальной степени вершины. В случае, когда норма является гладкой и строго выпуклой, степень вершин не превосходит 3, см. [1]. Как было отмечено выше, если мы откажемся от условий гладкости и строгой выпуклости нормы (как это имеет место, например, на манхеттенской плоскости), то степень вершин может быть больше 3. Рассмотрим нормированные плоскости, которые удовлетворяют только одному из обсуждаемых условий, т.е. либо норма является гладкой, либо строго выпуклой. Оказывается, что существуют нормированные плоскости со строго выпуклой нормой и кусочно-гладкой единичной окружностью, на которых внутренние вершины кратчайших сетей могут иметь степень 4, см. [1]. Заметим, что упомянутая выше манхеттенская плоскость не удовлетворяет условию строгой выпуклости единичного круга. Лаулор и Морган [28] обобщили результаты, полученные в [1], и показали, что на нормированных плоскостях с гладкой нормой и без условия ее строгой выпуклости степень внутренней вершины все равно не превосходит 3. Но в некоторых случаях условие строгой выпуклости нормы играет существенную роль при ограничении степени вершин. Если норма строго выпуклая, но не обязательно гладкая, то Альфаро и др. [1] показали, что степень внутренней вершины не больше 4, а Цислик в работе [2] доказал это ограничение для всех вершин. Подводя итоги вышесказанного, мы можем заключить, что на нормированных плоскостях с гладкой нормой степени вершин не превосходят 3, а со строго выпуклой нормой — 4. Более того, Цислик показал [2], что на нормированных плоскостях, не изометричных 3-нормированной плоскости, степень вершин не может быть больше 5. Сванепол уточнил этот результат [32] и доказал, что на любой нормированной плоскости степень внутренней вершины не превосходит 4, а граничной — 6, причем граничная вершина может иметь степень 5 или 6 только на плоскостях, изометричных 3-нормированной плоскости.

Локальная структура локально минимальных сетей на λ-нормированных плоскостях, $\lambda \neq 2$, т.е. возможные степени вершин и углы между смежными ребрами, была описана Саррафзаде и Вонгом [30], а также Ли и Шеном [29]. Но в этих двух работах описание было не полным, так как отсутствовали некоторые возможные структуры вершин степени 3 для $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Полный же ответ был независимо получен Сванеполом [32] и автором настоящей диссертации [18].

Отметим, что проблемой Штейнера занимались многие известные математики, такие как Винтер, Гилберт, Гильдебрандт, Грехем, Гэри, Джонсон, Ду, Иванов, Кокейн, Мантуров, Мелзак, Морган, Поллак, Рубинштейн, Смит, Томас, Тужилин, Фоменко, Ханан, Хванг, Цислик и другие. Одна из причин этого неослабевающего интереса специалистов к минимальным сетям состоит в том, что у проблемы Штейнера имеется много различных интерпретаций и приложений. Например, заданное конечное множество X можно интерпретировать как набор конечных (терминальных) пунктов. Если, например, терминальные пункты — города, которые требуется соединить сетью дорог, то в этом случае минимальная сеть — это самая дешевая транспортная система, обеспечивающая коммуникации между данными конечными пунктами. Здесь естественно предполагается, что стоимость коммуникаций пропорциональна их длине. Другие приложения проблемы Штейнера — это разводка микросхем и построение эволюционных деревьев. Основная проблема при разводке микросхем — это минимизация длины проводников на печатных платах. Эти проводники имеют вид ломанных линий, составленных из горизонтальных и вертикальных отрезков. Таким образом, разводка микросхем имеет непосредственное отношение к проблеме Штейнера на манхеттенской плоскости. Эволюционные деревья часто моделируются кратчайшими сетями в филогенетических пространствах, т.е. в пространствах слов с соответствующей метрикой.

Теорией экстремальных сетей много занимались А. О. Иванов и А. А. Тужилин [12, 14, 15, 17]. В своих работах [15, 17] они показали, как по каждой сети можно построить систему неравенств, выполнение которых при каждом значении переменных равносильно экстремальности исходной сети. Функции, входящие в эту систему, устроены достаточно сложно, в них даже могут встречаться условные операторы, поэтому, в общем случае, проверка справедливости этих неравенств может оказаться чрезвычайно трудоемкой. Один из результатов настоящей диссертации состоит в том, что для условия экстремальности дерева на λ-нормированной плоскости достаточно показать справедливость неравенств системы для деревьев простого вида и лишь для конечного набора значений переменных. А. О. Иванов и А. А. Тужилин [15, 17] получили, используя систему обсужденных выше неравенств, геометрический критерий экстремальности локально минимальной сети на 2-нормированной плоскости. Настоящая диссертация дает геометрический ответ на вопрос, когда дерево является экстремальным на λ-нормированной плоскости для всех λ, за исключением $\lambda = 2, 3, 4, 6$. Для получения этого ответа были выбраны методы теории экстремальных сетей, разработанные А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным [12, 14, 15, 17]. Была построена характеристика дерева, *ориентированная погрешность*, которая является аналогом числа вращения дерева на евклидовой плоскости. Оказывается, что эта погрешность полностью отвечает за экстремальность дерева на λ-нормированной плоскости. Сама ориентированная погрешность дерева считается достаточно просто:

— сначала определяется ориентированная погрешность между двумя смежными ребрами как кососимметричная функция от их направлений;

— затем для всех путей, входящих в дерево и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, определяется ориентированная погрешность как сумма ориентированных погрешностей во внутренних вершинах;

— наконец, вычисляется максимум ориентированных погрешностей

всевозможных ориентированных путей, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.
Поскольку дерево содержит конечное число путей, для любого дерева мы можем за конечное число шагов вычислить ориентированную погрешность и проверить его экстремальность. Отметим, что ориентированная погрешность пути определяется только самим путем, т.е. ребра, не входящие в путь, но смежные с ним, не влияют на результат. Для некоторых деревьев критерий экстремальности в терминах погрешности позволяет достаточно быстро отвечать на вопрос об их экстремальности. Так, в диссертации критерий применяется к деревьям, которые представляют собой путь. Критерий, получаемый в этом случае, достаточно прост и нагляден, см. теорему 4.17. Также в диссертации исследуется вопрос о реализации дерева в виде локально минимального или экстремального дерева на λ-нормированной плоскости и поведение экстремального дерева на λ-нормированных плоскостях при $\lambda \to \infty$. Как и следовало ожидать, при достаточно больших λ структура экстремального дерева на λ-нормированной плоскости близка к структуре экстремального дерева на евклидовой плоскости, т.е. степени вершин те же и углы между смежными ребрами приблизительно одни и те же.

Диссертация состоит из пяти глав.

Первая глава посвящена описанию основных используемых в работе понятий и результатов, связанных с теорией сетей. Эта глава основывается на [12, 14, 15, 17, 18, 29, 32]. В первом параграфе вводятся определения *сети, границы сети, подсети, деформации сети, типа расщепления сети*, которые будут использоваться в дальнейшем.

Во втором параграфе описываются операции над сетями, такие как разрезание сети по вершине и ребру, редукция и антиредукция сети. Первые три операции применяются для упрощения проверки экстремальности произвольной сети. С помощью этих операций мы переходим к сетям более простого вида, экстремальность которых равносильна экстремальности исходной сети. Последняя операция используется для построения экстремальных сетей общего вида из экстремальных сетей простого вида.

В параграфе 1.3 мы вводим понятие *экстремальной и слабо экстремальной* сети, *кратчайшей и локально минимальной* сети. Теорема 1.1 показывает, что в любом нормированном пространстве классы локально минимальных и локально экстремальных сетей совпадают. Итогом этого параграфа являются теоремы 1.3 и 1.4. В теореме 1.3 приведена формула первой вариации для сетей, а теорема 1.4 показывает, какие типы расщепления сети достаточно рассмотреть для проверки экстремальности. Эти типы расщепления называются *базовыми*.

Основным результатом четвертого параграфа является теорема 1.5. Эта теорема представляет собой геометрический критерий локальной минимальности произвольной сети на λ-нормированной плоскости. Также в этом параграфе вводятся важные понятия для ребер сети. Это — *точечное и неточечное* ребро, а также *погрешность* между двумя смежными ребрами. Все эти понятия будут использоваться при формулировке критерия экстремальности произвольного дерева.

Последующие главы посвящены экстремальным деревьям на λ-нормированных плоскостях, где $\lambda \neq 2$, 3, 4, 6. В первых трех из них основные усилия направлены на выяснение того, когда произвольное дерево на λ-нормированной плоскости является экстремальным. А в последней главе применяется полученный критерий экстремальности дерева к проблеме реализации дерева и сходимости экстремальных деревьев при $\lambda \to \infty$.

Вторая глава содержит три параграфа. В первом параграфе показывается, как свести проверку экстремальности произвольного дерева к проверке экстремальности дерева, не содержащего внутренние вершины степени 2. Такие деревья называются *линеаризованными*. Основной результат этого параграфа, утверждение 2.2, заключается в том, что сеть экстремальна тогда и только тогда, когда все ее нити являются монотонными кривыми, а линеаризованная сеть экстремальна.

Во втором параграфе изучается, какие операции сохраняют экстремальность, т.е. выясняется, когда экстремальность сети равносильна экстремальности сетей, полученных в результате применения этих операций. Ключевым результатом этого параграфа являются утверждения 2.3 — 2.8. Утверждение 2.3 выделяет из класса граничных вершин степени 2 те вершины, которые можно разрезать с сохранением экстремальности, а утверждение 2.4 показывает, что все граничные вершины степени 3 можно разрезать с сохранением экстремальности. Следующие четыре утверждения относятся к операции разрезания по ребру. Из утверждений 2.5 и 2.6 выясняется, что неточечное ребро всегда можно разрезать с сохранением экстремальности, а точечное разрезаемо с сохранением экстремальности при выполнении некоторых дополнительных условий. Утверждения 2.7 и 2.8 имеют дело не с самим ребром, а с вершиной. Они показывают, что для некоторых внутренних вершин экстремальность всего дерева равносильна экстремальности деревьев, полученных разрезанием по каждому в отдельности ребру, инцидентному этой вершине.

Третий параграф второй главы начинается с определения *существенной сети*. Эти сети имеют достаточно простую структуру. Они представляют собой объединение пути и ребер, инцидентных некоторым внутренним вершинам этого пути. Поскольку, по определению, в существенных сетях все граничные вершины имеют степень 1 или 2, а внутренние — степень 3, то для них имеется всего один базовый тип расщепления, который получается расщеплением граничных вершин степени 2. Углы между смежными ребрами существенной сети определяются из условия ее локальной минимальности и из условий, описывающих, какие граничные вершины разрезаются с сохранением экстремальности. Далее в этом параграфе приводится алгоритм, который каждому локально минимальному дереву, не содержащему внутренние вершины степени 2, ставит в соответствие набор максимальных существенных его подсетей. Эти сети называются *существенными представителями*. В дальнейшем описанный алгоритм используется для доказательства теоремы 2.2, утверждающей, что для проверки экстремальности дерева достаточно проверить экстремальность максимальных существенных представителей данного дерева.

Третья глава посвящена деформациям существенных сетей. Для каждой сети рассматривается единственный базовый тип расщепления, который получается расщеплением всех граничных вершин степени 2, и на основании структуры базового типа расщепления выделяются так называемые *допустимые деформации* и *строго допустимые деформации*. Отметим, что важным условием того, куда будет двигаться вершина при допустимой деформации, являются значения углов между смежными ребрами в этой вершине. При этом модули векторов скорости движения вершин при строго допустимой деформации взаимосвязаны, т.е., фиксировав один из модулей, мы можем определить все остальные. Таким образом, направления движений вершин определяются только локальными свойствами, а модули векторов скоростей — не локальны. Отметим, что при допустимой деформации сети каждая вершина может двигаться не более чем в четырех направлениях, а при строго допустимой — не более чем в двух. Поскольку длины векторов строго допустимой деформации взаимосвязаны, то каждый базовый тип расщепления существенной сети имеет конечное (возможно нулевое), с точностью до нормирующего множителя, число таких деформаций. Теоремы 3.1, 3.2, 3.3 этой главы показывают, что для проверки экстремальности сети достаточно рассмотреть только строго допустимые деформации с единичной нормой, а также, что существенная сеть экстремальна тогда и только тогда, когда первая вариация для каждой ее существенной подсети неотрицательна при любой строго допустимой деформации с единичной нормой. Так как каждая сеть имеет конечное число подсетей и каждая существенная сеть имеет конечное число строго допустимых деформаций, то для проверки экстремальности дерева достаточно проверить справедливость конечного числа неравенств лишь в конечном наборе значений переменных.

Четвертая глава завершает описание структуры экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях.

Первые три параграфа посвящены переходу от сетей к словам. Для удобства изложения существенные сети кодируются словами, при этом нескольким сетям может соответствовать одно и то же слово. Вводится понятие подслова, которое соответствует понятию существенной подсети. Во втором параграфе формула первой вариации сети переписывается в терминах слов. На основании этой формулы в третьем параграфе определяются *положительные* (*справа, слева*) *слова* и *полуэкстремальные* (*справа, слева*) слова. Теорема 4.1 утверждает, что сеть экстремальна тогда и только тогда, когда слово, соответствующее ей, полуэкстремально справа и слева.

В следующих трех параграфах исследуется полуэкстремальность слов. Сначала каждому слову при $2\lambda \equiv 1, 2 \pmod 3$ ставится в соответствие некоторый набор так называемых *простейших слов*. Для этого используется операция редукции, подобная той, которая была определена для деревьев. Оказывается, что полуэкстремальность слова равносильна полуэкстремальности простейших слов, которые строятся по исходному слову, теорема 4.3. Для случая $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$ полуэкстремальность слова связана с существованием строго допустимых деформаций существенных сетей, представленных подсловом исходного слова, теорема 4.8. На основании этого формулируется критерий полуэкстремальности слова. А именно, для каждого слова вводится понятие кручения, которое и ответственно за полуэкстремальность слова для случаев $2\lambda \equiv 1, 2 \pmod 3$. Основные результаты этих параграфов — теорема 4.6 и теорема 4.8. Первая утверждает, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально тогда и только тогда, когда кручение каждого подслова слова $\mathfrak{a}$ не больше нуля при $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и не меньше нуля при $2\lambda \equiv 2 \pmod 3$. Вторая теорема относится к $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$ и показывает, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально тогда и только тогда, когда для каждой существенной сети, представленной подсловом слова $\mathfrak{a}$, не существует строго допустимой деформации. Используя теоремы 4.1, 4.6 и 4.8, в седьмом параграфе мы приводим критерий экстремальности существенной сети в терминах соответствующего ей слова, теорема 4.9.

Главный результат четвертой главы заключен в следующих двух параграфах. Сначала вводится понятие *ориентированной погрешности* между двумя смежными ребрами, которая характеризует ориентированный угол между ними. Следующий шаг — это определение *ориентирован-*

ной погрешности сети, которая является аналогом числа вращения сети в евклидовом случае. Далее устанавливается связь между ориентированной погрешностью сети и кручением слова для случаев $2\lambda \equiv 1, 2 \pmod 3$, а также между ориентированной погрешностью сети и существованием строго допустимой деформации сети для случая $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Переходя от слов к существенным сетям и пользуясь теоремой 4.9, доказывается теорема 4.15 — критерий экстремальности существенной сети: существенная сеть экстремальна тогда и только тогда, когда ее ориентированная погрешность не больше 3. Используя теорему 4.15 и результаты предыдущих двух глав, мы доказываем основную теорему — геометрический критерий экстремальности произвольного дерева в терминах ориентированной погрешности. Основная теорема утверждает, что произвольное дерево экстремально тогда и только тогда, когда его ориентированная погрешность не больше 3.

В заключительном параграфе этой главы мы применяем критерий экстремальности к деревьям, все вершины которых суть граничные вершины степени 1 или 2. Каждому дереву ставится в соответствие некоторая последовательность целых чисел. Теорема 4.17 показывает, что если последовательность содержит подпоследовательность некоторого специального вида, то дерево не является экстремальным. Из этой теоремы видно, что пути в экстремальных деревьях не могут сильно "закручиваться" в одну сторону с минимально возможным углом.

В пятой главе работы рассматриваются свойства экстремальных сетей и вопросы, касающиеся топологической и планарной λ-минимальных (экстремальных) реализаций деревьев, т.е. реализаций этих деревьев в виде локально минимальных (экстремальных) деревьев на λ-нормированных плоскостях, а также поведения экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях при $\lambda \to \infty$.

Первый параграф содержит теоремы, касающиеся поведения ориентированной погрешности при редукциях и антиредукциях дерева. Теоремы 5.1, 5.2, 5.3 дают оценку на ориентированную погрешность дерева, полученного из данного дерева с помощью некоторой операции, и в некоторых случаях позволяют сказать, когда новое дерево экстремально, см. следствие 5.1.

Основной результат второго параграфа — это критерий λ-экстремальной реализации дерева, теорема 5.5. Эта теорема утверждает, что дерево λ-экстремально реализуется тогда и только тогда, когда оно является деревом Штейнера.

Третий, он же заключительный параграф главы, содержит теоремы о поведении экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях при

$\lambda \to \infty$. Теорема 5.7 утверждает, что для любого вложенного экстремального дерева Γ на стандартной евклидовой плоскости существует последовательность вложенных планарно эквивалентных Γ экстремальных деревьев на λ-нормированных плоскостях, сходящаяся к Γ при $\lambda \to \infty$. В то же время, это утверждение не имеет места, если дополнительно потребовать, чтобы границы всех приближающих Γ сетей совпадали. Теорема 5.8 показывает, что если дерево Γ является бинарным, то утверждение теоремы 5.7 верно и с дополнительным требованием совпадений границ.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своим научным руководителям д.ф.-м.н. проф. А. А. Тужилину и д.ф.-м.н. проф. А. О. Иванову за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе. Также автор благодарен Н. П. Долбилину, Н. С. Гусеву, Г. А. Карпунину, И. М. Никонову, С. В. Матвееву, И. Х. Сабитову, А. Т. Фоменко за полезные обсуждения результатов настоящей диссертации. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за творческий климат и поддержку.

Оглавление

Глава 1.

Предварительные сведения

В данной главе собраны основные определения и предварительные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

1.1. Общее определение сети

Определение. *Топологическим графом* G называется топологическое пространство, полученное из конечной совокупности отрезков $\{I_\alpha\}_\alpha$ некоторой склейкой по их концам. Пусть $\pi\colon \sqcup_\alpha I_\alpha \to G$ — каноническая проекция. Образы внутренностей отрезков I_α при отображении π называются *ребрами* графа G, а π-образы концевых точек отрезков I_α — *вершинами*. Граф G *связен*, если он связен как топологическое пространство.

Замечание. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые топологические графы являются простыми, т.е. не содержат петель и кратных ребер.

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин. Такой граф G будем называть *графом с границей* $\partial G = B$. Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины — *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Определение. Граничное ребро графа G называется 1-*граничным*, если оно инцидентно граничной вершине степени 1. Совокупность всех смежных 1-граничных ребер, из общей вершины которых выходит не более одного не 1-граничного ребра, назовем *усами*. Вершину графа G, инцидентную усам, назовем *вершиной усов*. Усы назовем *изолированными*, если вершина усов инцидентна только 1-граничным ребрам. Если усы состоят из l ребер, то назовем их l-*усами*.

Пусть G — произвольный граф с границей ∂G (возможно пустой), и $P \in G$ — некоторая его точка. *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ *точки* P *графа* G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G, отличных от P, если P — вершина. Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами — внутренности отрезков в U, соединяющих эти точки. Полученную звезду обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке* P. Определим *каноническую границу* ∂G_U локального графа G_U, включив в нее все вершины из ∂U, а также вершину P, если P — граничная вершина графа G, т.е. $\partial G_U = (\partial G \cap U) \cup (G \cap \partial U)$.

Определение. Пусть G — произвольный связный топологический граф, и ∂G — его граница. *Линейной сетью типа* G или, более коротко, *сетью типа* G называется непрерывное отображение Γ из G в $\mathbb{R}^n$, аффинное на каждом ребре графа G. Граф G в этом случае называется *параметризующим графом сети* Γ или *ее типом.*

Замечание. Можно определить более общее понятие сети, разрешив ребрам быть произвольными кривыми. Однако, при изучении экстремальных сетей в нормированных пространствах в этом нет необходимости. Действительно, если в экстремальной сети заменить все ребра на прямолинейные отрезки, то полученная сеть также является экстремальной.

Определение. Ограничения отображения Γ на вершины, ребра, границу, связный подграф параметризующего графа, локальный граф называются соответственно *вершинами, ребрами, границей* $\partial\Gamma$*, подсетью, локальной сетью* сети Γ. Более того, в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все структуры, возникающие на параметризующем графе, такие как инцидентность, смежность, ориентация и т.д., переносятся на сети.

Определение. Ребро γ сети Γ называется *вырожденным*, если оно является отображением в точку. *Вырожденная компонента сети* Γ — это максимальная связная компонента множества вырожденных ребер сети. *Приведенная компонента* сети Γ — это или ее вырожденная компонента, или вершина, которая не принадлежит вырожденным компонентам.

Определение. Линейная сеть Γ называется *погруженной*, если она не содержит вырожденных ребер. Погруженную сеть Γ назовем *вложенной*, если отображение Γ взаимно однозначно с образом. *Для простоты изложения мы часто будем отождествлять вложенную сеть с ее образом.*

Определение. Пусть G — топологический граф с границей ∂G, и $\bar{G}$ — подграф графа G. Граница $\partial\bar{G}$ графа $\bar{G}$ называется *индуцированной из графа* G, если она состоит из всех вершин графа $\bar{G}$, принадлежащих ∂G, а также из тех вершин, которые в $\bar{G}$ и G имеют различные степени.

Определение. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная сеть, $\partial\Gamma\colon \partial G \to \mathbb{R}^2$ — ее граница. Сеть $\bar{\Gamma}\colon \bar{G} \to \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\bar{\Gamma}\colon \partial\bar{G} \to \mathbb{R}^2$ называется *подсетью сети* Γ, если $\bar{\Gamma} = \Gamma\big|_{\bar{G}}$, где $\bar{G}$ является подграфом графа G, и его граница $\partial\bar{G}$ индуцирована из G. Если подсеть $\bar{\Gamma}$ отлична от Γ, то она называется *собственной подсетью сети* Γ.

Определение. Две линейные погруженные сети $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, называются *параллельными*, если существует ориентация на каждом из параметризующих графах G_i такая, что полученные ориентированные графы изоморфны, причем Γ_i-образы соответствующих ребер сонаправлены в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. *Отметим, что отношение параллельности является отношением эквивалентности, следовательно, погруженные сети разбиваются на классы параллельности. В дальнейшем нас будут интересовать те свойства, которые справедливы для всех сетей из класса параллельности, т.е. которые сохраняются при переходе к параллельной сети, поэтому иногда, для удобства, мы будем заменять произвольную сеть на параллельную ей.*

Определение. Будем говорить, что 1-граничное ребро $\gamma = [x, y]$ вложенной сети Γ, где вершина x имеет степень 1, *продолжается на бесконечность*, если луч, содержащий ребро γ, идущий из y в направление x, пересекает сеть Γ только по ребру γ.

Утверждение 1.1. *Для произвольного вложенного дерева* $\Gamma : G \to \mathbb{R}^n$ *с 1-граничным ребром* γ *существует параллельное ему вложенное дерево, у которого ребро, соответствующее* γ*, продолжается на бесконечность.*

Доказательство. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ — произвольное вложенное дерево, и предположим, что 1-граничное ребро $\gamma = [x, y]$ дерева Γ, где x является граничной вершиной степени 1, не продолжается на бесконечность. Ориентируем дерево Γ произвольным образом. Без ограничения общности будем считать, что ребро γ ориентировано от вершины x.

Поскольку рассматриваемые сети имеют конечное число ребер, то будем последовательно строить дерево, параллельное Γ, у которого ребро, сонаправленное с γ, продолжается на бесконечность. Пусть $I = [a_1, b_1]$ — произвольный ориентированный от вершины a_1 отрезок длины l, сонаправленный с γ. Выпустим из вершины b_1 отрезка I отрезки $I_j = [b_1, c_j]$ длины $l/2$, сонаправленные с инцидентными y ребрами. На следующем шаге берем произвольную вершину c_j и выпускаем из нее отрезки, сонаправленные с соответствующими ребрами дерева Γ, причем длины отрезков берем вдвое меньше, чем расстояние от точки c_j до ближайшего уже построенного отрезка, и т.д. Очевидно, что так построенное дерево будет параллельно исходному дереву Γ, и отрезок I будет продолжаться на бесконечность. Утверждение доказано. ■

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ — произвольная линейная сеть, и $I = [0, 1]$ — некоторый отрезок.

Определение. Непрерывное отображение $\Psi\colon G \times I \to \mathbb{R}^n$ такое, что для каждого ребра e из G отображение $\Psi\big|_{e\times I}$ является аффинным, и для всех $g \in G$ имеет место равенство $\Psi(g, 0) = \Gamma(g)$, называется *деформацией сети* Γ. Положим $\Psi(g, t) = \Gamma_t(g)$ и, в дальнейшем, будем называть деформацией само однопараметрическое семейство $\bigl\{\Gamma_t\colon G \to \mathbb{R}^2\bigr\}$. Всегда, если не оговорено противное, будем предполагать, что деформация неподвижна на границе, т.е. $\Psi(v, t) = \Gamma(v)$ для любой вершины $v \in \partial G$ и любого $t \in [0, 1]$.

Рассмотрим теперь траекторию движения каждой точки сети Γ при деформации Γ_t. Для этого фиксируем некоторую точку $g \in G$ и рассмотрим кривую $\Gamma_t(g)$. Вдоль Γ определено поле $\dfrac{d\Gamma_t(g)}{dt}\Big|_{t=0}$, которое называется *полем деформации* Γ_t.

Пусть H — произвольный подграф в топологическом графе G. Обозначим через $G/_wH$ топологическое пространство, полученное из G отождествлением точек каждой связной компоненты графа H. Пространство $G/_wH$ наделяется естественной структурой топологического графа. Граф $G/_wH$ называется *слабым фактор-графом графа* G по подграфу H. При этом каноническую проекцию $\pi\colon G \to G/_wH$ будем называть *слабой проекцией.* Будем говорить, что граф G_2 может быть *слабо спроецирован на граф* G_1, если существует $H \subset G_2$, для которого $G_1 = G_2/_wH$.

Пусть $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2,$ — произвольные линейные сети.

Определение. Будем говорить, что сеть Γ_2 может быть *слабо спроецирована на сеть* Γ_1, если существует слабая проекция $\pi\colon G_2 \to G_1$ такая, что $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \pi$.

Пусть Γ и Γ' — произвольные сети, причем Γ' может быть слабо спроецирована на Γ.

Определение. Произвольную деформацию сети Γ' назовем *деформацией с расщеплением сети* Γ. При этом сеть Γ' будем называть *типом такого расщепления.*

1.2. Операции над сетями

1.2.1. Разрезание сетей по вершинам и ребрам

Определение. Пусть G — произвольный топологический граф. *Измельчением графа G по ребру $e_\beta = [a,b]$ этого графа* называется граф G', полученный из G добавлением к множеству вершин графа G некоторой внутренней точки $c \in e_\beta$ и заменой ребра e_β на два ребра $[a,c]$ и $[c,b]$. При этом в качестве границы графа G' возьмем границу графа G. *Измельчение графа* — это измельчение по некоторым наборам его ребер. Измельчение графа G естественным образом порождает *измельчение сети* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$.

1) Разрезания сетей по вершинам

Определим операцию разрезания сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ по вершине $x = \{\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^n\}$ степени больше 1. Напомним, что топологический граф G получается из конечной совокупности отрезков I_α некоторой склейкой по их концам. Пусть $I_1, \dots, I_k$ — все те отрезки, концы которых a_i склеились в вершину v. Изменим отношение эквивалентности, задающую склейку концов отрезков I_α, перестав отождествлять некоторые точки a_i. Будем говорить, что граф G', полученный в результате факторизации по так измененной эквивалентности, получается из графа G *разрезанием по вершине v*. Разрезание, при котором отождествляются все концы a_i, за исключением ровно одного a_j, назовем 1-*разрезанием.*

Пусть v_j — вершины графа G', полученные из вершины v, а $\pi\colon G' \to G$ — естественная проекция, состоящая в отождествлении вершин v_j в одну вершину v. Обозначим через G_m связные компоненты графа G'. Определим границу ∂G_m графа G_m как множество тех вершин из G_m, которые при отображении π проецируются или в граничные вершины графа G, или в v. Кроме того, будем говорить, что сети $\Gamma_m\colon G_m \to \mathbb{R}^n$ с границами $\partial\Gamma_m\colon \partial G_m \to \mathbb{R}^n$, $\Gamma_m = \Gamma \circ \pi\big|_{G_m}$, получены из сети Γ *разрезанием по вершине x*.

Рассмотрим 1-разрезание сети Γ по вершине x, и пусть при этом вершина x распалась на вершины x' и x'', причем степень вершины x' равна

1. Пусть Γ'' — та из полученных связных компонент, которая содержит вершину x''. Сеть Γ'' назовем *максимальной компонентой* 1*-разрезания*. Отметим, что в силу неединственности операции 1-разрезания, а также возможности 1-разрезать вершину степени 2, у данной сети может существовать несколько максимальных компонент 1-разрезаний.

2) Разрезание сетей по ребрам

Определим операцию разрезания сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ по ребру $\gamma = \{\Gamma\colon e_\beta \to \mathbb{R}^n\} = [x_1, x_2]$, где $e_\beta = [v_1, v_2]$ — ребро графа G и $x_i = \{\Gamma\colon v_i \to \mathbb{R}^n\}$, $i = 1, 2$. Измельчим сеть Γ по γ и разрежем по добавленной вершине. Обозначим через $\Gamma_m\colon G_m \to \mathbb{R}^n$ сети, полученные в результате разрезания, и будем говорить, что сети $\Gamma_m\colon G_m \to \mathbb{R}^n$ с границами $\partial\Gamma_m\colon \partial G_m \to \mathbb{R}^n$ получены из сети Γ *разрезанием по ребру* γ.

Поскольку нас будут интересовать те свойства, которые справедливы для всех сетей из класса параллельности, то в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что сети, полученные в результате разрезания по ребру некоторой сети, являются подсетями исходной сети.

1.2.2. Редукция вложенного дерева

Пусть заданы два непересекающихся вложенных дерева $\Gamma_1\colon G_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_2\colon G_2 \to \mathbb{R}^n$ в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$, и пусть $\gamma_i = \{\Gamma_i\colon e_i = [u_i, v_i] \to \mathbb{R}^n\} = [x_i, y_i]$ является 1-граничным ребром из Γ_i. Без ограничения общности будем считать, что вершины $x_i = \{\Gamma_i\colon u_i \to \mathbb{R}^n\}$ имеют степень один. Отождествим точки u_1 и u_2 в одну точку w и будем считать, что точка w не является вершиной. В результате мы получим новое топологическое дерево G, вершины которого суть все вершины деревьев G_1 и G_2, за исключением u_1 и u_2. Определим границу ∂G дерева G, положив $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2 \setminus \{u_1, u_2\}$. Построенное топологическое дерево G обозначим через $(G_1, e_1)\#(G_2, e_2)$ и будем называть *склейкой деревьев* G_1 *и* G_2 *по ребрам* e_1 *и* e_2. Ребро дерева $(G_1, e_1)\#(G_2, e_2)$, являющееся объединением ребер e_1 и e_2, назовем *ребром склейки*.

Определение. Будем говорить, что деревья $\Gamma_1\colon G_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_2\colon G_2 \to \mathbb{R}^n$ *допускают склейку по* 1*-граничным ребрам* γ_1 *и* γ_2, если существует вложенное дерево $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$, где $G = (G_1, e_1)\#(G_2, e_2)$, такое, что при разрезании его по некоторому ребру полученные деревья с точностью до ρ-изометрии параллельны исходным деревьям Γ_1 и Γ_2. Если деревья $\Gamma_1\colon G_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_2\colon G_2 \to \mathbb{R}^n$ допускают склейку по ребрам γ_1 и γ_2, то само вложенное дерево Γ обозначим через $(\Gamma_1, \gamma_1)\#(\Gamma_2, \gamma_2)$ и будем называть *склейкой* Γ_1 *и* Γ_2 *по* 1*-граничным ребрам* γ_1 *и* γ_2. Ребро дерева

$(\Gamma_1, \gamma_1)\#(\Gamma_2, \gamma_2)$, являющееся объединением ребер γ_1 и γ_2, назовем *ребром склейки.*

Замечание. Если мы рассматриваем сети в стандартном евклидовом пространстве, то, согласно утверждению 1.1, любые два дерева допускают склейку по 1-граничным ребрам. В случае общего нормированного пространства это неверно, так как не каждый поворот является изометрией.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ — вложенное дерево, и $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2,$ — результат разрезания дерева Γ по некоторому его ребру $\gamma = \{\Gamma\colon e_\beta \to \mathbb{R}^n\}$.

Определение. Деревья Γ_i будем называть деревьями, *I-редуцированными из* Γ, а операцию перехода от Γ к Γ_i — *редукцией I-го типа.*

Пусть, как и выше, $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ — вложенное дерево, и γ_1 и γ_2 —пара его различных ребер. Разрежем Γ по ребрам γ_1 и γ_2, и пусть $\Gamma_0\colon G_0 \to \mathbb{R}^n$ — та компонента связности полученного плоского графа, которая содержит два ребра разреза, а $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^n$ — компонента, содержащая лишь ребро разреза, полученное из γ_i, которое мы также обозначим через γ_i, $i = 1, 2$, причем деревья Γ_1 и Γ_2 допускают склейку по ребрам γ_1 и γ_2.

Определение. Вложенное дерево $(\Gamma_1, \gamma_1)\#(\Gamma_2, \gamma_2)$ назовем *II-редуцированным из* Γ *по ребрам* γ_1 *и* γ_2, а операцию перехода от Γ к $(\Gamma_1, \gamma_1)\#(\Gamma_2, \gamma_2)$ — *редукцией II-го типа.* Ребра γ_1 и γ_2 будем называть *ребрами разреза.*

1.2.3. Антиредукция вложенного дерева

Пусть заданы два непересекающихся вложенных дерева $\Gamma_1\colon G_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_2\colon G_2 \to \mathbb{R}^n$. Выберем в каждом из них по одному 1-граничному ребру γ_1 и γ_2, причем Γ_1 и Γ_2 допускают склейку по ребрам γ_1 и γ_2.

Определение. Полученное в результате склейки по ребрам γ_i деревьев Γ_i вложенное дерево $\Gamma = (\Gamma_1, \gamma_1)\#(\Gamma_2, \gamma_2)$ назовем *I-антиредуцированным из* Γ_1 *и* Γ_2 *по ребрам склейки* γ_1 *и* γ_2, а операцию перехода от деревьев Γ_i к Γ — *антиредукцией I-го типа.*

Пусть, как и выше, заданы два непересекающихся вложенных дерева $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_0\colon G_0 \to \mathbb{R}^n$, и пусть в дереве Γ фиксировано произвольное ребро γ, а в дереве Γ_0 — пара различных 1-граничных ребер γ' и γ''. Разрежем дерево Γ по ребру γ, и пусть γ_1 и γ_2 — ребра разреза, принадлежащие деревьям Γ_1 и Γ_2, полученным в результате разрезания, соответственно. Склеим деревья Γ_0 и Γ_1 по ребрам γ' и γ_1. К полученному вложенному дереву $(\Gamma_1,\gamma_1)\#(\Gamma_0,\gamma')$ приклеим дерево Γ_2 по ребрам γ'' и γ_2. В результате мы построим вложенное дерево

$$\hat\Gamma = \Big((\Gamma_1,\gamma_1)\#(\Gamma_0,\gamma'),\gamma''\Big)\#(\Gamma_2,\gamma_2)$$

(мы считали, что склейка везде возможна).

Определение. Полученное вложенное дерево $\hat\Gamma$ назовем *II-антиредуцированным из Γ с помощью вклеивания вложенного дерева Γ_0 в ребро γ по ребрам γ' и γ''*, а операцию перехода от Γ и Γ_0 к $\hat\Gamma$ — *антиредукцией II-го типа.*

1.3. Определения экстремальной и локально минимальной сети

Пусть $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^n$ — произвольная линейная сеть в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n,\rho)$. Тогда *длиной $\ell(\Gamma)$ сети* Γ назовем сумму длин ее ребер, т.е. следующее выражение:

$$\ell(\Gamma)=\sum_{uv\in E(G)}\rho\big(\Gamma(u)-\Gamma(v)\big),$$

где $E(G)$ — множество ребер графа G.

Определение. Сеть Γ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой деформации Γ'_t, $t\in[0,1]$, где $\Gamma'_{t=0}=\Gamma'$ — произвольный тип расщепления сети Γ, выполнено соотношение:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0+}\ell(\Gamma'_t)\geqslant 0.$$

Сеть Γ называется *локально экстремальной*, если любая локальная сеть в Γ является экстремальной относительно своей канонической границы.

Из критерия экстремальности [15], см. также теорему 1.3, вытекает

Утверждение 1.2. *Параллельные сети экстремальны или не экстремальны одновременно.*

Определение. Сеть Γ называется *слабо критической* или *слабо экстремальной*, если для любой деформации (без расщепления) Γ_t, $t \in [0,1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0+} \ell(\Gamma_t) \geqslant 0.$$

Определение. Будем говорить, что сеть Γ *затягивает множество* X, если $\partial\Gamma = X$.

Определение. Сеть, затягивающая некоторое множество, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длину любой сети, затягивающей данное множество. Сеть называется *локально минимальной*, если любая локальная сеть является кратчайшей относительно своей канонической границы.

Утверждение 1.3. *Каждая подсеть локально минимальной (экстремальной) сети является локально минимальной (экстремальной).*

Утверждение 1.4. *Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ — произвольная слабо экстремальная сеть типа G с границей $\partial\Gamma\colon \partial G \to \mathbb{R}^n$. Тогда длина сети Γ не больше длины любой сети $\Gamma'\colon G \to \mathbb{R}^n$ того же типа G и с той же границей $\partial\Gamma' = \partial\Gamma$.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что найдется сеть $\Gamma'\colon G \to \mathbb{R}^n$ типа G и с границей $\partial\Gamma' = \partial\Gamma$ такая, что $\ell(\Gamma') < \ell(\Gamma)$. Для каждого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ рассмотрим сеть $\Gamma_\alpha\colon G \to \mathbb{R}^n$, определяемую условием $\Gamma_\alpha(u) = \alpha\Gamma'(u) + (1-\alpha)\Gamma(u)$ для каждой вершины u из G. Так как $\partial\Gamma' = \partial\Gamma$, то для каждой вершины $u \in \partial G$ имеем $\Gamma_\alpha(u) = \alpha\Gamma'(u) + (1-\alpha)\Gamma(u) = \Gamma(u)$, т.е. $\partial\Gamma_\alpha = \partial\Gamma$. Найдем длину сети Γ_α. Имеем

$$\begin{aligned}\ell(\Gamma_\alpha) = \sum_{uv\in E(G)} \rho\big(\Gamma_\alpha(u) - \Gamma_\alpha(v)\big) = \\ = \sum_{uv\in E(G)} \rho\Big(\alpha\big(\Gamma'(u) - \Gamma'(v)\big) + (1-\alpha)\big(\Gamma(u) - \Gamma(v)\big)\Big) \leqslant \\ \leqslant \alpha\ell(\Gamma') + (1-\alpha)\ell(\Gamma),\end{aligned}$$

где $E(G)$ — множество ребер графа G. Таким образом, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ell(\Gamma_\alpha) - \ell(\Gamma)}{\alpha} \leqslant \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\alpha\ell(\Gamma') + (1-\alpha)\ell(\Gamma) - \ell(\Gamma)}{\alpha} = \ell(\Gamma') - \ell(\Gamma) < 0.$$

Последнее неравенство противоречит слабой экстремальности сети Γ. Утверждение доказано. ■

Теорема 1.1. *Погруженная сеть локально минимальна тогда и только тогда, когда она является локально экстремальной.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную погруженную сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$.

Необходимость. Пусть сеть Γ локально минимальна. Так как кратчайшая сеть является экстремальной, а локальная минимальность означает, что каждая локальная сеть является кратчайшей, то она же и экстремальна. Следовательно, сеть Γ локально экстремальна.

Достаточность. Пусть сеть Γ локально экстремальна, т.е. каждая локальная сеть экстремальна. Рассмотрим произвольную экстремальную локальную сеть $\Gamma_{loc}\colon G_{loc} \to \mathbb{R}^n$. Из определения локальной сети следует, что она является звездой, т.е. сетью с не более чем одной вершиной степени больше 1.

Пусть $\Gamma_{min}\colon G_{min} \to \mathbb{R}^n$ — кратчайшая вложенная сеть, затягивающая $\partial\Gamma_{loc}$. Тогда G_{min} является деревом. Рассмотрим произвольное дерево G'_{min}, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) дерево G'_{min} слабо проецируется на дерево G_{min},

(2) все граничные вершины в G'_{min} имеют степень 1 (чтобы построить дерево G'_{min}, достаточно расщепить все граничные вершины дерева G_{min}). Рассмотрим новую сеть $\Gamma'_{min} = \Gamma_{min} \circ \pi\colon G'_{min} \to \mathbb{R}^n$, где $\pi\colon G'_{min} \to G_{min}$ — слабая проекция. Заметим, что $\ell(\Gamma'_{min}) = \ell(\Gamma_{min})$.

Из структуры дерева G_{loc} следует, что дерево G'_{min} может быть слабо спроецировано на G_{loc} (для этого нужно стянуть все внутренние ребра в точку, а затем, если все вершины дерева G_{loc} являются граничными, то стянуть еще одно ребро). Рассмотрим новую сеть $\Gamma'_{loc} = \Gamma_{loc} \circ \pi'\colon G'_{min} \to \mathbb{R}^n$, где $\pi'\colon G'_{min} \to G_{loc}$ — слабая проекция. Заметим, что $\ell(\Gamma'_{loc}) = \ell(\Gamma_{loc})$. Поскольку, по условию, дерево Γ_{loc} экстремально, то дерево Γ'_{loc} слабо экстремально. Из утверждения 1.4 следует, что $\ell(\Gamma'_{loc}) = \ell(\Gamma'_{min})$. Таким образом, мы имеем $\ell(\Gamma_{loc}) = \ell(\Gamma'_{loc}) = \ell(\Gamma'_{min}) = \ell(\Gamma_{min})$. Следовательно, сеть Γ_{loc} — кратчайшая, т.е. сеть Γ — локально минимальная. Теорема доказана. ■

Из этого утверждения вытекает теорема.

Теорема 1.2. *Каждая погруженная экстремальная сеть в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$ является локально минимальной.*

Замечание. Не каждая погруженная локально минимальная сеть является экстремальной. В дальнейшем будут рассмотрены примеры, показывающие это.

Определение. *Субградиентом* выпуклой вниз функции $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется такой ковектор $\xi \in T_x^*\mathbb{R}^n$, что

$$\xi(y-x) \leqslant F(y) - F(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Далее, если $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая поверхность, и $x \in \mathcal{M}$ — произвольная ее точка, то проходящая через x гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности $\mathcal{M}$ в точке x, если $\mathcal{M}$ лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π. Нормаль к опорной гиперплоскости, направленную в то из ограниченных этой гиперплоскостью полупространств, внутренность которого не пересекается с $\mathcal{M}$, назовем *внешней нормалью* к поверхности $\mathcal{M}$ в точке x. Множество $N_x\mathcal{M}$ всех внешних нормалей к поверхности $\mathcal{M}$ в точке x называется *нормальным конусом.*

Наконец, *конормой* ρ^*, соответствующей норме ρ, называется следующая функция на ковекторах:

$$\rho^*(\xi) = \max\{\xi(\nu) | \nu \in \Sigma\},$$

где $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^n | \rho(z) = 1\}$ — единичная сфера.

При стандартном отождествлении пространств $T_x^*\mathbb{R}^n$ и $T_x\mathbb{R}^n$, *субдифференциал* $S_F(x)$ *выпуклой функции* F *в точке* x, т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x, является непустым выпуклым ограниченным подмножеством нормального конуса в точке x к поверхности уровня этой функции, проходящей через x. При этом функция F дифференцируема в x, если и только если множество $S_F(x)$ состоит из одной точки, совпадающей в этом случае с градиентом функции F. Если $F = \rho$ — некоторая норма, то имеет место следующий результат [15].

Предложение 1.1. *Субдифференциал $S_\rho(x)$ в точке $x \neq 0$ совпадает с множеством всех внешних нормалей единичной конормы к поверхности уровня нормы ρ, проходящей через x.*

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ — произвольная линейная сеть. Для каждой приведенной компоненты $H_\Gamma \subset \Gamma$ обозначим через E_{H_Γ} и V_{H_Γ} множество ребер и вершин сети H_Γ. Через $\bar\partial H_\Gamma$ обозначим множество вершин из H_Γ, инцидентных невырожденным ребрам сети Γ. Далее, для каждой вершины $x \in \bar\partial H_\Gamma$ обозначим через $N_{H_\Gamma}(x)$ множество невырожденных ребер сети

Γ, инцидентных x. Если γ — произвольное ребро сети, то обозначим через $\partial\gamma$ пару его концевых вершин. Положим $\rho(\{A,B\}) = \rho(B-A)$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка, и $\eta \in T_x\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ — любой вектор. Через $p(\eta)$ будем обозначать субградиент функции ρ в точке x, причем, если η и $x \neq 0$ коллинеарны, то $p(\eta)$ — любой такой ковектор, а если η и $x \neq 0$ линейно независимы, то $p(\eta)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: вектор $p(\eta)$ ортогонален, в смысле евклидова скалярного произведения, радиальной проекции луча $x + t\eta$, $t \geqslant 0$, на сферу Σ. Для произвольного невырожденного ребра $\gamma = [x,y]$ и произвольных векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ положим $p_x(\gamma,\eta_1,\eta_2)$, равным ρ-импульсу $p_{xy}(\eta_1,\eta_2)$, который определяется равенством $p_{xy}(\eta_1,\eta_2) = p_1(\eta_1-\eta_2) = -p_2(\eta_2-\eta_1)$, где $p_i(\eta)$ — субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $n_i = (-1)^i(y-x)/\|y-x\|$. Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Справедлива следующая теорема, доказанная А.О. Ивановым и А.А. Тужилиным [15].

Теорема 1.3. *Пусть $(\mathbb{R}^n,\rho)$ — нормированное пространство. Линейная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Gamma$ слабо экстремальна, если и только если для каждого отображения $\eta\colon V_G \to \mathbb{R}^n$, где $\eta(\partial G) = 0$, следующая сумма по всем приведенным компонентам H_Γ сети Γ неотрицательна:*

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma,\eta) = \sum_{H_\Gamma}\Big\{\sum_{x\in\bar\partial H_\Gamma}\Big\langle\sum_{\gamma\in N_{H_\Gamma}(x),\gamma=[x,y]} p_x\big(\gamma,\eta(x),\eta(y)\big),\eta(x)\Big\rangle + \\ + \sum_{\gamma\in E_{H_\Gamma}}\rho\big(\eta\big|_{\partial\gamma}\big)\Big\} \geqslant 0.$$

Замечание. Из теоремы 1.3 и из линейности сети вытекает, что для проверки слабой экстремальности сети достаточно знать поле деформации только в вершинах сети и рассматривать только линейные деформации, т.е. деформации, при которых каждая точка сети движется прямолинейно и равномерно. Поскольку между полями вдоль сети Γ, равными нулю на границе, и линейными деформациями сети Γ имеется взаимно однозначное соответствие, то в дальнейшем будем отождествлять поля деформации с самими деформациями и называть их просто *деформациями сети.*

Хотя, формально, для проверки экстремальности сети нужно проверить (с помощью теоремы 1.3) слабую экстремальность бесконечного числа сетей — различных типов расщеплений исходной сети, в действительности, эту проверку достаточно провести лишь для конечного числа типов расщепления.

Построим набор представителей, из слабой экстремальности которых вытекает экстремальность сети. Пусть Γ — линейная сеть, H_Γ — некоторая ее приведенная компонента, и $\overline{\Gamma} = \Gamma / H_\Gamma$ — сеть, полученная из Γ факторизацией по H_Γ. Обозначим через $\pi\colon \Gamma \to \overline{\Gamma}$ каноническую проекцию, и пусть $x = \pi(H_\Gamma)$. Прообраз произвольной локальной сети $\overline{\Gamma}_{loc}(x) \subset \overline{\Gamma}$ для $\overline{\Gamma}$ с центром в x при отображении π назовем *сильно локальной сетью приведенной компоненты* H_Γ.

Пусть Γ — произвольная погруженная сеть.

Определение. Тип расщепления Γ' сети Γ назовем *базовым*, если сильно локальная сеть T каждой его приведенной компоненты $H_{\Gamma'}$ является бинарным деревом, т.е. содержит вершины степени 1 или 3. При этом если $H_{\Gamma'}$ соответствует внутренней вершине сети Γ, то все вершины степени 1 дерева T не принадлежат $H_{\Gamma'}$. Если же $H_{\Gamma'}$ соответствует граничной вершине из Γ, то $H_{\Gamma'}$ содержит ровно одну вершину x дерева T степени 1, причем в этом случае $\partial\Gamma' \cap H_{\Gamma'} = \{x\}$.

Отметим, что у каждой погруженной сети Γ имеется лишь конечное (не нулевое) число базовых типов расщепления.

Справедлива следующая теорема, доказанная А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным [15].

Теорема 1.4. *Погруженная сеть Γ экстремальна в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$, если и только если каждый базовый тип расщепления Γ' сети Γ является слабо экстремальной сетью.*

1.4. Критерий локальной минимальности сети на λ-нормированной плоскости

Определение. Нормированная плоскость $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ называется *λ-нормированной плоскостью*, если единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \rho_\lambda(x) = 1\}$ для нормы ρ_λ совпадает с правильным 2λ-угольником, вершины которого — это точки $\mu_i = (\cos\frac{\pi}{\lambda}i, \sin\frac{\pi}{\lambda}i)$, $0 \leqslant i \leqslant 2\lambda - 1$.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная погруженная линейная сеть, и γ — некоторое ребро сети Γ, ориентированное одним из двух возможных способов. Если направление этого ребра приходит во внутреннюю точку стороны $[\mu_i, \mu_{i+1}]$ 2λ-угольника Σ, то *замыканием направления ребра* γ назовем отрезок $[\mu_i, \mu_{i+1}]$, а если направление этого ребра приходит в вершину μ_i 2λ-угольника Σ, то *замыканием направления ребра* γ назовем точку μ_i. В первом случае ребро γ называется *неточечным*, а во втором — *точечным*. Замыкание направления ребра γ обозначим через $\mathrm{fl}(\gamma)$.

Для любых подмножеств A и B из 2λ-угольника Σ обозначим через $\alpha(A, B)$ точную нижнюю грань, а через $\beta(A, B)$ — точную верхнюю грань углов между радиус-векторами точек $x \in A$ и $y \in B$. Если γ_1 и γ_2 — два смежных ребра, то в выражениях $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big)$ и $\beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big)$ под замыканиями $\mathrm{fl}(\gamma_i)$ будем понимать замыкания для ребер γ_i, $i = 1, 2$, ориентированных от их общей вершины.

Приведем полное описание локальной структуры локально минимальных сетей [18].

Теорема 1.5. *Погруженная линейная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с некоторой границей на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ является локально минимальной, если и только если одновременно выполняются следующие условия:*

1) *каждая вершина степени* 1 — *граничная;*
2) *для любых двух смежных ребер γ_i и γ_j выполняется неравенство* $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)\big) \geqslant \dfrac{\pi}{\lambda}\Big[\dfrac{2\lambda - 1}{3}\Big]$;
3) *если γ_1 и γ_2 — ребра, инцидентные внутренней вершине степени* 2, *то* $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) \geqslant \pi - \dfrac{\pi}{\lambda}$;
4) *для любых двух соседних ребер γ_i и γ_j, инцидентных внутренней вершине степени k, $k \geqslant 3$, выполняется неравенство*

$$\beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)\big) \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\Big(\Big[\frac{2\lambda}{3}\Big] + 4 - k\Big).$$

Замечание. Из теоремы 1.5 вытекает, что степень граничной вершины не превосходит 6, а степень внутренней вершины не больше 4. Действительно, при $\lambda \neq 3$ из условия 2) теоремы 1.5 вытекает, что угол между ребрами γ_i и γ_j не меньше $\frac{\pi}{2}$, поэтому при таких λ как степень внутренней, так и граничной вершины не превосходит 4. При $\lambda = 3$ условие 2) теоремы гарантирует, что степень вершины не может быть больше 6, однако условие 4) теоремы ограничивает степень внутренней вершины четверкой.

Замечание. Из условия 2) теоремы 1.5 видно, что вершины степени 4 могут возникнуть только для $\lambda = 2$, 3, 4, 6. При этом, в случаях $\lambda = 2$, 4, 6 направления ребер обязаны приходить в вершины 2λ-угольника Σ и

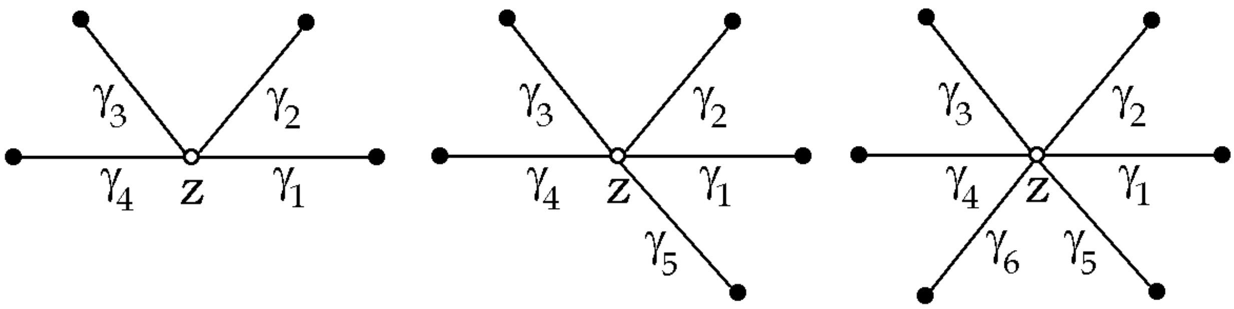


Рис. 1.1. Не локально минимальные сети, $\deg(z) = 4, 5, 6$.

углы между соседними выходящими из этой вершины ребрами должны равняться $\frac{\pi}{2}$. Тем самым, условие 4) не накладывает дополнительных ограничений на локальную структуру таких вершин.

Если же $\lambda = 3$, то ситуация существенно сложнее. Оказывается, можно построить погруженные сети, состоящие из четырех, пяти или шести ребер, инцидентных внутренней вершине, такие, что условия 1), 2) и 3) теоремы выполняются, но сеть не локально минимальна, см. рис. 1.1 (замыкание направления каждого ребра γ_i равно вершине из Σ, и все углы, за исключением одного для случаев $\deg(z) = 4$, 5, между соседними ребрами равны $\frac{\pi}{3}$). Тем самым, для внутренних вершин степени 4, 5, 6 условие 4) накладывает существенные ограничения только для $\lambda = 3$. Иными словами, при $\lambda \neq 3$ условие 4) для вершин степени 4 является избыточным.

Далее, для внутренних вершин степени 3 условие 4) избыточно тогда и только тогда, когда $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$. Если же $2\lambda \not\equiv 1 \pmod 3$, то при каждом таком λ существуют погруженные сети, состоящие из трех ребер, инцидентных внутренней вершине, такие, что условия 1), 2) и 3) теоремы выполняются, но сеть не локально минимальна, см. рис. 1.2 (замыкание направления каждого ребра γ_i равно вершине из Σ, а $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_2), \mathrm{fl}(\gamma_3)\big) = \alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_3)\big) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{\lambda}$ для $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$, и $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3\lambda}$, $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_2), \mathrm{fl}(\gamma_3)\big) = \alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_3)\big) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3\lambda}$ для $2\lambda \equiv 2 \pmod 3$). Таким образом, при $\lambda \neq 3$ условие 4) теоремы 1.5 можно заменить условием 4′):

4′) для любых двух соседних ребер γ_i и γ_j, инцидентных внутренней вершине степени не меньше 3, выполняется неравенство $\beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)\big) \leqslant \dfrac{\pi}{\lambda}\big([\dfrac{2\lambda}{3}] + 1\big)$.

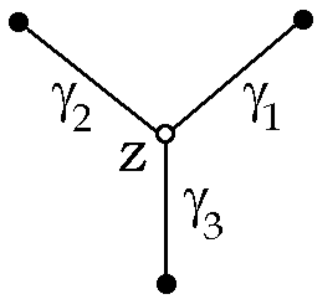


Рис. 1.2. Не локально минимальная сеть, $\deg(z) = 3$.

Аналогичные результаты для минимальных деревьев Штейнера были независимо получены в [32]. Для формулировки этих результатов нам понадобятся некоторые понятия.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная вложенная *сеть-звезда*, т.е. сеть с не более чем одной вершиной степени больше 1, и все вершины степени 1 являются граничными. Без ограничения общности будем предполагать, что вершина, имеющая степень больше 1, существует и находится в начале координат, и что степень внутренней вершины больше 2.

Определение. Сеть-звезда Γ с вершиной x степени больше 1 называется *стреловидной*, если существует прямая L, проходящая через x, такая, что внутренности всех ребер сети Γ лежат в одной и той же открытой полуплоскости, ограниченной прямой L.

Напомним, что $\lceil a \rceil$ обозначает наименьшее целое число, большее или равное a, а $\lfloor a \rfloor = [a]$ — наибольшее целое число, не превосходящее a.

Теорема 1.6. *Сеть-звезда $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с некоторой границей на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ является кратчайшей, если и только если степень вершины x не больше 6 и одновременно выполняются следующие условия:*

1) *угол между двумя соседними ребрами содержит по крайней мере $\lceil \frac{2\lambda}{3} \rceil - 1$ последовательных целых сторон единичной окружности Σ;*

2) *для внутренней вершины степени 3 сеть Γ не является стреловидной, и, кроме того, угол между двумя соседними ребрами покрывается некоторыми $\lfloor \frac{2\lambda}{3} \rfloor + 1$ последовательными сторонами единичной окружности Σ;*

3) *для внутренней вершины степени 4 углы разбиваются на две пары так, чтобы сумма углов в каждой паре равнялась π;*

4) вершины степени 5 *и* 6 *— граничные.*

Замечание. На самом деле, для сетей, не содержащих внутренних вершин степени 2, теоремы 1.5 и 1.6 равносильны. Действительно, для таких сетей условие 3) теоремы 1.5 является лишним, условие 1) теоремы 1.5 следует из определения сети-звезды, условия 2) теоремы 1.5 и 1) теоремы 1.6 равносильны, а условия 2), 3), 4) теоремы 1.6 являются просто переформулировкой условия 4) теоремы 1.5 в отдельности для каждой возможной степени внутренней вершины.

Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные смежные ребра сети Γ, $i = 1,\ 2$. Будем говорить, что *пара* (γ_1, γ_2) *имеет погрешность* k, и будем писать $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = k$, если

$$\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) = \frac{2\pi}{3} - \frac{k\pi}{3\lambda}.$$

Лемма 1.1. *Погрешность симметрична, т.е.* $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = \mathrm{fall}(\gamma_2, \gamma_1)$, *является целым числом и* $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) \geqslant -\lambda$.

Доказательство. Проверим только, что для произвольных смежных ребер γ_i, $i = 1,\ 2$, сети Γ погрешность $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = k \in \mathbb{Z}$. Действительно, $\frac{2\pi}{3} - \frac{k\pi}{3\lambda} = \frac{l\pi}{\lambda}$ для некоторого l. Следовательно, $k = 2\lambda - 3l$. Лемма доказана. ■

Приведем критерий локальной минимальности, используя понятие погрешности. Этот критерий является небольшой модификацией теоремы 1.5.

Теорема 1.7. *Погруженная линейная сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, *не содержащая внутренних вершин степени 2, является локально минимальной на* λ-*нормированной плоскости, где* $\lambda \neq 2,\ 3,\ 4,\ 6$, *если и только если одновременно выполняются следующие условия:*

1) *каждая вершина степени* 1 *— граничная;*

2) *для любых двух смежных ребер* γ_i *и* γ_j, *инцидентных внутренней вершине, выполняется неравенство* $|\,\mathrm{fall}(\gamma_i, \gamma_j)| \leqslant 3$;

3) *для любых двух смежных ребер* γ_i *и* γ_j, *инцидентных граничной вершине, выполняется неравенство* $\mathrm{fall}(\gamma_i, \gamma_j) \leqslant 3$.

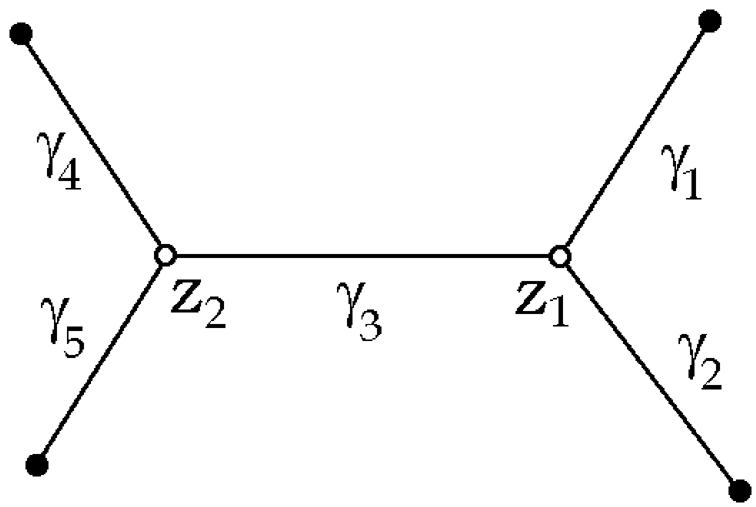


Рис. 1.3. Локально минимальная не экстремальная сеть на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 1(\mathrm{mod}3)$ и $\lambda \geqslant 5$.

По теореме 1.2, каждая экстремальная сеть на λ-нормированной плоскости является локально минимальной. Заметим, что обратное утверждение неверно, т.е. не каждая локально минимальная погруженная сеть на λ-нормированной плоскости является экстремальной. На рис. 1.3 изображена локально минимальная сеть на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 5$, все ребра которой точечны, с внутренними вершинами z_1 и z_2, где $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_3) = -2$ и $\mathrm{fall}(\gamma_3, \gamma_4) = -2$. При этом сеть в целом не является экстремальной.

Глава 2.

Существенные сети

Данная глава посвящена сведению задачи об экстремальности произвольного погруженного дерева $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости, где $\lambda \neq 2$, 3, 4, 6, (далее мы будем рассматривать только такие λ, если не оговорено противное) к задаче об экстремальности некоторого набора поддеревьев дерева Γ. Эти поддеревья имеют достаточно простую структуру, и мы их будем называть *существенными сетями.* Чтобы определить существенные сети, нам понадобится ряд операций, к описанию которых мы сейчас и переходим.

2.1. Линеаризация сети

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная погруженная сеть.

Определение. Максимальный путь в Γ, циклический или нет, все внутренние вершины которого имеют в Γ степень 2 и не являются граничными вершинами для Γ, назовем *нитью.*

Определение. Кусочно-регулярную кривую назовем *монотонной*, если направления всех векторов скорости этой кривой приходят на одну и ту же сторону 2λ-угольника Σ.

Утверждение 2.1. *Каждая нить экстремальной погруженной сети на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ является монотонной кривой, и ее длина равна длине прямолинейного отрезка, который соединяет концы этой нити.*

Доказательство. Достаточно показать, что каждая нить экстремальной сети на λ-нормированной плоскости является монотонной кривой.

Рассмотрим произвольную нить экстремальной сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, состоящую из последовательности ребер $\gamma_1 = [x_1, x_2], \ldots, \gamma_k = [x_k, x_{k+1}]$, и ориентируем эту нить от x_1.

Допустим, что эта нить не является монотонной кривой. Рассмотрим первое l такое, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ — не монотонный путь. Без ограничения общности будем предполагать, что направления ребер $\gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}$ приходят на сторону $[P_0, P_1]$ из 2λ-угольника Σ.

Так как сеть экстремальна, то согласно теореме 1.5 имеется ровно две возможности:

1) или направление ребра $\gamma_l = [x_l, x_{l+1}]$ приходит на сторону $(P_1, P_2]$;

2) или направление ребра $\gamma_l = [x_l, x_{l+1}]$ приходит на сторону $[P_{2\lambda-1}, P_0)$.

Рассмотрим первую возможность (вторая рассматривается аналогично).

Пусть $\gamma_q = [x_q, x_{q+1}]$, $q < l$, — это первое ребро, направление которого приходит на сторону $[P_0, P_1)$.

Рассмотрим линейную деформацию сети Γ, при которой вершины $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_l$ движутся со скоростью $\eta = \left(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda}), \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda})\right)$, а остальные остаются на месте. По теореме 1.3,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\,(\Gamma, \eta) = \big\langle p_{x_{q+1}}(\gamma_q, \eta, 0) + p_{x_{q+1}}(\gamma_{q+1}, \eta, \eta) + \ldots \\ \ldots + p_{x_l}(\gamma_{l-1}, \eta, \eta) + p_{x_l}(\gamma_l, \eta, 0), \eta\big\rangle = \\ = \big\langle p_{x_{q+1}}(\gamma_q, \eta, 0) + p_{x_l}(\gamma_l, \eta, 0), \eta\big\rangle = -2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\lambda} < 0\end{aligned}$$

для любого λ, поэтому сеть Γ не является экстремальной. Это противоречие завершает доказательство утверждения. ■

Определение. Сеть Γ_l будем называть *линеаризацией сети* Γ, если она получена заменой всех нитей сети Γ на прямолинейные отрезки.

Из утверждения 2.1 получаем

Утверждение 2.2. *Погруженная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ является экстремальной сетью на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ тогда и только тогда, когда все ее нити — монотонные кривые, и линеаризация Γ_l сети Γ является экстремальной сетью на λ-нормированной плоскости.*

Из утверждения 2.2 следует, что для описания структуры экстремальных сетей достаточно ограничиться изучением сетей, которые не содержат нитей.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что рассматриваемая сеть не содержит нитей.

2.2. Разрезания сети, сохраняющие экстремальность

2.2.1. Разрезания по граничным вершинам

Рассмотрим некоторую экстремальную сеть. Разрежем ее по любой граничной вершине степени больше 1. Ясно, что каждая из сетей, полученных в результате этого разрезания, экстремальна. Возникает вопрос: *можно ли свести проверку экстремальности сети к экстремальности сетей, полученных из нее разрезанием по некоторой граничной вершине.* Оказывается, что в общем случае это неверно, т.е. существуют не экстремальные сети, при разрезании которых по граничной вершине степени больше 1 получаются экстремальные сети.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\eta = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $a \geqslant 0$, — произвольная точка λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, и направление вектора η приходит на полуинтервал $[P_i, P_{i+1})$. Тогда $\rho_\lambda(\eta) = a\dfrac{\cos\bigl(\varphi - \frac{\pi}{\lambda}(i+\frac{1}{2})\bigr)}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$.*

Лемма 2.2. *Пусть $\xi = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\bigl(\cos\frac{\pi}{\lambda}(i-\frac{1}{2}), \sin\frac{\pi}{\lambda}(i-\frac{1}{2})\bigr)$, где $0 \leqslant i \leqslant 2\lambda - 1$, $i \in \mathbb{Z}$, — ковектор на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$. Тогда для любого вектора η на λ-нормированной плоскости справедливо следующее неравенство: $\langle\xi, \eta\rangle + \rho_\lambda(\eta) \geqslant 0$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $i = 0$. Тогда $\xi = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\bigl(\cos\frac{\pi}{2\lambda}, -\sin\frac{\pi}{2\lambda}\bigr)$. Пусть $\eta = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$ и $a \geqslant 0$.

1) Если $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi - \frac{\pi}{\lambda}$, то $\langle\xi, \eta\rangle \geqslant -a$. Из леммы 2.1 вытекает, что $\rho_\lambda(\eta) \geqslant a$. Следовательно, в этом случае неравенство $\langle\xi, \eta\rangle + \rho_\lambda(\eta) \geqslant 0$ имеет место.

2) Если $\pi - \frac{\pi}{\lambda} \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то $\langle\xi, \eta\rangle = a\dfrac{\cos(\varphi + \frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$. Снова применяя лемму 2.1, получаем, что $\rho_\lambda(\eta) = a\dfrac{\cos(\varphi - \frac{\pi}{\lambda}(\lambda - 1 + \frac{1}{2}))}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} = -a\dfrac{\cos(\varphi + \frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$. Следовательно, в этом случае имеет место равенство $\langle\xi, \eta\rangle + \rho_\lambda(\eta) = 0$.

Лемма доказана. ■

Лемма 2.3. *Пусть $\eta \in \mathbb{R}^2$ — произвольная ненулевая точка λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, и $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где направление вектора η_1 приходит в вершину 2λ-угольника Σ, а угол между η_1 и η_2 равен $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$ или не больше $\frac{\pi}{2}$. Тогда справедливо следующее неравенство: $\rho_\lambda(\eta) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Если угол между η_1 и η_2 не больше $\frac{\pi}{2}$, то $\rho_\lambda(\eta) \geqslant \|\eta\| \geqslant \|\eta_1\| = \rho_\lambda(\eta_1)$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Следовательно, в этом случае неравенство $\rho_\lambda(\eta) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$ имеет место.

2) Пусть угол между η_1 и η_2 равен $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$, и пусть ψ — угол между η_2 и η. Из леммы 2.1 вытекает, что $\rho_\lambda(\eta_1) = \|\eta_1\| = \|\eta\|\dfrac{\sin\psi}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$.

   Если $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda}$, то $\rho_\lambda(\eta) \geqslant \|\eta\| \geqslant \|\eta\|\dfrac{\sin\psi}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} = \rho_\lambda(\eta_1)$.

   Если $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$, то $\rho_\lambda(\eta) = \|\eta\|\dfrac{\sin\psi}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} = \rho_\lambda(\eta_1)$.

   Справедливость неравенства $\rho_\lambda(\eta) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$ в этом случае тоже доказана.

Лемма доказана. ■

Лемма 2.4. *Пусть $\eta_1 = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $a \geqslant 0$, $\frac{\pi}{\lambda}i \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{\lambda}(i+1)$, $0 \leqslant i \leqslant 2\lambda - 1$, — произвольный вектор на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, $\lambda \geqslant 3$. Тогда для любого вектора $\eta_2 = b(\cos\psi, \sin\psi)$, $b \geqslant 0$, такого, что $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi - \frac{\pi}{\lambda}i \leqslant \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$, справедливо неравенство $\rho_\lambda(\eta_1 - \eta_2) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$.*

Доказательство. Достаточно проверить неравенство $\rho_\lambda(\eta_1 - \eta_2) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$ для ненулевых векторов η_1 и η_2. Без ограничения общности будем считать, что $i = \lambda$. Пусть $\eta_2 - \eta_1 = c(\cos\chi, \sin\chi)$, $c > 0$, $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} < \chi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$. Из леммы 2.1 следует, что $\rho_\lambda(\eta_1) = -a\dfrac{\cos(\varphi - \frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$.

Рассмотрим три случая в зависимости от расположения угла χ.

1) Пусть $\frac{\pi}{\lambda} \leqslant \chi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$. В этом случае $\rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) \geqslant \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1)$, где $\eta_2' = b'\big(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda})\big)$ и $b' \geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2' - \eta_1 = c'(\cos\frac{\pi}{\lambda}, \sin\frac{\pi}{\lambda})$ для некоторого $c' > 0$.

2) Пусть $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} < \chi \leqslant 0$. В этом случае $\rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) \geqslant \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1)$, где $\eta_2' = b'\big(\cos(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda})\big)$ и $b' \geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2' - \eta_1 = c'(1, 0)$ для некоторого $c' > 0$.

3) Пусть $0 \leqslant \chi \leqslant \frac{\pi}{\lambda}$. В этом случае $\rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) \geqslant \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1)$, где $\eta_2' = b'\big(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda})\big)$ и $b' \in \mathbb{R}$ выбрано так, чтобы $\eta_2' - \eta_1 = c'(\cos\chi, \sin\chi)$ для некоторого $c' > 0$.

Из леммы 2.1 во всех трех случаях получаем, что $\rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) = \rho_\lambda(\eta_1)$. Следовательно, неравенство $\rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$ имеет место. Лемма доказана. ■

Лемма 2.5. *Пусть* $\eta_1 = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $a \geqslant 0$, $\eta_2 = b(\cos\psi, \sin\psi)$, $b \geqslant 0$, *— два вектора на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ такие, что*

$$\frac{\pi}{\lambda}i \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{\lambda}(i+1), \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi - \frac{\pi}{\lambda}i \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}, \quad \lambda \geqslant 4 \tag{1}$$

или

$$\frac{\pi}{\lambda}(i+1) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{\lambda}(i+2), \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi - \frac{\pi}{\lambda}i \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2\lambda}, \quad \lambda \geqslant 7. \tag{2}$$

Тогда для ковектора $\xi = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\big(\cos\frac{\pi}{\lambda}(i - \frac{1}{2}), \sin\frac{\pi}{\lambda}(i - \frac{1}{2})\big)$ *справедливо неравенство* $\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_1 - \eta_2) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$.

Доказательство. Достаточно проверить неравенство

$$\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_1 - \eta_2) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1) \tag{$*$}$$

для ненулевых векторов η_1 и η_2. Без ограничения общности будем считать, что $i = \lambda$. Пусть $\eta_2 - \eta_1 = c(\cos\chi, \sin\chi)$, где $c > 0$ и $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} < \chi < \frac{\pi}{\lambda}$ при ограничениях (1) из настоящей леммы, $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} < \chi < \frac{2\pi}{\lambda}$ при ограничениях (2). Положим $\beta = \varphi - \pi$ для ограничений (1) и $\beta = \varphi - (\pi + \frac{\pi}{\lambda})$ для (2). Из леммы 2.1 вытекает, что $\rho_\lambda(\eta_1) = a\dfrac{\cos(\beta - \frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$.

Рассмотрим четыре случая в зависимости от расположения угла χ.

1) Пусть $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} < \chi \leqslant -\frac{\pi}{2\lambda}$. Рассмотрим $\eta_2' = b'\big(\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda})\big)$, где $b' \geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2' - \eta_1 = c'(\cos\chi, \sin\chi)$ для некоторого $c' > 0$.

   Имеем

$$\begin{gathered}\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) = \\ = \langle \xi, \eta_2'\rangle + \langle \xi, \eta_2 - \eta_2'\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_2') = \\ = \langle \xi, \eta_2 - \eta_2'\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_2') \geqslant \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1)\end{gathered}$$

   (последнее неравенство следует из леммы 2.2).

Далее, $\|\eta_2' - \eta_1\| \geqslant \|\eta_2'' - \eta_1\|$ и $\|\eta_2\| \geqslant \|\eta_2''\|$, где $\eta_2'' = b''\bigl(\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda})\bigr)$ и $b'' \geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2'' - \eta_1 = c''(\cos\frac{\pi}{2\lambda}, -\sin\frac{\pi}{2\lambda})$ для некоторого $c'' > 0$.

При ограничениях (1) леммы получаем

$$\rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) \geqslant \|\eta_2\| + \|\eta_2' - \eta_1\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\eta_2''\| + \|\eta_2'' - \eta_1\| = a\Bigl(\sin\bigl(\beta + \frac{\pi}{2\lambda}\bigr) + \cos\bigl(\beta + \frac{\pi}{2\lambda}\bigr)\Bigr) \geqslant \frac{a}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} \geqslant \rho_\lambda(\eta_1).$$

При ограничениях (2) получаем

$$\rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) \geqslant \|\eta_2\| + \|\eta_2' - \eta_1\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\eta_2''\| + \|\eta_2'' - \eta_1\| = a\Bigl(\sin\bigl(\beta + \frac{3\pi}{2\lambda}\bigr) + \cos\bigl(\beta + \frac{3\pi}{2\lambda}\bigr)\Bigr) \geqslant \frac{a}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$$

при $\lambda \geqslant 7$.

Следовательно, неравенство (*) в предположениях случая 1) имеет место.

2) Пусть $-\frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \chi \leqslant 0$. Рассмотрим $\eta_2' = b'\bigl(\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda})\bigr)$, где $b' \geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2' - \eta_1 = c'(\cos\chi, \sin\chi)$ для некоторого $c' > 0$.

Имеем

$$\langle \xi, \eta_2 \rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) =$$
$$= \langle \xi, \eta_2' \rangle + \langle \xi, \eta_2 - \eta_2' \rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_2') =$$
$$= \langle \xi, \eta_2 - \eta_2' \rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_2') \geqslant \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1)$$

(последнее неравенство следует из леммы 2.2).

Из леммы 2.1 вытекает, что $\rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) = a\dfrac{\cos(\beta + \frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$ при ограничениях (1) леммы и $\rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) = a\dfrac{\cos(\beta + \frac{3\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$ при ограничениях (2).

Далее, $\|\eta_2\| \geqslant \|\eta_2''\|$, где $\eta_2'' = b''\bigl(\cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}\bigr)$ и $b'' \geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2'' - \eta_1 = c''(1, 0)$ для некоторого $c'' > 0$.

При ограничениях (1) леммы получаем

$$
\begin{aligned}
\rho_\lambda(\eta_2)+\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_1) &\geqslant \|\eta_2\|+\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_1)\geqslant\\
\geqslant \|\eta_2''\|+\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_1) &= a\Big(\sin\beta+\frac{\cos(\beta+\frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\Big)=\\
&=\rho_\lambda(\eta_1)+a\sin\beta\big(1-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\lambda}\big)\geqslant\rho_\lambda(\eta_1)
\end{aligned}
$$

при $\lambda\geqslant 4$.

При ограничениях (2) получаем

$$
\begin{aligned}
&\rho_\lambda(\eta_2)+\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_1)\geqslant\|\eta_2\|+\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_1)\geqslant\\
&\geqslant\|\eta_2''\|+\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_1)=a\Big(\sin\big(\beta+\frac{\pi}{\lambda}\big)+\frac{\cos\big(\beta+\frac{3\pi}{2\lambda}\big)}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\Big)=\\
&=\rho_\lambda(\eta_1)+a\Big(\sin\big(\beta+\frac{\pi}{\lambda}\big)-4\sin\frac{\pi}{2\lambda}\sin\big(\beta+\frac{\pi}{2\lambda}\big)\Big)\geqslant\rho_\lambda(\eta_1)
\end{aligned}
$$

при $\lambda\geqslant 7$.

Следовательно, неравенство $(*)$ в предположениях случая 2) имеет место.

3) Пусть $0\leqslant\chi<\frac{\pi}{\lambda}$. Рассмотрим $\eta_2'=b'(\cos\psi',\sin\psi')$, где $\psi'=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$ для ограничений (1) леммы и $\psi'=\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2\lambda}$ для ограничений (2), и $b'\geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2'-\eta_1=c'(\cos\chi,\sin\chi)$ для некоторого $c'>0$.

Для ограничений (1) имеем

$$
\begin{aligned}
&\langle\xi,\eta_2\rangle+\rho_\lambda(\eta_2)+\rho_\lambda(\eta_2-\eta_1)=\\
&=\langle\xi,\eta_2\rangle+\rho_\lambda(\eta_2)+\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_1)-\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_2)\geqslant\\
&\geqslant\langle\xi,\eta_2\rangle+\rho_\lambda(\eta_2)-\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_2)+\rho_\lambda(\eta_1)
\end{aligned}
$$

(последнее неравенство следует из леммы 2.4). Осталось проверить неравенство $\langle\xi,\eta_2\rangle+\rho_\lambda(\eta_2)-\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_2)\geqslant 0$.

Из леммы 2.1 вытекает, что $\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_2)=-b\dfrac{\cos(\psi-\frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$ и $\rho_\lambda(\eta_2)\geqslant b$.

Таким образом, получаем

$$
\begin{aligned}
&\langle\xi,\eta_2\rangle+\rho_\lambda(\eta_2)-\rho_\lambda(\eta_2'-\eta_2)\geqslant\\
&\geqslant -b\frac{\cos(\psi+\frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}+b+b\frac{\cos(\psi-\frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\geqslant b\big(1-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\lambda}\big)\geqslant 0
\end{aligned}
$$

при $\lambda \geqslant 4$.

Поскольку $\rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) = \rho_\lambda(\eta_1)\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2\lambda} - \chi)}{\cos(\frac{3\pi}{2\lambda} - \chi)} \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$, то для ограничений (2) имеем

$$\begin{gathered}\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) = \\ = \langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) \geqslant \\ \geqslant \langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_1) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2).\end{gathered}$$

Осталось проверить неравенство $\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) \geqslant 0$.

Из леммы 2.1 вытекает, что

$$\begin{gathered}\rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) = -b\frac{\cos(\psi - \frac{3\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\frac{\cos(\frac{\pi}{2\lambda} - \chi)}{\cos(\frac{3\pi}{2\lambda} - \chi)} \leqslant -b\frac{\cos(\psi - \frac{3\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{3\pi}{2\lambda}}, \\ \rho_\lambda(\eta_2) \geqslant b.\end{gathered}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{gathered}\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) \geqslant -b\frac{\cos(\psi + \frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} + \\ + b + b\frac{\cos(\psi - \frac{3\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{3\pi}{2\lambda}} \geqslant b\Big(1 - \frac{\sin\frac{2\pi}{\lambda}}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}\cos\frac{3\pi}{2\lambda}}\Big) \geqslant 0\end{gathered}$$

при $\lambda \geqslant 8$.

При $\lambda = 7$ получаем, что $\rho_\lambda(\eta_2) = -b\dfrac{\sin\psi}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$, если $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$, и $\rho_\lambda(\eta_2) = -b\dfrac{\sin(\psi - \frac{\pi}{\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$, если $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2\lambda}$. Аналогично проверяется справедливость неравенства $\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) \geqslant 0$ и при $\lambda = 7$.

Следовательно, неравенство $(*)$ в предположениях случая 3) имеет место.

4) Пусть $\frac{\pi}{\lambda} \leqslant \chi < \frac{2\pi}{\lambda}$ (это может иметь место только при ограничениях (2)). Рассмотрим $\eta_2' = b'\big(\cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2\lambda}), \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2\lambda})\big)$, где $b' \geqslant 0$ выбрано так, чтобы $\eta_2' - \eta_1 = c'(\cos\chi, \sin\chi)$ для некоторого $c' > 0$.

Имеем

$$\begin{gathered}\langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2 - \eta_1) = \\ = \langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_1) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) \geqslant \\ \geqslant \langle \xi, \eta_2\rangle + \rho_\lambda(\eta_2) + \rho_\lambda(\eta_1) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2)\end{gathered}$$

(последнее неравенство следует из леммы 2.4). Осталось проверить неравенство $\langle \xi, \eta_2 \rangle + \rho_\lambda(\eta_2) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) \geqslant 0$.

Из леммы 2.1 вытекает, что $\rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) = -b\dfrac{\cos(\psi - \frac{3\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$ и $\rho_\lambda(\eta_2) \geqslant b$.

Имеем

$$\langle \xi, \eta_2 \rangle + \rho_\lambda(\eta_2) - \rho_\lambda(\eta_2' - \eta_2) \geqslant$$
$$\geqslant -b\frac{\cos(\psi + \frac{\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} + b + b\frac{\cos(\psi - \frac{3\pi}{2\lambda})}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} \geqslant b\Big(1 - 4\sin\frac{\pi}{2\lambda}\Big) \geqslant 0$$

при $\lambda \geqslant 7$.

Следовательно, неравенство $(*)$ в предположениях случая 4) имеет место.

Лемма доказана. ■

Утверждение 2.3. *Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное погруженное локально минимальное дерево на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, и z — его граничная вершина степени 2, инцидентная ребрам γ_i, $i = 1, 2$, такая, что $\beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) \geqslant \frac{\pi}{\lambda}\Big(\big[\frac{2\lambda - 1}{3}\big] + 2\Big)$. Тогда дерево Γ экстремально, если и только если экстремальны все поддеревья в Γ, полученные из Γ всеми возможными разрезаниями по z.*

Доказательство. *Необходимость* следует из утверждения 1.3.

Достаточность. Для граничной вершины степени 2 существует всего одно разрезание, которое также является и 1-разрезанием. Обозначим через $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, максимальные компоненты этого разрезания, и предположим, что вершина $z = \{\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^2\}$ распалась на две вершины $z' = \{\Gamma_1\colon v' \to \mathbb{R}^2\}$ и $z'' = \{\Gamma_2\colon v'' \to \mathbb{R}^2\}$ степени 1. Мы докажем, что сеть Γ экстремальна в предположении, что каждая максимальная компонента Γ_i экстремальна.

Пусть сети $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$ экстремальны. Экстремальность сетей Γ_i равносильна условию, что каждый базовый тип расщепления $\Gamma_i^j\colon G_i^j \to \mathbb{R}^2$ сети Γ_i является слабо экстремальной сетью, последнее, по теореме 1.3, эквивалентно условию $\mathfrak{D}\,(\Gamma_i^j, \eta_i^j) \geqslant 0$ для каждой деформации $\eta_i^j\colon V_{G_i^j} \to \mathbb{R}^2$. Из теоремы 1.4 следует, что для доказательства экстремальности сети Γ достаточно рассмотреть все ее базовые типы расщепления $\Gamma^j\colon G^j \to \mathbb{R}^2$ и доказать их слабую экстремальность, т.е. проверить неравенство $\mathfrak{D}\,(\Gamma^j, \eta^j) \geqslant 0$ для каждой деформации $\eta^j\colon V_{G^j} \to \mathbb{R}^2$.

Любой базовый тип расщепления Γ^j сети Γ получается из некоторых базовых типов расщепления Γ_i^j сетей Γ_i путем отождествления двух граничных вершин v' и v'' в одну граничную вершину v и затем расщепления этой вершины. Эта вершина дает новую вырожденную компоненту, образ которой при отображении Γ^j совпадает с z и которая представляет собой ребро u_1u_2, причем вершина u_1 — граничная, а вершина u_2 — внутренняя. При этом $\gamma_1^j = \gamma_1 \circ \pi^j = \{\Gamma^j\colon [u_2, v_1] \to \mathbb{R}^2\}$ и $\gamma_2^j = \gamma_2 \circ \pi^j = \{\Gamma^j\colon [u_2, v_2] \to \mathbb{R}^2\}$ — невырожденные ребра сети Γ^j , где $\pi^j\colon G^j \to G$ — слабая проекция.

Пусть Γ^j — произвольный базовый тип расщепления сети Γ. Тогда имеем

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma^j, \eta^j) = \sum_{i=1}^{2} \mathcal{D}(\Gamma_i^j, \eta^j) + \Big\langle \sum_{m=1}^{2} p_{u_2}\big(\gamma_m^j, \eta^j(u_2), \eta^j(v_m)\big), \eta^j(u_2)\Big\rangle +$$
$$+ \sum_{m=1}^{2} \Big\langle p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), \eta^j(u_2)\big) - p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), 0\big), \eta^j(v_m)\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta^j(u_2)\big).$$

Неравенство $\sum_{i=1}^{2} \mathfrak{D}\,(\Gamma_i^j, \eta) \geqslant 0$ верно, так как сети Γ_i являются экстремальными. Осталось доказать справедливость неравенства

$$\sum_{m=1}^{2} \Big\langle p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), \eta^j(u_2)\big) - p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), 0\big), \eta^j(v_m)\Big\rangle +$$
$$+\Big\langle \sum_{m=1}^{2} p_{u_2}\big(\gamma_m^j, \eta^j(u_2), \eta^j(v_m)\big), \eta^j(u_2)\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta^j(u_2)\big) \geqslant 0.$$

Используя равенство $p_{u_2}\big(\gamma_m^j, \eta^j(u_2), \eta^j(v_m)\big) = -p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), \eta^j(u_2)\big)$, запишем последнее неравенство в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^{2} \Big\langle p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), \eta^j(u_2)\big) - p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), 0\big), \eta^j(v_m) - \eta^j(u_2)\Big\rangle +$$
$$+\Big\langle -\sum_{m=1}^{2} p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), 0\big), \eta^j(u_2)\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta^j(u_2)\big) \geqslant 0.$$

Первая сумма последнего неравенства больше или равна нулю всегда, а неравенство

$$\Big\langle -\sum_{m=1}^{2} p_{v_m}\big(\gamma_m^j, \eta^j(v_m), 0\big), \eta^j(u_2)\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta^j(u_2)\big) \geqslant 0$$

верно, так как $\beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) \geqslant \dfrac{\pi}{\lambda}\Big(\big[\dfrac{2\lambda-1}{3}\big]+2\Big)$. Утверждение доказано. ■

Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве утверждения 2.3, влекут

Следствие 2.1. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольное погруженное локально минимальное дерево на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$*, и* z *— его граничная вершина степени* 2*, инцидентная точечным ребрам* γ_i*,* $i = 1, 2$*, такая, что* $\beta\bigl(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\bigr) = \dfrac{\pi}{\lambda}\Bigl(\bigl[\dfrac{2\lambda-1}{3}\bigr]+1\Bigr)$*. Предположим, что одно из ребер* γ_i *является* 1*-граничным. Тогда дерево* Γ *экстремально, если и только если экстремальны все поддеревья в* Γ*, полученные из* Γ *всеми возможными разрезаниями по* z*.*

Утверждение 2.4. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольное погруженное локально минимальное дерево на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$*, и* z *— его граничная вершина степени* 3*. Тогда дерево* Γ *экстремально, если и только если экстремальны все поддеревья в* Γ*, полученные из* Γ *всеми возможными разрезаниями по* z*.*

Доказательство. Докажем *достаточность.* Пусть вершина $z = \{\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^2\}$ инцидентна ребрам $\gamma_i = \{\Gamma\colon [v, v_i] \to \mathbb{R}^2\}$, $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим только случай, когда все ребра γ_i являются точечными (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Для граничной вершины степени 3 существует ровно четыре разрезания, из которых три являются 1-разрезаниями. Обозначим через $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, сети, полученные разрезанием вершины z на три вершины $z_i' = \{\Gamma_i\colon v_i' \to \mathbb{R}^2\}$ степени один, и предположим, что z_i' инцидентна ребру $\gamma_i \circ \pi_i$, где $\pi_i\colon G_i \to G$ — слабая проекция. Обозначим максимальные компоненты 1-разрезаний через $\Gamma_{3+i}\colon G_{3+i} \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, где Γ_{3+i} — максимальная компонента такого 1-разрезания, при котором вершина z распадается на две граничные вершины $z_i' = \{\Gamma_i\colon v_i' \to \mathbb{R}^2\}$ и $z_i'' = \{\Gamma_{3+i}\colon v_i'' \to \mathbb{R}^2\}$. Заметим, что при 1-разрезании сеть распадается на Γ_{3+i} и Γ_i, а при разрезании сети Γ_{3+i} по граничной вершине z_i'' степени 2 получаются две сети Γ_j, Γ_k, где j, $k \ne i$. Мы докажем, что сеть Γ экстремальна в предположении, что каждая максимальная компонента Γ_{3+i} экстремальна.

Пусть максимальные компоненты Γ_{3+i} экстремальны. Из экстремальности Γ_{3+i} вытекает экстремальность сетей Γ_i, $i = 1, 2, 3$. Экстремальность сетей Γ_i, $i = 1, \dots, 6$, равносильна условию, что каждый базовый тип расщепления $\Gamma_i^j\colon G_i^j \to \mathbb{R}^2$ сети Γ_i является слабо экстремальной сетью, последнее, по теореме 1.3, равносильно условию $\mathfrak{D}\,(\Gamma_i^j, \eta_i^j) \geqslant 0$ для каждой деформации $\eta_i^j\colon V_{G_i^j} \to \mathbb{R}^2$. Из теоремы 1.4 следует, что для доказательства экстремальности сети Γ достаточно рассмотреть все ее базовые типы расщепления $\Gamma^j\colon G^j \to \mathbb{R}^2$ и доказать их слабую экстремальность, т.е. проверить неравенство

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma^j, \eta^j) \geqslant 0 \tag{$*$}$$

для каждой деформации $\eta^j\colon V_{G^j} \to \mathbb{R}^2$.

Любой базовый тип расщепления Γ^j сети Γ получается из базовых типов расщеплений Γ_i^j сетей Γ_i, $i = 1,\ 2,\ 3$, путем отождествления трех граничных вершин v_i' в одну граничную вершину v и затем расщепления этой вершины. Эта вершина дает новую вырожденную компоненту, образ которой при отображении Γ^j совпадает с z и которая представляет собой путь u_1u_2, u_2u_3, причем вершина u_3 граничная. Существуют три базовых типа расщепления Γ^j сети Γ при фиксированных Γ_i^j (т.е. три варианта выбора пути u_1u_2, u_2u_3). Обозначим через $\Gamma_{3+i}^j\colon G_{3+i}^j \to \mathbb{R}^2$ базовый тип расщепления сети Γ_{3+i}, который однозначно получается из Γ_k^j и Γ_l^j, k, $l \neq i$, путем соединения двух граничных вершин v_k' и v_l' в одну граничную вершину v_i'' и затем расщепления этой вершины. Эта вершина дает новую вырожденную компоненту, образ которой при отображении Γ_{3+i}^j совпадает с z_i'' и которая представляет собой ребро u_1u_3. Для простоты изложения будем считать, что вершина u_1 инцидентна ребрам $\gamma_2 \circ \pi^j$ и $\gamma_3 \circ \pi^j$, вершина u_2 инцидентна ребру $\gamma_1 \circ \pi^j$, где $\pi^j\colon G^j \to G$ — слабая проекция. Обозначим ребра $\gamma_i \circ \pi^j$ через γ_i, $i = 1,\ 2,\ 3$. Без ограничения общности будем предполагать, что ребро γ_1 имеет точечное направление $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а ребро γ_2 имеет такое точечное направление, что направление $\eta_2 + \eta_3$ равно $(\cos\beta, \sin\beta)$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$, $\beta - \alpha \geqslant \pi$ (в противном случае надо произвести отражение относительно прямой, имеющей направление $(\cos\alpha, \sin\alpha)$).

Пусть Γ^j — произвольный базовый тип расщепления сети Γ. Используя равенства
$p_{u_1}\bigl(\gamma_m, \eta^j(u_1), \eta^j(v_m)\bigr) = -p_{v_m}\bigl(\gamma_m, \eta^j(v_m), \eta^j(u_1)\bigr)$, $m = 2,\ 3$,
$p_{u_2}\bigl(\gamma_1, \eta^j(u_2), \eta^j(v_1)\bigr) = -p_{v_1}\bigl(\gamma_1, \eta^j(v_1), \eta^j(u_2)\bigr)$, получаем два равенства:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\,(\Gamma^j, \eta^j) &= \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{D}\,\bigl(\Gamma_k^j, \eta^j\bigr) + \Bigl\langle -\sum_{m=2}^{3} p_{v_m}\bigl(\gamma_m, \eta^j(v_m), 0\bigr), \eta^j(u_1)\Bigr\rangle + \\
&+ \sum_{m=2}^{3} \Bigl\langle p_{v_m}\bigl(\gamma_m, \eta^j(v_m), \eta^j(u_1)\bigr) - p_{v_m}\bigl(\gamma_m, \eta^j(v_m), 0\bigr), \eta^j(v_m) - \eta^j(u_1)\Bigr\rangle + \\
&+ \Bigl\langle p_{v_1}\bigl(\gamma_1, \eta^j(v_1), \eta^j(u_2)\bigr) - p_{v_1}\bigl(\gamma_1, \eta^j(v_1), 0\bigr), \eta^j(v_1) - \eta^j(u_2)\Bigr\rangle + \\
&+ \Bigl\langle -p_{v_1}\bigl(\gamma_1, \eta^j(v_1), 0\bigr), \eta^j(u_2)\Bigr\rangle + \rho_\lambda\bigl(\eta^j(u_1) - \eta^j(u_2)\bigr) + \rho_\lambda\bigl(\eta^j(u_2)\bigr)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

и

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma^j,\eta^j)=\mathfrak{D}\,(\Gamma_1^j,\eta^j)+\mathfrak{D}\,(\Gamma_4^j,\eta^j)+\Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1,\eta^j(v_1),0\big),\eta^j(u_2)\Big\rangle+ \\ +\Big\langle p_{v_1}\big(\gamma_1,\eta^j(v_1),\eta^j(u_2)\big)-p_{v_1}\big(\gamma_1,\eta^j(v_1),0\big),\eta^j(v_1)-\eta^j(u_2)\Big\rangle+ \\ +\rho_\lambda\big(\eta^j(u_1)-\eta^j(u_2)\big)+\rho_\lambda\big(\eta^j(u_2)\big)-\rho_\lambda\big(\eta^j(u_1)\big). \quad (2.2)$$

Заметим, что неравенства
$\Big\langle p_{v_1}\big(\gamma_1,\eta^j(v_1),\eta^j(u_2)\big)-p_{v_1}\big(\gamma_1,\eta^j(v_1),0\big),\eta^j(v_1)-\eta^j(u_2)\Big\rangle\geqslant 0$,
$\Big\langle p_{v_m}\big(\gamma_m,\eta^j(v_m),\eta^j(u_1)\big)-p_{v_m}\big(\gamma_m,\eta^j(v_m),0\big),\eta^j(v_m)-\eta^j(u_1)\Big\rangle\geqslant 0$ справедливы для любых $\eta^j(v_1)$, $\eta^j(v_m)$, $\eta^j(u_1)$ и $\eta^j(u_2)$.

Достаточно проверить неравенство $(*)$ для ненулевых векторов $\eta^j(u_1)$ и $\eta^j(u_2)$. Пусть $\eta^j(u_1)=\|\eta^j(u_1)\|(\cos\varphi,\sin\varphi)$ и $\eta^j(u_2)=\|\eta^j(u_2)\|(\cos\psi,\sin\psi)$ — ненулевые вектора, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

(I) Если $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}\leqslant\psi-\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda}$, то $\Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1,\eta^j(v_1),0\big),\eta^j(u_2)\Big\rangle\geqslant 0$. Используя равенство (2.2) и неравенство $\rho_\lambda\big(\eta^j(u_1)-\eta^j(u_2)\big)+\rho_\lambda\big(\eta^j(u_2)\big)\geqslant\rho_\lambda\big(\eta^j(u_1)\big)$, получаем $\mathfrak{D}\,(\Gamma^j,\eta^j)\geqslant\mathfrak{D}\,(\Gamma_1^j,\eta^j)+\mathfrak{D}\,(\Gamma_4^j,\eta^j)$.

Аналогично, если $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}\leqslant\varphi-\beta\leqslant\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda}$, то
$\Big\langle -\sum\limits_{m=2}^{3}p_{v_m}(\gamma_m,\eta^j(v_m),0),\eta^j(u_1)\Big\rangle\geqslant 0$. Используя равенство (2.1) и лемму 2.2, получаем $\mathfrak{D}\,(\Gamma^j,\eta^j)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{3}\mathfrak{D}\,\big(\Gamma_k^j,\eta^j\big)$.

Следовательно, неравенство $(*)$ имеет место в предположениях пункта **(I)**, поскольку, по условию, сети Γ_i экстремальны.

(II) Осталось рассмотреть следующие возможности расположения φ и ψ: $-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda}<\varphi-\beta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$ и $-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda}<\psi-\alpha<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$. Поскольку сеть Γ локально минимальна, то $\beta-\alpha=\pi+\frac{r\pi}{2\lambda}$, где $r=0,\ldots,3$. Заметим, что для $2\lambda\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)$ возможно только $r=0$, 1, для $2\lambda\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 3)$ — только $r=0$, 1, 2, и для $r=0$ из-за симметрии достаточно рассмотреть случай $0\leqslant\psi-\alpha<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$. Для каждого $r=0,\ldots,3$ рассмотрим три возможности расположения угла φ:

[1] $\alpha+\pi<\varphi<\alpha+\pi+s\frac{\pi}{\lambda}$,

[2] $\beta-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda}<\varphi\leqslant\alpha+\pi$,

[3] $\alpha+\pi+s\frac{\pi}{\lambda}\leqslant\varphi<\beta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$, где $s=0$ для $r=0$; $s=1$ для $r=1$; и $s=2$ для $r=2$, 3.

[1] Если $\alpha+\pi<\varphi<\alpha+\pi+s\frac{\pi}{\lambda}$, то φ и ψ удовлетворяют условиям лемм 2.4 и 2.5. Применяя равенство (2.2) и леммы 2.4 и 2.5, получаем $\mathfrak{D}\,(\Gamma^j,\eta^j)\geqslant\mathfrak{D}\,(\Gamma_1^j,\eta^j)+\mathfrak{D}\,(\Gamma_4^j,\eta^j)$. Следовательно, неравенство $(*)$ в этом случае имеет место.

[2], [3] В остальных двух случаях представим вектора $\eta^j(u_1)$ и $\eta^j(u_2)$ в следующем виде: $\eta^j(u_1) = \eta^j_1(u_1) + \eta^j_2(u_1)$ и $\eta^j(u_2) = \eta^j_1(u_2) + \eta^j_2(u_2)$, где
$\eta^j_1(u_1) = -a_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $a_1 > 0$, для случая [2] при любом r и случая [3] при $r = 0$;
$\eta^j_1(u_2)$ параллелен $\eta^j_1(u_1) = -a_1\big(\cos(\alpha + \frac{\pi}{\lambda}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{\lambda})\big)$, $a_1 > 0$, для случая [3] при $r = 1$;
$\eta^j_1(u_2)$ параллелен $\eta^j_1(u_1) = -a_1\big(\cos(\alpha + \frac{2\pi}{\lambda}), \sin(\alpha + \frac{2\pi}{\lambda})\big)$, $a_1 > 0$, для случая [3] при $r = 2$, 3;

$\eta^j_2(u_2)$ сонаправлен с $\eta^j_2(u_1) = a_2\big(\sin(\alpha + \frac{\pi}{2\lambda}), \cos(\alpha + \frac{\pi}{2\lambda})\big)$, $a_2 \geqslant 0$, для случая [2] при $r = 0$;
$\eta^j_2(u_2)$ параллелен $\eta^j_2(u_1) = a_2(\sin\alpha, \cos\alpha)$, $a_2 \geqslant 0$, для случая [2] при $r \neq 0$;
$\eta^j_2(u_2)$ параллелен $\eta^j_2(u_1) = a_2\big(\sin(\alpha + \frac{(r+1)\pi}{2\lambda}), -\cos(\alpha + \frac{(r+1)\pi}{2\lambda})\big)$, $a_2 \geqslant 0$, для случая [3], причем при $r = 0$ вектор $\eta^j_2(u_2)$ противоположно направлен $\eta^j_2(u_1)$;

$\eta^j_1(u_2) = b_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $b_1 \geqslant 0$, для случаев [2], [3] при $r = 0$ и $\alpha \leqslant \psi \leqslant \beta - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda}$ (в обоих случаях), и случая [3] при $r = 0$ и $\beta - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} < \psi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} + \alpha$;
$\eta^j_1(u_2) = -b_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $b_1 > 0$, для случая [2] при $r = 0$ и $\beta - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda} < \psi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} + \alpha$;
$\eta^j_1(u_2) = b_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $b_1 \in \mathbb{R}$, для случая [2] при $r \neq 0$.

Из леммы 2.3 вытекает, что $\rho_\lambda\big(\eta^j(u_1) - \eta^j(u_2)\big) \geqslant \rho_\lambda\big(\eta^j_1(u_1) - \eta^j_1(u_2)\big)$.

Определим отображение $\bar\eta^j \colon V_{G^j} \to \mathbb{R}^2$, где $\bar\eta^j(\partial G^j) = 0$, положив $\bar\eta^j(x) = \eta^j(x)$ для любой вершины $x \in V_{G^j} \setminus \{u_1\}$ и $\bar\eta^j(u_1) = \eta^j_1(u_1)$.

а) Рассмотрим случаи: [3] при $r = 0$; [2] при $r = 0$ и $0 \leqslant \psi - \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\lambda}$; [2] при $r \neq 0$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi - \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; [3] при $r \neq 0$ и $\beta - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} + \alpha$. Эти случаи характеризуются тем условием, что вектора $\eta^j_1(u_1)$ и $\eta^j_1(u_2)$ противоположно направлены, поэтому $\rho_\lambda\big(\eta^j_1(u_1) - \eta^j_1(u_2)\big) = \rho_\lambda\Big(\eta^j_1(u_1)\Big) + \rho_\lambda\big(\eta^j_1(u_2)\big)$.

Используя равенство (2.2), во всех этих случаях получаем

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma^j, \eta^j) = \mathfrak{D}\,(\Gamma^j_1, \bar\eta^j) + \mathfrak{D}\,(\Gamma^j_4, \bar\eta^j) +$$

$$+\rho_\lambda\big(\bar\eta^j(u_2)\big) + \Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1, \bar\eta^j(v_1), 0\big), \bar\eta^j(u_2)\Big\rangle +$$

$$+\Big\langle p_{v_1}\big(\gamma_1, \bar\eta^j(v_1), \bar\eta^j(u_2)\big) - p_{v_1}\big(\gamma_1, \bar\eta^j(v_1), 0\big), \bar\eta^j(v_1) - \bar\eta^j(u_2)\Big\rangle +$$

$$+\sum_{m=2}^{3}\Big\langle p_{v_m}\big(\gamma_m, \bar\eta^j(v_m), \eta^j(u_1)\big) - p_{v_m}\big(\gamma_m, \bar\eta^j(v_m), \bar\eta^j(u_1)\big), \bar\eta^j(v_m) - \eta^j(u_1)\Big\rangle +$$

$$+\rho_\lambda\big(\eta^j(u_1)-\bar\eta^j(u_2)\big)-\rho_\lambda\big(\bar\eta^j(u_1)\big)+\Big\langle\sum_{m=2}^{3}p_{u_1}\big(\gamma_m,\bar\eta^j(u_1),\bar\eta^j(v_m)\big),\eta_2^j(u_1)\Big\rangle.$$

Так как

$$\rho_\lambda\big(\eta^j(u_1)-\bar\eta^j(u_2)\big)\geqslant\rho_\lambda\big(\bar\eta^j(u_1)\big),$$
$$\rho_\lambda\big(\bar\eta^j(u_2)\big)+\Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1,\bar\eta^j(v_1),0\big),\bar\eta^j(u_2)\Big\rangle\geqslant 0$$

(лемма 2.2) и

$$\Big\langle\sum_{m=2}^{3}p_{u_1}\big(\gamma_m,\bar\eta^j(u_1),\bar\eta^j(v_m)\big),\eta_2^j(u_1)\Big\rangle\geqslant 0,$$

то $\mathfrak{D}\,(\Gamma^j,\eta^j)\ \geqslant\ \mathfrak{D}\,(\Gamma_1^j,\bar\eta^j)+\mathfrak{D}\,(\Gamma_4^j,\bar\eta^j)$. Следовательно, неравенство $(*)$ в предположениях пункта a) имеет место.

b) Рассмотрим остальные случаи, а именно: [2] при $r=0$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda}<\psi-\alpha<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$; [2] при $r\neq 0$ и $\psi-\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda},\frac{3\pi}{2}\right)$; [3] при $r\neq 0$ и $\alpha+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda}<\psi<\beta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}$. Так как $\left|\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_1)\big)-\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_2)\big)\right|\geqslant\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_1)\big)-\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_2)\big)$, то

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma^j,\eta^j)\geqslant\mathfrak{D}\,(\Gamma_1^j,\bar\eta^j)+\mathfrak{D}\,(\Gamma_4^j,\bar\eta^j)+\Big\langle\sum_{m=2}^{3}p_{u_1}\big(\gamma_m,\bar\eta^j(u_1),\bar\eta^j(v_m)\big),\eta_2^j(u_1)\Big\rangle+$$
$$+\Big\langle p_{v_1}\big(\gamma_1,\bar\eta^j(v_1),\bar\eta^j(u_2)\big)-p_{v_1}\big(\gamma_1,\bar\eta^j(v_1),0\big),\bar\eta^j(v_1)-\bar\eta^j(u_2)\Big\rangle+$$
$$+\Big\langle\sum_{m=2}^{3}p_{v_m}\big(\gamma_m,\bar\eta^j(v_m),\eta^j(u_1)\big)-p_{v_m}\big(\gamma_m,\bar\eta^j(v_m),\bar\eta^j(u_1)\big),\bar\eta^j(v_m)-\eta^j(u_1)\Big\rangle+$$
$$+\rho_\lambda\big(\bar\eta^j(u_2)\big)+\Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1,\bar\eta^j(v_1),0\big),\bar\eta^j(u_2)\Big\rangle-\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_2)\big).$$

Для завершения доказательства пункта b) достаточно проверить справедливость неравенства

$$\rho_\lambda\big(\bar\eta^j(u_2)\big)+\Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1,\bar\eta^j(v_1),0\big),\bar\eta^j(u_2)\Big\rangle-\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_2)\big)\geqslant 0. \tag{2.3}$$

Положим $\chi=\psi-\alpha+\frac{\pi}{2\lambda}-\frac{\pi}{2}$ при $r=0$; $\chi=\psi-\alpha-\frac{\pi}{2}$ для [2] при $r\neq 0$ и $\psi-\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}\right)$; $\chi=\frac{3\pi}{2}-\psi+\alpha$ для [2] при $r\neq 0$ и $\psi-\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2\lambda},\frac{3\pi}{2}\right)$; $\chi=\beta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}-\psi$ для [3] при $r\neq 0$.

Тогда $\rho_\lambda\big(\bar\eta^j(u_2)\big)\geqslant\|\bar\eta^j(u_2)\|$;
$\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_2)\big)=\|\bar\eta^j(u_2)\|\dfrac{\sin\chi}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$ для [2] при $r=0$ и для [3] при $r=2$;
$\rho_\lambda\big(\eta_1^j(u_2)\big)=\|\bar\eta^j(u_2)\|\sin\chi$ для [2] при $r\neq 0$ и для [3] при $r=1,\,3$;

$$\Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1, \bar\eta^j(v_1), 0\big), \bar\eta^j(u_2)\Big\rangle \geqslant -\|\bar\eta^j(u_2)\| \frac{\sin(\frac{\pi}{2\lambda} - \chi)}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} \text{ для [2] при } r \neq 0,$$

$$\Big\langle -p_{v_1}\big(\gamma_1, \bar\eta^j(v_1), 0\big), \bar\eta^j(u_2)\Big\rangle \geqslant -\|\bar\eta^j(u_2)\| \frac{\sin\big(\frac{(r+2)\pi}{2\lambda} - \chi\big)}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}} \text{ для [2] при } r = 0 \text{ и}$$

для [3] при $r \neq 0$.

В результате получаем, что неравенство (2.3) выполняется для $r = 0$, 1 при любых $\lambda \geqslant 5$, для $r = 2$ при любых $\lambda \geqslant 7$ и для $r = 3$ при любых $\lambda \geqslant 9$. Следовательно, неравенство $(*)$ в предположениях пункта b) имеет место. Утверждение доказано. ■

2.2.2. Разрезания по ребрам

Рассмотрим некоторую экстремальную сеть. Разрежем ее по любому ребру. Ясно, что каждая из сетей, полученных в результате этого разрезания, экстремальна. Возникает следующий вопрос: *можно ли свести проверку экстремальности сети к экстремальности сетей, полученных из нее разрезанием по некоторому ребру.* Оказывается, что в общем случае это неверно, т.е. существуют неэкстремальные сети, при разрезании которых по некоторому ребру получаются экстремальные сети.

Утверждение 2.5. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — *произвольное погруженное локально минимальное дерево на* λ*-нормированной плоскости, и* $\gamma = \{\Gamma\colon [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^2\}$ — *произвольное неточечное ребро из* Γ. *Дерево* Γ *экстремально тогда и только тогда, когда экстремальны поддеревья в* Γ, *полученные из* Γ *разрезанием по ребру* γ.

Доказательство. Обозначим через $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, поддеревья в Γ, полученные в результате разрезания Γ по ребру γ. Пусть v_1 и v_2 — граничные вершины графов G_i, полученные из внутренней точки v ребра $[u_1, u_2]$ в результате разрезания по ней. Докажем, что сеть Γ экстремальна в предположении, что каждая сеть Γ_i экстремальна.

Пусть сети Γ_i экстремальны. Экстремальность сетей Γ_i равносильна условию, что для каждого базового типа расщепления $\Gamma_i^j\colon G_i^j \to \mathbb{R}^2$ сети Γ_i выполнено неравенство $\mathfrak{D}\left(\Gamma_i^j, \eta_i^j\right) \geqslant 0$ для любой деформации $\eta_i^j\colon V_{G_i^j} \to \mathbb{R}^2$. Для доказательства экстремальности сети Γ достаточно рассмотреть все ее базовые типы расщепления $\Gamma^j\colon G^j \to \mathbb{R}^2$ и проверить для каждого из них выполнение неравенства $\mathfrak{D}\left(\Gamma^j, \eta^j\right) \geqslant 0$ для любой деформации $\eta^j\colon V_{G^j} \to \mathbb{R}^2$.

Любой базовый тип расщепления Γ^j сети Γ получается из некоторых базовых типов расщепления Γ_i^j сетей Γ_i путем отождествления двух граничных вершин v_1 и v_2 графов G_i в одну граничную вершину и заменой получившейся граничной вершины на внутреннюю точку v ребра $[u_1, u_2]$. Получаем

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma^j, \eta^j) = \sum_i \mathfrak{D}\,(\Gamma^j_i, \eta^j) +$$
$$+\Big\langle p_{u_1}\big(\gamma, \eta^j(u_1), \eta^j(u_2)\big) - p_{u_1}\big(\gamma, \eta^j(u_1), 0\big), \eta^j(u_1)\Big\rangle +$$
$$+\Big\langle p_{u_2}\big(\gamma, \eta^j(u_2), \eta^j(u_1)\big) - p_{u_2}\big(\gamma, \eta^j(u_2), 0\big), \eta^j(u_2)\Big\rangle.$$

Поскольку ребро γ неточечно, то $\mathfrak{D}\,(\Gamma^j, \eta^j) = \sum_i \mathfrak{D}\,(\Gamma^j_i, \eta^j) \geqslant 0$. Утверждение доказано. ■

Определение. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная погруженная сеть на λ-нормированной плоскости. Максимальный путь в Γ, все внутренние вершины которого являются в Γ граничными вершинами степени 2 и инцидентны в Γ точечным ребрам γ_i, $i = 1, 2$, таким, что $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) = \dfrac{\pi}{\lambda}\Big(\Big[\dfrac{2\lambda-1}{3}\Big]+1\Big)$, назовем *граничной нитью*.

Определение. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная погруженная сеть на λ-нормированной плоскости. Объединение максимального пути $\mathcal{P}$ в Γ, все внутренние вершины которого являются в Γ внутренними вершинами степени 3 и инцидентны в Γ точечным ребрам γ_i, $i = 1, 2, 3$, таким, что $\alpha\big(\mathrm{fl}(\gamma_j), \mathrm{fl}(\gamma_k)\big) = \dfrac{2\pi}{3}$, $j \neq k$, и всех ребер, инцидентных внутренним вершинам этого пути, назовем *расширенной нитью*, $\mathcal{P}$ — *путем* этой расширенной нити, а ребра расширенной нити, не принадлежащие $\mathcal{P}$, — *дополнительными ребрами* нити.

Определение. Граничную нить сети Γ назовем *концевой*, если одно из концевых ребер этой нити является 1-граничным в сети Γ. Концевое ребро концевой нити называется *ребром крепления*, если оно не является 1-граничным.

Определение. Расширенную нить сети Γ назовем *концевой*, если внутренняя вершина пути нити, инцидентная его концевому ребру, является вершиной усов в сети Γ, а дополнительные ребра нити являются 1-граничными. Концевое ребро пути концевой нити называется *ребром крепления*, если оно не инцидентно вершине усов.

Используя следствие 2.1 и структуру локально минимальных деревьев, получаем

Утверждение 2.6. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольное погруженное локально минимальное дерево на* λ*-нормированной плоскости, и* γ *— ребро крепления некоторой концевой нити из* Γ*. Дерево* Γ *экстремально тогда и только тогда, когда экстремально поддерево в* Γ*, полученное из* Γ *отрезанием по ребру* γ *этой концевой нити.*

2.2.3. Вершины, инцидентные неточечному 1-граничному ребру

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное погруженное локально минимальное дерево на λ-нормированной плоскости, и z — его внутренняя вершина степени 3, инцидентная двум точечным и одному неточечному 1-граничному ребру.

Утверждение 2.7. *Дерево* Γ *экстремально, если и только если экстремальны максимальные поддеревья в* Γ*, у которых вершина* z *инцидентна двум 1-граничным ребрам.*

Доказательство. Пусть вершина $z = \{\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^2\}$ инцидентна ребрам $\gamma_i = \{\Gamma\colon [v, v_i] \to \mathbb{R}^2\}$, $i = 1, 2, 3$, и γ_2 является неточечным 1-граничным ребром. Пусть $\Gamma_j\colon G_j \to \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, — экстремальные подсети сети Γ, у которых вершина z инцидентна двум 1-граничным ребрам. Без ограничения общности предположим, что в сети Γ_1 1-граничными являются ребра γ_1 и γ_2, а в сети Γ_2 — γ_2 и γ_3. Докажем, что сеть Γ экстремальна.

Пусть $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ — произвольный базовый тип расщепления сети Γ. Обозначим базовые типы расщепления сетей Γ_j, которые являются подсетями сети Γ', через $\Gamma'_j\colon G'_j \to \mathbb{R}^2$. По предположению, сети Γ_j экстремальны, поэтому сети Γ'_j слабо экстремальны, т.е. выполнены неравенства $\mathfrak{D}\,(\Gamma'_j, \eta_j) \geqslant 0$ для любых деформаций $\eta_j\colon V_{G'_j} \to \mathbb{R}^2$. Экстремальность Γ равносильна слабой экстремальности Γ', т.е. выполнению неравенства $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ для любой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим произвольную деформацию $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$. Пусть направления ребер γ_1 и γ_3 приходят в вершины μ_k и μ_l из Σ соответственно, и пусть $\eta(v) = \eta^1(v) + \eta^2(v)$, где $\eta^1(v) = a^1(\cos\frac{\pi}{\lambda}k, \sin\frac{\pi}{\lambda}k)$ и $\eta^2(v) = a^2(\cos\frac{\pi}{\lambda}l, \sin\frac{\pi}{\lambda}l)$, $a^i \in \mathbb{R}$. Определим отображение $\eta_j\colon V_{G'_j} \to \mathbb{R}^2$, положив $\eta_j(\partial G'_j) = 0$, $\eta_j(u) = \eta(u)$ для любой вершины $u \in V_{G'_j} \setminus \{v\}$, $\eta_j(v) = \eta^j(v)$. Используя равенства $p_v\big(\gamma_1, \eta(v), \eta(v_1)\big) = p_v\big(\gamma_1, \eta_2(v), \eta_2(v_1)\big)$ и $p_v\big(\gamma_3, \eta(v), \eta(v_3)\big) = p_v\big(\gamma_3, \eta_1(v), \eta_1(v_3)\big)$, получаем $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) = \sum\limits_j \mathfrak{D}\,(\Gamma'_j, \eta_j) \geqslant 0$. Утверждение доказано. ■

2.2.4. Вершины, инцидентные точечным ребрам

Пусть Γ — произвольное погруженное локально минимальное дерево на λ-нормированной плоскости, и z — его внутренняя вершина, инцидентная точечным ребрам.

Утверждение 2.8. *Дерево Γ экстремально, если и только если экстремальны все максимальные поддеревья в Γ, у которых, по крайней мере, одно из ребер, инцидентных вершине z, является 1-граничным.*

Доказательство. Пусть вершина $z = \{\Gamma\colon v \to \mathbb{R}^2\}$ инцидентна точечным ребрам $\gamma_k = \{\Gamma\colon [v, v_k] \to \mathbb{R}^2\}$, направления которых приходят в вершины μ_{i_k} из Σ, и пусть $\Gamma_k\colon G_k \to \mathbb{R}^2$ — максимальные поддеревья в Γ, у которых ребро γ_k является 1-граничным, $k = 1, 2, 3$. Докажем экстремальность дерева Γ в предположении, что каждое дерево Γ_k экстремально.

Пусть $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ — произвольный базовый тип расщепления сети Γ. Обозначим базовые типы расщеплений сетей Γ_k, которые являются подсетями сети Γ', через $\Gamma'_k\colon G'_k \to \mathbb{R}^2$. По предположению, сети Γ_l экстремальны, поэтому выполнены неравенства $\mathfrak{D}\,(\Gamma'_k, \eta_k) \geqslant 0$ для любых деформаций $\eta_k\colon V_{G'_k} \to \mathbb{R}^2$. Экстремальность сети Γ равносильна выполнению неравенства $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ для любой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$. Проверим выполнение последнего неравенства.

Рассмотрим произвольную деформацию $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$. Прямые, содержащие инцидентные z ребра, разбивают плоскость $\mathbb{R}^2$ на 6 частей. Пусть $\eta(v)$ лежит в секторе, образованном лучами с направлениями $\big(\cos\frac{\pi}{\lambda}i_p, \sin\frac{\pi}{\lambda}i_p\big)$ и $-\big(\cos\frac{\pi}{\lambda}i_q, \sin\frac{\pi}{\lambda}i_q\big)$, и пусть φ — угол между $\eta(v)$ и $\big(\cos\frac{\pi}{\lambda}i_p, \sin\frac{\pi}{\lambda}i_p\big)$.

Представим $\eta(v)$ в виде $\eta'(v)+\eta''(v)$, где $\eta'(v) = a\big(\cos\frac{\pi}{\lambda}i_p, \sin\frac{\pi}{\lambda}i_p\big)$, $a \geqslant 0$, и $\eta''(v) = -b\big(\cos\frac{\pi}{\lambda}i_q, \sin\frac{\pi}{\lambda}i_q\big)$, $b \geqslant 0$.

Определим отображения $\eta_p\colon V_{G'_p} \to \mathbb{R}^2$, $\eta_q\colon V_{G'_q} \to \mathbb{R}^2$, положив $\eta_p(\partial G'_p) = 0$, $\eta_q(\partial G'_q) = 0$,

1) $\eta_p(u) = \eta(u)$ для любой вершины $u \in V_{G'_p} \setminus V_{G'_q}$,

$$\eta_p(w) = \frac{\sin(\alpha_r + \varphi)\sin\alpha_q}{\sin\alpha_r \sin(\alpha_q - \varphi)}\eta(w)$$

для любой вершины $w \in V_{G'_p} \setminus V_{G'_r}$ и $\eta_p(v) = \eta'(v)$;

2) $\eta_q(u) = \eta(u)$ для любой вершины $u \in V_{G'_q} \setminus V_{G'_p}$,

$$\eta_q(w) = \frac{\sin\varphi \sin\alpha_p}{\sin\alpha_r \sin(\alpha_q - \varphi)}\eta(w)$$

для любой вершины $w \in V_{G'_q} \setminus V_{G'_r}$ и $\eta_q(v) = \eta''(v)$,

где $r \neq p$, $r \neq q$, и α_l — угол между ребрами γ_m и γ_n, $l \neq m, n$. Заметим, что для любой вершины $w \in V_{G'_p} \setminus V_{G'_r} = V_{G'_q} \setminus V_{G'_r}$ имеет место равенство $\eta_p(w) + \eta_q(w) = \eta(w)$.

Используя равенства $p_v\bigl(\gamma_p, \eta''(v), \eta(v_p)\bigr) = p_v\bigl(\gamma_p, \eta(v), \eta(v_p)\bigr)$,
$p_v\bigl(\gamma_q, \eta'(v), \eta(v_q)\bigr) = p_v\bigl(\gamma_q, \eta(v), \eta(v_q)\bigr)$,
$p_v\bigl(\gamma_r, \eta'(v), \eta_p(v_r)\bigr) = p_v\bigl(\gamma_r, \eta(v), \eta(v_r)\bigr)$,
$p_v\bigl(\gamma_r, \eta''(v), \eta_q(v_r)\bigr) = p_v\bigl(\gamma_r, \eta(v), \eta(v_r)\bigr)$, получаем $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) = \mathfrak{D}(\Gamma'_p, \eta_p) + \mathfrak{D}(\Gamma'_q, \eta_q) \geqslant 0$. Утверждение доказано. ■

2.3. Существенные представители локально минимального дерева

Рассмотрим λ-нормированную плоскость $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, где $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$.

Определение. Погруженная сеть на λ-нормированной плоскости, не являющаяся звездой, называется *существенной*, если она является деревом и одновременно удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых двух смежных ребер γ_i и γ_j выполняются неравенства

$$\frac{\pi}{\lambda}\Bigl[\frac{2\lambda - 1}{3}\Bigr] \leqslant \alpha\bigl(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)\bigr) \leqslant \beta\bigl(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)\bigr) \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\Bigl(\Bigl[\frac{2\lambda}{3}\Bigr] + 1\Bigr),$$

причем, в случае когда γ_i и γ_j инцидентны граничной вершине и $\varkappa = 0$, выполняется неравенство

$$\beta\bigl(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)\bigr) \leqslant \frac{2\pi}{3}$$

(в частности, все вершины сети имеют степени не выше 3);

2) все вершины степени 1 и 2 — граничные, а степени 3 — внутренние;

3) каждое неточечное ребро является 1-граничным, в частности, все не 1-граничные ребра — точечные;

4) каждая вершина степени 3, инцидентная двум не 1-граничным ребрам, инцидентна точечному 1-граничному ребру, в частности, при $\varkappa = 1, 2$ каждая вершина степени 3 инцидентна точечному 1-граничному ребру;

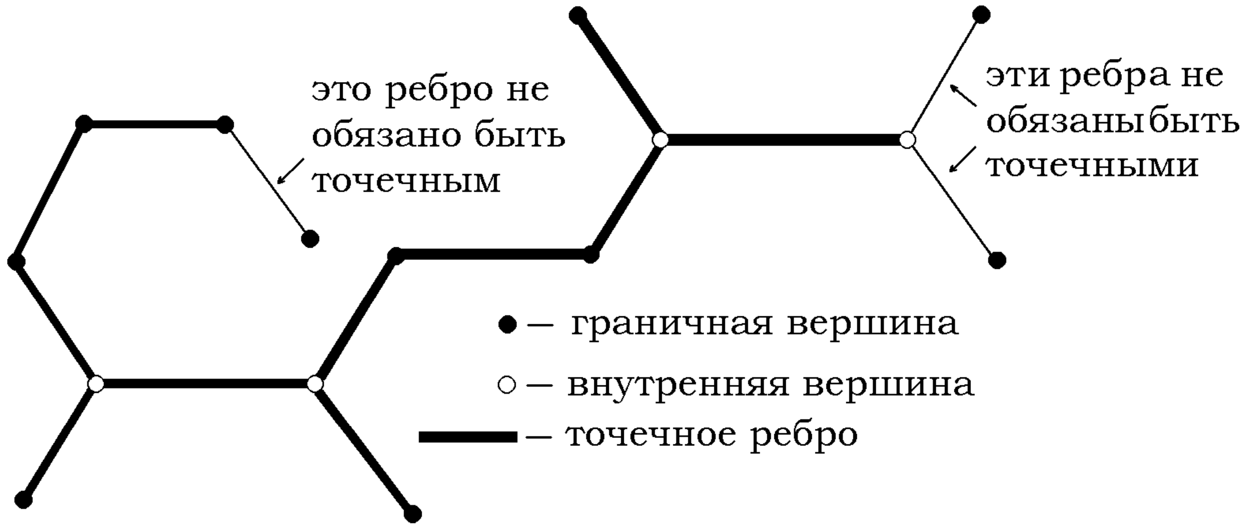


Рис. 2.1. Существенная сеть на λ-нормированной плоскости.

5) в каждой вершине степени 2, инцидентной ребрам γ_1 и γ_2 таким, что одно из них является 1-граничным, выполняется равенство $\alpha\bigl(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\bigr) = \dfrac{\pi}{\lambda}\Bigl[\dfrac{2\lambda-1}{3}\Bigr]$;

6) при $\varkappa = 0$ в каждой вершине степени 3, инцидентной ребрам γ_1, γ_2 и γ_3 таким, что два из них, например γ_2 и γ_3, являются точечными 1-граничными, выполняется $\alpha\bigl(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\bigr) \neq \alpha\bigl(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_3)\bigr)$.

Замечание. Отметим, что любая существенная сеть локально минимальна.

Следующее утверждение можно рассматривать как альтернативное определение существенной сети.

Утверждение 2.9. *Погруженное дерево на λ-нормированной плоскости, не являющееся звездой, является существенной сетью, если и только если оно одновременно удовлетворяет следующим условиям:*

1) *степени вершин дерева не превосходят 3, при этом вершины степени 1 и 2 — граничные, а степени 3 — внутренние;*

2) *дерево является объединением пути, все неконцевые ребра которого — точечные, и 1-граничных ребер, инцидентных некоторым внутренним вершинам этого пути, причем дополнительные ребра точечны, за исключением случая $\varkappa = 0$, для которого ребра, смежные с концевыми ребрами пути, могут быть неточечными;*

3) *угол между смежными точечными ребрами равен* $\frac{\pi}{\lambda}[\frac{2\lambda-1}{3}]$ *или* $\frac{\pi}{\lambda}\Big([\frac{2\lambda-1}{3}]+1\Big)$*, причем при* $\varkappa = 0$ *ребра инцидентны граничной вершине, и равен* $\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{\lambda}$*,* $\frac{2\pi}{3}$ *или* $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{\lambda}$ *для* $\varkappa = 0$*, когда ребра инцидентны внутренней вершине, а угол между точечным и неточечным ребром лежит в пределах между* $\frac{\pi}{\lambda}[\frac{2\lambda-1}{3}]$ *и* $\frac{\pi}{\lambda}\Big([\frac{2\lambda}{3}]+1\Big)$*;*

4) *угол между единственным ребром не изолированных* 1*-усов и смежным с ним ребром строго меньше* $\frac{\pi}{\lambda}\Big([\frac{2\lambda-1}{3}]+1\Big)$*;*

5) *углы между ребрами, инцидентными вершине усов степени* 3*, не равны между собой.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть. Покажем, что Γ удовлетворяет всем условиям утверждения. Условие 1) утверждения вытекает из условий 1) и 2) определения существенной сети; условие 2) — из 1), 3) и 4); а условия 3), 4), 5) — из 1), 5) и 6).

Достаточность. Докажем, что дерево Γ, удовлетворяющее условиям утверждения, является существенной сетью. Условие 1) определения существенной сети вытекает из условия 3), условие 2) — из 1), условия 3) и 4) — из 2), условия 5) и 6) — из 4) и 5). Утверждение доказано. ■

На рис. 2.1 приведен пример существенной сети.

Определение. Рассмотрим путь из утверждения 2.9 без концевых ребер. Полученный путь мы будем называть *образующим путем сети.*

Пусть $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ — произвольное локально минимальное погруженное дерево на λ-нормированной плоскости. Поставим в соответствие дереву Γ набор существенных подсетей (набор может быть пустым) дерева Γ, экстремальность которых равносильна экстремальности исходного дерева. Сети из этого набора мы будем называть *существенными представителями дерева* Γ.

Разрежем дерево Γ по всем неточечным ребрам, которые не являются 1-граничными, а также по всем граничным вершинам степени 2, для инцидентных ребер γ_i, $i=1, 2$, которых верно неравенство

$$\beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_1),\mathrm{fl}(\gamma_2)\big)\geqslant\frac{\pi}{\lambda}\Big([\frac{2\lambda-1}{3}]+2\Big)$$

(это — все вершины степени 2 локально минимальных деревьев, которые не могут встречаться в существенных сетях). Рассмотрим все связные компоненты $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$, полученные в результате такого разрезания. Используя утверждения 2.3, 2.4, 2.5, получаем

Утверждение 2.10. *Дерево Γ экстремально тогда и только тогда, когда каждая сеть Γ_i экстремальна.*

Найдем условия экстремальности сетей Γ_i. Для этого нам понадобятся следующие определения.

Определение. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная погруженная сеть, и $\mathcal{P}\colon P \to \mathbb{R}^2$ — произвольная подсеть в Γ, являющаяся путем. *Отростком пути* $\mathcal{P}$ будем называть каждое ребро сети Γ, не лежащее в $\mathcal{P}$ и инцидентное неконцевой вершине пути $\mathcal{P}$. Подсеть сети Γ, полученная добавлением всех отростков к пути $\mathcal{P}$, называется *расширением пути.* Если добавляются те и только те отростки, которые инцидентны вершинам пути $\mathcal{P}$, внутренним для Γ, то расширение называется *внутренним.* Если все добавленные отростки являются точечными, то расширение называется *точечным.* Для $\varkappa = 0$ мы будем расширение пути называть *полуточечным*, если все добавленные отростки, за исключением может быть тех, которые инцидентны концевым ребрам пути, являются точечными.

Для каждой сети Γ_i рассмотрим множество всех путей, соединяющих вершины степени 1 из Γ_i. Такие пути будем называть *секущими путями сети* Γ_i. Отметим, что не для каждого секущего пути внутреннее расширение является точечным для $\varkappa = 1, 2$ и полуточечным для $\varkappa = 0$. Секущие пути, которые допускают внутреннее (полу)точечное расширение, называются *внутренне (полу)точечными.*

Рассмотрим множество $\mathcal{K} = \{\Gamma_i^j\colon G_i^j \to \mathbb{R}^2\}$ внутренних (полу)точечных расширений всех внутренне (полу)точечных секущих путей сети Γ_i. Сети Γ_i^j для $\varkappa = 0, 2$ могут содержать граничные вершины степени 2, для которых

$$\frac{\pi}{\lambda}\Big(\Big[\frac{2\lambda-2}{3}\Big]+2\Big) \leqslant \beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_1),\mathrm{fl}(\gamma_2)\big) \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\Big(\Big[\frac{2\lambda}{3}\Big]+2\Big).$$

Разрежем все сети Γ_i^j по всем таким вершинам и рассмотрим новое множество сетей $\{\bar\Gamma_i^j\colon \bar G_i^j \to \mathbb{R}^2\}$. На этом множестве имеется частичный порядок по включению ($\bar\Gamma_i^j \leqslant \bar\Gamma_i^k$, если $\bar\Gamma_i^j$ является подсетью $\bar\Gamma_i^k$). Обозначим через $\overline{\mathfrak{M}}_i$ множество максимальных компонент из $\{\bar\Gamma_i^j\}$ в таком порядке, и положим $\overline{\mathfrak{M}} = \sqcup_i \overline{\mathfrak{M}}_i$. Элементы множества $\overline{\mathfrak{M}}$ будем называть *полусущественными представителями сети* Γ. Из утверждений 2.3, 2.4, 2.7 и 2.8 вытекает

Теорема 2.1. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольное погруженное локально минимальное дерево на* λ*-нормированной плоскости, и* $\overline{\mathfrak{M}}$ *— набор полусущественных представителей дерева* Γ. *Тогда дерево* Γ *экстремально, если и только если каждая сеть из* $\overline{\mathfrak{M}}$ *экстремальна.*

Исключим из набора $\overline{\mathfrak{M}}$ все сети, являющиеся объединением граничных и расширенных нитей, а от оставшихся в $\overline{\mathfrak{M}}$ сетей отрежем все максимальные подсети, являющиеся объединением граничных, расширенных нитей и концевой нити, проделав последовательно разрезания по ребрам крепления. Полученное множество без сетей-звезд обозначим через $\mathfrak{M}$. Сети из множества $\mathfrak{M}$ будем называть *существенными представителями сети* Γ. Используя утверждение 2.6, получаем

Теорема 2.2. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольное погруженное локально минимальное дерево на* λ*-нормированной плоскости, и* $\mathfrak{M}$ *— набор существенных представителей дерева* Γ. *Тогда каждая сеть из* $\mathfrak{M}$ *является существенной сетью. Дерево* Γ *экстремально, если и только если каждая сеть из* $\mathfrak{M}$ *экстремальна.*

Опишем более подробно, как получить сети из множества $\mathcal{K}$ в предположении, что сеть Γ_i отлична от ребра.

Пусть $\bar\Gamma\colon \bar G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное локально минимальное дерево, не содержащее неточечных ребер, которые не являются 1-граничными, и граничных вершин степени 2, для инцидентных ребер γ_i, $i = 1, 2$, которых верно неравенство

$$\beta\big(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)\big) \geqslant \frac{\pi}{\lambda}\Big(\Big[\frac{2\lambda-1}{3}\Big] + 2\Big).$$

Определение. Вершины сети $\bar\Gamma$, имеющие степень больше 1 и инцидентные 1-граничному ребру, называются *предконцевыми.* Все граничные предконцевые вершины, а также вершины усов назовем *отмеченными.* Кроме того, каждую внутреннюю предконцевую вершину, инцидентную неточечному ребру, также назовем *отмеченной.*

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех отмеченных вершин сети $\bar\Gamma$.

Определение. Путь в $\bar{\Gamma}$, содержащий более одной вершины, называется *отмеченным*, если он соединяет вершины из $\mathcal{F}$ и не содержит внутри себя вершин из $\mathcal{F}$, внутренних для $\bar{\Gamma}$. Путь в $\bar{\Gamma}$, содержащий ровно одну вершину x, называется *отмеченным*, если $x \in \mathcal{F}$, x является вершиной усов, и, кроме того, в случае когда $\bar{\Gamma}$ отлична от изолированных усов, x — граничная вершина степени 3 в $\bar{\Gamma}$.

Концевым расширением в сети $\bar{\Gamma}$ отмеченного пути $\mathcal{P}\colon P \to \mathbb{R}^2$, состоящего *более чем из одной вершины*, называется подсеть сети $\bar{\Gamma}$, полученная добавлением ребер из $\bar{\Gamma}$, инцидентных концевым вершинам из $\mathcal{P}$, причем, в случае когда концевая вершина из $\mathcal{P}$ — граничная для $\bar{\Gamma}$, добавляется любое одно 1-граничное для $\bar{\Gamma}$ ребро, а в случае когда концевая вершина из $\mathcal{P}$ — внутренняя для $\bar{\Gamma}$, добавляются все ребра. *Концевым расширением* в сети $\bar{\Gamma}$ отмеченного пути $\mathcal{P}\colon P \to \mathbb{R}^2$, состоящего *ровно из одной вершины*, называется подсеть сети $\bar{\Gamma}$, полученная следующим образом. Если $\mathcal{P}$ — внутренняя вершина для $\bar{\Gamma}$ (в этом случае $\bar{\Gamma}$ — изолированные усы), то расширение совпадает с сетью $\bar{\Gamma}$. Если же $\mathcal{P}$ — граничная вершина для $\bar{\Gamma}$ (в этом случае $\mathcal{P}$ — вершина l-усов, где $l \geqslant 2$), то концевое расширение получается из $\mathcal{P}$ добавлением любой пары ребер из усов, инцидентных $\mathcal{P}$.

Если для отмеченного пути выполнить одновременно концевое и внутреннее расширение, то про результирующую сеть будем говорить, что она получена *концевым внутренним расширением отмеченного пути.*

Утверждение 2.11. *Каждый отмеченный путь в $\bar{\Gamma}$ является внутренне точечным и для него существует не более четырех концевых расширений в сети $\bar{\Gamma}$.*

Теорема 2.3. *Если сеть Γ_i отлична от ребра, то множество $\mathcal{K}$ совпадает с множеством всех концевых внутренних расширений всех отмеченных путей в Γ_i.*

Пример. Рассмотрим локально минимальное вложенное дерево $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости, $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 8$, изображенное на рис. 2.2. Ребра γ_{11}, γ_{17}, γ_{27}, γ_{31} и γ_{40} являются неточечными, а остальные все ребра — точечные. Вершины z_{10}, z_{11}, z_{13}, z_{27}, z_{29}, z_{32}, z_{33} и z_{36} являются внутренними, остальные — граничными. Погрешности между смежными ребрами следующие: $\mathrm{fall}(\gamma_1,\gamma_2) = \mathrm{fall}(\gamma_5,\gamma_9) = \mathrm{fall}(\gamma_6,\gamma_7) = \mathrm{fall}(\gamma_6,\gamma_8) = \mathrm{fall}(\gamma_6,\gamma_9) = \mathrm{fall}(\gamma_9,\gamma_{10}) = \mathrm{fall}(\gamma_9,\gamma_{15}) = \mathrm{fall}(\gamma_{10},\gamma_{11}) = \mathrm{fall}(\gamma_{10},\gamma_{12}) = \mathrm{fall}(\gamma_{11},\gamma_{12}) = \mathrm{fall}(\gamma_{12},\gamma_{13}) = \mathrm{fall}(\gamma_{12},\gamma_{14}) = \mathrm{fall}(\gamma_{15},\gamma_{16}) = \mathrm{fall}(\gamma_{16},\gamma_{17}) = \mathrm{fall}(\gamma_{17},\gamma_{18}) = \mathrm{fall}(\gamma_{18},\gamma_{19}) = \mathrm{fall}(\gamma_{19},\gamma_{20}) = \mathrm{fall}(\gamma_{20},\gamma_{21}) = \mathrm{fall}(\gamma_{25},\gamma_{26}) = \mathrm{fall}(\gamma_{25},\gamma_{31}) = \mathrm{fall}(\gamma_{26},\gamma_{31}) = \mathrm{fall}(\gamma_{26},\gamma_{27}) = \mathrm{fall}(\gamma_{26},\gamma_{28}) =$

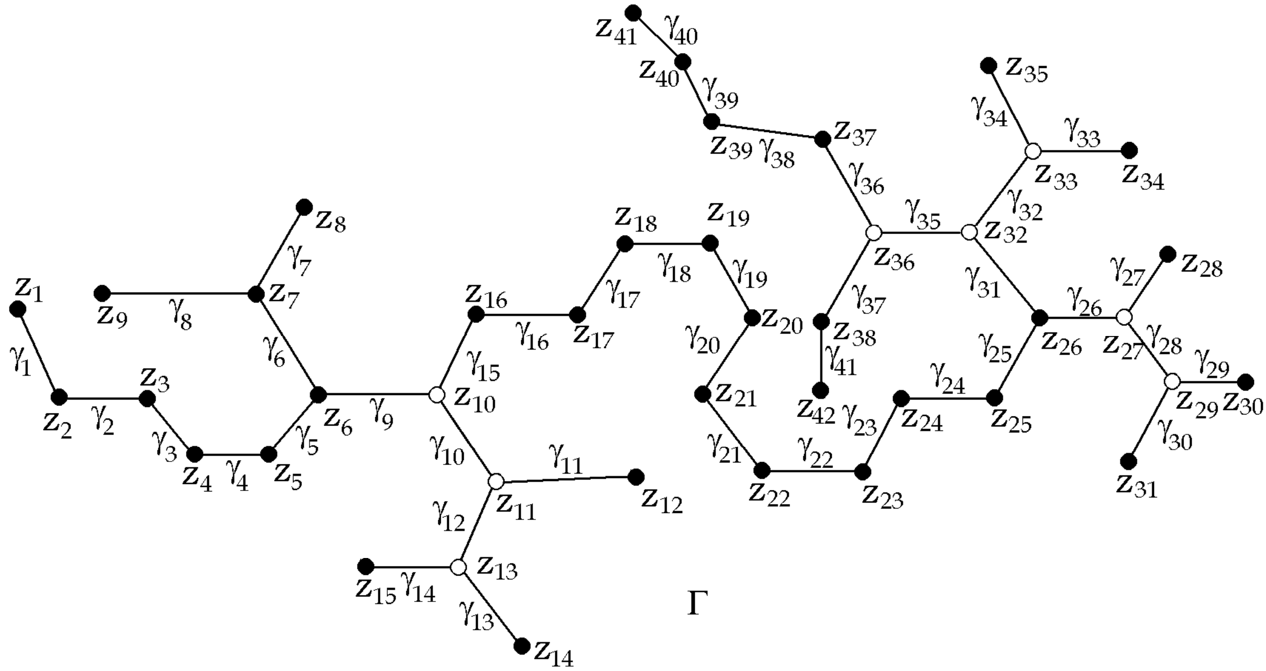


Рис. 2.2. Локально минимальное дерево на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 1(\mathrm{mod} 3)$ и $\lambda \geqslant 8$.

$\mathrm{fall}(\gamma_{27}, \gamma_{28}) = \mathrm{fall}(\gamma_{28}, \gamma_{29}) = \mathrm{fall}(\gamma_{28}, \gamma_{30}) = \mathrm{fall}(\gamma_{31}, \gamma_{32}) = \mathrm{fall}(\gamma_{31}, \gamma_{35}) = \mathrm{fall}(\gamma_{32}, \gamma_{35}) = \mathrm{fall}(\gamma_{32}, \gamma_{33}) = \mathrm{fall}(\gamma_{32}, \gamma_{34}) = \mathrm{fall}(\gamma_{35}, \gamma_{37}) = \mathrm{fall}(\gamma_{36}, \gamma_{37}) = \mathrm{fall}(\gamma_{38}, \gamma_{39}) = 1$, $\mathrm{fall}(\gamma_2, \gamma_3) = \mathrm{fall}(\gamma_3, \gamma_4) = \mathrm{fall}(\gamma_5, \gamma_6) = \mathrm{fall}(\gamma_7, \gamma_8) = \mathrm{fall}(\gamma_{10}, \gamma_{15}) = \mathrm{fall}(\gamma_{13}, \gamma_{14}) = \mathrm{fall}(\gamma_{22}, \gamma_{23}) = \mathrm{fall}(\gamma_{23}, \gamma_{24}) = \mathrm{fall}(\gamma_{24}, \gamma_{25}) = \mathrm{fall}(\gamma_{29}, \gamma_{30}) = \mathrm{fall}(\gamma_{33}, \gamma_{34}) = \mathrm{fall}(\gamma_{35}, \gamma_{36}) = -2$, $\mathrm{fall}(\gamma_4, \gamma_5) = \mathrm{fall}(\gamma_{21}, \gamma_{22}) = \mathrm{fall}(\gamma_{36}, \gamma_{38}) = \mathrm{fall}(\gamma_{37}, \gamma_{41}) = -5$, $\mathrm{fall}(\gamma_{39}, \gamma_{40}) = 3 - \lambda$.

Разрежем дерево Γ по вершинам z_5, z_{22}, z_{37}, z_{38}, z_{40} и по ребрам γ_{17}, γ_{31}. В результате получается набор сетей Γ_i, $i = 1, \ldots, 8$, см. рис. 2.3. Обозначим через $\mathcal{F}_i$ множество отмеченных вершин сети Γ_i, $i = 1, \ldots, 6$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \{z_2, z_4\}, \\
\mathcal{F}_2 &= \{z_6, z_7, z_{11}, z_{13}, z_{17}\}, \\
\mathcal{F}_3 &= \{z_{18}, z_{21}\}, \\
\mathcal{F}_4 &= \{z_{23}, z_{26}, z_{27}, z_{29}\}, \\
\mathcal{F}_5 &= \{z_{32}, z_{33}, z_{36}\}, \\
\mathcal{F}_6 &= \{z_{39}\}.
\end{aligned}$$

Для каждой сети Γ_i рассматриваем множество отмеченных путей и все концевые внутренние расширения их. На рис. 2.4 изображено множество $\overline{\mathfrak{M}}$. Сеть $\Gamma_{\underline{2}}^5$ является граничной нитью, четыре сети Γ_1, Γ_2^2, Γ_4^1 и $\Gamma_{\underline{4}}^2$ из множества $\overline{\mathfrak{M}}$ содержат концевые нити. На рис. 2.5 приведены сети $\bar{\Gamma}_1$,

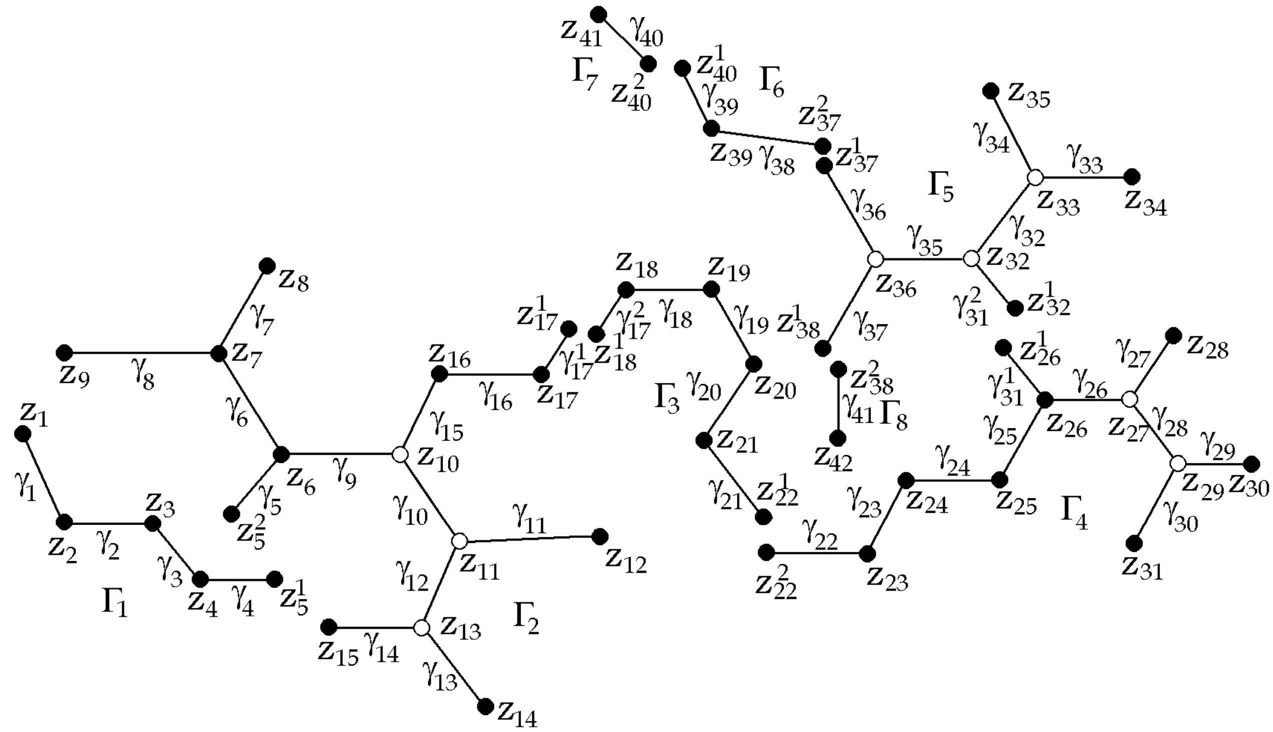


Рис. 2.3. Сети, полученные разрезанием дерева Γ по вершинам z_5, z_{22}, z_{37}, z_{38}, z_{40} и по ребрам γ_{17}, γ_{31}.

$\bar\Gamma_2^2$, $\bar\Gamma_4^1$ и $\bar\Gamma_4^2$, получающиеся из сетей Γ_1, Γ_4^1 и Γ_4^2 соответственно отрезанием концевых нитей. Множество $\mathfrak{M}$ получается из множества $\overline{\mathfrak{M}}$ исключением сетей Γ_1, Γ_2^2, Γ_2^5, Γ_4^1, Γ_6, Γ_7, Γ_8 и заменой сети Γ_4^2 на сеть $\bar\Gamma_4^2$, см. рис. 2.5.

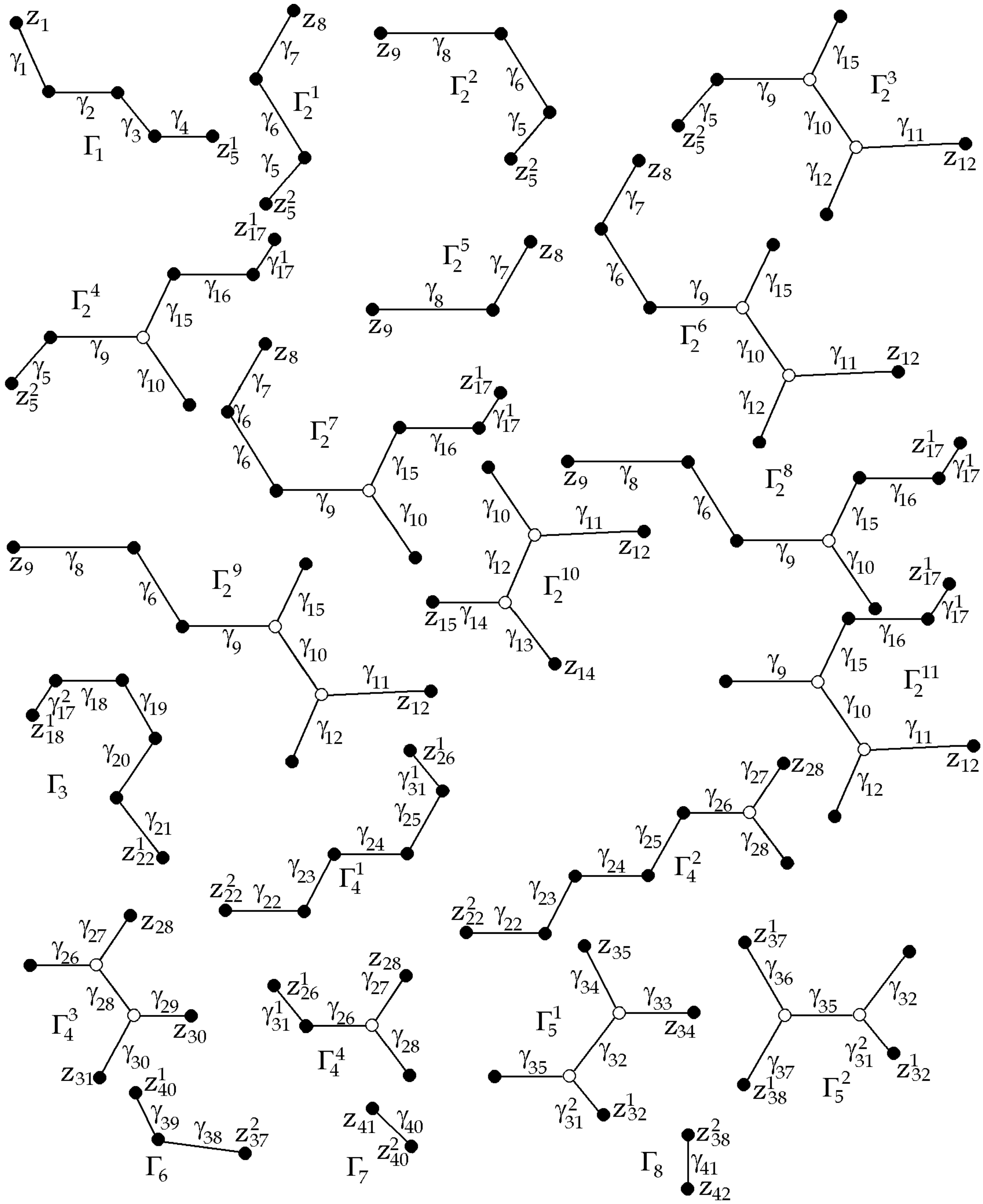


Рис. 2.4. Множество $\overline{\mathfrak{M}}$ полусущественных сетей дерева Г.

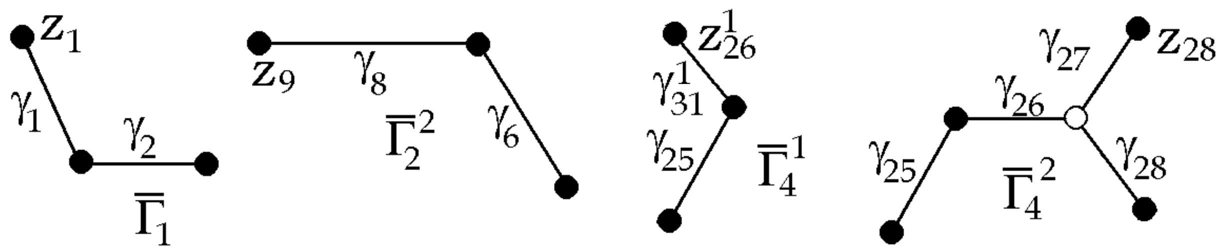


Рис. 2.5. Результат отрезания нитей от сетей Γ_1, Γ_2^2, Γ_4^1 и Γ_4^2

Глава 3.

Допустимые деформации

В предыдущей главе мы выделили класс сетей, экстремальность которых достаточно проверить, чтобы сказать является ли данное дерево экстремальным. В данной главе мы опишем деформации, которые достаточно рассмотреть для проверки экстремальности существенной сети.

3.1. Сведение любой деформации к допустимой

Рассмотрим произвольную существенную сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости. Из определения существенной сети следует, что сеть Γ имеет всего один базовый тип расщепления $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$. Пусть $z = \{\Gamma\colon u \to \mathbb{R}^2\}$ — произвольная вершина сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, инцидентная ребрам γ_i, которые ориентированы от нее. Обозначим через $\mathcal{H}(z) = \Gamma'\big|_{H(u)}\colon H(u) \to \mathbb{R}^2$ приведенную компоненту сети Γ' такую, что $\mathcal{H}(z)\big(H(u)\big) = \Gamma(u)$. При этом, если z является внутренней вершиной степени 3, то $H(u) = u' = u$, и если z — граничная вершина степени 2, то $H(u) = [u', v']$, где v' — граничная вершина степени 1, а u' — внутренняя вершина степени 3. Положим $z' = \{\Gamma'\colon u' \to \mathbb{R}^2\}$.

Определение. Вершина z' называется *представителем вершины z из* Γ в сети Γ'.

Определение. Пусть степень вершины z равна 2. Деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой в вершине* z', если или $\eta(u') = 0$, или угол между $\eta(u')$ и направлением не 1-граничного ребра γ_k равен $\frac{\pi}{\lambda}[\frac{\lambda+1}{3}]$, а угол между $\eta(u')$ и направлением γ_l, $l \neq k$, не больше $\frac{\pi}{\lambda}[\frac{\lambda+2}{3}]$.

Пусть степень вершины z равна 3, и два ребра, скажем γ_2 и γ_3, являются неточечными. Этот случай имеет место только для $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = 3$.

Определение. В сделанных предположениях, деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой в вершине* z', если или $\eta(u') = 0$, или $\eta(u')$ имеет точечное направление, которое образует с направлением ребра γ_i, $i = 1, 2$, угол не больше $\dfrac{\pi}{3}$.

Пусть степень вершины z равна 3, и, по крайней мере, два ребра являются точечными.

Определение. В сделанных предположениях, деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой в вершине* z', если вектор $\eta(u')$ коллинеарен точечному направлению некоторого ребра γ_i, причем оставшиеся из инцидентных z ребер не образуют усы. При этом $\eta(u')$ не сонаправлен с ребром γ_p, если одно из оставшихся ребер γ_q и γ_r, где $q \neq p$, $r \neq p$, скажем γ_q, не является 1-граничным, а другое, γ_r, удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) > 3\Big[\dfrac{\lambda+2}{3}\Big] - \lambda$, когда γ_r или не является 1-граничным ребром, или является неточечным,

2) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) \geqslant 3\Big[\dfrac{\lambda+2}{3}\Big] - \lambda$ или $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) = \mathrm{fall}(\gamma_p, \gamma_r)$, когда γ_r является точечным 1-граничным ребром.

Аналогично, $\eta(u')$ не противоположно направлен ребру γ_p, если одно из оставшихся ребер γ_q и γ_r, где $q \neq p$, $r \neq p$, скажем γ_q, не является 1-граничным, а другое, γ_r, удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) < 3\Big[\dfrac{\lambda}{3}\Big] - \lambda$, когда γ_r не является 1-граничным ребром,

2) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) \leqslant 3\Big[\dfrac{\lambda}{3}\Big] - \lambda$, когда γ_r является неточечным,

3) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) \leqslant 3\Big[\dfrac{\lambda}{3}\Big] - \lambda$ или $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) = \mathrm{fall}(\gamma_p, \gamma_r)$, когда γ_r является точечным 1-граничным ребром.

Пусть Γ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости, и $z = \{\Gamma\colon u \to \mathbb{R}^2\}$ — произвольная ее вершина, инцидентная ребрам γ_i, которые ориентированы от нее. Обозначим через $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ базовый тип расщепления сети Γ, а через $z' = \{\Gamma\colon u' \to \mathbb{R}^2\}$ представитель вершины z в сети Γ'.

Утверждение 3.1. *В сделанных обозначениях, пусть z является граничной вершиной степени 2. Тогда сеть Γ' слабо экстремальна, если и только если $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta) \geqslant 0$ для каждой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, допустимой в вершине z'.*

Доказательство. *Необходимость.* Если сеть Γ' слабо экстремальна, то неравенство $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta) \geqslant 0$ выполнено для любой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, а следовательно, и для деформации, допустимой в вершине z'.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta) \geqslant 0$ для каждой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, допустимой в вершине z'. Докажем, что сеть Γ' слабо экстремальна, т.е. $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta) \geqslant 0$ для любой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$.

1) Пусть ребра γ_i, $i = 1,\,2$, не являются 1-граничными, и угол между ними равен $\frac{2\pi}{\lambda}[\frac{\lambda+1}{3}]$. Положим $\gamma_i' = \gamma_i \circ \pi = \{\Gamma'\colon [u',u_i'] \to \mathbb{R}^2\}$, где $\pi\colon G' \to G$ — слабая проекция. В этом случае биссектриса угла между ребрами γ_i имеет точечное направление $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Рассмотрим произвольную деформацию η, и пусть $\eta(u') = a(\cos\psi, \sin\psi)$, $a \geqslant 0$. Используя симметрию, достаточно рассмотреть $\varphi \leqslant \psi \leqslant \varphi+\pi$.

1.1) Если $\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi \leqslant \varphi + \pi$, то

$$\Big\langle \sum_{m=1}^{2} p_{u'}\big(\gamma_m', \eta(u'), \eta(u_m')\big), \eta(u')\Big\rangle \geqslant 0$$

для любых $\eta(u_m')$. Определим отображение $\bar\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив $\bar\eta(x) = \eta(x)$ для любой вершины $x \in V_{G'} \setminus \{u'\}$ и $\bar\eta(u') = 0$. Отметим, что в этом случае деформация $\bar\eta$ является допустимой в вершине z'.

Используя равенство $p_{u_m'}\big(\gamma_m', \eta(u_m'), \eta(u')\big) = -p_{u'}\big(\gamma_m', \eta(u'), \eta(u_m')\big)$, $m = 1,\,2$, получаем

$$\mathfrak{D}(\Gamma',\eta) = \mathfrak{D}(\Gamma',\bar\eta) + \Big\langle -\sum_{m=1}^{2} p_{u_m'}\big(\gamma_m', \eta(u_m'), 0\big), \eta(u')\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta(u')\big) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{2}\Big\langle p_{u_m'}\big(\gamma_m', \eta(u_m'), \eta(u')\big) - p_{u_m'}\big(\gamma_m', \eta(u_m'), 0\big), \eta(u_m') - \eta(u')\Big\rangle \geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку каждое слагаемое неотрицательно.

1.2) Если $\varphi \leqslant \psi \leqslant \varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$, то вектор $\eta(u')$ можно представить в виде $\eta_1+\eta_2$, где $\eta_1 = a_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $a_1 \geqslant 0$, а $\eta_2 = a_2\big(\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\varphi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda})\big)$, $a_2 \geqslant 0$.

Определим отображение $\bar\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив $\bar\eta(x) = \eta(x)$ для любой вершины $x \in V_{G'} \setminus \{u'\}$ и $\bar\eta(u') = \eta_1$. Деформация $\bar\eta$ является допустимой в вершине z'. Из леммы 2.3 вытекает, что $\rho_\lambda\big(\eta(u')\big) \geqslant \rho_\lambda(\eta_1)$. Используя равенства $p_{u'_m}\big(\gamma'_m, \eta(u'_m), \eta(u')\big) = -p_{u'}\big(\gamma'_m, \eta(u'), \eta(u'_m)\big)$, $m = 1, 2$, получаем

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) = \mathfrak{D}\,(\Gamma', \bar\eta) + \rho_\lambda\big(\eta(u')\big) - \rho_\lambda\big(\bar\eta(u')\big) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{2} \Big\langle p_{u'_m}\big(\gamma'_m, \eta(u'_m), \eta(u')\big) - p_{u'_m}\big(\gamma'_m, \eta(u'_m), \bar\eta(u')\big), \eta(u'_m) - \eta(u')\Big\rangle +$$
$$+\Big\langle \sum_{m=1}^{2} p_{u'}\big(\gamma'_m, \bar\eta(u'), \eta(u'_m)\big), \eta_2\Big\rangle \geqslant \mathfrak{D}\,(\Gamma', \bar\eta) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \bar\eta) \geqslant 0$ по предположению.

2) Если одно из ребер γ_i, является 1-граничным или неточечным, то этот случай рассматривается аналогично случаю **1)**.

3) Пусть ребра γ_i, $i = 1, 2$, не являются 1-граничными, и угол между ними равен $\frac{\pi}{\lambda}\big[\frac{\lambda - 1}{3}\big] + \frac{\pi}{\lambda}\big[\frac{\lambda + 2}{3}\big]$. Положим $\gamma'_i = \gamma_i \circ \pi = \{\Gamma' \colon [u', u'_i] \to \mathbb{R}^2\}$, где $\pi\colon G' \to G$ — слабая проекция. В этом случае биссектриса угла между ребрами γ_i имеет неточечное направление $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Рассмотрим произвольную деформацию η, и пусть $\eta(u') = a(\cos\psi, \sin\psi)$, $a \geqslant 0$. Используя симметрию, достаточно рассмотреть $\varphi \leqslant \psi \leqslant \varphi + \pi$.

3.1) Если $\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi \leqslant \varphi + \pi$, то

$$\Big\langle \sum_{m=1}^{2} p_{u'}\big(\gamma'_m, \eta(u'), \eta(u'_m)\big), \eta(u')\Big\rangle \geqslant 0$$

для любых $\eta(u'_m)$. Этот случай рассматривается аналогично случаю **1.1)**.

3.2) Если $\varphi + \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \psi \leqslant \varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}$, то вектор $\eta(u')$ можно представить в виде $\eta_1 + \eta_2$, где $\eta_1 = a_1\big(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\varphi + \frac{\pi}{2\lambda}\big)$, $a_1 \geqslant 0$, а $\eta_2 = a_2\big(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda})\big)$, $a_2 \geqslant 0$. Этот случай рассматривается аналогично случаю **1.2)**.

3.3) Если $\varphi \leqslant \psi \leqslant \varphi + \frac{\pi}{2\lambda}$, то вектор $\eta(u')$ можно представить в виде $\eta_1 + \eta_2$, где $\eta_1 = a_1\big(\cos(\varphi - \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\varphi - \frac{\pi}{2\lambda}\big)$, $a_1 \geqslant 0$, а $\eta_2 = a_2\big(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2\lambda}), \sin(\varphi + \frac{\pi}{2\lambda})\big)$, $a_2 \geqslant 0$. Без ограничения общности будем считать, что ребра γ_i имеют направления $(\cos\alpha_i, \sin\alpha_i)$, $i = 1, 2$, где $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \varphi \leqslant \alpha_2 \leqslant 2\pi$.

Пусть $\Gamma^k\colon G^k \to \mathbb{R}^2$ — сеть, содержащая вершину z и полученная из сети Γ разрезанием по ребру γ_k, $k = 1, 2$. Обозначим через $\Gamma^{k'}\colon G^{k'} \to \mathbb{R}^2$ базовый тип расщепления сети Γ^k. Определим отображения $\eta^k\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив

$$\eta^k(v) = \frac{\sin\big((-1)^k(\psi - \varphi) + \frac{\pi}{2\lambda}\big)\sin\big(\frac{\pi}{\lambda}\big[\frac{\lambda + (-1)^k k}{3}\big]\big)}{\sin\frac{\pi}{\lambda}\sin\big(\psi - \varphi + \frac{\pi}{2\lambda} + \frac{\pi}{\lambda}\big[\frac{\lambda - 1}{3}\big]\big)}\eta(v)$$

для любой вершины $v \in V_{G'} \setminus V_{G^{1'}}$,

$$\eta^k(w) = \frac{\sin\big((-1)^k(\psi-\varphi)+\frac{\pi}{2\lambda}\big)\sin\big(\frac{\pi}{\lambda}[\frac{\lambda-(-1)^k(3-k)}{3}]\big)}{\sin\frac{\pi}{\lambda}\sin\big(\varphi-\psi+\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{\pi}{\lambda}[\frac{\lambda-1}{3}]\big)}\eta(w)$$

для любой вершины $w \in V_{G'} \setminus V_{G^{2'}}$, $\eta^k(u') = \eta_k$, $k = 1, 2$. Отметим, что в этом случае деформации η^k являются допустимыми в вершине z', и для любой вершины $x \in V_{G'}$ имеет место равенство $\eta^1(x) + \eta^2(x) = \eta(x)$. Получаем $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) = \mathfrak{D}(\Gamma', \eta^1) + \mathfrak{D}(\Gamma', \eta^2) \geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо по предположению. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.2. *В сделанных выше обозначениях, пусть z является внутренней вершиной степени* 3, *инцидентной двум неточечным ребрам. Тогда сеть Γ' слабо экстремальна, если и только если $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ для каждой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, допустимой в вершине z'.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ для деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, допустимой в вершине $z' = \{\Gamma\colon u' \to \mathbb{R}^2\}$. Докажем, что сеть $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ для любой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$.

Пусть ребра γ_2 и γ_3 являются неточечными. Этот случай имеет место только для $2\lambda \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 3)$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = 3$ и направление γ_i равно $(\cos\alpha_i, \sin\alpha_i)$, где $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \leqslant 2\pi$.

Рассмотрим произвольную деформацию η, и пусть $\eta(u') = a(\cos\psi, \sin\psi)$, $a \geqslant 0$.

Если $\alpha_1 + \pi \leqslant \psi \leqslant \alpha_1 + 2\pi$, то определим отображение $\bar\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив $\bar\eta(x) = \eta(x)$ для любой вершины $x \in V_{G'} \setminus \{u'\}$ и $\bar\eta(u') = 0$.

Если $\alpha_1 \leqslant \psi \leqslant \alpha_1 + \pi$, то вектор $\eta(u')$ можно представить в виде $\eta_1 + \eta_2$, где $\eta_1 = a_1\big(\cos(\alpha_1 + \frac{\pi}{3}), \sin(\alpha_1 + \frac{\pi}{3})\big)$, $a_1 \geqslant 0$, а $\eta_2 = a_2\big(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1\big)$, $a_2 \in \mathbb{R}$. Определим отображение $\bar\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив $\bar\eta(x) = \eta(x)$ для любой вершины $x \in V_{G'} \setminus \{u'\}$ и $\bar\eta(u') = \eta_1$. Отметим, что в обоих случаях деформация $\bar\eta$ является допустимой в вершине z'

В обоих случаях получаем $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant \mathfrak{D}(\Gamma', \bar\eta) \geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо, поскольку $\mathfrak{D}(\Gamma', \bar\eta) \geqslant 0$ по предположению. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.3. *В сделанных выше обозначениях, пусть z является внутренней вершиной степени 3, инцидентной, по крайней мере, двум точечным ребрам. Тогда сеть Γ' слабо экстремальна, если и только если $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ для каждой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, допустимой в вершине z'.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant 0$ для деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$ сети $\Gamma'\colon G'\to\mathbb{R}^2$, допустимой в вершине $z'=\{\Gamma\colon u'\to\mathbb{R}^2\}$. Докажем, что $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant 0$ для любой деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$.

1) Пусть z инцидентна одному неточечному ребру, скажем γ_r, и пусть ребро γ_q не является 1-граничным. Тогда, по определению допустимой деформации, в этом случае вектор $\eta(u')$ коллинеарен ребру γ_p. При этом $\eta(u')$ не сонаправлен с γ_p, если $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r)>3[\dfrac{\lambda+2}{3}]-\lambda$, и не противоположно направлен γ_p, если $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r)\leqslant 3[\dfrac{\lambda}{3}]-\lambda$.

Из доказательства утверждения 2.7 вытекает, что если неравенство $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant 0$ верно для любой деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$, где $\eta(u')$ коллинеарен ребру γ_p, то $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant 0$ для произвольной деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$. Поэтому, достаточно ограничиться рассмотрением лишь деформаций, для которых $\eta(u')$ коллинеарен ребру γ_p.

Рассмотрим произвольную деформацию $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$, для которой $\eta(u')$ коллинеарен ребру γ_p, но не являющуюся допустимой. Определим отображение $\bar\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$, положив $\bar\eta(x)=\eta(x)$ для любой вершины $x\in V_{G'}\setminus\{u'\}$ и $\bar\eta(u')=0$. Получаем $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant\mathfrak{D}(\Gamma',\bar\eta)\geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо, поскольку $\mathfrak{D}(\Gamma',\bar\eta)\geqslant 0$ по предположению.

2) Пусть z инцидентна только точечным ребрам γ_i. Из доказательства утверждения 2.8 вытекает, что если неравенство $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant 0$ верно для любой деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$, где $\eta(u')$ коллинеарен ребру γ_i, то $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant 0$ для произвольной деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением лишь деформаций, для которых $\eta(u')$ коллинеарен ребру γ_i.

Рассмотрим произвольную деформацию $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$, для которой $\eta(u')$ коллинеарен ребру γ_p, но не являющуюся допустимой. Можно считать, что ребро γ_p является 1-граничным, так как $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)=\mathfrak{D}(\Gamma'_1,\eta)+\mathfrak{D}(\Gamma'_1,\eta)\geqslant\mathfrak{D}(\Gamma'_1,\eta)$, где Γ_k — сети, полученные из сети Γ разрезанием по ребру γ_p, а Γ'_k — их базовые типы расщепления, причем Γ_2 не содержит вершину z. Поскольку ребро γ_p является 1-граничным, то одно из оставшихся ребер γ_q и γ_r, где $q\neq p$ и $r\neq p$, скажем γ_q, не является 1-граничным.

2.1) Если ребро γ_r не является 1-граничным и $\eta(u')$ параллелен γ_p, то $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r)>3[\dfrac{\lambda+2}{3}]-\lambda$, когда $\eta(u')$ сонаправлен с γ_p, и $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r)<3[\dfrac{\lambda}{3}]-\lambda$, когда $\eta(u')$ противоположно направлен γ_p. Определим отображение $\bar\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$, положив $\bar\eta(x)=\eta(x)$ для любой вершины $x\in V_{G'}\setminus\{u'\}$ и $\bar\eta(u')=0$. Получаем $\mathfrak{D}(\Gamma',\eta)\geqslant\mathfrak{D}(\Gamma',\bar\eta)\geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо, поскольку $\mathfrak{D}(\Gamma',\bar\eta)\geqslant 0$ по предположению.

2.2) Если ребро γ_r является 1-граничным и $\eta(u')$ сонаправлен с γ_p, то $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r) \geqslant 3[\dfrac{\lambda+2}{3}] - \lambda$ или $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r) = \mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_r)$. При $\mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_q) \geqslant 3[\dfrac{\lambda+3}{3}] - \lambda$ представим вектор $\eta(u')$ в виде $\eta_1+\eta_2$, где η_1 противоположно направлен γ_r, а η_2 противоположно направлен γ_q.

Определим отображение $\bar{\eta}\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив $\bar{\eta}(x) = \eta(x)$ для любой вершины $x \in V_{G'} \setminus \{u'\}$, $\bar{\eta}(u') = \eta_1$ для $\mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_q) \geqslant 3[\dfrac{\lambda+3}{3}] - \lambda$ и $\bar{\eta}(u') = 0$ для $\mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_q) < 3[\dfrac{\lambda+3}{3}] - \lambda$. Отметим, что в этом случае деформация $\bar{\eta}$ является допустимой в вершине z', так как $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_p) \neq \mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_r)$. Получаем $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\eta) \geqslant \mathfrak{D}\,(\Gamma',\bar{\eta}) \geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо, поскольку $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\bar{\eta}) \geqslant 0$ по предположению.

2.3) Если ребро γ_r является 1-граничным и $\eta(u')$ противоположно направлен γ_p, то $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r) \leqslant 3[\dfrac{\lambda}{3}] - \lambda$ или $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_r) = \mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_r)$. При $\mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_q) \leqslant 3[\dfrac{\lambda-1}{3}] - \lambda$ представим вектор $\eta(u')$ в виде $\eta_1+\eta_2$, где η_1 сонаправлен с γ_r, а η_2 сонаправлен с γ_q.

Определим отображение $\bar{\eta}\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив $\bar{\eta}(x) = \eta(x)$ для любой вершины $x \in V_{G'} \setminus \{u'\}$, $\bar{\eta}(u') = \eta_1$ для $\mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_q) \leqslant 3[\dfrac{\lambda-1}{3}] - \lambda$ и $\bar{\eta}(u') = 0$ для $\mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_q) > 3[\dfrac{\lambda-1}{3}] - \lambda$. Отметим, что в этом случае деформация $\bar{\eta}$ является допустимой в вершине z', так как $\mathrm{fall}(\gamma_q,\gamma_p) \neq \mathrm{fall}(\gamma_p,\gamma_r)$. Получаем $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\eta) \geqslant \mathfrak{D}\,(\Gamma',\bar{\eta}) \geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо, поскольку $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\bar{\eta}) \geqslant 0$ по предположению. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3.4. *Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — существенная сеть, и $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ — базовый тип ее расщепления. Сеть Γ' слабо экстремальна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\eta) \geqslant 0$ для любой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей следующему условию: если $\gamma = \{\Gamma'\colon [u_1,u_2] \to \mathbb{R}^2\}$ — произвольное ребро сети Γ', и векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ не равны нулю, то вектор $\eta(u_1) - \eta(u_2)$ параллелен ребру γ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\eta) \geqslant 0$ для деформации, удовлетворяющей условию настоящего утверждения. Докажем по индукции, что $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\eta') \geqslant 0$ для любой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$. Индукцию будем проводить по количеству внутренних вершин базового типа расщепления Γ'.

Для $n = 1$ утверждение теоремы вытекает из локальной структуры. Пусть утверждение верно для сетей, где число внутренних вершин меньше n.

Рассмотрим произвольную деформацию $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ', которая содержит ровно n внутренних вершин. Пусть $\gamma = \{\Gamma'\colon [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^2\}$ — ребро сети Γ', не удовлетворяющее условию теоремы, т.е. векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ не равны нулю, а вектор $\eta(u_1) - \eta(u_2)$ не параллелен ребру γ. Тогда ребро γ не является вырожденным, поскольку существенная сеть не может содержать вырожденных ребер $\gamma = \{\Gamma'\colon [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^2\}$, где вершины u_i — внутренние.

Пусть $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$ — сети, полученные из сети Γ в результате разрезания Γ по ребру $\gamma = \{\Gamma\colon \pi([u_1, u_2]) \to \mathbb{R}^2\}$, где $\pi\colon G' \to G$ — слабая проекция, $i = 1, 2$. Обозначим через $\Gamma'_i\colon G'_i \to \mathbb{R}^2$ базовые типы расщепления сетей $\Gamma_i\colon G_i \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$. Без ограничения общности будем считать, что Γ'_i содержит вершину $z_i = \{\Gamma'\colon u_i \to \mathbb{R}^2\}$, $i = 1, 2$. Количество внутренних вершин в каждой из них меньше n, поэтому, по предположению индукции, сети Γ'_i слабо экстремальны.

1) Если $p_{u_i}\big(\gamma, \eta(u_i), \eta(u_j)\big) = p_{u_i}\big(\gamma, \eta(u_i), 0\big)$, $j \neq i$, для любого $i = 1, 2$, то $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) = \sum\limits_{i=1}^{2} \mathfrak{D}\,(\Gamma'_i, \eta) \geqslant 0$.

2) Пусть одно из равенств $p_{u_i}\big(\gamma, \eta(u_i), \eta(u_j)\big) = p_{u_i}\big(\gamma, \eta(u_i), 0\big)$, $j \neq i$, $i = 1, 2$, неверно.

Если $p_{u_k}\big(\gamma, \eta(u_k), \eta(u_l)\big) \neq p_{u_k}\big(\gamma, \eta(u_k), 0\big)$, то $p_{u_l}\big(\gamma, \eta(u_l), \eta(u_k)\big) =$
$= p_{u_l}\big(\gamma, \eta(u_l), 0\big)$.

Определим отображение $\bar\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$, положив $\bar\eta(v) = \eta(v)$ для любой вершины $v \in V_{G'_k}$, и $\bar\eta(w) = \dfrac{\rho_\lambda\big(\eta'(u_l)\big)}{\rho_\lambda\big(\eta(u_l)\big)}\eta(w)$ для любой вершины $w \in V_{G'_l}$, где вектор $\eta'(u_l)$ сонаправлен с $\eta(u_l)$, а вектор $\eta(u_k) - \eta'(u_l)$ параллелен ребру γ.

Используя равенство $p_{u_i}\big(\gamma, \bar\eta(u_i), \bar\eta(u_j)\big) = p_{u_i}\big(\gamma, \eta(u_i), \eta(u_j)\big)$, получаем

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) = \mathfrak{D}\,(\Gamma', \bar\eta) + \mathfrak{D}\,(\Gamma'_l, \eta - \bar\eta) \geqslant \mathfrak{D}\,(\Gamma', \bar\eta),$$

так как сеть Γ'_l слабо экстремальна.

Мы свели деформацию η к деформации $\bar\eta$, для которой хотя бы одно ребро сети Γ' удовлетворяет условию настоящего утверждения. Поступая аналогично с остальными ребрами, получим, что или Γ' слабо экстремальна по **1)**, или $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) \geqslant \mathfrak{D}\,(\Gamma', \bar\eta)$, где деформация $\bar\eta$ полностью удовлетворяет условию теоремы. Но по предположению для таких деформаций выполнено неравенство $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \bar\eta) \geqslant 0$, следовательно, сеть Γ' слабо экстремальна. Утверждение доказано. ■

Определение. Деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой*, если она допустима в каждой вершине сети Γ' и удовлетворяет следующему условию: если $\gamma = \{\Gamma'\colon [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^2\}$ — произвольное ребро сети Γ', и векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ одновременно не равны нулю и не параллельны образу ребра γ, то вектор $\eta(u_1)-\eta(u_2)$ параллелен образу ребра γ (условия $\eta(u_i)\neq 0$, $i=1,\ 2$, и определение приведенной компоненты гарантируют, что γ — невырожденное ребро).

Используя утверждения 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4, получаем теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2,\rho_\lambda)$, и $\Gamma'\colon G'\to\mathbb{R}^2$ — единственный базовый тип ее расщепления. Пусть $R_{\Gamma'}(x)$ — множество не вырожденных ребер сети Γ', инцидентных вершине x сети Γ'. Тогда сеть Γ экстремальна, если и только если для каждой допустимой деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$ следующая сумма по всем приведенным компонентам $\mathcal{H}(z)\colon H(u)\to\mathbb{R}^2$ сети Γ', где $z=\{\Gamma:u\to\mathbb{R}^2\}$ — вершина сети Γ, неотрицательна*:

$$\mathfrak{D}\,(\Gamma',\eta)=\sum_{\substack{\mathcal{H}(z)\colon u'\to\mathbb{R}^2,\\ \gamma_i'=\{\Gamma'\colon[u',u_i']\to\mathbb{R}^2\}\in\\ \in R_{\Gamma'}(z'),\ i=1,2,3}}\Big\langle\sum_{i=1}^{3}p_{u'}(\gamma_i',\eta(u'),\eta(u_i')),\eta(u')\Big\rangle+$$

$$+\sum_{\substack{\mathcal{H}(z)\colon[u',v']\to\mathbb{R}^2,\\ \gamma_i'=\{\Gamma'\colon[u',u_i']\to\mathbb{R}^2\}\in\\ \in R_{\Gamma'}(z'),\ i=1,2}}\Big\{\Big\langle\sum_{i=1}^{2}p_{u'}(\gamma_i',\eta(u'),\eta(u_i')),\eta(u')\Big\rangle+\rho_\lambda(\eta(u'))\Big\}\geqslant 0.$$

Определение. Деформация $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *строго допустимой*, если она допустима, не равна нулю в каждой внутренней вершине графа G' и удовлетворяет следующему условию: если $\gamma=\{\Gamma'\colon[u_1,u_2]\to\mathbb{R}^2\}$ — произвольное не 1-граничное невырожденное ребро сети Γ', то векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ не параллельны, а вектор $\eta(u_1)-\eta(u_2)$ — параллелен образу ребра γ.

Замечание. Не для каждой существенной сети существует хотя бы одна строго допустимая деформация.

Используя понятие строго допустимой деформации, получаем

Теорема 3.2. *Пусть $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2,\rho_\lambda)$, и $\Gamma'\colon G'\to\mathbb{R}^2$ — единственный базовый тип ее расщепления. Тогда сеть Γ экстремальна, если и только если каждая собственная подсеть сети Γ экстремальна, и для каждой строго допустимой деформации $\eta\colon V_{G'}\to\mathbb{R}^2$ выполнено неравенство $\mathfrak{D}\,(\Gamma',\eta)\geqslant 0$.*

Замечание. Из равенства $\mathfrak{D}\,(\Gamma', a\eta) = a\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta)$ для любого $a \geqslant 0$ вытекает, что неравенство $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ из теоремы 3.2 достаточно проверить лишь для конечного числа строго допустимых деформаций. В качестве деформаций мы выбираем деформации η с $\|\eta\| = 1$, где $\|\eta\| = \max\limits_{x \in V_{G'}} \|\eta(x)\|$. Пусть $\Lambda(\Gamma') = \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ — все строго допустимые деформации для Γ' с единичной нормой. Далее, каждая сеть имеет конечное число собственных подсетей, и для проверки их экстремальности можно воспользоваться теоремой 3.2. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольная существенная сеть на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ *с единственным базовым типом* $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ *своего расщепления, и* $\Gamma_m\colon G_m \to \mathbb{R}^2$*,* $m = 1, \ldots, l$*, — все ее существенные собственные подсети с базовыми типами* $\Gamma'_m\colon G'_m \to \mathbb{R}^2$ *своего расщепления. Тогда сеть* Γ *экстремальна, если и только если для всех строго допустимых деформаций* $\eta \in \Lambda(\Gamma')$ *и* $\eta_m \in \Lambda(\Gamma'_m)$ *выполнены неравенства* $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) \geqslant 0$*,* $\mathfrak{D}\,(\Gamma'_m, \eta_m) \geqslant 0$*. Таким образом, условие экстремальности существенной сети сводится к проверке справедливости конечного числа неравенств на компоненты векторов* η *и* η_m*.*

Глава 4.

Критерий экстремальности дерева на λ-нормированной плоскости

В данной главе мы сформулируем геометрический критерий экстремальности произвольного погруженного дерева на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$. Во всей главе считаем, что $\lambda \neq 2$, 3, 4, 6.

4.1. Представление сети словом

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости. Из утверждения 2.9 следует, что сеть Γ является объединением образующего пути $\mathcal{P}\colon P \to \mathbb{R}^2$, все ребра которого — точечные, и 1-граничных ребер, инцидентных некоторым вершинам из $\mathcal{P}$. Зададим ориентацию на сети Γ, ориентировав путь $\mathcal{P}$ одним из двух возможных способов, а оставшиеся ребра ориентировав от вершин пути $\mathcal{P}$. Сеть Γ, наделенная такой ориентацией, называется *правильно ориентированной*. Обозначим через $\{\pi_1, \dots, \pi_{n-1}\}$, где $n \geqslant 2$, последовательно ориентированные ребра пути $\mathcal{P}$ (ребро π_l ориентировано от вершины z_l), а через $z_1, \dots, z_n$ — все вершины этого пути, где вершина z_i инцидентна ребрам π_{i-1} и π_i, $i = 2, \dots, n-1$, а z_1 и z_n — ребрам π_1 и π_{n-1} соответственно. Пусть γ — ориентированное ребро правильно ориентированной сети Γ, не принадлежащее $\mathcal{P}$ и инцидентное вершине z_l. Если базис (π_{l-1}, γ) при $l \neq 1$ или базис (π_1, γ) при $l = 1$ положительно ориентирован на $\mathbb{R}^2$, то обозначим γ через ε_l^+, в противном случае обозначим γ через ε_l^-. Поставим в соответствие вершине z_1 букву a_i, вершине z_l, где $2 \leqslant l \leqslant n-1$, — букву $b_{j_{l-1}}$, а вершине z_n — букву c_k как показано в таблицах 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

В результате каждой правильно ориентированной сети, содержащей $n \geqslant 2$ вершин степени больше 1, мы поставили в соответствие слово вида $a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k$, где при $\varkappa = 1$, 2 выполняется $1 \leqslant i, k \leqslant 9$, $1 \leqslant j_m \leqslant 10$, а

Вершина z_1/z_n при $\varkappa = 1,\ 2$		
Степень вершины	Условия на инцидентные z_1/z_n ребра	Буква
2	z_1/z_n инцидентна точечному ребру $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$	a_1/c_1
2	z_1/z_n инцидентна точечному ребру $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$	a_2/c_2
2	z_1/z_n инцидентна неточечному ребру $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$	a_3/c_3
2	z_1/z_n инцидентна неточечному ребру $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$	a_4/c_4
3	z_1/z_n инцидентна неточечному ребру $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$	a_5/c_5
3	z_1/z_n инцидентна неточечному ребру $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$	a_6/c_6
3	z_1/z_n инцидентна точечным ребрам и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+) = 4\varkappa - 6$	a_7/c_7
3	z_1/z_n инцидентна точечным ребрам и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-) = 4\varkappa - 6$	a_8/c_8
3	z_1/z_n инцидентна точечным ребрам и $\operatorname{fall}(\varepsilon_1^+, \varepsilon_1^-)/\operatorname{fall}(\varepsilon_n^+, \varepsilon_n^-) = 4\varkappa - 6$	a_9/c_9

Таблица 4.1.

Вершина z_l при $\varkappa = 1,\ 2$		
Степень вершины	Ориентация базиса (π_{l-1}, π_l) на $\mathbb{R}^2$ и условия на инцидентные z_l ребра	Буква
2	положительная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 3 - 2\varkappa$	b_1
2	отрицательная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 3 - 2\varkappa$	b_2
2	положительная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 4\varkappa - 6$	b_3
2	отрицательная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 4\varkappa - 6$	b_4
3	положительная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 4\varkappa - 6$	b_5
3	отрицательная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 4\varkappa - 6$	b_6
3	отрицательная и $\operatorname{fall}(\varepsilon_l^+, \pi_l) = 4\varkappa - 6$	b_7
3	положительная и $\operatorname{fall}(\varepsilon_l^-, \pi_l) = 4\varkappa - 6$	b_8
3	отрицательная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+) = 4\varkappa - 6$	b_9
3	положительная и $\operatorname{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-) = 4\varkappa - 6$	b_{10}

Таблица 4.2.

Вершина z_1/z_n при $\varkappa = 0$		
Степень вершины	Условия на инцидентные z_1/z_n ребра	Буква
2	z_1/z_n инцидентна точечному ребру $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$	a_1/c_1
2	z_1/z_n инцидентна точечному ребру $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$	a_2/c_2
2	z_1/z_n инцидентна неточечному ребру $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$	a_3/c_3
2	z_1/z_n инцидентна неточечному ребру $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$	a_4/c_4
3	z_1/z_n инцидентна неточечным ребрам $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$, $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$ и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+) = 3$	a_5/c_5
3	z_1/z_n инцидентна неточечным ребрам $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$, $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$ и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+) = 0$	a_6/c_6
3	z_1/z_n инцидентна одному неточечному ребру $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$ и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+) = 3$	a_7/c_7
3	z_1/z_n инцидентна одному неточечному ребру $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$ и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-) = 3$	a_8/c_8
3	z_1/z_n инцидентна одному неточечному ребру $\varepsilon_1^-/\varepsilon_n^-$ и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-) = 0$	a_9/c_9
3	z_1/z_n инцидентна одному неточечному ребру $\varepsilon_1^+/\varepsilon_n^+$ и $\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+)/\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+) = 0$	a_{10}/c_{10}
3	z_1/z_n инцидентна только точечным ребрам и пара $\big(\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+), \operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)\big)$ / $\big(\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+), \operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-)\big)$ равна $(3, 0)$	a_{11}/c_{11}
3	z_1/z_n инцидентна только точечным ребрам и пара $\big(\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+), \operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)\big)$ / $\big(\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+), \operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-)\big)$ равна $(0, 3)$	a_{12}/c_{12}
3	z_1/z_n инцидентна только точечным ребрам и пара $\big(\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+), \operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)\big)$ / $\big(\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+), \operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-)\big)$ равна $(0, -3)$	a_{13}/c_{13}
3	z_1/z_n инцидентна только точечным ребрам и пара $\big(\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+), \operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)\big)$ / $\big(\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+), \operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-)\big)$ равна $(-3, 0)$	a_{14}/c_{14}
3	z_1/z_n инцидентна только точечным ребрам и пара $\big(\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+), \operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)\big)$ / $\big(\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+), \operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-)\big)$ равна $(3, -3)$	a_{15}/c_{15}
3	z_1/z_n инцидентна только точечным ребрам и пара $\big(\operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^+), \operatorname{fall}(\pi_1, \varepsilon_1^-)\big)$ / $\big(\operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^+), \operatorname{fall}(\pi_{n-1}, \varepsilon_n^-)\big)$ равна $(-3, 3)$	a_{16}/c_{16}

Таблица 4.3.

Вершина z_l при $\varkappa = 0$		
Степень вершины	Ориентация базиса (π_{l-1}, π_l) на $\mathbb{R}^2$ и условия на инцидентные z_l ребра	Буква
2	положительная и $\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 3$	b_1
2	отрицательная и $\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 3$	b_2
2	положительная и $\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 0$	b_3
2	отрицательная и $\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \pi_l) = 0$	b_4
3	положительная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^-)\big)$ равна $(0, 0)$	b_5
3	отрицательная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^+)\big)$ равна $(0, 0)$	b_6
3	положительная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^-)\big)$ равна $(0, -3)$	b_7
3	отрицательная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^+)\big)$ равна $(-3, 0)$	b_8
3	положительная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^-)\big)$ равна $(-3, 0)$	b_9
3	отрицательная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^+)\big)$ равна $(0, -3)$	b_{10}
3	отрицательная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^+)\big)$ равна $(0, 3)$	b_{11}
3	положительная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^-)\big)$ равна $(3, 0)$	b_{12}
3	отрицательная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^+)\big)$ равна $(3, 0)$	b_{13}
3	положительная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^-)\big)$ равна $(0, 3)$	b_{14}
3	положительная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^-)\big)$ равна $(3, -3)$	b_{15}
3	отрицательная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^+)\big)$ равна $(-3, 3)$	b_{16}
3	положительная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^-), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^-)\big)$ равна $(-3, 3)$	b_{17}
3	отрицательная и пара $\big(\mathrm{fall}(\pi_{l-1}, \varepsilon_l^+), \mathrm{fall}(\pi_l, \varepsilon_l^+)\big)$ равна $(3, -3)$	b_{18}

Таблица 4.4.

при $\varkappa = 0$ имеем $1 \leqslant i, k \leqslant 16$, $1 \leqslant j_m \leqslant 18$. В обоих случаях $1 \leqslant m \leqslant n-2$.

Множество всех слов вида $a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k$ обозначим через $\mathcal{A}$. Слово $\mathfrak{a}$, соответствующее правильно ориентированной сети Γ, будем записывать в виде $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$.

Замечание. Отметим, что одно и то же слово может соответствовать нескольким сетям. В дальнейшем мы покажем, что сети, которым соответствует одно и то же слово, экстремальны или не экстремальны одновременно. Поэтому для исследования экстремальности сети такая "факторизация" оправдана.

Пусть $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ — единственный базовый тип расщепления сети Γ, и $z'_l = \{\Gamma'\colon u'_l \to \mathbb{R}^2\}$ — представители вершин $z_l = \{\Gamma\colon u_l \to \mathbb{R}^2\}$, $l = 1, \dots, n-1$, сети Γ в сети Γ'. Отметим, что вершины z_l могут быть как внутренними, так и граничными, а вершины z'_l — только внутренними.

Определение. Строго допустимая деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *положительно ориентированной* для слова $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$, если базисы $\bigl(\pi_l, \eta(u'_l)\bigr)$, где $l = 1, \dots, n-1$, и $\bigl(\pi_{n-1}, \eta(u'_n)\bigr)$ положительно ориентированы на $\mathbb{R}^2$, и *отрицательно ориентированной* для слова $\mathfrak{a}$, если базисы $\bigl(\pi_l, \eta(u'_l)\bigr)$, где $l = 1, \dots, n-1$, и $\bigl(\pi_{n-1}, \eta(u'_n)\bigr)$ отрицательно ориентированы на $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Не для каждого слова $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$ существует как положительно, так и отрицательно ориентированная строго допустимая деформация сети Γ'. Например, если слово $\mathfrak{a}$ содержит букву b_2 (b_1), то для слова $\mathfrak{a}$ не существует положительно (отрицательно) ориентированной строго допустимой деформации.

Обозначим через $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ множество положительно ориентированных для слова $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$ строго допустимых деформаций сети Γ' с единичной нормой, а через $\Lambda^-(\mathfrak{a})$ — множество отрицательно ориентированных для слова $\mathfrak{a}$ строго допустимых деформаций сети Γ' с единичной нормой. Напомним, что под нормой $\|\eta\|$ деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ мы понимаем выражение $\max\limits_{x \in V_{G'}} \|\eta(x)\|$.

Из определения допустимой деформации вытекает

Утверждение 4.1. *Пусть* $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. *Тогда имеет место следующее равенство*:
$$\Lambda(\Gamma') = \Lambda^+(\mathfrak{a}) \cup \Lambda^-(\mathfrak{a}).$$

Опишем все слова $\mathfrak{a}$ из $\mathcal{A}$, для которых множества $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ и $\Lambda^-(\mathfrak{a})$ непусты. Из определения строго допустимой деформации получаем

Утверждение 4.2. *Множество $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ непусто тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) при $\varkappa = 1, 2$ выполняется $i, k \neq 2, 4, 6+\varkappa$, $j_m \neq 2, 4$, $m = 1, \dots, n-2$;

2) при $\varkappa = 0$ выполняется $i, k = 2q + 1$, $j_m = 2q + 1, 6, 16, 17, 18$, $0 \leqslant q \leqslant 7$, $m = 1, \dots, n - 2$.

Множество $\Lambda^-(\mathfrak{a})$ непусто тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) при $\varkappa = 1, 2$ выполняется $i, k \neq 1, 3, 9-\varkappa$, $j_m \neq 1, 3$, $m = 1, \dots, n-2$;

2) при $\varkappa = 0$ выполняется $i, k = 2q$, $j_m = 2q, 5, 15, 17, 18$, $1 \leqslant q \leqslant 8$, $m = 1, \dots, n - 2$.

Утверждение 4.3. *Пусть k_i — количество букв a_i и c_i в слове $\mathfrak{a}$, а l_i — количество букв b_i. Тогда, если множество $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ непусто, то его мощность равна 2^{l_1} для $\varkappa = 1, 2$ и $2^{l_1+m_{15}}$ для $\varkappa = 0$. Аналогично, если множество $\Lambda^-(\mathfrak{a})$ непусто, то его мощность равна 2^{l_2} для $\varkappa = 1, 2$ и $2^{l_2+m_{16}}$ для $\varkappa = 0$.*

Для $\varkappa = 1, 2$ положим:

1) $\partial_l(b_{i+2(\varkappa-1)}) = a_i$, $i = 1, 2$, $\partial_l(b_5) = \partial_l(b_7) = a_7$, $\partial_l(b_6) = \partial_l(b_8) = a_8$, $\partial_l(b_9) = \partial_l(b_{10}) = a_9$;

2) $\partial_r(b_{i+2(\varkappa-1)}) = c_i$, $i = 1, 2$, $\partial_r(b_5) = \partial_r(b_9) = c_7$, $\partial_r(b_6) = \partial_r(b_{10}) = c_8$, $\partial_r(b_7) = \partial_r(b_8) = c_9$.

Аналогично, для $\varkappa = 0$ положим:

1) $\partial_l(b_i) = a_i$, $i = 1, 2$, $\partial_l(b_7) = \partial_l(b_{11}) = a_{15}$, $\partial_l(b_8) = \partial_l(b_{17}) = a_{12}$, $\partial_l(b_9) = \partial_l(b_{16}) = a_{11}$, $\partial_l(b_{10}) = \partial_l(b_{14}) = a_{16}$, $\partial_l(b_{12}) = \partial_l(b_{18}) = a_{14}$, $\partial_l(b_{13}) = \partial_l(b_{15}) = a_{13}$;

2) $\partial_r(b_i) = c_i$, $i = 1, 2$, $\partial_r(b_7) = \partial_r(b_{18}) = c_{11}$, $\partial_r(b_8) = \partial_r(b_{12}) = c_{16}$, $\partial_r(b_9) = \partial_r(b_{13}) = c_{15}$, $\partial_r(b_{10}) = \partial_r(b_{15}) = c_{12}$, $\partial_r(b_{11}) = \partial_r(b_{17}) = c_{13}$, $\partial_r(b_{14}) = \partial_r(b_{16}) = c_{14}$.

Определение. Слово $\mathfrak{b}$ называется *собственным подсловом слова* $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_m} c_k$, если оно может быть представлено в одном из следующих видов:
$a_i b_{j_1} \dots b_{j_{p-1}} \partial_r(b_{j_p})$, $\partial_l(b_{j_q}) b_{j_{q+1}} \dots b_{j_m} c_k$, $\partial_l(b_{j_q}) b_{j_{q+1}} \dots b_{j_{p-1}} \partial_r(b_{j_p})$, где $1 \leqslant p, q \leqslant m$. Слово $\mathfrak{b}$ называется *подсловом слова* $\mathfrak{a}$, если оно либо совпадает с $\mathfrak{a}$, либо является собственным подсловом слова $\mathfrak{a}$.

Определение. Рассмотрим произвольное слово $\mathfrak{a}$ и произвольное его подслово $\mathfrak{b}$, удовлетворяющее некоторому условию C. Будем говорить, что подслово $\mathfrak{b}$ *максимально относительно условия* C, если не существует подслова $\mathfrak{c}$ слова $\mathfrak{a}$, удовлетворяющего условию C, для которого слово $\mathfrak{b}$ является собственным подсловом. Будем говорить, что подслово $\mathfrak{b}$ *минимально относительно условия* C, если не существует подслова $\mathfrak{c}$ слова $\mathfrak{a}$, удовлетворяющего условию C и являющегося собственным подсловом слова $\mathfrak{b}$.

Пусть $\bar{\Gamma}$ — существенная подсеть правильно ориентированной существенной сети Γ. Ориентация образующего пути сети Γ естественным образом порождает ориентацию на образующем пути сети $\bar{\Gamma}$. Следовательно, на сети $\bar{\Gamma}$ единственным образом определяется ориентация, для которой сеть $\bar{\Gamma}$ правильно ориентирована. Из определений подслова произвольного слова и подсети произвольной сети получаем

Утверждение 4.4. *Слово* $W(\bar{\Gamma})$ *является подсловом слова* $W(\Gamma)$. *Верно и обратно, для каждого подслово* $\mathfrak{b}$ *слова* $W(\Gamma)$ *существует существенная подсеть* $\bar{\Gamma}$ *сети* Γ *такая, что* $\mathfrak{b} = W(\bar{\Gamma})$.

4.2. Формула первой вариации существенной сети

Пусть Γ — произвольная правильно ориентированная существенная сеть на λ-нормированной плоскости. Исследуем формулу вариации для сети Γ. Рассмотрим два случая.

(I) Пусть $\varkappa = 1, 2$, и $\mathfrak{G}$ — некоммутативная свободная группа с двумя образующими $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ и единицей $\mathfrak{e}$, т.е. любой элемент группы имеет вид $\mathfrak{x}^{k_1}\mathfrak{y}^{l_1}\ldots\mathfrak{x}^{k_m}\mathfrak{y}^{l_m}$, где $k_i, l_j \in \mathbb{Z}$. Пусть нам дан произвольный элемент $\mathfrak{g} = \mathfrak{x}^{k_1}\mathfrak{y}^{l_1}\ldots\mathfrak{x}^{k_m}\mathfrak{y}^{l_m}$ группы $\mathfrak{G}$. Число $\operatorname{ind}(\mathfrak{g}) = k_1 - l_1 + \cdots + k_m - l_m$ будем называть *индексом элемента* $\mathfrak{g}$.

Лемма 4.1. *Справедливы следующие равенства*:

1) $\operatorname{ind}(\mathfrak{e}) = 0$;

2) $\operatorname{ind}(\mathfrak{g}\mathfrak{h}) = \operatorname{ind}(\mathfrak{g}) + \operatorname{ind}(\mathfrak{h})$.

Определим отображение $\chi\colon \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$, положив $\delta = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{(3-2\varkappa)\pi}{3\lambda}\right)$, $\chi(\mathfrak{e}) = 0$, $\chi(\mathfrak{x}^k) = \frac{\delta}{2}(\delta^k - 1)$, $\chi(\mathfrak{y}^l) = \frac{\delta}{2}(1 - \delta^{-l})$ и продолжив на все остальные элементы $\mathfrak{g} = \mathfrak{x}^{k_1}\mathfrak{y}^{l_1}\ldots\mathfrak{x}^{k_m}\mathfrak{y}^{l_m}$, где $k_i, l_j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ при $2 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, $k_1, l_m \in \mathbb{Z}$, по правилу

$$\chi(\mathfrak{g}) = \chi(\mathfrak{x}^{k_1}) + \delta^{k_1}\chi(\mathfrak{y}^{l_1}) + \cdots + \delta^{k_1-l_1+\cdots+k_{m-1}-l_{m-1}}\chi(\mathfrak{x}^{k_m}) + \\ +\delta^{k_1-l_1+\cdots+k_{m-1}-l_{m-1}+k_m}\chi(\mathfrak{y}^{l_m}).$$

Лемма 4.2. *Имеет место равенство* $\chi(\mathfrak{g}\mathfrak{h}) = \chi(\mathfrak{g}) + \delta^{\mathrm{ind}(\mathfrak{g})}\chi(\mathfrak{h})$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\chi(\mathfrak{x}^{k_1+k_2}) = \chi(\mathfrak{x}^{k_1}) + \delta^{k_1}\chi(\mathfrak{x}^{k_2})$ и $\chi(\mathfrak{y}^{l_1+l_2}) = \chi(\mathfrak{y}^{l_1}) + \delta^{-l_1}\chi(\mathfrak{y}^{l_2})$. Действительно, $\chi(\mathfrak{x}^{k_1+k_2}) = \frac{\delta}{2}(\delta^{k_1+k_2}-1)$ и $\chi(\mathfrak{x}^{k_1}) + \delta^{k_1}\chi(\mathfrak{x}^{k_2}) = \frac{\delta}{2}(\delta^{k_1}-1) + \delta^{k_1}\frac{\delta}{2}(\delta^{k_2}-1) = \frac{\delta}{2}(\delta^{k_1+k_2}-1)$. Аналогично доказывается равенство $\chi(\mathfrak{y}^{l_1+l_2}) = \chi(\mathfrak{y}^{l_1}) + \delta^{-l_1}\chi(\mathfrak{y}^{l_2})$. Лемма доказана. ■

Рассмотрим произвольное множество $\mathfrak{Z}$, состоящее из двух элементов $\{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2\}$, и множество $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{G}\times\mathfrak{Z}$, состоящее из элементов $(\mathfrak{z}_i, \mathfrak{g}, \mathfrak{z}_j)$, где $\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}$. Построим отображения $\upsilon\colon \mathfrak{Z}\to\mathbb{R}$ и $\varsigma\colon \mathfrak{Z}\times\mathfrak{G}\times\mathfrak{Z}\to\mathbb{R}$, положив $\upsilon(\mathfrak{z}_i) = (-1)^i\dfrac{\delta(1-\delta)}{2(1+\delta)}$ и $\varsigma(\mathfrak{z}_i, \mathfrak{g}, \mathfrak{z}_j) = \upsilon(\mathfrak{z}_i) + \chi(\mathfrak{g}) + \delta^{\mathrm{ind}(\mathfrak{g})}\upsilon(\mathfrak{z}_j)$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P}^{\pm}$ пар $\big(\mathfrak{a}, \eta^{\pm}(\mathfrak{a})\big)$, где $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$ для некоторой сети Γ с базовым типом Γ' своего расщепления, причем множество $\Lambda^{\pm}(\mathfrak{a})$ непусто, и $\eta^{\pm}(\mathfrak{a})\in\Lambda^{\pm}(\mathfrak{a})$.

Так как для слова $\mathfrak{a}$ множество $\Lambda^{+}(\mathfrak{a})$ непусто, то, согласно утверждению 4.2, $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1}\ldots b_{j_l}c_k$, где $i, k \neq 2, 4, 6+\varkappa, j_m \neq 2, 4, m = 1, \ldots, l$. Построим отображения $\tau_1^{+}\colon \{a_i, c_k;\ i, k\neq 2, 4, 6+\varkappa\}\to\mathfrak{Z}$, $\tau_2^{+}\colon \{b_j;\ j\neq 2, 4\}\to\mathfrak{G}$ и $\tau^{+}\colon \mathfrak{P}^{+}\to\mathfrak{Z}\times\mathfrak{G}\times\mathfrak{Z}$, положив:

1) $\tau_1^{+}(a_i) = \tau_1^{+}(c_i) = \mathfrak{z}_2$, если $i = 1, 3, 5, 11-2\varkappa$, и $\tau_1^{+}(a_k) = \tau_1^{+}(c_k) = \mathfrak{z}_1$, если $k = 6, 7+\varkappa$;

2) $\tau_2^{+}(b_j) = \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}$, $j = 3,\ 5$, $\tau_2^{+}(b_6) = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$, $\tau_2^{+}(b_7) = \mathfrak{y}^{-1}$, $\tau_2^{+}(b_8) = \mathfrak{x}$, $\tau_2^{+}(b_9) = \mathfrak{x}^{-1}$, $\tau_2^{+}(b_{10}) = \mathfrak{y}$;

3) $\tau^{+}\big(\mathfrak{a}, \eta^{+}(\mathfrak{a})\big) = \tau^{+}\big(a_i b_{j_1}\ldots b_{j_l}c_k, \eta^{+}(\mathfrak{a})\big) =$
$= \big(\tau_1^{+}(a_i), \tau_2^{+}(b_{j_1})\ldots\tau_2^{+}(b_{j_l}), \tau_1^{+}(c_k)\big)$, причем $\tau_2^{+}(b_1) = \mathfrak{x}$, если деформация $\eta^{+}(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_1, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{\pi}{3} + \frac{(4\varkappa-6)\pi}{3\lambda}$, и $\tau_2^{+}(b_1) = \mathfrak{y}$, если деформация $\eta^{+}(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_1, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{\pi}{3} + \frac{(3-2\varkappa)\pi}{3\lambda}$.

Аналогично, так как для слова $\mathfrak{a}$ множество $\Lambda^{-}(\mathfrak{a})$ непусто, то, согласно утверждению 4.2, $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1}\ldots b_{j_l}c_k$, где $i, k \neq 1, 3, 9-\varkappa, j_m \neq 1, 3, m = 1, \ldots, l$. Построим отображения $\tau_1^{-}\colon \{a_i, c_k;\ i, k\neq 1, 3, 9-\varkappa\}\to\mathfrak{Z}$, $\tau_2^{-}\colon \{b_j;\ j\neq 1, 3\}\to\mathfrak{G}$ и $\tau^{-}\colon \mathfrak{P}^{-}\to\mathfrak{Z}\times\mathfrak{G}\times\mathfrak{Z}$, положив:

1) $\tau_1^{-}(a_i) = \tau_1^{-}(c_i) = \mathfrak{z}_2$, если $i = 2, 4, 6, 10-\varkappa$, и $\tau_1^{-}(a_k) = \tau_1^{-}(c_k) = \mathfrak{z}_1$, если $k = 5, 5+2\varkappa$;

2) $\tau_2^-(b_j) = \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}$, $j = 4,\ 6$, $\tau_2^-(b_5) = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$, $\tau_2^-(b_7) = \mathfrak{x}$, $\tau_2^-(b_8) = \mathfrak{y}^{-1}$, $\tau_2^-(b_9) = \mathfrak{y}$, $\tau_2^-(b_{10}) = \mathfrak{x}^{-1}$;

3) $\tau^-\big(\mathfrak{a}, \eta^-(\mathfrak{a})\big) = \tau^-\big(a_i b_{j_1} \ldots b_{j_l} c_k, \eta^-(\mathfrak{a})\big) =$
$= \big(\tau_1^-(a_i), \tau_2^-(b_{j_1}) \ldots \tau_2^-(b_{j_l}), \tau_1^-(c_k)\big)$, причем $\tau_2^-(b_2) = \mathfrak{x}$, если деформация $\eta^-(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_2, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{\pi}{3} + \frac{(4\varkappa-6)\pi}{3\lambda}$, и $\tau_2^-(b_2) = \mathfrak{y}$, если деформация $\eta^-(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_2, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{\pi}{3} + \frac{(3-2\varkappa)\pi}{3\lambda}$.

Замечание. Отображение $\tau^{\pm}$ каждой паре $\big(\mathfrak{a}, \eta^{\pm}(\mathfrak{a})\big)$ ставит в соответствие единственный элемент из $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{G} \times \mathfrak{Z}$.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости с единственным базовым типом $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ своего расщепления, который допускает хотя бы одну строго допустимую деформацию $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$. Выделим у сети Γ образующий путь и ориентируем его одним из двух возможных способов. Как и раньше, обозначим через $z_1, \ldots, z_n$ все последовательные вершины образующего пути. Вершины сети Γ, соответствующие вершинам z_i образующего пути, обозначим теми же буквами. Пусть $z_i = \{\Gamma\colon u_i \to \mathbb{R}^2\}$ и пусть $z_i' = \{\Gamma'\colon u_i' \to \mathbb{R}^2\}$ — это представитель вершины z_i в сети Γ. Вычислим $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta)$.

Утверждение 4.5. *Пусть* $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. *Если* η *принадлежит множеству* $\Lambda^{\pm}(\mathfrak{a})$, *то имеет место следующее равенство*: $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) = \frac{1}{\|\eta(u_1')\|}\varsigma\big(\tau^{\pm}(\mathfrak{a}, \eta)\big)$.

Доказательство. По теореме 3.1, справедлива следующая формула

$$\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) = \sum_{\substack{\mathcal{H}(z_i)\colon u_i' \to \mathbb{R}^2,\\ \gamma_{i_j}' = \{\Gamma'\colon [u_i', u_{i_j}''] \to \mathbb{R}^2\} \in\\ \in R_{\Gamma'}(z_k'),\ j=1,2,3}} \Big\langle \sum_{j=1}^{3} p_{u_i'}\big(\gamma_{i_j}', \eta(u_i'), \eta(u_{i_j}'')\big), \eta(u_i')\Big\rangle +$$
$$+ \sum_{\substack{\mathcal{H}(z_k)\colon [u_k', v_k'] \to \mathbb{R}^2,\\ \gamma_{k_j}' = \{\Gamma'\colon [u_k', u_{k_j}''] \to \mathbb{R}^2\} \in\\ \in R_{\Gamma'}(z_k'),\ j=1,2}} \Big\{\Big\langle \sum_{j=1}^{2} p_{u'}\big(\gamma_{k_j}', \eta(u_k'), \eta(u_{k_j}'')\big), \eta(u_k')\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta(u_k')\big)\Big\}. \tag{4.1}$$

Здесь $R_{\Gamma'}(x)$ — множество регулярных ребер сети Γ', инцидентных вершине x сети Γ', $\mathcal{H}(z_i)\colon H(u_i) \to \mathbb{R}^2$ — приведенная компонента сети Γ', где $z_i = \{\Gamma : u_i \to \mathbb{R}^2\}$ — вершина сети Γ, $z_i' = \{\Gamma'\colon u_i' \to \mathbb{R}^2\}$ — представитель вершины z_i сети Γ в сети Γ', где $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим только случай, когда η принадлежит множеству $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ (другой случай рассматривается аналогично). Тогда, согласно утверждению 4.2, $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k$, где $i, k \neq 2, 4, 6+\varkappa, j_m \neq 2, 4, m = 1, \dots, n-2$. Докажем формулу $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) = \frac{1}{\|\eta(u_1')\|}\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{a}, \eta)\big)$.

Имеем

$$\begin{gathered}\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{a}, \eta)\big) = \varsigma\big(\tau^+(a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k, \eta)\big) = \\ = \varsigma\big(\tau_1^+(a_i), \tau_2^+(b_{j_1}) \dots \tau_2^+(b_{j_{n-2}}), \tau_1^+(c_k)\big) = \\ = \upsilon\big(\tau_1^+(a_i)\big) + \chi\big(\tau_2^+(b_{j_1}) \dots \tau_2^+(b_{j_{n-2}})\big) + \delta^{\operatorname{ind}(\tau_2^+(b_{j_1}) \dots \tau_2^+(b_{j_{n-2}}))}\upsilon\big(\tau_1^+(c_k)\big).\end{gathered}$$

Поскольку деформация η строго допустимая, то она удовлетворяет следующему условию: если $\gamma' = \{\Gamma' \colon [w_1, w_2] \to \mathbb{R}^2\}$ — произвольное не 1-граничное невырожденное ребро сети Γ', то векторы $\eta(w_1)$ и $\eta(w_2)$ не параллельны, а вектор $\eta(w_1) - \eta(w_2)$ — параллелен образу ребра γ'. Поэтому в формуле (4.1) можно считать, что ковекторы $p_{u_i'}\big(\pi_i', \eta(u_i'), \eta(u_{i+1}')\big)$ и $p_{u_{i+1}'}\big(\pi_i', \eta(u_{i+1}'), \eta(u_i')\big)$ параллельны образу ребра $\pi_i' = \{\Gamma' \colon [u_i', u_{i+1}'] \to \mathbb{R}^2\}$, где $i = 1, \dots, n-1$. Найдем значение каждого слагаемого, входящего в формулу (4.1).

Пусть z_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, — вершина из Γ степени 3. Тогда этой вершине в формуле (4.1) соответствует слагаемое вида

$$\Big\langle \sum_{j=1}^{3} p_{u_i'}\big(\gamma_{i_j}', \eta(u_i'), \eta(u_{i_j}'')\big), \eta(u_i') \Big\rangle.$$

Поскольку вершина z_i имеет степень 3, то в слове $\mathfrak{a}$ она может соответствовать следующим буквам: a_5, a_6, $a_{7+\varkappa}$, a_9, b_j, где $j = 5, \dots, 10$, c_5, c_6, $c_{7+\varkappa}$, c_9.

Таким образом, $\Big\langle \sum\limits_{j=1}^{3} p_{u_i'}\big(\gamma_{i_j}', \eta(u_i'), \eta(u_{i_j}'')\big), \eta(u_i') \Big\rangle$ равно

1) $\|\eta(u_i')\|\upsilon(\mathfrak{z}_1) = -\|\eta(u_i')\|\dfrac{\delta(1-\delta)}{2(1+\delta)}$, если z_i, где $i = 1$ или n, соответствует букве a_6, $a_{7+\varkappa}$, c_6 или $c_{7+\varkappa}$;

2) $\|\eta(u_i')\|\upsilon(\mathfrak{z}_2) = \|\eta(u_i')\|\dfrac{\delta(1-\delta)}{2(1+\delta)}$, если z_i, где $i = 1$ или n, соответствует букве a_5, $a_{8+(3-2\varkappa)}$, c_5 или $c_{8+(3-2\varkappa)}$;

3) $\|\eta(u_i')\|\chi(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}) = \|\eta(u_i')\|(1-\delta)$, если z_i, где $2 \leqslant i \leqslant n-1$, соответствует букве b_5;

4) $\|\eta(u_i')\|\chi(\mathfrak{y}\mathfrak{x}) = -\|\eta(u_i')\|(1-\delta)$, если z_i, где $2 \leqslant i \leqslant n-1$, соответствует букве b_6;

5) $\|\eta(u_i')\|\chi(\mathfrak{y}^{-}1) = \|\eta(u_i')\|\dfrac{\delta}{2}(1-\delta)$, если z_i, где $2 \leqslant i \leqslant n-1$, соответствует букве b_7;

6) $\|\eta(u'_i)\|\chi(\mathfrak{x}) = -\|\eta(u'_i)\|\dfrac{\delta}{2}(1-\delta)$, если z_i, где $2 \leqslant i \leqslant n-1$, соответствует букве b_8;

7) $\delta\|\eta(u'_i)\|\chi(\mathfrak{x}^{-1}) = \|\eta(u'_i)\|\dfrac{\delta}{2}(1-\delta)$, если z_i, где $2 \leqslant i \leqslant n-1$, соответствует букве b_9;

8) $\delta\|\eta(u'_i)\|\chi(\mathfrak{y}) = -\|\eta(u'_i)\|\dfrac{\delta}{2}(1-\delta)$, если z_i, где $2 \leqslant i \leqslant n-1$, соответствует букве b_{10}.

Пусть z_k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, — вершина из Γ степени 2. Тогда этой вершине в формуле (4.1) соответствует слагаемое вида

$$\Big\langle \sum_{j=1}^{2} p_{u'}\big(\gamma'_{k_j}, \eta(u'_k), \eta(u''_{k_j})\big), \eta(u'_k)\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta(u'_k)\big).$$

Поскольку вершина z_k имеет степень 2, то в слове $\mathfrak{a}$ она может соответствовать следующим буквам: a_j, b_j, c_j, где $j = 1, 3$.

Таким образом, $\Big\langle \sum_{j=1}^{2} p_{u'}\big(\gamma'_{k_j}, \eta(u'_k), \eta(u''_{k_j})\big), \eta(u'_k)\Big\rangle + \rho_\lambda\big(\eta(u'_k)\big)$ равно

1) $\|\eta(u'_k)\|v(\mathfrak{z}_2) = \|\eta(u'_k)\|\dfrac{\delta(1-\delta)}{2(1+\delta)}$, если z_k, где $k = 1$ или n, соответствует букве a_i или c_i, $i = 1, 3$;

2) $\|\eta(u'_k)\|\chi(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}) = \|\eta(u'_i)\|(1-\delta)$, если z_k, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, соответствует букве b_3;

3) $\|\eta(u'_k)\|\chi(\mathfrak{x}) = -\|\eta(u'_i)\|\dfrac{\delta}{2}(1-\delta)$, если z_k, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, соответствует букве b_1, и $\eta(u'_k)$ образует с выходящим ребром из вершины z_k угол, равный $\frac{2\pi}{3} + \frac{(4\varkappa-6)\pi}{3n}$;

4) $\delta\|\eta(u'_k)\|\chi(\mathfrak{y}) = -\|\eta(u'_i)\|\dfrac{\delta}{2}(1-\delta)$, если z_k, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, соответствует букве b_1, и $\eta(u'_k)$ образует с выходящим ребром из вершины z_k угол, равный $\frac{2\pi}{3} + \frac{(3-2\varkappa)\pi}{3n}$.

Так как деформация η строго допустимая, то вектор $\eta(w_1) - \eta(w_2)$ параллелен образу ребра $\gamma' = \{\Gamma' \colon [w_1, w_2] \to \mathbb{R}^2\}$, когда векторы $\eta(w_1)$ и $\eta(w_2)$ не параллельны образу ребра γ'. Поэтому $\|\eta(w_1)\| = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\|\eta(w_2)\|$, где α_i — угол между $\eta(w_i)$ и образом ребра γ'. Осталось заметить, что $\dfrac{\sin\big(\frac{\pi}{3} + \frac{(4\varkappa-6)\pi}{3n}\big)}{\sin\big(\frac{\pi}{3} + \frac{(3-2\varkappa)\pi}{3n}\big)} = \delta$. Утверждение доказано. ■

(II) Пусть $\varkappa = 0$, и $\mathfrak{G}$ — некоммутативная свободная группа с шестью образующими $\mathfrak{x}_l$, где $l = 1, \ldots, 6$, и единицей $\mathfrak{e}$, т.е. любой элемент группы имеет вид $\mathfrak{x}_{p_1}^{k_1}\mathfrak{x}_{p_2}^{k_2}\ldots\mathfrak{x}_{p_m}^{k_m}$, где $k_j \in \mathbb{Z}$. Пусть нам дан произвольный элемент $\mathfrak{g} = \mathfrak{x}_{p_1}^{k_1}\mathfrak{x}_{p_2}^{k_2}\ldots\mathfrak{x}_{p_m}^{k_m}$ группы $\mathfrak{G}$. Числа $\mathrm{ind}_1(\mathfrak{g}) = -l_1 + l_2 - l_5 + l_6$, $\mathrm{ind}_2(\mathfrak{g}) =$

$-l_3+l_4+l_5-l_6$, где l_j — суммарная степень элемента $\mathfrak{x}_j$, будем называть *индексами элемента* $\mathfrak{g}$.

Лемма 4.3. *Справедливы следующие равенства:*

1) $\mathrm{ind}_m(\mathfrak{e})=0$, *где* $m=1,\ 2$;

2) $\mathrm{ind}_m(\mathfrak{g}\mathfrak{h})=\mathrm{ind}_m(\mathfrak{g})+\mathrm{ind}_m(\mathfrak{h})$, *где* $m=1,\ 2$.

Определим отображение $\chi\colon \mathfrak{G}\to\mathbb{R}$, положив $\delta_1=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{\lambda})}$, $\delta_2=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{\lambda})}$, $\chi(\mathfrak{e})=0$, $\chi(\mathfrak{x}_1^k)=(\delta_1^{-k}-1)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2\lambda})$, $\chi(\mathfrak{x}_2^k)=(1-\delta_1^k)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2\lambda})$, $\chi(\mathfrak{x}_3^k)=(1-\delta_2^{-k})\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2\lambda})$, $\chi(\mathfrak{x}_4^k)=(\delta_2^k-1)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2\lambda})$, $\chi(\mathfrak{x}_5^k)=2\delta_2\delta_1^{1-k}\dfrac{\delta_2^k-\delta_1^k}{\delta_2-\delta_1}\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{2\lambda}}{\sin\frac{\pi}{3}}$, $\chi(\mathfrak{x}_6^k)=2\delta_1\delta_2^{1-k}\dfrac{\delta_2^k-\delta_1^k}{\delta_2-\delta_1}\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{2\lambda}}{\sin\frac{\pi}{3}}$, и продолжив на все остальные элементы $\mathfrak{g}=\mathfrak{x}_{p_1}^{k_1}\mathfrak{x}_{p_2}^{k_2}\ldots\mathfrak{x}_{p_m}^{k_m}$, где $k_j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ при $2\leqslant j\leqslant m-1$, $k_1,k_m\in\mathbb{Z}$, по правилу

$$\chi(\mathfrak{g})=\chi(\mathfrak{x}_{p_1}^{k_1})+\cdots+\delta_1^{\mathrm{ind}_1(\mathfrak{x}_{p_1}^{k_1}\mathfrak{x}_{p_2}^{k_2}\ldots\mathfrak{x}_{p_{m-1}}^{k_{m-1}})}\delta_2^{\mathrm{ind}_2(\mathfrak{x}_{p_1}^{k_1}\mathfrak{x}_{p_2}^{k_2}\ldots\mathfrak{x}_{p_{m-1}}^{k_{m-1}})}\chi(\mathfrak{x}_{p_m}^{k_m}).$$

Лемма 4.4. *Имеет место равенство* $\chi(\mathfrak{g}\mathfrak{h})=\chi(\mathfrak{g})+\delta_1^{\mathrm{ind}_1(\mathfrak{g})}\delta_2^{\mathrm{ind}_2(\mathfrak{g})}\chi(\mathfrak{h})$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2. ■

Рассмотрим произвольное множество $\mathfrak{Z}$, состоящее из одного элемента $\{\mathfrak{z}\}$, и множество $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{G}\times\mathfrak{Z}$, состоящее из элементов $(\mathfrak{z},\mathfrak{g},\mathfrak{z})$, где $\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}$. Построим отображения $\upsilon\colon\mathfrak{Z}\to\mathbb{R}$ и $\varsigma\colon\mathfrak{Z}\times\mathfrak{G}\times\mathfrak{Z}\to\mathbb{R}$, положив $\upsilon(\mathfrak{z})=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\lambda}$ и $\varsigma(\mathfrak{z},\mathfrak{g},\mathfrak{z})=\upsilon(\mathfrak{z})+\chi(\mathfrak{g})+\delta_1^{\mathrm{ind}_1(\mathfrak{g})}\delta_2^{\mathrm{ind}_2(\mathfrak{g})}\upsilon(\mathfrak{z})$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P}^{\pm}$ пар $\big(\mathfrak{a},\eta^{\pm}(\mathfrak{a})\big)$, где $\mathfrak{a}=W(\Gamma)$ для некоторой сети Γ с базовым типом Γ' своего расщепления, причем множество $\Lambda^{\pm}(\mathfrak{a})$ непусто, и $\eta^{\pm}(\mathfrak{a})\in\Lambda^{\pm}(\mathfrak{a})$.

Так как для слова $\mathfrak{a}$ множество $\Lambda^{+}(\mathfrak{a})$ непусто, то, согласно утверждению 4.2, $\mathfrak{a}=a_ib_{j_1}\ldots b_{j_l}c_k$, где $i,k=2q{+}1$, $j_m=2q{+}1,6,16,17,18$, $0\leqslant q\leqslant 7$, $m=1,\ldots,l$. Построим отображения $\tau_1^{+}\colon\{a_i,c_k;\ i,k=2q{+}1,0\leqslant q\leqslant 7\}\to\mathfrak{Z}$, $\tau_2^{+}\colon\{b_j;\ j=2q+1,16,17,18,0\leqslant q\leqslant 7\}\to\mathfrak{G}$ и $\tau^{+}\colon\mathfrak{P}^{+}\to\mathfrak{Z}\times\mathfrak{G}\times\mathfrak{Z}$, положив:

1) $\tau_1^{+}(a_i)=\tau_1^{+}(c_i)=\mathfrak{z}$;

2) $\tau_2^{+}(b_j)=\mathfrak{e}$, $j=3,\ 5,\ 6$, $\tau_2^{+}(b_7)=\mathfrak{x}_1$, $\tau_2^{+}(b_9)=\mathfrak{x}_2$, $\tau_2^{+}(b_{11})=\mathfrak{x}_3$, $\tau_2^{+}(b_{13})=\mathfrak{x}_4$, $\tau_2^{+}(b_{15})=\mathfrak{x}_5$, $\tau_2^{+}(b_{16})=\mathfrak{x}_5^{-1}$, $\tau_2^{+}(b_{17})=\mathfrak{x}_6$, $\tau_2^{+}(b_{18})=\mathfrak{x}_6^{-1}$;

3) $\tau^{+}\big(\mathfrak{a},\eta^{+}(\mathfrak{a})\big)=\tau^{+}\big(a_ib_{j_1}\ldots b_{j_l}c_k,\eta^{+}(\mathfrak{a})\big)=$
$=\big(\tau_1^{+}(a_i),\tau_2^{+}(b_{j_1})\ldots\tau_2^{+}(b_{j_l}),\tau_1^{+}(c_k)\big)$, причем $\tau_2^{+}(b_1)=\mathfrak{x}_1$, если деформация

$\eta^+(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_1, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{\lambda}$, и $\tau_2^+(b_1) = \mathfrak{x}_2$, если деформация $\eta^+(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_1, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{\pi}{3}$.

Аналогично, так как для слова $\mathfrak{a}$ множество $\Lambda^-(\mathfrak{a})$ непусто, то, согласно утверждению 4.2, $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \ldots b_{j_l} c_k$, где $i, k = 2q$, $j_m = 2q, 5, 15, 17, 18$, $1 \leqslant q \leqslant 8$, $m = 1, \ldots, l$. Построим отображения $\tau_1^-\colon \{a_i, c_k;\ i,k = 2q, 1 \leqslant q \leqslant 8\} \to \mathfrak{Z}$, $\tau_2^-\colon \{b_j;\ j = 2q, 5, 15, 17, 18, 1 \leqslant q \leqslant 8\} \to \mathfrak{S}$ и $\tau^-\colon \mathfrak{P}^- \to \mathfrak{Z} \times \mathfrak{S} \times \mathfrak{Z}$, положив:

1) $\tau_1^-(a_i) = \tau_1^-(c_i) = \mathfrak{z}$;

2) $\tau_2^+(b_j) = \mathfrak{e}$, $j = 4,\ 5,\ 6$, $\tau_2^+(b_8) = \mathfrak{x}_2$, $\tau_2^+(b_{10}) = \mathfrak{x}_1$, $\tau_2^+(b_{12}) = \mathfrak{x}_4$, $\tau_2^+(b_{14}) = \mathfrak{x}_3$, $\tau_2^+(b_{15}) = \mathfrak{x}_6^{-1}$, $\tau_2^+(b_{16}) = \mathfrak{x}_6$, $\tau_2^+(b_{17}) = \mathfrak{x}_5^{-1}$, $\tau_2^+(b_{18}) = \mathfrak{x}_5$;

3) $\tau^-\big(\mathfrak{a}, \eta^-(\mathfrak{a})\big) = \tau^-\big(a_i b_{j_1} \ldots b_{j_l} c_k, \eta^-(\mathfrak{a})\big) =$
$= \big(\tau_1^-(a_i), \tau_2^-(b_{j_1}) \ldots \tau_2^-(b_{j_l}), \tau_1^-(c_k)\big)$, причем $\tau_2^-(b_2) = \mathfrak{x}_1$, если деформация $\eta^-(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_2, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{\lambda}$, и $\tau_2^-(b_2) = \mathfrak{x}_2$, если деформация $\eta^-(\mathfrak{a})$ в вершине сети Γ', соответствующей букве b_2, образует с выходящим ребром из этой вершины угол, равный $\frac{2\pi}{3}$.

Замечание. Отображение $\tau^\pm$ каждой паре $\big(\mathfrak{a}, \eta^\pm(\mathfrak{a})\big)$ ставит в соответствие единственный элемент из $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{S} \times \mathfrak{Z}$.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости с единственным базовым типом $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ своего расщепления, который допускает хотя бы одну строго допустимую деформацию $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$. Выделим у сети Γ образующий путь и ориентируем его одним из двух возможных способов. Как и раньше, обозначим через $z_1, \ldots, z_n$ все последовательные вершины образующего пути. Вершины сети Γ, соответствующие вершинам z_i образующего пути, обозначим теми же буквами. Пусть $z_i = \{\Gamma\colon u_i \to \mathbb{R}^2\}$ и пусть $z_i' = \{\Gamma'\colon u_i' \to \mathbb{R}^2\}$ — это представитель вершины z_i в сети Γ. Вычислим $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta)$ как и в случае $\varkappa = 1,\ 2$.

Утверждение 4.6. *Пусть $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. Если η принадлежит множеству $\Lambda^\pm(\mathfrak{a})$, то имеет место следующее равенство: $\mathfrak{D}\,(\Gamma', \eta) = d\varsigma\big(\tau^\pm(\mathfrak{a}, \eta)\big)$, где $d > 0$ — нормирующий множитель.*

4.3. Определения полуэкстремальных справа и слева слов

Определение. Рассмотрим произвольное слово $\mathfrak{b}$ из множества $\mathcal{A}$. Слово $\mathfrak{b}$ называется *положительным справа (слева) для данной строго допустимой деформации* $\eta \in \Lambda^+(\mathfrak{b})$ $(\eta \in \Lambda^-(\mathfrak{b}))$, если выполнено неравенство $\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{b}, \eta)\big) \geqslant 0$ $\Big(\varsigma\big(\tau^-(\mathfrak{b}, \eta)\big) \geqslant 0\Big)$. Слово $\mathfrak{b}$ называется *положительным справа (слева)*, если для любой строго допустимой деформации из $\Lambda^+(\mathfrak{b})$ $(\Lambda^-(\mathfrak{b}))$ слово $\mathfrak{b}$ положительно справа (слева) или множество $\Lambda^+(\mathfrak{b})$ $(\Lambda^-(\mathfrak{b}))$ пусто. Элемент $\mathfrak{b}$ называется *положительным*, если он положителен справа и слева.

Определение. Слово $\mathfrak{a}$ называется *полуэкстремальным справа (слева)*, если все его подслова положительны справа (слева).

Используя теорему 3.3 и утверждения 4.1, 4.4, 4.5, 4.6, получаем

Теорема 4.1. *Сеть* Γ *экстремальна тогда и только тогда, когда слово* $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$ *полуэкстремально справа и слева.*

4.4. Избавление от букв b_3, b_4, b_5 и b_6 для $\varkappa = 1$, 2

Пусть $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ — произвольное слово. Рассмотрим слово $\mathfrak{a}_{r(5,6)}$, которое получается из слова $\mathfrak{a}$ заменами $b_5 = b_9 b_7$ и $b_6 = b_{10} b_8$.

Определение. Будем говорить, что слово $\mathfrak{a}_{r(5,6)}$ получено из слова $\mathfrak{a}$ *редукцией по буквам* b_5 *и* b_6.

Теорема 4.2. *Слово* $\mathfrak{a}$ *полуэкстремально справа (слева) тогда и только тогда, когда полуэкстремально справа (слева) слово* $\mathfrak{a}_{r(5,6)}$.

Доказательство. Используя симметрию и теорему 4.1, достаточно доказать, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа тогда и только тогда, когда полуэкстремально справа слово $\mathfrak{a}_{r(5,6)}$.

Необходимость. Пусть слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа. Докажем, что слово $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{r(5,6)}$ полуэкстремально справа, т.е. надо доказать, что все подслова $\mathfrak{b}_l$ слова $\mathfrak{b}$ положительны справа, что равносильно справедливости неравенств $\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{b}_l, \eta_l^+)\big) \geqslant 0$ для любых строго допустимых деформаций $\eta_l^+ \in \Lambda^+(\mathfrak{b}_l)$.

Поскольку $\tau_2^+(b_5) = \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}$, $\tau_2^+(b_9) = \mathfrak{x}^{-1}$ и $\tau_2^+(b_7) = \mathfrak{y}^{-1}$, то $\mathrm{ind}\big(\tau_2^+(b_5)\big) = \mathrm{ind}\big(\tau_2^+(b_9)\tau_2^+(b_7)\big)$. Аналогично, поскольку $\tau_2^+(b_6) = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$, $\tau_2^+(b_{10}) = \mathfrak{y}$ и $\tau_2^+(b_8) = \mathfrak{x}$, то $\mathrm{ind}\big(\tau_2^+(b_6)\big) = \mathrm{ind}\big(\tau_2^+(b_{10})\tau_2^+(b_8)\big)$. Следовательно, положительность справа слова $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{r(5,6)}$ и слов $\mathfrak{b}_p$, для которых существует $q(p)$ такое, что имеет место равенство $\mathfrak{b}_p = {\mathfrak{a}_{q(p)}}_{r(5,6)}$, где $\mathfrak{a}_{q(p)}$ — некоторое подслово слова $\mathfrak{a}$, выполнена.

Достаточно рассмотреть только редукцию одной буквы.

1) Пусть $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_5 \dots b_{j_{n-2}} c_k$, тогда $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{r(5,6)} = a_i b_{j_1} \dots b_9 b_7 \dots b_{j_{n-2}} c_k$.

Осталось показать положительность справа слов:

a) $\mathfrak{c}_1 = a_i b_{j_1} \dots \partial_r(b_9)$,

b) $\mathfrak{c}_2 = a_i b_{j_1} \dots b_9 \partial_r(b_7) = a_i b_{j_1} \dots b_9 c_9$,

c) $\mathfrak{c}_3 = \partial_l(b_9) b_7 \dots b_{j_{n-2}} c_k = a_9 b_7 \dots b_{j_{n-2}} c_k$,

d) $\mathfrak{c}_4 = \partial_l(b_7) \dots b_{j_{n-2}} c_k$.

Поскольку $\partial_r(b_9) = \partial_r(b_5)$ и $\partial_l(b_7) = \partial_l(b_5)$, то положительность $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{c}_4$ следует из предположения теоремы (они являются собственными подсловами слова $\mathfrak{a}$). Отметим, что слово $\mathfrak{c}_1$ ($\mathfrak{c}_4$) является собственным подсловом слова $\mathfrak{c}_2$ ($\mathfrak{c}_3$).

Рассмотрим слова $\mathfrak{c}_2 = a_i b_{j_1} \dots b_{j_s} b_9 c_9$ и $\mathfrak{c}_3 = a_9 b_7 b_{j_t} \dots b_{j_{n-2}} c_k$ и обозначим через $\mathcal{H}_m$ соответствующие им сети, а через $\mathcal{H}'_m$ — базовые типы их расщеплений, где $m = 1, 2$.

Обозначим через $\bar{\mathcal{H}}_m$ сеть, получающуюся из сети $\mathcal{H}_m$ разрезанием по ребру, соединяющим вершины, которые соответствуют буквам b_{j_s}, b_9 при $m = 1$ и буквам b_7, b_{j_t} при $m = 2$. Причем сеть $\bar{\mathcal{H}}_m$ не содержит вершины, соответствующие буквам b_9, c_9 при $m = 1$ и буквам a_9, b_7 при $m = 2$. Пусть $\bar{\mathcal{H}}'_m$ — базовый тип расщепления сети $\bar{\mathcal{H}}_m$.

Если сеть $\mathcal{H}'_m$ не допускает строго допустимую деформацию, то соответствующее ей слово положительно справа. Иначе рассмотрим два случая.

1.1) Пусть $\varkappa = 1$, и пусть сеть $\mathcal{H}'_m$ допускает строго допустимую деформацию η_m. Имеем

$$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_2, \eta_1)\big) = \mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_1, \eta_1\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_1}\right) + \varsigma\big(\tau^+(a_8 c_9, \eta_1\big|_{b_9 c_9})\big);$$

$$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_3, \eta_2)\big) = \varsigma\big(\tau^+(a_9 c_8, \eta_2\big|_{a_9 b_7})\big) + \mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_2, \eta_2\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_2}\right).$$

Используя равенства $\varsigma\big(\tau^+(a_8 c_9, \eta_1\big|_{b_9 c_9})\big) = 0$, $\varsigma\big(\tau^+(a_9 c_8, \eta_2\big|_{a_9 b_7})\big) = 0$ и полуэкстремальность справа слова $\mathfrak{a}$, которое влечет неравенства $\mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_1, \eta_1\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_1}\right) \geqslant 0$ и $\mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_2, \eta_2\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_2}\right) \geqslant 0$, получаем положительность справа слов $\mathfrak{c}_2$ и $\mathfrak{c}_3$.

1.2) Пусть $\varkappa = 2$, и пусть сеть $\mathcal{H}'_m$ допускает строго допустимую деформацию η_m. Имеем

$$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_2,\eta_1)\big) = \upsilon\big(\tau_1^+(a_i)\big) + \chi\big(\tau_2^+(b_{j_1})\dots\tau_2^+(b_{j_s})\big) + \\ + \delta^{\mathrm{ind}(\tau_2^+(b_{j_1})\dots\tau_2^+(b_{j_s}))}\Big(\chi\big(\tau_2^+(b_9)\big) + \delta^{\mathrm{ind}(\tau_2^+(b_9))}\upsilon\big(\tau_1^+(c_9)\big)\Big) = \\ = \upsilon\big(\tau_1^+(a_i)\big) + \chi\big(\tau_2^+(b_{j_1})\dots\tau_2^+(b_{j_s})\big) + \delta^{\mathrm{ind}(\tau_2^+(b_{j_1})\dots\tau_2^+(b_{j_s}))}\big(\chi(\mathfrak{x}^{-1}) + \delta^{-1}\upsilon(\mathfrak{z}_1)\big) = \\ = \upsilon\big(\tau_1^+(a_i)\big) + \chi\big(\tau_2^+(b_{j_1})\dots\tau_2^+(b_{j_s})\big) + \delta^{\mathrm{ind}(\tau_2^+(b_{j_1})\dots\tau_2^+(b_{j_s}))}\upsilon(\mathfrak{z}_2) = \\ = \varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_1,\eta'_1)\big) \geqslant 0,$$

так как слово $\mathfrak{c}_1$ положительно справа. Здесь η'_1 — строго допустимая деформация для $\mathfrak{c}_1$, совпадающая с η_1 на общих буквах, т.е. на всех, кроме последней;

$$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_3,\eta_2)\big) = \upsilon\big(\tau_1^+(a_9)\big) + \chi\big(\tau^+(b_7)\big) + \delta^{\mathrm{ind}(\tau^+(b_7))}\chi\big(\tau_2^+(b_{j_t})\dots\tau_2^+(b_{j_{n-2}})\big) + \\ + \delta^{\mathrm{ind}(\tau^+(b_7))+\mathrm{ind}(\tau_2^+(b_{j_t})\dots\tau_2^+(b_{j_{n-2}}))}\upsilon\big(\tau_1^+(c_k)\big) = \\ = \upsilon(\mathfrak{z}_1) + \chi(\mathfrak{y}^{-1}) + \delta\chi\big(\tau_2^+(b_{j_t})\dots\tau_2^+(b_{j_{n-2}})\big) + \\ + \delta\delta^{\mathrm{ind}(\tau_2^+(b_{j_t})\dots\tau_2^+(b_{j_{n-2}}))}\upsilon\big(\tau_1^+(c_k)\big) = \delta\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_4,\eta'_2)\big) \geqslant 0,$$

так как слово $\mathfrak{c}_4$ положительно справа. Здесь η'_2 — строго допустимая деформация для $\mathfrak{c}_3$, совпадающая с η_1 на общих буквах, т.е. на всех, кроме первой.

2) Пусть $\mathfrak{a} = a_ib_{j_1}\dots b_6\dots b_{j_{n-2}}c_k$, тогда $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{r(5,6)} = a_ib_{j_1}\dots b_{10}b_8\dots b_{j_{n-2}}c_k$.

Осталось показать положительность справа слов:

a) $\mathfrak{c}_1 = a_ib_{j_1}\dots\partial_r(b_{10})$,

b) $\mathfrak{c}_2 = a_ib_{j_1}\dots b_{10}\partial_r(b_8) = a_ib_{j_1}\dots b_{10}c_9$,

c) $\mathfrak{c}_3 = \partial_l(b_{10})b_8\dots b_{j_{n-2}}c_k = a_9b_8\dots b_{j_{n-2}}c_k$,

d) $\mathfrak{c}_4 = \partial_l(b_8)\dots b_{j_{n-2}}c_k$.

Поскольку $\partial_r(b_{10}) = \partial_r(b_6)$ и $\partial_l(b_8) = \partial_l(b_6)$, то положительность $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{c}_4$ следует из предположения теоремы. Отметим, что слово $\mathfrak{c}_1$ ($\mathfrak{c}_4$) является собственным подсловом слова $\mathfrak{c}_2$ ($\mathfrak{c}_3$).

Рассмотрим слова $\mathfrak{c}_2 = a_ib_{j_1}\dots b_{j_s}b_{10}c_9$ и $\mathfrak{c}_3 = a_9b_8b_{j_t}\dots b_{j_{n-2}}c_k$ и обозначим через $\mathcal{H}_m$, соответствующую им сети, а через $\mathcal{H}'_m$ — базовые типы их расщепления, где $m = 1, 2$.

Обозначим через $\bar{\mathcal{H}}_m$ сеть, получающуюся из сети $\mathcal{H}_m$ разрезанием по ребру, соединяющим вершины, которые соответствуют буквам b_{j_s}, b_{10} при $m = 1$ и буквам b_8, b_{j_t} при $m = 2$. Причем сеть $\bar{\mathcal{H}}_m$ не содержит вершины, соответствующие буквам b_{10}, c_9 при $m = 1$ и буквам a_9, b_8 при $m = 2$. Пусть $\bar{\mathcal{H}}'_m$ — базовый тип расщепления сети $\bar{\mathcal{H}}_m$.

Если сеть $\mathcal{H}'_m$ не допускает строго допустимую деформацию, то соответствующее ей слово положительно справа. Иначе рассмотрим два случая.

2.1) Пусть $\varkappa = 1$, и пусть сеть $\mathcal{H}'_m$ допускает строго допустимую деформацию η_m. Совершая преобразования как в случае **1.2)**, получаем

$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_2, \eta_1)\big) = \varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_1, \eta'_1)\big) \geqslant 0$, поскольку слово $\mathfrak{c}_1$ положительно справа. Здесь η'_1 — строго допустимая деформация для $\mathfrak{c}_1$, совпадающая с η_1 на общих буквах, т.е. на всех, кроме последней;

$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_3, \eta_2)\big) = \delta\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_4, \eta'_2)\big) \geqslant 0$, поскольку слово $\mathfrak{c}_4$ положительно справа. Здесь η'_2 — строго допустимая деформация для $\mathfrak{c}_3$, совпадающая с η_1 на общих буквах, т.е. на всех, кроме первой.

2.2) Пусть $\varkappa = 2$, и пусть сеть $\mathcal{H}'_m$ допускает строго допустимую деформацию η_m. Имеем

$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_2, \eta_1)\big) = \mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_1, \eta_1\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_1}\right) + \varsigma\big(\tau^+(a_7c_9, \eta_1\big|_{b_{10}c_9})\big)$;

$\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{c}_3, \eta_2)\big) = \varsigma\big(\tau^+(a_9c_7, \eta_2\big|_{a_9b_8})\big) + \mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_2, \eta_2\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_2}\right)$.

Используя равенства $\varsigma\big(\tau^+(a_7c_9, \eta_1\big|_{b_{10}c_9})\big) = 0$, $\varsigma\big(\tau^+(a_9c_7, \eta_2\big|_{a_9b_8})\big) = 0$ и полуэкстремальность справа слова $\mathfrak{a}$, которое влечет неравенства $\mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_1, \eta_1\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_1}\right) \geqslant 0$, $\mathfrak{D}\left(\bar{\mathcal{H}}'_2, \eta_2\big|_{\bar{\mathcal{H}}'_2}\right) \geqslant 0$, получаем положительность справа слов $\mathfrak{c}_2$ и $\mathfrak{c}_3$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть слово $\mathfrak{b}$ полуэкстремально справа. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа, т.е. надо для всех подслов $\mathfrak{a}_m$ слова $\mathfrak{a}$ доказать справедливость неравенств $\varsigma\big(\tau^+(\mathfrak{a}_m, \eta^+_m)\big) \geqslant 0$ для любых строго допустимых деформаций $\eta^+_m \in \Lambda^+(\mathfrak{a}_m)$.

Поскольку $\tau_2^+(b_5) = \mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}$, $\tau_2^+(b_9) = \mathfrak{x}^{-1}$ и $\tau_2^+(b_7) = \mathfrak{y}^{-1}$, то $\operatorname{ind}\big(\tau_2^+(b_5)\big) = \operatorname{ind}\big(\tau_2^+(b_9)\tau_2^+(b_7)\big)$. Аналогично, поскольку $\tau_2^+(b_6) = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$, $\tau_2^+(b_{10}) = \mathfrak{y}$ и $\tau_2^+(b_8) = \mathfrak{x}$, то $\operatorname{ind}\big(\tau_2^+(b_6)\big) = \operatorname{ind}\big(\tau_2^+(b_{10})\tau_2^+(b_8)\big)$. Следовательно, положительность справа слова $\mathfrak{a}$ и слов $\mathfrak{a}_q$, для которых существует $p(q)$ такое, что имеет место равенство $\mathfrak{a}_{q\,r(5,6)} = \mathfrak{b}_{p(q)}$, где $\mathfrak{b}_{p(q)}$ — некоторое подслово слова $\mathfrak{b}$, выполнена.

Достаточно рассмотреть редукцию одной буквы.

1) Пусть $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \ldots b_5 \ldots b_{j_{n-2}} c_k$, тогда $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{r(5,6)} = a_i b_{j_1} \ldots b_9 b_7 \ldots b_{j_{n-2}} c_k$, и это слово полуэкстремально справа.

Достаточно показать положительность справа слов $\mathfrak{d}_1 = a_i b_{j_1} \ldots \partial_r(b_5)$ и $\mathfrak{d}_2 = \partial_l(b_5) \ldots b_{j_{n-2}} c_k$.

Поскольку $\partial_r(b_5) = \partial_r(b_9)$ и $\partial_l(b_5) = \partial_l(b_7)$, то положительность $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ сразу следует из предположения теоремы (они являются собственными подсловами слова $\mathfrak{b}$).

2) Пусть $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \ldots b_6 \ldots b_{j_{n-2}} c_k$, тогда $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{r(5,6)} = a_i b_{j_1} \ldots b_{10} b_8 \ldots b_{j_{n-2}} c_k$, и это слово полуэкстремально справа.

Достаточно показать положительность справа слов $\mathfrak{d}_1 = a_i b_{j_1} \dots \partial_r(b_6)$ и $\mathfrak{d}_2 = \partial_l(b_6) \dots b_{j_{n-2}} c_k$.

Поскольку $\partial_r(b_6) = \partial_r(b_{10})$ и $\partial_l(b_6) = \partial_l(b_8)$, то положительность $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ сразу следует из предположения теоремы (они являются собственными подсловами слова $\mathfrak{b}$).

Достаточность доказана и вместе с этим и вся теорема. ■

Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольное слово. Рассмотрим слово $\mathfrak{a}_{r(3)}$ ($\mathfrak{a}_{r(4)}$), которое получается из слова $\mathfrak{a}$ заменой $b_3 = b_9 b_7$ ($b_4 = b_{10} b_8$).

Определение. Будем говорить, что слово $\mathfrak{a}_{r(3)}$ ($\mathfrak{a}_{r(4)}$) получено из слова *редукцией по букве* b_3 (b_4).

Из доказательства теоремы 4.2 вытекает

Следствие 4.1. *Слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа тогда и только тогда, когда полуэкстремально справа слово $\mathfrak{a}_{r(3)}$.*
Слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально слева тогда и только тогда, когда полуэкстремально слева слово $\mathfrak{a}_{r(4)}$.

4.5. Критерий полуэкстремальности слова для $\varkappa = 1,\ 2$

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости, и $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. По теореме 4.1, экстремальность сети Γ равносильна полуэкстремальности справа и слева слова $\mathfrak{a}$. Исследуем полуэкстремальность произвольного слова $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_l} c_k$. Рассмотрим только случай полуэкстремальности справа (в противном случае поменяем ориентацию образующего пути). Без ограничения общности будем считать, что множество $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ непусто, иначе полуэкстремальность справа слова $\mathfrak{a}$ равносильна полуэкстремальности справа его подслов, для которых существует строго допустимая деформация. Используя теорему 4.2, можно считать, что $j_p \neq 3$, 4, 5 и 6, где $p = 1, \dots, l$. В результате мы имеем слово $\mathfrak{a}$, для которого $i, k = 1, 3, 5, 6, 9-\varkappa, 9$ и $j_p = 1, 7, 8, 9, 10$. Учитывая равенства $\tau_1^+(a_6) = \tau_1^+(a_{7+\varkappa}) = \tau_1^+(c_6) = \tau_1^+(c_{7+\varkappa}) = \mathfrak{z}_1$, $\tau_1^+(a_1) = \tau_1^+(a_3) = \tau_1^+(a_5) = \tau_1^+(a_{11-2\varkappa}) = \tau_1^+(c_1) = \tau_1^+(c_3) = \tau_1^+(c_5) = \tau_1^+(c_{11-2\varkappa}) = \mathfrak{z}_2$, переобозначим буквы a_1, a_3, a_5, a_6, $a_{9-\varkappa}$, a_9, c_1, c_3, c_5, c_6, $c_{9-\varkappa}, c_9$, положив $a_6 = a_{7+\varkappa} = c_6 = c_{7+\varkappa} = f_1$ и $a_1 = a_3 = a_5 = a_{11-2\varkappa} = c_1 = c_3 = c_5 = c_{11-2\varkappa} = f_2$. Имеем $\tau_1^+(f_i) = \mathfrak{z}_i$, $i = 1, 2$. Переобозначим b_1, b_7, b_8, b_9 и b_{10},

положив $b_1 = g_5$, $b_7 = g_4$, $b_8 = g_1$, $b_9 = g_2$ и $b_{10} = g_3$.
Переопределим ∂_r и ∂_l, положив:
$\partial_l(g_1) = \partial_r(g_3) = f_1$, $\partial_l(g_2) = \partial_l(g_3) = \partial_l(g_5) = \partial_r(g_1) = \partial_r(g_4) = \partial_r(g_5) = f_2$ при $\varkappa = 1$;
$\partial_l(g_2) = \partial_l(g_3) = \partial_r(g_1) = \partial_r(g_4) = f_1$, $\partial_l(g_4) = \partial_r(g_2) = f_2$ при $\varkappa = 2$, см. рис. 4.1 и 4.2.

Из определения строго допустимой деформации и определения полуэкстремальности справа получаем

Утверждение 4.7. *Слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально (справа) тогда и только тогда, когда слово $\mathfrak{a}$ и каждое его собственное подслово относительно новых операций ∂_r и ∂_l положительно (справа).*

Поскольку мы рассматриваем только полуэкстремальность справа, то будем писать τ вместо τ^+.

Определение. Рассмотрим произвольное слово $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_l} f_k$. *Кручением* слова $\mathfrak{a}$ будем называть число $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (i + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 соответственно в слове $\mathfrak{a}$.

4.5.1. Редукция внутри слова

(1) Избавление от $g_\omega g_\sigma$, где $(\omega, \sigma) = (1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$

Лемма 4.5. *Слово $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-1}} g_\omega g_\sigma g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$, где $(\omega, \sigma) = (1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны слова $\mathfrak{b}_3 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-1}} g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$ и*

1) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots \partial_r(g_\varkappa)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\varkappa) \dots g_{j_l} f_k$, *если* $(\omega, \sigma) = (1, 2)$;

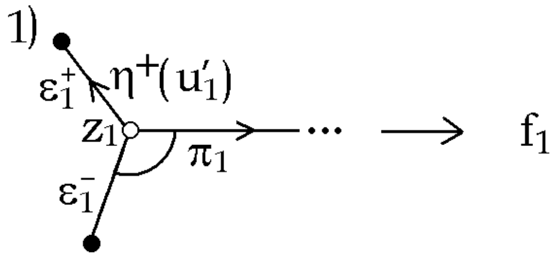
2) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots \partial_r(g_{\varkappa+2})$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_{\varkappa+2}) \dots g_{j_l} f_k$, *если* $(\omega, \sigma) = (4, 3)$;

3) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-1}} g_\omega \partial_r(g_\sigma)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\omega) g_\sigma g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$, *если* $(\omega, \sigma) = (2, 1)$, $(3, 4)$.

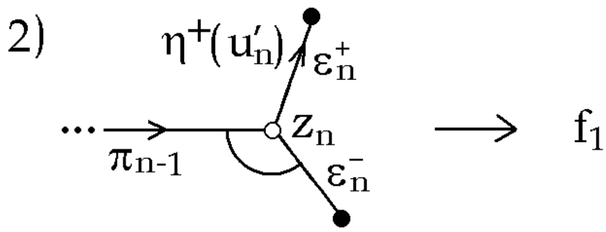
Причем справедливо равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_3) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) + (-1)^{\varkappa - 1}$.

Доказательство. Докажем только случай, когда $(\omega, \sigma) = (1, 2)$ (остальные доказываются аналогично).

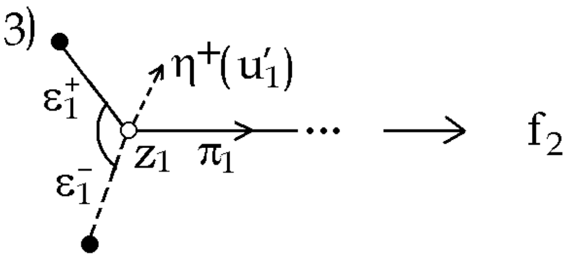
Необходимость. Пусть слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Полуэкстремальность слов $\mathfrak{b}_i$, где $i = 1$, 2, имеет место, так как они являются собственными подсловами слова $\mathfrak{a}$.



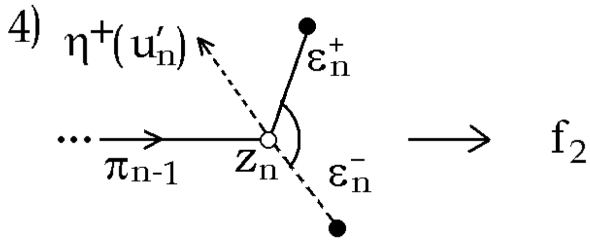
$\mathrm{fall}\,(\varepsilon_1^+,\varepsilon_1^-) = \kappa$,
$\mathrm{fall}\,(\varepsilon_1^-,\pi_1) = \kappa - 3$,



$\mathrm{fall}\,(\varepsilon_n^+,\varepsilon_n^-) = \kappa$,
$\mathrm{fall}\,(\pi_{n-1},\varepsilon_n^-) = \kappa - 3$,



$\mathrm{fall}\,(\varepsilon_1^+,\pi_1) = \kappa$,
$\mathrm{fall}\,(\varepsilon_1^+,\varepsilon_1^-) = \kappa - 3$,



$\mathrm{fall}\,(\varepsilon_n^+,\pi_{n-1}) = \kappa$,
$\mathrm{fall}\,(\varepsilon_n^+,\varepsilon_n^-) = \kappa - 3$,

$$\upsilon(\tau_1^+(f_1)) = -\upsilon(\tau_1^+(f_2)) = -\frac{\delta(1-\delta)}{2(1+\delta)}$$

Рис. 4.1. Перекодировка

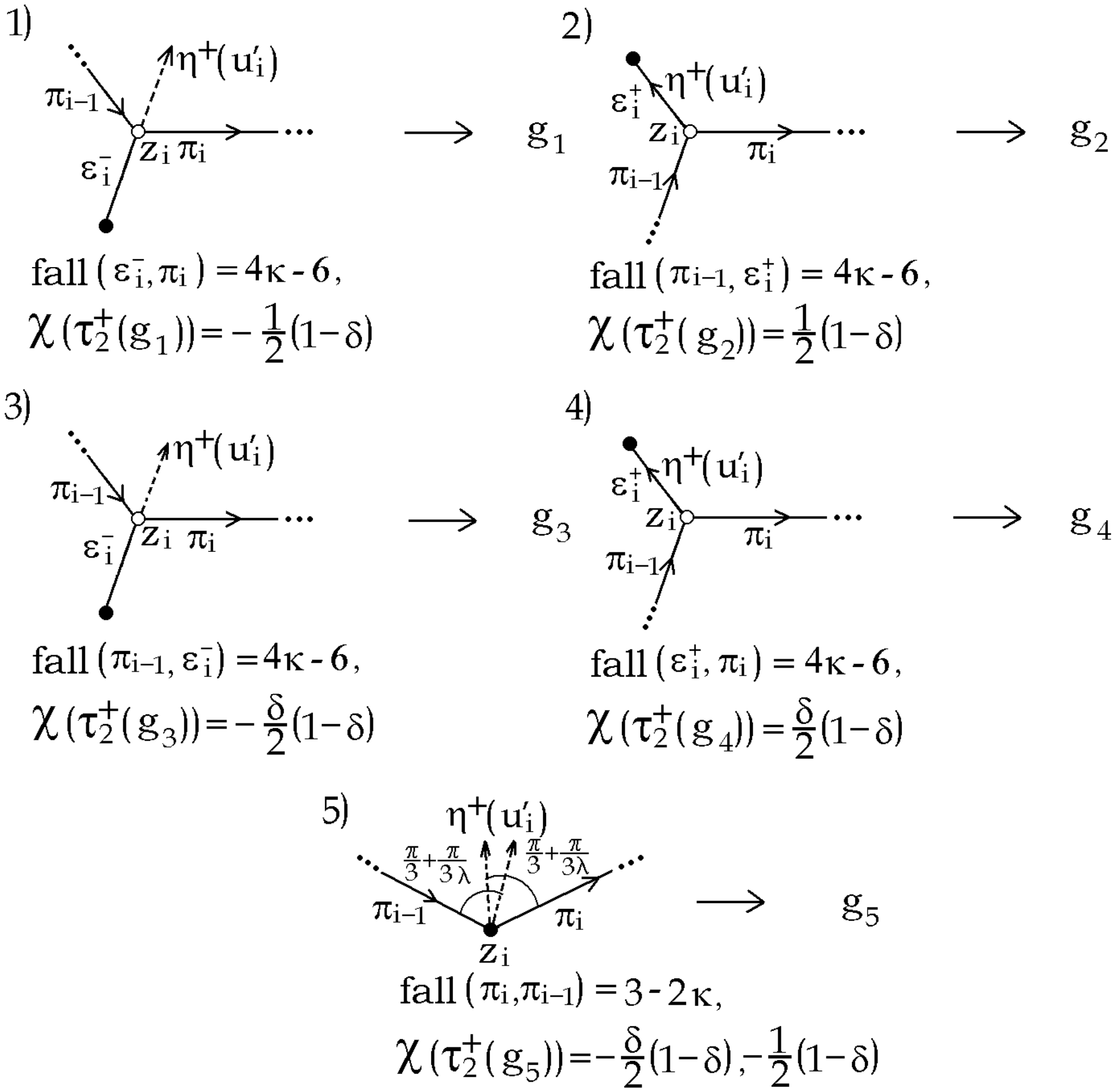


Рис. 4.2. Перекодировка

Докажем, что слово $\mathfrak{b}_3$ полуэкстремально, т.е. каждое его подслово положительно. Положительность собственных подслов, которые не содержат букву $g_{j_{q-1}}$ или $\partial_l(g_{j_{q-1}})$, выполнена, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{a}$. А положительность остальных подслов слова $\mathfrak{b}_3$ следует из положительности подслов слова $\mathfrak{a}$, которые содержат $g_\omega g_\sigma$, и равенств $\tau(g_\omega) = \mathfrak{x}$, $\tau(g_\sigma) = \mathfrak{x}^{-1}$, $\chi(\mathfrak{x}) + \delta\chi(\mathfrak{x}^{-1}) = 0$.

Достаточность. Пусть слова $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ и $\mathfrak{b}_3$ полуэкстремальны. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально.

Положительность собственных подслов, которые не содержат $g_\omega g_\sigma$, имеет место, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$. А положительность остальных подслов слова $\mathfrak{a}$ следует из положительности подслов слова $\mathfrak{b}_3$ и равенств $\tau(g_\omega) = \mathfrak{x}$, $\tau(g_\sigma) = \mathfrak{x}^{-1}$ и $\chi(\mathfrak{x}) + \delta\chi(\mathfrak{x}^{-1}) = 0$.

Проверим равенство. Равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_3)$ выполнено, так как g_1 дает плюс, а g_2 — минус.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p-q+r-s+t+3-(i+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) = p_1-q_1+r_1-s_1+t_1+3-(i+2)$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = p_2-q_2+r_2-s_2+t_2+3-(1+k)$, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j = 1, 2$, соответственно, и $(p_1+p_2)-(q_1+q_2)+(r_1+r_2)-(s_1+s_2)+(t_1+t_2) = p-q+r-s+t+(-1)^{\varkappa}$. Здесь мы использовали равенства $\partial_r(g_\varkappa) = f_2$ и $\partial_l(g_\varkappa) = f_1$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) + (-1)^{\varkappa}$. Лемма доказана. ■

(2) Избавление от $g_\omega g_\sigma$, где $(\omega,\sigma) = (1,4)$, $(4,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$

Лемма 4.6. *Слово* $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-1}} g_\omega g_\sigma g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$, *где* $(\omega,\sigma) = (1,4)$, $(4,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны его подслова* $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-1}} g_\omega \partial_r(g_\sigma)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\omega) g_\sigma g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa = 1$ $\big(\varkappa = 2\big)$ *и* $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-1}} \partial_r(g_\omega)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\sigma) g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa = 2$ $\big(\varkappa = 1\big)$, *если* $(\omega,\sigma) = (1,4)$, $(2,3)$ $\big((\omega,\sigma) = (4,1)$, $(3,2)\big)$. *Причем справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда $(\omega,\sigma) = (1,4)$.

Пусть слова $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ полуэкстремальны. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Положительность собственных подслов, которые не содержат $g_\omega g_\sigma$ для $\varkappa = 1$ и букву g_ω для $\varkappa = 2$, выполнена, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$.

Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее $g_\omega g_\sigma$. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}_i$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}_i$, где $i = 1, 2$. По условию слова $\mathfrak{d}_i$

положительны. Определим для слов $\mathfrak{d}_i$ строго допустимые деформации следующим образом:
$\eta(\mathfrak{d}_1) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_1)$ и $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\sigma)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\sigma)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(g_\sigma) = f_2$, для $\varkappa = 1$, $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\omega)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(g_\omega) = f_1$, для $\varkappa = 2$;
$\eta(\mathfrak{d}_2) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_2)$ и $a\eta(\mathfrak{d}_2)\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\omega)}$, т.е. деформация $a\eta(\mathfrak{d}_2)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_\omega) = f_1$, для $\varkappa = 1$, $a\eta(\mathfrak{d}_2)\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\sigma)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\sigma)}$, т.е. деформация $a\eta(\mathfrak{d}_2)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_\sigma) = f_2$, для $\varkappa = 2$. Здесь a нормирующий коэффициент.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2, \eta(\mathfrak{d}_2))\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) +$$
$$+ \big(1 - \varkappa\big)\delta^p\big(\chi(\mathfrak{x}) + \delta\chi(\mathfrak{y}^{-1})\big) + \delta^p\big(\delta^{2(\varkappa-1)}\upsilon(\mathfrak{z}_2) + \upsilon(\mathfrak{z}_1)\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ для $\varkappa = 1$ полуэкстремально.

Для случая $\varkappa = 2$ осталось проверить положительность подслов, содержащих $g_\omega \partial_r(g_\sigma)$. Берем произвольное такое подслово и обозначим его через $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}_1$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и $\mathfrak{b}_1$. Пусть $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ произвольная строго допустимая деформация $\mathfrak{d}$. По ней единственным образом определяем строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}_1) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_1)$ слова $\mathfrak{d}_1$. По условию слово $\mathfrak{d}_1$ положительно.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + \delta^p\big(\chi(\mathfrak{x}) + \delta\upsilon(\mathfrak{z}_1) - \upsilon(\mathfrak{z}_1)\big) >$$
$$> \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ для $\varkappa = 2$ полуэкстремально.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (i + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) = p_1 - q_1 + r_1 - s_1 + t_1 + 3 - (i + 3 - \varkappa)$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = p_2 - q_2 + r_2 - s_2 + t_2 + 3 - (1 + \varkappa)$, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j = 1, 2$, соответственно, и $(p_1 + p_2) - (q_1 + q_2) + (r_1 + r_2) - (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) = p - q + r - s + t$. Здесь мы использовали равенства $\partial_r(g_\sigma) = f_2$, $\partial_l(g_\omega) = f_1$ для $\varkappa = 1$ и $\partial_r(g_\omega) = f_1$, $\partial_l(g_\sigma) = f_2$ для $\varkappa = 2$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

(3) Избавление от $g_\omega g_\sigma$, где $(\omega,\sigma)=(1,3)$, $(4,2)$

Лемма 4.7. *Слово* $\mathfrak{a}=f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}} g_\omega g_\sigma g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$, *где* $(\omega,\sigma)=(1,3)$ $\big((\omega,\sigma)=(4,2)\big)$, *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны его подслова* $\mathfrak{b}_1=f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}} g_\omega \partial_r(g_\sigma)$, $\mathfrak{b}_2=\partial_l(g_\omega) g_\sigma g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa=1$ $\big(\varkappa=2\big)$ *и* $\mathfrak{b}_1=f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}}\partial_r(g_\omega)$, $\mathfrak{b}_2=\partial_l(g_\sigma) g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa=2$ $\big(\varkappa=1\big)$. *Причем справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)+(-1)^{\varkappa}$.

Доказательство. Для $\varkappa=1$ и $(\omega,\sigma)=(1,3)$ рассмотрим слово $\mathfrak{c}=f_1f_1$, а для $\varkappa=2$ и $(\omega,\sigma)=(4,2)$ рассмотрим слово $\mathfrak{c}=f_2f_2$. Для слова $\mathfrak{c}$ в обоих случаях получаем $\varsigma\big(\tau(\mathfrak{c},\eta(\mathfrak{c}))\big)=2v(\mathfrak{z}_\varkappa)\leqslant 0$, где $\eta(\mathfrak{c})\in\Lambda^+(\mathfrak{c})$. Следовательно, слово $\mathfrak{c}$ и все слова $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ неполуэкстремальны.

Для $\varkappa=2$, $(\omega,\sigma)=(1,3)$ и для $\varkappa=1$, $(\omega,\sigma)=(4,2)$ докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально в предположении, что слова $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ полуэкстремальны.

Положительность собственных подслов слова $\mathfrak{a}$, которые не содержат $g_\omega g_\sigma$, имеет место, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$. Доказательство положительности остальных подслов $\mathfrak{d}$ слова $\mathfrak{a}$ аналогично доказательству леммы 4.6. Здесь получаем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1,\eta(\mathfrak{d}_1))\big)+a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2,\eta(\mathfrak{d}_2))\big)=$$
$$=\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big)-\delta^p\big(\chi(\mathfrak{x})+\delta\chi(\mathfrak{y})-2v(\mathfrak{z}_1)\big)<\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big),\quad \varkappa=2;$$
$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1,\eta(\mathfrak{d}_1))\big)+a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2,\eta(\mathfrak{d}_2))\big)=$$
$$=\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big)-\delta^p\big(\chi(\mathfrak{y}^{-1})+\delta\chi(\mathfrak{x}^{-1})-2v(\mathfrak{z}_2)\big)<\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big),\quad \varkappa=1.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)+(-1)^{\varkappa}$. Рассмотрим только случай, когда $(\omega,\sigma)=(1,3)$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=p-q+r-s+t+3-(i+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)=p_1-q_1+r_1-s_1+t_1+3-(i+1)$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)=p_2-q_2+r_2-s_2+t_2+3-(1+k)$, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j=1,2$, соответственно, и $(p_1+p_2)-(q_1+q_2)+(r_1+r_2)-(s_1+s_2)+(t_1+t_2)=p-q+r-s+t-\varkappa(\varkappa-1)$. Здесь мы использовали равенства $\partial_r(g_\sigma)=f_1$, $\partial_l(g_\omega)=f_1$ для $\varkappa=1$ и $\partial_r(g_\omega)=f_1$, $\partial_l(g_\sigma)=f_1$ для $\varkappa=2$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)=\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})+(-1)^{\varkappa-1}$. Лемма доказана. ■

Замечание. Из доказательства леммы 4.7 следует, что любое слово вида $f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}} g_\omega g_\sigma g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$ для $\varkappa=1$, $(\omega,\sigma)=(1,3)$ и для $\varkappa=2$, $(\omega,\sigma)=(4,2)$ неполуэкстремально.

(4) Избавление от $g_\omega g_\sigma$, где $(\omega,\sigma)=(1,1)$, $(1,5)$, $(3,3)$, $(5,3)$

Лемма 4.8. *Слово* $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}} g_\omega g_\sigma g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$, *где* $(\omega,\sigma) = (1,1)$, $(1,5)$, $(3,3)$, $(5,3)$, *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны его подслова*:

1) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}} g_\omega \partial_r(g_\sigma)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\omega) g_\sigma g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa = 1$ *и* $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}} \partial_r(g_\omega)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_{j_{q+m}}) g_{j_{q+m+1}}\dots g_{j_l} f_k$, *где* $m \geqslant 2$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_l(g_{j_{q+m}})$, *для* $\varkappa = 2$, *если* $(\omega,\sigma) = (1,1)$, $(1,5)$;

2) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-1}} g_\omega \partial_r(g_\sigma)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\omega) g_\sigma g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa = 1$ *и* $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1}\dots g_{j_{q-m-1}} \partial_r(g_{q-m})$, *где* $m \geqslant 1$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_r(g_{j_{q-m}})$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\sigma) g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa = 2$, *если* $(\omega,\sigma) = (3,3)$, $(5,3)$.

Причем для $\varkappa = 1$ *справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$, *а для* $\varkappa = 2$ *— неравенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \geqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Доказательство. Используя симметрию, достаточно рассмотреть только случаи, когда $(\omega,\sigma) = (1,1)$, $(1,5)$.

Пусть слова $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ полуэкстремальны. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Положительность собственных подслов, которые не содержат $g_\omega g_\sigma$, выполнена, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$. Доказательство положительности подслов, которые содержат $g_\omega g_\sigma$, аналогично доказательству леммы 4.6 для $\varkappa = 1$ и леммы 4.7 для $\varkappa = 2$.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$ для $\varkappa = 1$ и неравенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \geqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$ для $\varkappa = 2$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p-q+r-s+t+3-(i+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда для $\varkappa = 1$ имеем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) = p_1-q_1+r_1-s_1+t_1+3-(i+2)$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = p_2-q_2+r_2-s_2+t_2+3-(1+k)$, а для $\varkappa = 2$ — $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) = p_1-q_1+r_1-s_1+t_1+3-(i+1)$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = p_2-q_2+r_2-s_2+t_2+3-(x+k)$, $x = 1$, 2, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j = 1$, 2, соответственно. Причем $(p_1+p_2)-(q_1+q_2)+(r_1+r_2)-(s_1+s_2)+(t_1+t_2) = p-q+r-s+t-(\varkappa-1)y$, где $y \geqslant 1$. Здесь мы использовали равенства $\partial_r(g_\sigma) = f_2$, $\partial_l(g_\omega) = f_1$ для $\varkappa = 1$ и $\partial_r(g_\omega) = f_1$ для $\varkappa = 2$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$ для $\varkappa = 1$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) \leqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$ для $\varkappa = 2$. Лемма доказана. ■

(5) Избавление от $g_\omega g_\sigma g_\theta$, где $(\omega,\sigma,\theta) = (u,v,w)$, $(2,5,w)$, $(u,5,4)$, $u = 3$ или 5, $v = 1$, 3 или 5, и $w = 1$ или 5

Лемма 4.9. *Слово* $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-2}} g_\omega g_\sigma g_\theta g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$, *где* $(\omega, \sigma, \theta) = (u, v, w)$, $(2, 5, w)$, $(u, 5, 4)$, $u \in \{3, 5\}$, $v \in \{1, 3, 5\}$, $w \in \{1, 5\}$, *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны его подслова*:

1) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-2}} g_\omega g_\sigma \partial_r(g_\theta)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\omega) g_\sigma g_\theta g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa = 1$;

2) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-m-1}} \partial_r(g_{q-m})$, *где* $m \geqslant 2$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_r(g_{j_{q-m}})$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_{j_{q+n}}) g_{j_{q+n+1}} \dots g_{j_l} f_k$, *где* $n \geqslant 2$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_l(g_{j_{q+n}})$, *для* $\varkappa = 2$ *и* $(\omega, \sigma, \theta) = (u, v, w)$;

3) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-2}} \partial_r(g_\omega)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_{j_{q+n}}) g_{j_{q+n+1}} \dots g_{j_l} f_k$, *где* $n \geqslant 2$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_l(g_{j_{q+n}})$, *для* $\varkappa = 2$ *и* $(\omega, \sigma, \theta) = (2, 5, w)$;

4) $\mathfrak{b}_1 = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{q-m-1}} \partial_r(g_{q-m})$, *где* $m \geqslant 2$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_r(g_{j_{q-m}})$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(g_\theta) g_{j_{q+2}} \dots g_{j_l} f_k$ *для* $\varkappa = 2$ *и* $(\omega, \sigma, \theta) = (u, 5, 4)$.

Причем для $\varkappa = 1$ *справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$, *а для* $\varkappa = 2$ *— неравенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \geqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда $(\omega, \sigma, \theta) = (u, v, w)$. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально в предположении, что слова $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ полуэкстремальны.

Пусть $\varkappa = 1$. Положительность собственных подслов, которые не содержат $g_\omega g_\sigma g_\theta$, выполнена, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$.

Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее $g_\omega g_\sigma g_\theta$. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}_i$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}_i$, где $i = 1,\ 2$. По условию слова $\mathfrak{d}_i$ положительны. Определим для слов $\mathfrak{d}_i$ строго допустимые деформации следующим образом:
$\eta(\mathfrak{d}_1) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_1)$ и $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\theta)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\theta)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(g_\theta) = f_2$;
$\eta(\mathfrak{d}_2) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_2)$ и $a\eta(\mathfrak{d}_2)\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\omega)}$, т.е. деформация $a\eta(\mathfrak{d}_2)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_\omega) = f_2$. Здесь a нормирующий коэффициент.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1,\eta(\mathfrak{d}_1))\big)+a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2,\eta(\mathfrak{d}_2))\big)=$$
$$=\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big)+\delta^p\big(\upsilon(\mathfrak{z}_2)+\chi(\tau_2(g_\sigma))+\delta^{\mathrm{ind}(\tau_2(g_\sigma))}\upsilon(\mathfrak{z}_2)\big)=\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big)\geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=p-q+r-s+t+3-(i+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)=p_1-q_1+r_1-s_1+t_1+3-(i+2)$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)=p_2-q_2+r_2-s_2+t_2+3-(2+k)$, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j=1,2$, соответственно, и $(p_1+p_2)-(q_1+q_2)+(r_1+r_2)-(s_1+s_2)+(t_1+t_2)=p-q+r-s+t+1$. Здесь мы использовали равенства $\partial_r(g_\theta)=f_2$ и $\partial_l(g_\omega)=f_2$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)=\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$.

Пусть $\varkappa=2$. Справедливость утверждения следует из равенств $\upsilon(\mathfrak{z}_2)+\chi(\mathfrak{x})+\delta\upsilon(\mathfrak{z}_2)=0$ и $\upsilon(\mathfrak{z}_2)+\chi(\mathfrak{y})+\delta^{-1}\upsilon(\mathfrak{z}_2)=0$.

Проверим неравенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})\geqslant\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=p-q+r-s+t+3-(i+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)=p_1-q_1+r_1-s_1+t_1+3-(i+x)$, $x=1,2$, и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)=p_2-q_2+r_2-s_2+t_2+3-(y+k)$, $y=1,2$, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j=1,2$, соответственно, и $(p_1+p_2)-(q_1+q_2)+(r_1+r_2)-(s_1+s_2)+(t_1+t_2)=p-q+r-s+t-z$, где $z\geqslant 1$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)\leqslant\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

(6) Избавление от $g_\omega g_\sigma g_\theta$, где $(\omega,\sigma,\theta)=(4,5,2)$, $(2,5,4)$

Лемма 4.10. *Слово* $\mathfrak{a}=f_ig_{j_1}\ldots g_{j_{q-2}}g_\omega g_\sigma g_\theta g_{j_{q+2}}\ldots g_{j_l}f_k$, *где* $(\omega,\sigma,\theta)=(4,5,2)$, $\big((\omega,\sigma,\theta)=(2,5,4)\big)$, *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны его подслова* $\mathfrak{b}_1=f_ig_{j_1}\ldots g_{j_{q-2}}\partial_r(g_\omega)$, $\mathfrak{b}_2=\partial_l(g_\theta)g_{j_{q+2}}\ldots g_{j_l}f_k$ *для* $\varkappa=1$ $\big(\varkappa=2\big)$ *и* $\mathfrak{b}_1=f_ig_{j_1}\ldots g_{j_{q-2}}g_\omega g_\sigma\partial_r(g_\theta)$, $\mathfrak{b}_2=\partial_l(g_\omega)g_\sigma g_\theta g_{j_{q+2}}\ldots g_{j_l}f_k$ *для* $\varkappa=2$ $\big(\varkappa=1\big)$. *Причем справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда $(\omega,\sigma,\theta)=(4,5,2)$ (для $(\omega,\sigma,\theta)=(2,5,4)$ надо еще воспользоваться доказательством леммы 4.9).

Пусть слова $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ полуэкстремальны. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Положительность собственных подслов, которые не содержат букву g_σ или $\partial_r(g_\sigma)$, или $\partial_l(g_\sigma)$ для $\varkappa=1$ и $g_\omega g_\sigma g_\theta$ для $\varkappa=2$, имеет место, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$.

a) Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее $g_\omega g_\sigma g_\theta$. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}_i$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}_i$, где $i = 1, 2$. По условию слова $\mathfrak{d}_i$ положительны. Определим для слов $\mathfrak{d}_i$ строго допустимые деформации следующим образом:
$\eta(\mathfrak{d}_1) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_1)$ и $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1\setminus\partial_r(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1\setminus\partial_r(g_\omega)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(g_\omega) = f_2$, для $\varkappa = 1$, $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1\setminus\partial_r(g_\theta)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1\setminus\partial_r(g_\theta)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(g_\theta) = f_2$, для $\varkappa = 2$;
$\eta(\mathfrak{d}_2) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_2)$ и $a\eta(\mathfrak{d}_2)\big|_{\mathfrak{d}_2\setminus\partial_l(g_\theta)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_2\setminus\partial_l(g_\theta)}$, т.е. деформация $a\eta(\mathfrak{d}_2)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_\theta) = f_2$, для $\varkappa = 1$, $\eta(\mathfrak{d}_2) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_2)$ и $a\eta(\mathfrak{d}_2)\big|_{\mathfrak{d}_2\setminus\partial_l(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_2\setminus\partial_l(g_\omega)}$, т.е. деформация $a\eta(\mathfrak{d}_2)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_\omega) = f_2$, для $\varkappa = 2$. Здесь a нормирующий коэффициент.
Для $\varkappa = 1$ имеем

$$\begin{gathered}\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2, \eta(\mathfrak{d}_2))\big) = \\ = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) + \delta^p\big\{\upsilon(\mathfrak{z}_2) - \chi(\mathfrak{y}^{-1}) - \delta\chi(\tau_2(g_\sigma)) - \\ -\delta^{1+\mathrm{ind}(\tau_2(g_\sigma))}\big(\chi(\mathfrak{x}^{-1}) - \delta^{-1}\upsilon(\mathfrak{z}_2)\big)\big\} = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) - \\ -\delta^{p+1}\big(\upsilon(\mathfrak{z}_2) + \chi(\tau_2(g_\sigma)) + \delta^{\mathrm{ind}(\tau_2(g_\sigma))}\upsilon(\mathfrak{z}_2)\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) \geqslant 0.\end{gathered}$$

Для $\varkappa = 2$ имеем

$$\begin{gathered}\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2, \eta(\mathfrak{d}_2))\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) + \\ +\delta^p\big(\upsilon(\mathfrak{z}_2) + \chi(\tau_2(g_\sigma)) + \delta^{\mathrm{ind}(\tau_2(g_\sigma))}\upsilon(\mathfrak{z}_2)\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) \geq 0.\end{gathered}$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ для $\varkappa = 2$ полуэкстремально.

b) Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее $g_\omega\partial_r(g_\sigma)$ или $\partial_l(g_\sigma)g_\theta$. Здесь $\varkappa = 1$. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Из-за симметрии достаточно рассмотреть только случай, когда слово $\mathfrak{d}$ содержит $g_\omega\partial_r(g_\sigma)$. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}_1$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}_1$. По условию слово $\mathfrak{d}_1$ положительно. Определим для слова $\mathfrak{d}_1$ строго допустимую деформацию следующим образом:
$\eta(\mathfrak{d}_1) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_1)$ и $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1\setminus\partial_r(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1\setminus\partial_r(g_\omega)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(g_\omega) = f_2$.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big)=\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1,\eta(\mathfrak{d}_1))\big)+\delta^p\big(\chi(\mathfrak{y}^{-1})+\delta\upsilon(\mathfrak{z}_2)-\upsilon(\mathfrak{z}_2)\big)>$$
$$>\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1,\eta(\mathfrak{d}_1))\big)\geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно.

Из $a)$ и $b)$ получаем полуэкстремальность слова $\mathfrak{a}$ для $\varkappa=1$.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=p-q+r-s+t+3-(i+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)=p_1-q_1+r_1-s_1+t_1+3-(i+2)$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)=p_2-q_2+r_2-s_2+t_2+3-(2+k)$, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j=1,2$, соответственно, и $(p_1+p_2)-(q_1+q_2)+(r_1+r_2)-(s_1+s_2)+(t_1+t_2)=p-q+r-s+t+1$. Здесь мы использовали равенства $\partial_r(g_\omega)=\partial_l(g_\theta)=f_2$ для $\varkappa=1$ и $\partial_r(g_\theta)=\partial_l(g_\omega)=f_2$ для $\varkappa=2$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)=\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

(7) Избавление от $g_\omega g_\omega$, где $\omega=2,\ 4$

Лемма 4.11. *Слово $\mathfrak{a}=f_ig_{j_1}\dots g_{j_{q-1}}g_\omega g_\omega g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l}f_k$, где $\omega=2,\ 4$, полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны его подслова*

1) $\mathfrak{b}_1=f_ig_{j_1}\dots g_{j_{q-1}}g_\omega\partial_r(g_\omega)$, $\mathfrak{b}_2=\partial_l(g_\omega)g_\omega\dots g_{j_l}f_k$ *для* $\varkappa=2$;
2) $\mathfrak{b}_1=f_ig_{j_1}\dots g_{j_{q-1}}\partial_r(g_\omega)$, $\mathfrak{b}_2=\partial_l(g_{j_{q+m}})g_{j_{q+m+1}}\dots g_{j_l}f_k$, *где* $m\geqslant 2$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_l(g_{j_{q+m}})$, *для* $\varkappa=1$ *и* $\omega=4$;
3) $\mathfrak{b}_1=f_ig_{j_1}\dots g_{j_{q-m-1}}\partial_r(g_{j_{q-m}})$, *где* $m\geqslant 1$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_r(g_{j_{q-m}})$, $\mathfrak{b}_2=\partial_l(g_\omega)g_{j_{q+2}}\dots g_{j_l}f_k$ *для* $\varkappa=1$ *и* $\omega=2$.

Причем для $\varkappa=1$ справедливо неравенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})\leqslant\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$, *а для $\varkappa=2$ — равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a})=\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1)+\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$.

Доказательство. Используя симметрию, достаточно рассмотреть только случай, когда $\omega=4$.

Пусть слова $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ полуэкстремальны. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Положительность собственных подслов, которые не содержат букву g_ω для $\varkappa=1$ и $g_\omega g_\omega$ для $\varkappa=2$, имеет место, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$. Доказательство для $\varkappa=1$ положительности подслов, которые содержат $g_\omega g_\omega$, аналогично доказательству леммы 4.7, а которые содержат $g_\omega\partial_r(g_\omega)$, аналогично доказательству леммы 4.6. Следовательно, слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально для $\varkappa=1$.

Пусть $\varkappa = 2$. Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее $g_\omega g_\omega$. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}_i$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}_i$, где $i = 1, 2$. По условию слова $\mathfrak{d}_i$ положительны. Определим для слов $\mathfrak{d}_i$ строго допустимые деформации следующим образом:
$\eta(\mathfrak{d}_1) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_1)$ и $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(g_\omega)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(g_\omega) = f_1$;
$\eta(\mathfrak{d}_2) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_2)$ и $a\eta(\mathfrak{d}_2)\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\omega)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(g_\omega)}$, т.е. деформация $a\eta(\mathfrak{d}_2)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_\omega) = f_2$. Здесь a нормирующий коэффициент.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2, \eta(\mathfrak{d}_2))\big) - \delta^p\big(\upsilon(\mathfrak{z}_1) + \upsilon(\mathfrak{z}_2)\big) =$$
$$= \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2, \eta(\mathfrak{d}_2))\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально для $\varkappa = 2$.

Проверим неравенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \leqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$ для $\varkappa = 1$ и равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2)$ для $\varkappa = 2$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (i + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда для $\varkappa = 1$ имеем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) = p_1 - q_1 + r_1 - s_1 + t_1 + 3 - (i + 2)$, $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = p_2 - q_2 + r_2 - s_2 + t_2 + 3 - (x + 2)$, где $x = 1$ или 2, а для $\varkappa = 2$ — $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) = p_1 - q_1 + r_1 - s_1 + t_1 + 3 - (i + 1)$, $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = p_2 - q_2 + r_2 - s_2 + t_2 + 3 - (2 + k)$, где p_j, q_j, r_j, s_j и t_j — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}_j$, $j = 1, 2$, соответственно. Причем $(p_1 + p_2) - (q_1 + q_2) + (r_1 + r_2) - (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) = p - q + r - s + t + y(2 - \varkappa)$, где $y \geqslant 1$. Здесь мы использовали равенства $\partial_r(g_\omega) = f_2$ для $\varkappa = 1$ и $\partial_r(g_\omega) = f_1$, $\partial_l(g_\omega) = f_2$ для $\varkappa = 2$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$ для $\varkappa = 2$ и $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) \geqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$ для $\varkappa = 1$. Лемма доказана. ■

4.5.2. Редукция в начале и в конце слова для $\varkappa = 1$

(1) Избавление от $f_\omega g_2$ и $g_4 f_\omega$, где $\omega = 1, 2$

Лемма 4.12. *Слово* $\mathfrak{a} = f_\omega g_2 g_{j_2} \ldots g_{j_l} f_k$ ($\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \ldots g_{j_{l-1}} g_4 f_\omega$), *где* $\omega = 1$, *2, полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремально его подслово* $\mathfrak{b} = \partial_l(g_2) g_{j_2} \ldots g_{j_l} f_k$ ($\mathfrak{b} = f_i g_{j_1} \ldots g_{j_{l-1}} \partial_r(g_4)$). *Причем справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) + 1 - \omega$.

Доказательство. Используя симметрию, рассмотрим только слово $\mathfrak{a} = f_\omega g_2 g_{j_2} \dots g_{j_l} f_k$, где $\omega = 1,\,2$.

Пусть слово $\mathfrak{b}$ полуэкстремально. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Положительность собственных подслов, которые не содержат $f_\omega g_2$, имеет место, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}$.

Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее $f_\omega g_2$. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}'$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}$. По условию слово $\mathfrak{d}'$ положительно. Определим для слова $\mathfrak{d}'$ строго допустимую деформацию следующим образом: $\eta(\mathfrak{d}') \in \Lambda^+(\mathfrak{d}')$ и $a\eta(\mathfrak{d}')\big|_{\mathfrak{d}'\setminus\partial_l(g_2)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}'\setminus\partial_l(g_2)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}')$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_2) = f_2$. Здесь a нормирующий коэффициент.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d},\eta(\mathfrak{d}))\big) = \delta^{-1}\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}',\eta(\mathfrak{d}'))\big) + \upsilon(\mathfrak{z}_\omega) + \chi(\mathfrak{x}^{-1}) - \delta^{-1}\upsilon(\mathfrak{z}_2) \geqslant \\ \geqslant \delta^{-1}\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}',\eta(\mathfrak{d}'))\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) + 1 - \omega$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (\omega + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = p' - q' + r' - s' + t' + 3 - (2 + k)$, где p', q', r', s' и t' — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}$ соответственно, и $p' - q' + r' - s' + t' = p - q + r - s + t + 1$. Здесь мы использовали равенство $\partial_l(g_2) = f_2$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

(2) Избавление от $f_2 g_4$ и $g_2 f_2$

Лемма 4.13. *Слово* $\mathfrak{a} = f_2 g_4 g_{j_2} \dots g_{j_l} f_k$ ($\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{l-1}} g_2 f_2$) *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремально его подслово* $\mathfrak{b} = \partial_l(g_{j_m}) \dots g_{j_l} f_k$, *где* $m \geqslant 2$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_l(g_{j_m})$ ($\mathfrak{b} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{l-m-1}} \partial_r(g_{j_{l-m}})$, *где* $m \geqslant 1$ *минимальное число, для которого определен* $\partial_r(g_{j_{l-m}})$). *Причем справедливо неравенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \leqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.12.

Проверим неравенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \leqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$ только для слова $\mathfrak{a} = f_2 g_4 g_{j_2} \dots g_{j_l} f_k$,.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p-q+r-s+t+3-(2+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = p'-q'+r'-s'+t'+3-(x+k)$, $x = 1$ или 2, где p', q', r', s' и t' — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}$ соответственно, и $p'-q'+r'-s'+t' = p-q+r-s+t+y$, где $y \geqslant 0$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) \geqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

(3) Избавление от $f_2g_5g_2$ и $g_4g_5f_2$

Лемма 4.14. *Слово $\mathfrak{a} = f_2g_5g_2g_{j_3}\dots g_{j_l}f_k$ ($\mathfrak{a} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-2}}g_4g_5f_2$) полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремально его подслово $\mathfrak{b} = \partial_l(g_2)g_{j_3}\dots g_{j_l}f_k$ ($\mathfrak{b} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-2}}\partial_r(g_4)$). Причем справедливо равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.10. ■

4.5.3. Редукция в начале и в конце слова для $\varkappa = 2$

(1) Избавление от f_1g_ω, $\omega = 1, 3, 4, 5$, $g_\sigma f_1$, $\sigma = 1, 2, 3, 5$, $f_2g_5g_5$ и $g_5g_5f_2$

Лемма 4.15. *Слова $\mathfrak{a}_1 = f_1g_\omega g_{j_2}\dots g_{j_l}f_k$, $\omega \in \{1,5\}$, $\mathfrak{a}_2 = f_2g_5g_5g_{j_3}\dots g_{j_l}f_k$ $\big(\mathfrak{a}_1 = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-1}}g_\sigma f_1$, $\sigma \in \{3,5\}, \mathfrak{a}_2 = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-2}}g_5g_5f_2\big)$ полуэкстремальны тогда и только тогда, когда полуэкстремально их подслово $\mathfrak{b} = \partial_l(g_{j_m})g_{j_{m+1}}\dots g_{j_l}f_k$, где $m \geqslant 2$ минимальное число, для которого определен $\partial_l(g_{j_m})$ $\big(\mathfrak{b} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-m-1}}\partial_r(g_{j_{l-m}})$, где $m \geqslant 1$ минимальное число, для которого определен $\partial_r(g_{j_{l-m}})\big)$. Причем справедливо неравенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \geqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.9.

Используя симметрию, проверим неравенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) \geqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$ только для слов $\mathfrak{a}_1 = f_1g_\omega g_{j_2}\dots g_{j_l}f_k$, $\omega \in \{1,5\}$, $\mathfrak{a}_2 = f_2g_5g_5g_{j_3}\dots g_{j_l}f_k$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p-q+r-s+t+3-(n+k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}_n$, $n = 1, 2$, соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = p'-q'+r'-s'+t'+3-(x+k)$, $x = 1, 2$, где p', q', r', s' и t' — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}$ соответственно, и $p'-q'+r'-s'+t' = p-q+r-s+t-y$, $y \geqslant n-1$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) \leqslant \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

Лемма 4.16. *Слово $\mathfrak{a} = f_1g_3g_{j_2}\dots g_{j_l}f_k$ ($\mathfrak{a} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-1}}g_1f_1$) полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремально его подслово $\mathfrak{b} = \partial_l(g_3)g_{j_2}\dots g_{j_l}f_k$ ($\mathfrak{b} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-1}}\partial_r(g_1)$). Причем справедливо равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) + 1$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.8.

Используя симметрию, проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) + 1$ только для слова $\mathfrak{a} = f_1 g_3 g_{j_2} \dots g_{j_l} f_k$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (1 + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = p' - q' + r' - s' + t' + 3 - (1 + k)$, где p', q', r', s' и t' — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}$ соответственно, и $p' - q' + r' - s' + t' = p - q + r - s + t - 1$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) - 1$. Лемма доказана. ■

Лемма 4.17. *Слово* $\mathfrak{a} = f_1 g_4 g_{j_2} \dots g_{j_l} f_k$ ($\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{l-1}} g_2 f_1$) *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремально его подслово* $\mathfrak{b} = \partial_l(g_4) g_{j_2} \dots g_{j_l} f_k$ ($\mathfrak{b} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_{l-1}} \partial_r(g_2)$). *Причем справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.

Доказательство. Используя симметрию, мы рассмотрим только слово $\mathfrak{a} = f_1 g_4 g_{j_2} \dots g_{j_l} f_k$.

Пусть слово $\mathfrak{b}$ полуэкстремально. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Положительность собственных подслов, которые не содержат букв $f_1 g_4$, выполнена, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}$.

Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее $f_1 g_4$. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}'$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}$. По условию слово $\mathfrak{d}'$ положительно. Определим для слова $\mathfrak{d}'$ строго допустимую деформацию следующим образом: $\eta(\mathfrak{d}') \in \Lambda^+(\mathfrak{d}')$ и $a\eta(\mathfrak{d}')\big|_{\mathfrak{d}' \setminus \partial_l(g_4)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}' \setminus \partial_l(g_4)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}')$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_4) = f_2$. Здесь a нормирующий коэффициент.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) =$$
$$= \delta\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}', \eta(\mathfrak{d}'))\big) + \upsilon(\mathfrak{z}_1) + \chi(\mathfrak{y}^{-1}) - \delta\upsilon(\mathfrak{z}_2) = \delta\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}', \eta(\mathfrak{d}'))\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (1 + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = p' - q' + r' - s' + t' + 3 - (2 + k)$, где p', q', r', s' и t' — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}$ соответственно, и $p' - q' + r' - s' + t' = p - q + r - s + t + 1$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

(2) Избавление от f_2g_3 и g_1f_2

Лемма 4.18. *Слово* $\mathfrak{a} = f_2g_3g_{j_2}\dots g_{j_l}f_k$ $(\mathfrak{a} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-1}}g_1f_2)$ *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремально его подслово* $\mathfrak{b} = \partial_l(g_3)g_{j_2}\dots g_{j_l}f_k$ $(\mathfrak{b} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-1}}\partial_r(g_1))$. *Причем справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.

Доказательство. Используя симметрию, мы рассмотрим только слово $\mathfrak{a} = f_2g_3g_{j_2}\dots g_{j_l}f_k$.

Пусть слово $\mathfrak{b}$ полуэкстремально. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Положительность собственных подслов, которые не содержат f_2g_3, выполнена, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}$.

Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее f_2g_3. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$ для слова $\mathfrak{d}$. Обозначим через $\mathfrak{d}'$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}$. По условию слово $\mathfrak{d}'$ положительно. Определим для слова $\mathfrak{d}'$ строго допустимую деформацию следующим образом: $\eta(\mathfrak{d}') \in \Lambda^+(\mathfrak{d}')$ и $a\eta(\mathfrak{d}')\big|_{\mathfrak{d}'\setminus\partial_l(g_3)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}'\setminus\partial_l(g_3)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}')$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(g_3) = f_1$. Здесь a нормирующий коэффициент.

Имеем

$$\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) =$$
$$= \delta^{-1}\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}', \eta(\mathfrak{d}'))\big) + \upsilon(\mathfrak{z}_2) + \chi(\mathfrak{y}) - \delta^{-1}\upsilon(\mathfrak{z}_1) = \delta^{-1}\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}', \eta(\mathfrak{d}'))\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально.

Проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (2 + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = p' - q' + r' - s' + t' + 3 - (1 + k)$, где p', q', r', s' и t' — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}$ соответственно, и $p' - q' + r' - s' + t' = p - q + r - s + t - 1$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

(3) Избавление от $f_2g_5g_4$ и $g_2g_5f_2$

Лемма 4.19. *Слово* $\mathfrak{a} = f_2g_5g_4g_{j_3}\dots g_{j_l}f_k$ $(\mathfrak{a} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-2}}g_2g_5f_2)$ *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремально его подслово* $\mathfrak{b} = \partial_l(g_4)g_{j_3}\dots g_{j_l}f_k$ $(\mathfrak{b} = f_ig_{j_1}\dots g_{j_{l-2}}\partial_r(g_2))$. *Причем справедливо равенство* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.10.

Используя симметрию, проверим равенство $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{b})$ только для слова $\mathfrak{a} = f_2 g_5 g_4 g_{j_3} \dots g_{j_l} f_k$.

Пусть $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) = p - q + r - s + t + 3 - (2 + k)$, где p, q, r, s и t — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{a}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = p' - q' + r' - s' + t' + 3 - (2 + k)$, где p', q', r', s' и t' — количество букв g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5 в слове $\mathfrak{b}$ соответственно, и $p' - q' + r' - s' + t' = p - q + r - s + t$. Получаем $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) = \mathrm{Tor}(\mathfrak{a})$. Лемма доказана. ■

Следствие 4.2. *В условиях леммы* 4.5*, если* $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) < 0$*, то* $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_3) < 0$.

Следствие 4.3. *В условиях лемм* 4.6 — 4.11*, если* $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) < 0$*, то* $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) < 0$ *или* $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) < 0$.

Доказательство. Пусть $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) > 0$, тогда

$$(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) + (-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) < 0.$$

Следовательно, $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_1) < 0$ или $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}_2) < 0$. Следствие доказано. ■

Следствие 4.4. *В условиях лемм* 4.12*,* 4.13 *и* 4.14*, если* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) > 0$*, то* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) > 0$.

Следствие 4.5. *В условиях лемм* 4.15 — 4.19*, если* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{a}) < 0$*, то* $\mathrm{Tor}(\mathfrak{b}) < 0$.

4.5.4. Простейшие слова и полуэкстремальность слов

Определение. Рассмотрим произвольное слово $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_l} f_k$. Слово $\mathfrak{a}$ называется *простейшим*, если оно не содержит следующие последовательности букв:

g_1g_2, g_4g_3, g_2g_1, g_3g_4, g_1g_4, g_2g_3, g_4g_1, g_3g_2, g_1g_3, g_4g_2, g_1g_w, g_ug_3, $g_ug_vg_w$, $g_2g_5g_w$, $g_ug_5g_4$, $w \in \{1,5\}$, $u \in \{3,5\}$, $v \in \{1,3,5\}$, $g_4g_5g_2$, $g_2g_5g_4$, g_4g_4, g_2g_2 и f_1g_2, g_4f_1, f_2g_2, g_4f_2, f_2g_4, g_2f_2, $f_2g_5g_2$, $g_4g_5f_2$ для $\varkappa = 1$;
f_1g_u, $u \in \{1,3,4,5\}$, g_vf_1, $v \in \{1,2,3,5\}$, f_2g_3, g_1f_2, $f_2g_5g_4$, $g_2g_5f_2$, $f_2g_5g_5$, $g_5g_5f_2$ для $\varkappa = 2$.

Из определения вытекает

Утверждение 4.8. *Слово* $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \dots g_{j_l} f_k$ *является простейшим тогда и только тогда, когда оно имеет один из следующих видов:*

1) $\mathfrak{a} = f_i f_k$, $f_i g_j f_k$, *где* $j \in \{1,3,5\}$, *или* $f_i g_v g_u f_k$, *где* $u \in \{1,5\}$, $v \in \{3,5\}$, *для* $\varkappa = 1$,
$\mathfrak{a} = f_i f_k$ *или* $f_2 g_5 f_2$ *для* $\varkappa = 2$;

2) $\mathfrak{a} = xyz$, *где* $x = f_i g_3 g_5 g_2$, f_1 *или* $f_i g_5$, $z = g_4 g_5 g_1 f_k$, f_1 *или* $g_5 f_k$,
$y = (g_4 g_5)^{p_1}(g_5 g_2)^{q_1} \ldots (g_4 g_5)^{p_r}(g_5 g_2)^{q_r}$, *где* p_s, $q_t \in \mathbb{N}$, p_1, $q_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \geqslant 0$, *для* $\varkappa = 1$,
$\mathfrak{a} = xyz$, *где* $x = f_i g_2$ *или* f_2, $z = g_4 f_k$ *или* f_2,
$y = (g_4 g_5)^{p_1}(g_5 g_2)^{q_1} \ldots (g_4 g_5)^{p_r}(g_5 g_2)^{q_r}$, *где* p_s, $q_t \in \mathbb{N}$, p_1, $q_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \geqslant 0$, *для* $\varkappa = 2$.

Из лемм 4.5 — 4.19 следует, что каждому слову можно поставить в соответствие некоторый набор простейших слов. Эти простейшие слова будем называть *образующими словами*. Из этих же лемм и следствий 4.2 — 4.5 сразу вытекает теорема.

Теорема 4.3. *Слово* $\mathfrak{a}$ *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны все его образующие. Если для слова* $\mathfrak{a}$ *выполняется неравенство* $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}(\mathfrak{a}) < 0$, *то найдется образующее слово* $\mathfrak{b}$ *слова* $\mathfrak{a}$, *для которого* $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}(\mathfrak{b}) < 0$.

Теорема 4.4. *Если для всех подслов* $\mathfrak{b}$ *слова* $\mathfrak{a}$ *выполнено* $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}(\mathfrak{b}) \geqslant 0$, *то и для всех образующих слов* $\mathfrak{c}$ *слова* $\mathfrak{a}$ *выполнено* $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}(\mathfrak{c}) \geqslant 0$.

Доказательство. Если образующее слово является подсловом слова $\mathfrak{a}$, то для него теорема справедлива. Если же образующее слово не является подсловом слова $\mathfrak{a}$, то это значит, что оно получено из некоторого подслова слова $\mathfrak{a}$ убиранием пар $g_1 g_2$, $g_2 g_1$, $g_3 g_4$, $g_4 g_3$. Но при убирании пар кручение сохраняется. Теорема доказана. ■

Теорема 4.5. *Простейшее слово* $\mathfrak{a}$ *полуэкстремально тогда и только тогда, когда* $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}(\mathfrak{a}) \geqslant 0$.

Доказательство. Напомним, что $\delta = 2\cos\Big(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{(3-2\varkappa)\pi}{3\lambda}\Big)$. Следовательно, $(-1)^\varkappa \delta \geqslant (-1)^\varkappa$. Справедливость теоремы для слов $f_i f_k$, $f_i g_j f_k$, где $j \in \{1,3,5\}$, $f_i g_v g_u f_k$, где $u \in \{1,5\}$, $v \in \{3,5\}$, при $\varkappa = 1$ и для слов $f_i f_k$, $f_2 g_5 f_2$ при $\varkappa = 2$ очевидна.

Рассмотрим простейшие слова вида $\mathfrak{a} = xyz$, где $x = f_i g_3 g_5 g_2$, f_1 или $f_i g_5$, $z = g_4 g_5 g_1 f_k$, f_1 или $g_5 f_k$, $y = (g_4 g_5)^{p_1}(g_5 g_2)^{q_1} \ldots (g_4 g_5)^{p_r}(g_5 g_2)^{q_r}$, где p_s, $q_t \in \mathbb{N}$, p_1, $q_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \geqslant 0$, при $\varkappa = 1$;
$x = f_i g_2$ или f_2, $z = g_4 f_k$ или f_2, $y = (g_4 g_5)^{p_1}(g_5 g_2)^{q_1} \ldots (g_4 g_5)^{p_r}(g_5 g_2)^{q_r}$, где

p_s, $q_t \in \mathbb{N}$, p_1, $q_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \geqslant 0$, при $\varkappa = 2$. Для этих слов мы имеем $(-1)^{\varkappa} \operatorname{Tor}(\mathfrak{a}) \leqslant (-1)$.

Докажем, что эти слова неполуэкстремальны. Рассмотрим строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{a}) \in \Lambda(\mathfrak{a})$ такую, что $\tau_2(g_5) = \mathfrak{x}$, если g_5 стоит рядом с g_2, и $\tau_2(g_5) = \mathfrak{y}$, если g_5 стоит рядом с g_4. Во всех случаях получаем

$$\varsigma\bigl(\tau(\mathfrak{a}, \eta(\mathfrak{a}))\bigr) < 0.$$

Следовательно, слово $\mathfrak{a}$ неполуэкстремально. Теорема доказана. ■

Теорема 4.6. *Произвольное слово* $\mathfrak{a} = f_i g_{j_1} \ldots g_{j_l} f_k$ *на* λ*-нормированной плоскости, где* $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, $\lambda \neq 2,\ 4$, $\varkappa = 1,\ 2$, *полуэкстремально тогда и только тогда, когда для каждого его подслова* $\mathfrak{b}$ *выполняется неравенство*: $(-1)^{\varkappa} \operatorname{Tor}(\mathfrak{b}) \geqslant 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Предположим, что существует подслово $\mathfrak{c}$ слова $\mathfrak{a}$, для которого $(-1)^{\varkappa} \operatorname{Tor}(\mathfrak{c}) < 0$. Тогда, по теореме 4.3, найдется образующее слово $\mathfrak{d}$ слова $\mathfrak{c}$, для которого $(-1)^{\varkappa} \operatorname{Tor}(\mathfrak{d}) < 0$. Из теоремы 4.5 вытекает, что слово $\mathfrak{d}$ неполуэкстремально. Следовательно, по теореме 4.3, слово $\mathfrak{c}$ неполуэкстремально. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть для каждого подслова $\mathfrak{b}$ слова $\mathfrak{a}$ выполняется неравенство: $(-1)^{\varkappa} \operatorname{Tor}(\mathfrak{b}) \geqslant 0$. Докажем, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. По теореме 4.4, для всех образующих слов $\mathfrak{c}$ слова $\mathfrak{a}$ выполнено $(-1)^{\varkappa} \operatorname{Tor}(\mathfrak{c}) \geqslant 0$. Из теоремы 4.5 вытекает, что все образующие слова $\mathfrak{c}$ полуэкстремальны. Следовательно, по теореме 4.3, слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально. Теорема доказана. ■

4.6. Критерий полуэкстремальности слова для $\varkappa = 0$

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, и $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. По теореме 4.1, экстремальность сети Γ равносильна полуэкстремальности справа и слева слова $\mathfrak{a}$. Исследуем полуэкстремальность слова $\mathfrak{a}$.

Лемма 4.20. *Слово* $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \ldots b_{j_{q-1}} b_j b_{j_{q+1}} \ldots b_{j_l} c_k$, *где* $j = 1,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$ $(j = 2,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14)$, *полуэкстремально справа (слева) тогда и только тогда, когда полуэкстремальны справа (слева) его подслова* $\mathfrak{b}_1 = a_i b_{j_1} \ldots b_{j_{q-1}} \partial_r(b_j)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(b_j) b_{j_{q+1}} \ldots b_{j_l} c_k$.

Доказательство. Докажем, что слово $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_{q-1}} b_j b_{j_{q+1}} \dots b_{j_l} c_k$, $j = 1,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$, полуэкстремально справа, если подслова $\mathfrak{b}_1 = a_i b_{j_1} \dots b_{j_{q-1}} \partial_r(b_j)$, $\mathfrak{b}_2 = \partial_l(b_j) b_{j_{q+1}} \dots b_{j_l} c_k$ полуэкстремальны справа (полуэкстремальность слева рассматривается аналогично).

Рассмотрим $j \neq 1$. Положительность собственных подслов, которые не содержат одновременно букву b_j, выполнена, так как они собственные подслова слова $\mathfrak{b}_1$ или $\mathfrak{b}_2$.

Рассмотрим произвольное подслово слова $\mathfrak{a}$, содержащее b_j. Обозначим это слово через $\mathfrak{d}$ и докажем его положительность. Рассмотрим произвольную строго допустимую деформацию $\eta(\mathfrak{d}) \in \Lambda^+(\mathfrak{d})$. Обозначим через $\mathfrak{d}_i$ максимальное слово, являющееся собственным подсловом как слова $\mathfrak{d}$, так и слова $\mathfrak{b}_i$, где $i = 1,\ 2$. По условию слова $\mathfrak{d}_i$ положительны. Определим для слов $\mathfrak{d}_i$ строго допустимые деформации следующим образом:
$\eta(\mathfrak{d}_1) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_1)$ и $\eta(\mathfrak{d}_1)\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(b_j)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_1 \setminus \partial_r(b_j)}$, т.е. деформация $\eta(\mathfrak{d}_1)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_r(b_j) = c_{11}$;
$\eta(\mathfrak{d}_2) \in \Lambda^+(\mathfrak{d}_2)$ и $a\eta(\mathfrak{d}_2)\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(b_j)} = \eta(\mathfrak{d})\big|_{\mathfrak{d}_2 \setminus \partial_l(b_j)}$, т.е. деформация $a\eta(\mathfrak{d}_2)$ отличается от деформации $\eta(\mathfrak{d})$ лишь на букве $\partial_l(b_j)$. Здесь a нормирующий коэффициент.

Имеем

$$\begin{gathered}
\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}, \eta(\mathfrak{d}))\big) = \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2, \eta(\mathfrak{d}_2))\big) + \\
+ \delta_1^r \delta_2^s \big(-\upsilon(\mathfrak{z}) + \chi(\tau_2(b_j)) - \delta_1^{\mathrm{ind}_1(\tau_2(b_j))} \delta_2^{\mathrm{ind}_2(\tau_2(b_j))} \upsilon(\mathfrak{z})\big) = \\
= \varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_1, \eta(\mathfrak{d}_1))\big) + a\varsigma\big(\tau(\mathfrak{d}_2, \eta(\mathfrak{d}_2))\big) \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно и слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально.

Случай $j = 1$ доказывается аналогично, только деформация в концевой вершине образующего пути может не совпадать с допустимой деформацией, когда мы вариацию раскладываем на две вариации. Лемма доказана. ■

Теорема 4.7. *Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольное слово. Тогда, если $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ $(\Lambda^-(\mathfrak{a}))$ непусто, то слово $\mathfrak{a}$ неполуэкстремально справа (слева).*

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим только $\Lambda^+(\mathfrak{a})$. Пусть $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ непусто. По лемме 4.20, полуэкстремальность справа слова $\mathfrak{a}$ равносильна полуэкстремальности справа максимальных подслов $\mathfrak{b}_m$ слова $\mathfrak{a}$, которые не содержат буквы b_j, где $j = 1,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$. Очевидно, что множества $\Lambda^+(\mathfrak{b}_m)$ тоже непусты. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{a}$ не содержит буквы b_j, где $j = 1,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$. Поскольку $\Lambda^+(\mathfrak{a})$ непусто, где $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_l} c_k$, то, по утверждению 4.2, имеем $i = 2q+1$, $j_m = 2q+1,\ 6,\ 16,\ 17,\ 18$, $q = 0, \dots, 7$.

Рассмотрим все максимальные подслова $\mathfrak{c}_r$ слова $\mathfrak{a}$, не содержащие буквы b_j, где $j = 15$, 17. Утверждается, что хотя бы одно из множеств $\Lambda^+(\mathfrak{c}_r)$ непусто. Это следует из того факта, что $\partial_l(b_{15}) = a_{13}$ и $\partial_r(b_{17}) = c_{13}$. Последовательно убирая буквы b_{15} и b_{17}, мы всегда будем иметь слово, у которого существует строго допустимая деформация. Пусть $\Lambda^+(\mathfrak{c}_s)$ непусто и слово $\mathfrak{c}_s$ не содержит буквы b_j, где $j = 1$, 7, 9, 11, 13, 15, 17, т.е. содержит только b_3, b_5, b_6, b_{16}, b_{18}, которые дают неположительный вклад в формулу вариации. Следовательно, $\varsigma\big(\tau(\mathfrak{c}_s, \eta(\mathfrak{c}_s))\big) < 0$, где $\eta(\mathfrak{c}_s) \in \Lambda^+(\mathfrak{c}_s)$, так как буквы a_i, c_k дают отрицательный вклад в формулу вариации. Получаем, что слово $\mathfrak{c}_s$ неположительно и вместе с этим слово $\mathfrak{a}$ неполуэкстремально. Теорема доказана. ■

Теорема 4.8. *Произвольное слово $\mathfrak{a}$ на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 9$, полуэкстремально справа (слева) тогда и только тогда, когда для каждого его подслова $\mathfrak{b}$ множество $\Lambda^+(\mathfrak{b})$ $(\Lambda^-(\mathfrak{b}))$ пусто.*

4.7. Критерий экстремальности существенной сети

Определение. Обозначим через $\mathcal{A}^+$ множество всех слов $\mathfrak{b}$, для которых множество $\Lambda^+(\mathfrak{b})$ непусто. Аналогично, обозначим через $\mathcal{A}^-$ множество всех слов $\mathfrak{b}$, для которых множество $\Lambda^-(\mathfrak{b})$ непусто.

Рассмотрим произвольное слово $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ и обозначим через $p_m(\mathfrak{a})$ количество букв b_m в слове $\mathfrak{a}$.

Пусть $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}^+$. Из утверждения 4.2 для $\varkappa = 1$, 2 следует, что слово $\mathfrak{a}$ имеет вид $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_l} c_k$, где $i, k \neq 2, 4, 6 + \varkappa$, $j_m \neq 2, 4$. Положим $\mathrm{Tor}^+(\mathfrak{a}) = p_1(\mathfrak{a}) - p_7(\mathfrak{a}) + p_8(\mathfrak{a}) - p_9(\mathfrak{a}) + p_{10}(\mathfrak{a}) + 2\big(-p_3(\mathfrak{a}) - p_5(\mathfrak{a}) + p_6(\mathfrak{a})\big) + 3 - \big(r + s\big)$, где
$r = 1$, если $i = 6$, $7 + \varkappa$, и $r = 2$, если $i = 1$, 3, 5, $11 - 2\varkappa$,
$s = 1$, если $k = 6$, $7 + \varkappa$, и $s = 2$, если $k = 1$, 3, 5, $11 - 2\varkappa$.

Пусть $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}^-$. Из утверждения 4.2 для $\varkappa = 1$, 2 следует, что слово $\mathfrak{a}$ имеет вид $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_l} c_k$, где $i, k \neq 1$, 3, $9 - \varkappa$, $j_m \neq 1$, 3. Положим $\mathrm{Tor}^-(\mathfrak{a}) = p_2(\mathfrak{a}) + p_7(\mathfrak{a}) - p_8(\mathfrak{a}) + p_9(\mathfrak{a}) - p_{10}(\mathfrak{a}) + 2\big(-p_4(\mathfrak{a}) + p_5(\mathfrak{a}) - p_6(\mathfrak{a})\big) + 3 - \big(r + s\big)$, где
$r = 1$, если $i = 5$,$5 + 2\varkappa$, и $r = 2$, если $i = 2$, 4, 6, $10 - \varkappa$,
$s = 1$, если $k = 5$, $5 + 2\varkappa$, и $s = 2$, если $k = 2$, 4, 6, $10 - \varkappa$.

Теорема 4.9. *Пусть Γ — произвольная существенная сеть, и $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. Сеть Γ экстремальна тогда и только тогда, когда при $\varkappa = 1, 2$ для каждых подслов $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}^+$ и $\mathfrak{c} \in \mathcal{A}^-$ слова $\mathfrak{a}$ выполняются неравенства $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^+(\mathfrak{b}) \geqslant 0$, $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^-(\mathfrak{c}) \geqslant 0$, а при $\varkappa = 0$ для каждого подслова $\mathfrak{b}$ слова $\mathfrak{a}$ выполняется $\mathfrak{b} \notin \mathcal{A}^+$, $\mathfrak{b} \notin \mathcal{A}^-$.*

Доказательство. Случай $\varkappa = 0$ сразу следует из теоремы 4.8. Рассмотрим случаи $\varkappa = 1, 2$.

Необходимость. Пусть сеть Γ экстремальна. Тогда, по теореме 4.1, слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа и слева. Из теоремы 4.2 и следствия 4.1 вытекает, что слово $\mathfrak{d}_1$, полученное редукцией по буквам b_3, b_5 и b_6, полуэкстремально справа, и слово $\mathfrak{d}_2$, полученное редукцией по буквам b_4, b_5 и b_6, полуэкстремально слева. Слова $\mathfrak{d}_i$ удовлетворяют условию теоремы 4.6, и по этой теореме, для каждых их подслов $\mathfrak{f}_i$ выполнены неравенства $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^+(\mathfrak{f}_1) \geqslant 0$, $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^-(\mathfrak{f}_2) \geqslant 0$. Каждому подслову слова $\mathfrak{a}$ соответствует подслово слова $\mathfrak{d}_i$. Осталось заметить, что в выражении Tor^+ буквы b_3, b_5 и b_6, а в выражении Tor^- буквы b_4, b_5 и b_6 дают удвоенный вклад.

Достаточность. Пусть для каждых подслов $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}^+$ и $\mathfrak{c} \in \mathcal{A}^-$ слова $\mathfrak{a}$ выполняются неравенства $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^+(\mathfrak{b}) \geqslant 0$, $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^-(\mathfrak{c}) \geqslant 0$. Рассмотрим слова $\mathfrak{d}_i$, где слово $\mathfrak{d}_1$ получено редукцией по буквам b_3, b_5 и b_6, а слово $\mathfrak{d}_2$ получено редукцией по буквам b_4, b_5 и b_6. Тогда для каждого подслова $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{A}^+$ слова $\mathfrak{d}_1$ выполняется неравенство $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^+(\mathfrak{b}_1) \geqslant 0$, а для каждого подслова $\mathfrak{c}_1 \in \mathcal{A}^-$ слова $\mathfrak{d}_2$ выполняется неравенство $(-1)^\varkappa \operatorname{Tor}^-(\mathfrak{c}_1) \geqslant 0$. Из теоремы 4.6 вытекает, что слово $\mathfrak{d}_1$ полуэкстремально справа, а слово $\mathfrak{d}_2$ полуэкстремально слева. Следовательно, по теореме 4.2 и по следствию 4.1, слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа и слева, т.е. сеть Γ экстремальна. Теорема доказана. ■

4.8. Геометрический критерий экстремальности бинарной сети

4.8.1. Избавление от неточечных ребер

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — существенная сеть, ребра которой могут быть неточечными, и $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$.

Теорема 4.10. *Пусть $\varkappa = 1, 2$. Слово $\mathfrak{a} = a_i \ldots$ ($\mathfrak{a} = \ldots c_i$) полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны слова:*

1) $\mathfrak{b} = a_1 \ldots$ $(\ldots c_1)$, *если* $i = 3$;

2) $\mathfrak{b} = a_2 \ldots\ (\ldots c_2)$*, если* $i = 4$*;*

3) $\mathfrak{b} = a_7 \ldots\ (\ldots c_7)$ *и* $\mathfrak{c} = a_9 \ldots\ (\ldots c_9)$*, если* $i = 5$*;*

4) $\mathfrak{b} = a_8 \ldots\ (\ldots c_8)$ *и* $\mathfrak{c} = a_9 \ldots\ (\ldots c_9)$*, если* $i = 6$*.*

Доказательство. Пункты 1) и 2) следуют из пунктов 3) и 4). Используя симметрию, достаточно рассмотреть пункт 3) и слово вида $\mathfrak{a} = a_5 \ldots$.

Достаточность. Пусть слова $\mathfrak{b} = a_7 \ldots$ и $\mathfrak{c} = a_9 \ldots$ полуэкстремальны справа (слева). Тогда полуэкстремальность справа слова $\mathfrak{a}$ следует из полуэкстремальности справа слова $\mathfrak{c}$ (полуэкстремальность слева слова $\mathfrak{a}$ — из полуэкстремальности слева слова $\mathfrak{b}$).

Необходимость. Пусть слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа (слева). Из теоремы 4.9 и вида деформации следует, что слово $\mathfrak{b} = a_7 \ldots$ полуэкстремально справа (слева), а слово $\mathfrak{c} = a_9 \ldots$ полуэкстремально справа для $\varkappa = 1$ (слева для $\varkappa = 2$). Следовательно, остается доказать, что слово $\mathfrak{c}$ полуэкстремально справа для $\varkappa = 2$ (слева для $\varkappa = 1$). Достаточно проверить положительность справа (слева) подслов слова $\mathfrak{c}$, которые содержат букву a_9. Пусть $\mathfrak{d} = a_9 b_{j_1} \ldots \partial_r(b_{j_l})$ — произвольное подслово слова $\mathfrak{c}$. Тогда слово $\mathfrak{f} = a_5 b_{j_1} \ldots \partial_r(b_{j_l})$ является подсловом слова $\mathfrak{a}$. Берем произвольную деформацию $\eta^{+(-)}(\mathfrak{d}) \in \Lambda^{+(-)}(\mathfrak{d})$ и строим деформацию $\eta^{+(-)}(\mathfrak{f}) \in \Lambda^{+(-)}(\mathfrak{f})$ следующим образом: $\eta^{+(-)}(\mathfrak{f})\Big|_{b_{j_1}\ldots\partial_r(b_{j_l})} = \eta^{+(-)}(\mathfrak{d})\Big|_{b_{j_1}\ldots\partial_r(b_{j_l})}$, а на букве a_5 деформация $\eta^{+(-)}(\mathfrak{f})$ определяется единственном образом, исходя из требования $\eta^{+(-)}(\mathfrak{f}) \in \Lambda^{+(-)}(\mathfrak{f})$.

Имеем:

$$\varsigma\big(\tau^{+(-)}(\mathfrak{d}, \eta^{+(-)}(\mathfrak{d}))\big) = \varsigma\big(\tau^{+(-)}(\mathfrak{f}, \eta^{+(-)}(\mathfrak{f}))\big) + (-1)^{\varkappa}\big(\upsilon(\mathfrak{z}_1) - \upsilon(\mathfrak{z}_2)\big) \geqslant 0,$$

так как слово $\mathfrak{f}$ положительно справа (слева). Следовательно, слово $\mathfrak{d}$ положительно справа (слева). Теорема доказана. ■

Аналогично, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.11. *Пусть* $\varkappa = 0$*. Слово* $\mathfrak{a} = a_i \ldots$ $(\mathfrak{a} = \ldots c_i)$ *полуэкстремально тогда и только тогда, когда полуэкстремальны слова:*

1) $\mathfrak{b} = a_1 \ldots\ (\ldots c_1)$*, если* $i = 3$*;*

2) $\mathfrak{b} = a_2 \ldots\ (\ldots c_2)$*, если* $i = 4$*;*

3) $\mathfrak{b} = a_{11} \ldots\ (\ldots c_{11})$*, если* $i = 5,\ 7$*;*

4) $\mathfrak{b} = a_{12} \ldots\ (\ldots c_{12})$*, если* $i = 6,\ 8$*;*

5) $\mathfrak{b} = a_{13}\dots$ $(\dots c_{13})$, *если* $i = 9$;

6) $\mathfrak{b} = a_{14}\dots$ $(\dots c_{14})$, *если* $i = 10$.

4.8.2. Определение ориентированной погрешности

Рассмотрим произвольную пару (γ, γ') смежных ребер, ориентированных от их общей вершины. Определим знак $\epsilon(\gamma, \gamma')$ этой пары следующим образом:

— для линейно независимых ребер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma, \gamma') = 1$, если базис (γ, γ') положительно ориентирован на $\mathbb{R}^2$, и $\epsilon(\gamma, \gamma') = -1$ в противном случае;

— для линейно зависимых ребер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma, \gamma') = 1$.

Определим для пары (γ, γ') *ориентированную погрешность* $\mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma')$, положив: $\mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma') = \epsilon(\gamma, \gamma')\,\mathrm{fall}(\gamma, \gamma')$.

Лемма 4.21. *Ориентированная погрешность кососимметрична, т.е.* $\mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma') = -\,\mathrm{fall}_0(\gamma', \gamma)$, *является целым числом и* $-\lambda \leqslant \mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma') \leqslant \lambda$.

Рассмотрим произвольный ориентированный путь $\mathcal{P} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ в сети Γ, где γ_i — последовательные ребра пути $\mathcal{P}$. При каждом $1 \leqslant i \leqslant n-1$ внутренней вершине z_i пути $\mathcal{P}$, инцидентной ребрам γ_i и γ_{i+1}, поставим в соответствие знак $\epsilon(\gamma_i, \gamma_{i+1})$.

Определение. Путь $\mathcal{P}$ называется *правильно повернутым*, если все внутренние вершины пути $\mathcal{P}$, граничные в сети Γ, имеют одинаковый знак. Ориентация правильно повернутого пути $\mathcal{P}$ называется *канонической*, если знак каждой внутренней вершины пути $\mathcal{P}$, граничной в сети Γ, положителен.

Определим для канонически ориентированного пути $\mathcal{P}$, все внутренние ребра которого точечны, *ориентированную погрешность* $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P})$, положив:

$$\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) = \max_{j_1, j_n}\Big(\mathrm{fall}_0(\gamma_1^{j_1}, \gamma_2) + \sum_{i=2}^{n-2}\mathrm{fall}_0(\gamma_i, \gamma_{i+1}) + \mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n^{j_n})\Big),$$

где $\partial\,\mathrm{fl}(\gamma_q) = \{\gamma_q^1, \gamma_q^2\}$, $q = 1$ или n, — граница подмножество $\mathrm{fl}(\gamma_q)$ окружности Σ.

Пусть Π — множество канонически ориентированных путей в Γ, все внутренние ребра которых точечны. Положим

$$\mathrm{Fall}_0(\Gamma) = \max_{\mathcal{P}\in\Pi}\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}).$$

4.8.3. Геометрический критерий экстремальности бинарной существенной сети

Определение. Сеть Γ называется *бинарной*, если все ее граничные вершины имеют степень 1, а внутренние — 3.

Теорема 4.12. *Произвольная бинарная существенная сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, *все ребра которой точечны, экстремальна на* λ*-нормированной плоскости, где* $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

Доказательство. Заметим, что если сеть Γ является звездой, т.е. содержит не более чем одной вершины степени больше 1, то, по теореме 1.7, утверждение данной теоремы имеет место. Пусть сеть Γ содержит по крайней мере две вершины степени больше 1.

Необходимость. Пусть сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, все ребра которой точечны, экстремальна. Докажем, что для сети Γ выполняется неравенство $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$. Предположим противное, т.е. $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \geqslant 4$. Тогда найдется такой ориентированный путь $\mathcal{P} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $n \geqslant 3$, в сети Γ, что $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) \leqslant -4$ (иначе меняем ориентацию на пути). Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant 0$ и $\mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n) \leqslant 0$, и при $\varkappa = 0$ еще имеет место неравенство $\mathrm{fall}_0(\gamma_{i-1}, \gamma_i) \leqslant 0$, где $i = 2, \dots, n-1$, (иначе можно рассмотреть подпуть пути $\mathcal{P}$, удовлетворяющий этим условиям, для которого погрешность меньше или равна $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P})$ и, следовательно, меньше или равна -4).

Зададим на сети Γ правильную ориентацию таким образом, чтобы ориентация ребер γ_i, где $i = 2, \dots, n-1$, на $\mathcal{P}$ совпадала с ориентацией их на Γ, и рассмотрим $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. Тогда, по теореме 4.9, при $\varkappa = 1$, 2 для каждых подслов $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}^+$ и $\mathfrak{c} \in \mathcal{A}^-$ слова $\mathfrak{a}$ выполняются неравенства $(-1)^\varkappa \mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) \geqslant 0$, $(-1)^\varkappa \mathrm{Tor}^-(\mathfrak{c}) \geqslant 0$, а при $\varkappa = 0$ каждое подслово $\mathfrak{b}$ слова $\mathfrak{a}$ не принадлежит $\mathcal{A}^{+(-)}$.

Пусть $\bar\Gamma$ — подсеть сети Γ, полученная расширением пути $\mathcal{P}$ в сети Γ. Заметим, что $\bar\Gamma$ является существенной сетью. Правильная ориентация на Γ индуцирует правильную ориентацию на $\bar\Gamma$, поэтому слово $\mathfrak{d} = W(\bar\Gamma)$ является подсловом слова $\mathfrak{a}$.

Если $\varkappa = 0$, то подслово $\mathfrak{d}$ слова $\mathfrak{a}$ будет принадлежать $\mathcal{A}^+$, а это противоречит тому, что слово $\mathfrak{a}$ полуэкстремально справа.

Для $\varkappa = 1$, 2 рассмотрим четыре случая:

1. Если $\mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_2) = -2$ и $\mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n) = -2$, то $\mathfrak{d} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k$, где $i = k = 9 - \varkappa$, $j_m \neq 1$, 2, 3, 4. Из определения погрешности вытекает, что

$$(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}^{+}(\mathfrak{d}) =$$
$$= (-1)^{\varkappa}\Big(-p_7(\mathfrak{d}) + p_8(\mathfrak{d}) - p_9(\mathfrak{d}) + p_{10}(\mathfrak{d}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{d}) + p_6(\mathfrak{d})\big) - (-1)^{\varkappa}\Big) =$$
$$= \mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) + 4 - 1 \leqslant -1,$$

а это противоречит тому, что $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}^{+}(\mathfrak{d}) \geqslant 0$. Следовательно, $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) > -4$.

2. Если $\mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_2) = -1$ и $\mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n) = -2$, то $\mathfrak{d} = a_i b_{j_1} \ldots b_{j_{n-2}} c_k$, где $i = 9 - \varkappa$ или 9, а $k = 9 - \varkappa$, $j_m \neq 1, 2, 3, 4$.

Если $i = 9 - \varkappa$, то, беря вместо пути $\mathcal{P}$ путь, полученный заменой ребра γ_1 на смежное ему ребро сети $\bar{\Gamma}$, не принадлежащее $\mathcal{P}$, мы получим, что погрешность нового пути меньше на 1, чем $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P})$. Этот случай мы уже рассмотрели в **1**.

Пусть $i = 9$. Из определения погрешности вытекает, что

$$(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}^{+}(\mathfrak{d}) =$$
$$= (-1)^{\varkappa}\Big(-p_7(\mathfrak{d}) + p_8(\mathfrak{d}) - p_9(\mathfrak{d}) + p_{10}(\mathfrak{d}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{d}) + p_6(\mathfrak{d})\big)\Big) =$$
$$= \mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) + 3 \leqslant -1,$$

а это противоречит тому, что $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}^{+}(\mathfrak{d}) \geqslant 0$. Следовательно, $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) > -4$.

3. Случай $\mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_2) = -1$ и $\mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n) = -2$ рассматривается аналогично случаю **2**.

4. Если $\mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_2) = -1$ и $\mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n) = -1$, то $\mathfrak{d} = a_i b_{j_1} \ldots b_{j_{n-2}} c_k$, где (i, k) равно $(9 - \varkappa, 9 - \varkappa)$, $(9 - \varkappa, 9)$, $(9, 9 - \varkappa)$ или $(9, 9)$, $j_m \neq 1$, 2, 3, 4. Случай, когда $i = 9 - \varkappa$ или $k = 9 - \varkappa$ можно свести к случаю **1**, **2** или **3**, рассуждая как в случае **2.**

Пусть $i = 9$ и $k = 9$. Из определения погрешности вытекает, что

$$(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}^{+}(\mathfrak{d}) =$$
$$= (-1)^{\varkappa}\Big(-p_7(\mathfrak{d}) + p_8(\mathfrak{d}) - p_9(\mathfrak{d}) + p_{10}(\mathfrak{d}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{d}) + p_6(\mathfrak{d})\big) + (-1)^{\varkappa}\Big) =$$
$$= \mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) + 2 + 1 \leqslant -1,$$

а это противоречит тому, что $(-1)^{\varkappa}\,\mathrm{Tor}^{+}(\mathfrak{d}) \geqslant 0$. Следовательно, $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) > -4$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для сети Γ выполняется неравенство $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$. Докажем, что сеть Γ экстремальна. Зададим на Γ правильную ориентацию и рассмотрим $\mathfrak{a} = W(\Gamma)$. Из определения бинарной сети следует, что $\mathfrak{a} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_l} c_k$, где $i, j_m, k \neq 1, 2, 3, 4$.

Если $\varkappa = 0$, то из определения строго допустимой деформации вытекает, что каждое подслово $\mathfrak{b}$ слова $\mathfrak{a}$ не принадлежит $\mathcal{A}^{+(-)}$. Следовательно, сеть Γ экстремальна.

Пусть $\varkappa = 1, 2$. По теореме 4.9, достаточно проверить, что для каждых подслов $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}^+$ и $\mathfrak{c} \in \mathcal{A}^-$ слова $\mathfrak{a}$ выполняются неравенства $(-1)^\varkappa \mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) \geqslant 0$, $(-1)^\varkappa \mathrm{Tor}^-(\mathfrak{c}) \geqslant 0$. Проверим неравенство лишь для подслов $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}^+$, $\mathfrak{b} = a_i b_{j_1} \dots b_{j_{n-2}} c_k$ (иначе поменяем ориентацию). По определению, $\mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) = -p_7(\mathfrak{b}) + p_8(\mathfrak{b}) - p_9(\mathfrak{b}) + p_{10}(\mathfrak{b}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{b}) + p_6(\mathfrak{b})\big) + 3 - \big(r+s\big)$, где
$r = 1$, если $i = 7 + \varkappa$, и $r = 2$, если $i = 11 - 2\varkappa$,
$s = 1$, если $k = 7 + \varkappa$, и $s = 2$, если $k = 11 - 2\varkappa$.

Пусть $\mathfrak{b} = W(\bar{\Gamma})$ для некоторой подсети $\bar{\Gamma}$ сети Γ. Введем обозначения для ребер сети $\bar{\Gamma}$, как в определении букв a_p, b_q, c_r.

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $i = k = 11 - 2\varkappa$. Тогда $\mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) = -p_7(\mathfrak{b}) + p_8(\mathfrak{b}) - p_9(\mathfrak{b}) + p_{10}(\mathfrak{b}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{b}) + p_6(\mathfrak{b})\big) - 1$. Рассмотрим путь $\mathcal{P} = \{\varepsilon_1^+, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}, \varepsilon_{n-1}^+\}$, ориентированный от ребра ε_1^+. Тогда

$$\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) =$$
$$= -\varkappa + (-1)^\varkappa\Big(-p_7(\mathfrak{b}) + p_8(\mathfrak{b}) - p_9(\mathfrak{b}) + p_{10}(\mathfrak{b}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{b}) + p_6(\mathfrak{b})\big)\Big) - \varkappa =$$
$$= (-1)^\varkappa \mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) - 3.$$

2. Пусть $i = 7 + \varkappa$, $k = 11 - 2\varkappa$ или $i = 11 - 2\varkappa$, $k = 7 + \varkappa$. Тогда $\mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) = -p_7(\mathfrak{b}) + p_8(\mathfrak{b}) - p_9(\mathfrak{b}) + p_{10}(\mathfrak{b}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{b}) + p_6(\mathfrak{b})\big)$. Рассмотрим путь $\mathcal{P}_1 = \{\varepsilon_1^-, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}, \varepsilon_{n-1}^+\}$, ориентированный от ребра ε_1^-, если $i = 7 + \varkappa$, $k = 11 - 2\varkappa$, и путь $\mathcal{P}_2 = \{\varepsilon_1^+, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}, \varepsilon_{n-1}^-\}$, ориентированный от ребра ε_1^+, если $i = 11 - 2\varkappa$, $k = 7 + \varkappa$. Тогда

$$\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}_m) =$$
$$= (-1)^\varkappa\Big(- p_7(\mathfrak{b}) + p_8(\mathfrak{b}) - p_9(\mathfrak{b}) + p_{10}(\mathfrak{b}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{b}) + p_6(\mathfrak{b})\big)\Big) - 3 =$$
$$= (-1)^\varkappa \mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) - 3, \ m = 1, 2.$$

3. Пусть $i = k = 7 + \varkappa$. Тогда $\mathrm{Tor}^+(\mathfrak{b}) = -p_7(\mathfrak{b}) + p_8(\mathfrak{b}) - p_9(\mathfrak{b}) + p_{10}(\mathfrak{b}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{b}) + p_6(\mathfrak{b})\big) + 1$. Рассмотрим путь $\mathcal{P} = \{\varepsilon_1^-, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}, \varepsilon_{n-1}^-\}$, ориентированный от ребра ε_1^-. Тогда

$$\operatorname{fall}_0(\mathcal{P}) =$$
$$= 2\varkappa - 6 + (-1)^{\varkappa}\Big(- p_7(\mathfrak{b}) + p_8(\mathfrak{b}) - p_9(\mathfrak{b}) + p_{10}(\mathfrak{b}) + 2\big(-p_5(\mathfrak{b}) + p_6(\mathfrak{b})\big)\Big) =$$
$$= (-1)^{\varkappa}\operatorname{Tor}^+(\mathfrak{b}) - 3.$$

Если во всех трех случаях мы рассмотрим пути, ориентации которых противоположны ориентациям путей $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_m$, $m = 1, 2$, то их ориентированные погрешности равны $-\operatorname{fall}_0(\mathcal{P})$, $-\operatorname{fall}_0(\mathcal{P}_m)$, $m = 1, 2$, и, по предположению, должны быть не больше 3. Следовательно, $\operatorname{fall}_0(\mathcal{P}) \geqslant -3$, $\operatorname{fall}_0(\mathcal{P}_m) \geqslant -3$ и $(-1)^{\varkappa}\operatorname{Tor}^+(\mathfrak{b}) - 3 \geqslant -3$, что и дает $(-1)^{\varkappa}\operatorname{Tor}^+(\mathfrak{b}) \geqslant 0$. Теорема доказана. ■

Используя теоремы 4.10, 4.11, 4.12, получаем следующую теорему.

Теорема 4.13. *Произвольная бинарная существенная сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *на* λ*-нормированной плоскости экстремальна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

4.8.4. Геометрический критерий экстремальности бинарного дерева

Рассмотрим произвольное бинарное дерево $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$. По теореме 2.2, экстремальность дерева Γ равносильна экстремальности всех существенных подсетей дерева Γ. Используя теорему 4.13, получаем следующий результат.

Теорема 4.14. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольное бинарное дерево на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$. *Тогда* Γ *экстремально, если и только если* $\operatorname{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

Замечание. В теореме 4.14 мы не требовали локальной минимальности дерева Γ, так как, по теореме 1.7, неравенство $\operatorname{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$ влечет локальную минимальность.

4.9. Геометрический критерий экстремальности произвольного дерева

Теорема 4.15. *Произвольная существенная сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *на* λ*-нормированной плоскости экстремальна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.12. Надо только учитывать, что если некоторая внутренняя вершина пути $\mathcal{P}$ является граничной в сети Γ, то слово $\mathfrak{b} = W(\bar\Gamma)$ принадлежит лишь $\mathcal{A}^-$, где сеть $\bar\Gamma$ получена внутренним расширением пути $\mathcal{P}$ (ориентация на $\bar\Gamma$ индуцируется из пути $\mathcal{P}$). Поэтому для слова $\mathfrak{b}$ достаточно проверить лишь положительность слева. Теорема доказана. ■

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Основная теорема. *Произвольное погруженное дерево* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$*, не содержащее внутренних вершин степени* 2*, на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ *экстремально тогда и только тогда, когда все вершины степени* 1 *являются граничными и* $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для дерева Γ выполняется неравенство $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$. Тогда то же самое неравенство выполнено и для любой существенной подсети дерева Γ. Из теоремы 4.15 вытекает, что каждая существенная подсеть дерева Γ экстремальна. Следовательно, по теореме 2.2, дерево Γ экстремально.

Необходимость. Пусть дерево Γ экстремально. Тогда, по теореме 2.2, экстремальна каждая существенная подсеть Γ_s дерева Γ. Из теоремы 4.15 вытекает, что $\mathrm{Fall}_0(\Gamma_s) \leqslant 3$ для каждой сети Γ_s.

Пусть $\mathcal{P} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ — произвольный канонически ориентированный путь в дереве Γ, все внутренние ребра которого точечны. Если ребро γ_p не является точечным, то ближайшее к γ_p точечное ребро, на котором достигается максимум для $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P})$, обозначим так же через γ_p, $p = 1,\ n$. Обозначим через z_i внутренние вершины из $\mathcal{P}$, инцидентные γ_i и γ_{i+1}, а через $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_q$ все максимальные подпути в $\mathcal{P}$, лежащие в существенных сетях (q может быть равно нулю). По предположению $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}_k) \leqslant 3$, где $1 \leqslant k \leqslant q$.

Пусть $\{z_{i_l}\}_{l=1}^r$ — все внутренние вершины из $\mathcal{P}$, которые не входят в пути $\mathcal{P}_k$, $1 \leqslant k \leqslant q$, и $\mathrm{fall}_0(\gamma_{i_l}, \gamma_{i_l+1}) = 3[\dfrac{\lambda}{3}] - \lambda + 3$ (r может быть равно нулю). Тогда из локальной минимальности дерева Γ и определения существенной сети следует, что путь $\mathcal{P}$ содержит, по крайней мере, $(q + r - 1)$ внутренних вершин z_{j_m}, для которых $\mathrm{fall}_0(\gamma_{j_m}, \gamma_{j_m+1}) \leqslant 3[\dfrac{\lambda}{3}] - \lambda - 3$.

Имеем

$$\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \mathrm{fall}_0(\mathcal{P}_k) + \sum_{l=1}^{r} \mathrm{fall}_0(\gamma_{i_l}, \gamma_{i_l+1}) + (q + r - 1)\Big(3[\frac{\lambda}{3}] - \lambda - 3\Big) \leqslant$$

$$\leqslant (q + 2r)\Big(3[\frac{\lambda}{3}] - \lambda\Big) + 3 \leqslant 3.$$

Если $q + r = 0$, то $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) \leqslant 0$. Следовательно, $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$. Теорема доказана. ■

4.10. Некоторые следствия из основной теоремы

Рассмотрим на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, произвольный путь $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_q\}$, все внутренние ребра которого точечны. Ориентируем этот путь от ребра γ_1. Заметим, что путь Γ необязательно правильно повернут. Покроем путь Γ максимальными последовательными правильно повернутыми ориентированными путями Γ_i, где $i = 1, \dots, r$. Из определения строго допустимой деформации следует, что сеть Γ экстремальна тогда и только тогда, когда каждая сеть Γ_i экстремальна. По основной теореме, сеть Γ_i экстремальна тогда и только тогда, когда $\mathrm{Fall}_0(\Gamma_i) \leqslant 3$. Исследуем более подробно неравенство $\mathrm{Fall}_0(\Gamma_i) \leqslant 3$.

Пусть компоненты $\Gamma_i = \{\gamma_1^i, \dots, \gamma_{q_i}^i\}$ покрытия сети Γ имеют длины $q_i \geqslant 2$. Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = q+r-1$. Поскольку на каждой сети Γ_i задана каноническая ориентация, то каждой сети Γ_i соответствует последовательность $\big(\mathrm{fall}_0(\gamma_1^i, \gamma_2^i), \dots, \mathrm{fall}_0(\gamma_{q_i-1}^i, \gamma_{q_i}^i)\big)$. Обозначим через $(a_1, \dots, a_n,)^l$ последовательность $(a_1, \dots, a_n, \dots, a_1, \dots, a_n,)$, где блоки $(a_1, \dots, a_n,)$ повторяются $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ раз. Получаем следующую теорему.

Теорема 4.16. *Сеть Γ_i не является экстремальной тогда и только тогда, когда последовательность $\big(\mathrm{fall}_0(\gamma_1^i, \gamma_2^i), \dots, \mathrm{fall}_0(\gamma_{q_i-1}^i, \gamma_{q_i}^i)\big)$ содержит подпоследовательность вида:*
$\big(3, (0,)^l 3\big)$ *для* $\varkappa = 0$,
$\big(1, 1, 1, (-2, 1, 1,)^l 1\big)$ *для* $\varkappa = 1$,
$\big(2, (-1, 2, -1,)^l 2\big)$ *для* $\varkappa = 2$, *где* $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение. Будем говорить, что знак $\epsilon(\Gamma_i, \Gamma)$ равен 1, если каноническая ориентация сети Γ_i индуцируется из ориентации сети Γ. В противном случае, знак $\epsilon(\Gamma_i, \Gamma)$ равен -1.

Поставим в соответствие сети Γ последовательность

$$\big(\epsilon(\Gamma_1, \Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_1^1, \gamma_2^1), \dots, \epsilon(\Gamma_1, \Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_{q_1-1}^1, \gamma_{q_1}^1), \dots$$
$$\dots, \epsilon(\Gamma_r, \Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_1^r, \gamma_2^r), \dots, \epsilon(\Gamma_r, \Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_{q_r-1}^r, \gamma_{q_r}^r)\big).$$

Используя основную теорему и теорему 4.16, получаем

Теорема 4.17. *Путь Γ не является экстремальным на λ-нормированной плоскости тогда и только тогда, когда последовательность*

$$\big(\epsilon(\Gamma_1,\Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_1^1,\gamma_2^1),\ldots,\epsilon(\Gamma_1,\Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_{q_1-1}^1,\gamma_{q_1}^1),\ldots$$
$$\ldots,\epsilon(\Gamma_r,\Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_1^r,\gamma_2^r),\ldots,\epsilon(\Gamma_r,\Gamma)\,\mathrm{fall}_0(\gamma_{q_r-1}^r,\gamma_{q_r}^r)\big)$$

содержит подпоследовательность вида:
$(\pm3,(0,)^l\pm3)$ *для* $\varkappa=0$,
$(\pm1,\pm1,\pm1,(\mp2,\pm1,\pm1,)^l\pm1)$ *для* $\varkappa=1$,
$(\pm2,(\mp1,\pm2,\mp1,)^l\pm2)$ *для* $\varkappa=2$, *где* $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Глава 5.

Свойства λ-экстремальных сетей и их асимптотика при $\lambda \to \infty$

В данной главе мы займемся изучением свойств экстремальных сетей. В начале мы посмотрим как влияют некоторые операции над сетями на их экстремальность. Поскольку экстремальность сети характеризуется ее ориентированной погрешностью, то мы исследуем поведение погрешности при этих операциях. Далее, мы изучим вопросы, касающиеся топологической и планарной эквивалентности сетей. В последней части данной главы исследуется поведение экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях при $\lambda \to \infty$. В данной главе $\lambda \neq 2, 3, 4, 6$ и сети не содержат внутренние вершины степени 2.

5.1. Поведение погрешности при редукциях и антиредукциях

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольная вложенная бинарная локально минимальная сеть на λ-нормированной плоскости, все ребра которой точечны (далее в этом параграфе мы будем рассматривать только такие сети). Рассмотрим произвольный ориентированный путь $\mathcal{P} = (\gamma_1, \gamma_2)$ в сети Γ, начинающийся на ребре γ_1 и заканчивающийся на ребре γ_2. Для пути $\mathcal{P}$ мы определили ориентированную погрешность $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) = \mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_2)$ как сумму ориентированных погрешностей в каждой внутренней вершине пути. Иногда мы будем записывать ориентированную погрешность в виде $\mathrm{fall}_0^\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$, имея в виду, что рассматриваются пути в Γ. Из определения ориентированной погрешности вытекает

Утверждение 5.1. *1) Ориентированная погрешность аддитивна, т.е.* $\mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_2) + \mathrm{fall}_0(\gamma_2, \gamma_3) = \mathrm{fall}_0(\gamma_1, \gamma_3)$;

2) Ориентированная погрешность кососимметрична, т.е. $\mathrm{fall}_0(\gamma_1,\gamma_2) = -\mathrm{fall}_0(\gamma_2,\gamma_1)$.

Замечание. Если сеть Γ не является бинарной, т.е. возможны граничные вершины степени больше 1, то утверждение 5.1 для некоторых путей неверно.

Теорема 5.1. *Пусть* $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ *— бинарное дерево, полученное редукцией* II*-го типа по ребрам* γ_1 *и* γ_2 *из бинарного дерева* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$. *Тогда, если* $\mathrm{fall}_0(\gamma_1,\gamma_2) = 0$, *то ориентированная погрешность дерева* Γ' *не превосходит ориентированную погрешность дерева* Γ:

$$\mathrm{Fall}_0(\Gamma') \leqslant \mathrm{Fall}_0(\Gamma).$$

Доказательство. Пусть $\Gamma' = (\Gamma_1,\gamma_1)\#(\Gamma_2,\gamma_2)$, где Γ_i — соответствующие поддеревья дерева Γ из определения редукции II-го типа. Пусть γ' и γ'' — произвольные ребра из Γ'. Если γ' и γ'' лежат в одном Γ_i, то $\mathrm{fall}_0^{\Gamma'}(\gamma',\gamma'') = \mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma',\gamma'')$. В противном случае, путь в Γ, соединяющий γ' и γ'', проходит через ребра γ_1 и γ_2. Поэтому, в силу аддитивности ориентированной погрешности на путях, мы имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma',\gamma'') &= \mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma',\gamma_1) + \mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma_1,\gamma_2) + \mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma_2,\gamma'') = \\ &= \mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma',\gamma_1) + \mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma_2,\gamma'') = \mathrm{fall}_0^{\Gamma'}(\gamma',\gamma_1) + \mathrm{fall}_0^{\Gamma'}(\gamma_2,\gamma'') = \mathrm{fall}_0^{\Gamma'}(\gamma',\gamma''),\end{aligned}$$

что и завершает доказательство утверждения. ■

Следствие 5.1. *В условиях теоремы 5.1, если дерево* Γ *экстремально, то и* Γ' *экстремально.*

Изучим поведение ориентированной погрешности при антиредукции. Для этого нам понадобится понятие относительной ориентированной погрешности, которую мы сейчас и определим. Пусть Γ — произвольное бинарное дерево, и γ — некоторое его ребро.

Определение. *Ориентированной погрешностью* $\mathrm{Fall}_0(\gamma,\Gamma)$ *ребра* γ *относительно дерева* Γ называется упорядоченная пара чисел (m, M) такая, что

$$m = -\min_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma,\gamma'),\ \ M = \max_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma,\gamma'),$$

где min и max берутся по всевозможным ребрам из Γ.

Определение. *Ориентированной погрешностью* $\mathrm{Fall}_0(\Gamma, \gamma)$ *дерева* Γ *относительно ребра* γ называется упорядоченная пара чисел (m, M) такая, что

$$m = -\min_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma', \gamma), \; M = \max_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma', \gamma),$$

где min и max берутся по всевозможным ребрам из Γ.

Утверждение 5.2. *Пусть* $\mathrm{Fall}_0(\gamma, \Gamma) = (m, M)$. *Тогда* $\mathrm{Fall}_0(\Gamma, \gamma) = (M, m)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Fall}_0(\Gamma, \gamma) = (m', M')$.

По определению,

$$m' = -\min_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma', \gamma) = -\min_{\gamma'}(-\mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma')) = \max_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma') = M,$$

$$M' = \max_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma', \gamma) = \max_{\gamma'}(-\mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma')) = -\min_{\gamma'} \mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma') = m,$$

что и требовалось доказать. ■

Для формулировки следующего результата нам понадобятся следующие обозначения. В приведенных ниже формулах все буквы обозначают целые числа.

1) Положим $(m, M) \leqslant (p, q)$, если и только если $m \leqslant p$ и, одновременно, $M \leqslant q$.

2) Вместо $(m, M) \leqslant (p, p)$ будем сокращенно писать $(m, M) \leqslant p$.

3) Сложение двух пар чисел обозначает покомпонентное сложение

$$(m, M) + (n, N) = (m + n, M + N).$$

4) Максимальное из двух чисел m и M назовем *модулем пары* (m, M) и обозначим через $|(m, M)|$.

Теорема 5.2. *Пусть бинарное дерево* Γ *получено антиредукцией* I*-го типа по ребрам склейки* γ_1 *и* γ_2 *из двух непересекающихся бинарных деревьев* Γ_1 *и* Γ_2. *Тогда имеет место следующая оценка на ориентированную погрешность дерева* Γ:

$$\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant \max\Big(\mathrm{Fall}_0(\Gamma_1), \mathrm{Fall}_0(\Gamma_2), |\,\mathrm{Fall}_0(\Gamma_1, \gamma_1) + \mathrm{Fall}_0(\gamma_2, \Gamma_2)|\Big).$$

Доказательство. Пусть γ' и γ'' — произвольные ребра дерева Γ. Если оба эти ребра одновременно лежат в одном из Γ_i, то $\mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma',\gamma'') \leqslant \mathrm{Fall}_0(\Gamma_i)$ и $\mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma'',\gamma') \leqslant \mathrm{Fall}_0(\Gamma_i)$. В противном случае, пусть γ' лежит, например, в Γ_1, а γ'' — в Γ_2. Положим $\mathrm{Fall}_0(\Gamma_1,\gamma_1) = (m_1, M_1)$, а $\mathrm{Fall}_0(\gamma_2,\Gamma_2) = (m_2, M_2)$. Тогда

$$\mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma',\gamma'') = \mathrm{fall}_0^{\Gamma_1}(\gamma',\gamma_1) + \mathrm{fall}_0^{\Gamma_2}(\gamma_2,\gamma'') \leqslant \\ \leqslant \max_a \mathrm{fall}_0^{\Gamma_1}(a,\gamma_1) + \max_b \mathrm{fall}_0^{\Gamma_2}(\gamma_2,b) = M_1 + M_2,$$

а также

$$\mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma'',\gamma') = \mathrm{fall}_0^{\Gamma_2}(\gamma'',\gamma_2) + \mathrm{fall}_0^{\Gamma_1}(\gamma_1,\gamma') \leqslant \\ \leqslant \max_a \mathrm{fall}_0^{\Gamma_2}(a,\gamma_2) + \max_b \mathrm{fall}_0^{\Gamma_1}(\gamma_1,b) = m_2 + m_1,$$

где последнее равенство имеет место в соответствии с утверждением 5.2. Поэтому

$$|\,\mathrm{fall}_0^{\Gamma}(\gamma'',\gamma')| \leqslant |(m_1, M_1) + (m_2, M_2)|,$$

что и требовалось доказать. ■

Исследуем теперь, как ведет себя ориентированная погрешность при антиредукциях II-го типа. Пусть бинарное дерево $\hat{\Gamma}$ получено антиредукцией II-го типа из бинарного дерева Γ с помощью вклеивания бинарного дерева Γ_0 в ребро γ из Γ по ребрам γ' и γ'' из Γ_0. Обозначим через Γ_1 и Γ_2 компоненты, на которые распадается дерево Γ при разрезании его по ребру γ, а через γ_i — соответствующее ребро разреза дерева Γ_i.

Теорема 5.3. *Если* $\mathrm{fall}^{\Gamma_0}(\gamma',\gamma'') = 0$*, то имеет место следующая оценка на ориентированную погрешность дерева* $\hat{\Gamma}$:

$$\mathrm{Fall}_0(\hat{\Gamma}) \leqslant \max\Big(\mathrm{Fall}_0(\Gamma_0), \mathrm{Fall}_0(\Gamma_1), \mathrm{Fall}_0(\Gamma_2), |\,\mathrm{Fall}_0(\Gamma_1,\gamma_1) + \mathrm{Fall}_0(\gamma',\Gamma_0)|, \\ |\,\mathrm{Fall}_0(\Gamma_0,\gamma'') + \mathrm{Fall}_0(\gamma_2,\Gamma_2)|, |\,\mathrm{Fall}_0(\Gamma_1,\gamma_1) + \mathrm{Fall}_0(\gamma_2,\Gamma_2)|\Big).$$

Доказательство теоремы 5.3 полностью аналогично доказательству теоремы 5.2. ■

Следствие 5.2. *В предположениях теоремы 5.3, имеет место следующая оценка на ориентированную погрешность дерева* $\hat{\Gamma}$:

$$\mathrm{Fall}_0(\hat{\Gamma}) \leqslant \max\Big(\mathrm{Fall}_0(\Gamma_0), \mathrm{Fall}_0(\Gamma), \\ |\,\mathrm{Fall}_0(\Gamma_1,\gamma_1) + \mathrm{Fall}_0(\gamma',\Gamma_0)|, |\,\mathrm{Fall}_0(\Gamma_0,\gamma'') + \mathrm{Fall}_0(\gamma_2,\Gamma_2)|\Big).$$

Доказательство. В самом деле, $\mathrm{Fall}_0(\Gamma_i) \leqslant \mathrm{Fall}_0(\Gamma)$ для $i = 1,\ 2$, и $|\,\mathrm{Fall}_0(\Gamma_1,\gamma_1) + \mathrm{Fall}_0(\gamma_2,\Gamma_2)| \leqslant \mathrm{Fall}_0(\Gamma)$, что и требовалось доказать. ■

5.2. Топологическая и планарная λ-минимальные (экстремальные) реализации сети

Рассмотрим две произвольные вложенные сети $\Gamma_i \colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$.

Определение. Сети Γ_1 и Γ_2 называются *планарно эквивалентными*, если существует деформация в классе вложенных сетей, переводящая одну сеть в другую, причем граница переходит в границу.

Замечание. Классическое определение планарной эквивалентности состоит в том, что две вложенные сети планарно эквивалентны, если существует гомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$ на себя, сохраняющий ориентацию и переводящий одну сеть в другую, причем граница переходит в границу. На самом деле, эти определения планарной эквивалентности эквивалентны, но для удобства мы будем использовать только первое.

Рассмотрим произвольный топологический граф G.

Определение. Будем говорить, что топологический граф G *допускает топологическую λ-минимальную (экстремальную) реализацию*, если существует вложенная локально минимальная (экстремальная) сеть $\Gamma \colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости.

Определение. Будем говорить, что вложенная сеть $\Gamma \colon G \to \mathbb{R}^2$ *допускает планарную λ-минимальную (экстремальную) реализацию*, если существует планарно эквивалентная ей вложенная локально минимальная (экстремальная) сеть $\Gamma' \colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости.

Рассмотрим произвольную вложенную сеть $\Gamma \colon G \to \mathbb{R}^2$. Из определения λ-минимальной (экстремальной) реализации сразу вытекает утверждение.

Утверждение 5.3. *Если сеть Γ допускает планарную λ-минимальную (экстремальную) реализацию, то и топологический граф G допускает топологическую λ-минимальную (экстремальную) реализацию.*

Определение. Дерево T с некоторой границей называется *деревом Штейнера*, если степени всех вершин не больше 3, а все вершины степени 1 являются граничными.

Определение. Две вершины называются *соседними*, если они инцидентны одному и тому же ребру.

Из структуры локально минимальных сетей сразу вытекает теорема.

Теорема 5.4. *1) Топологическое дерево T допускает топологическую λ-минимальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.*

2) Вложенное дерево $\Gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$ допускает планарную λ-минимальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.

Оказывается, теорема 5.4 верна и для λ-экстремальной реализации.

Теорема 5.5. *Вложенное дерево $\Gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$ допускает планарную λ-экстремальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.*

Доказательство. *Необходимость* следует из того факта, что каждое экстремальное дерево является и локально минимальным. Поэтому, по теореме 5.4, дерево T является деревом Штейнера.

Достаточность. Нам надо построить экстремальное дерево $\Gamma'\colon T \to \mathbb{R}^2$, планарно эквивалентное вложенному дереву $\Gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$, где T является деревом Штейнера. Мы будем строить дерево Γ', все ребра которого точечны.

1) Рассмотрим сначала случай, когда вложенное дерево Γ является бинарным.

Пусть $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. В этом случае в качестве дерева Γ' можно взять дерево, у которого углы между смежными ребрами равны $\dfrac{2\pi}{3}$. Тогда $\mathrm{Fall}_0(\Gamma') = 0$. Следовательно, сеть Γ' экстремальна.

Пусть $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, где $\varkappa = 1, 2$. Построим такое дерево Γ', чтобы в соседних вершинах погрешности были расположены как показано на рис. 5.1, 5.2.

Построим дерево Γ' по индукции, где индукцию будем проводить по количеству вершин дерева Γ степени больше 1.

Пусть дерево Γ содержит n вершин степени больше 1. Для $n = 1$ дерево Γ' строится произвольным образом.

Пусть утверждение индукции верно для n. Рассмотрим дерево Γ, содержащее $(n+1)$ вершину $z_1, \ldots, z_{n+1}$ степени больше 1. Так как Γ является деревом, то Γ содержит вершину усов, например, z_{n+1}. Рассмотрим

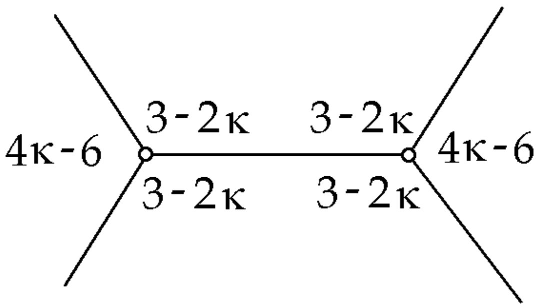


Рис. 5.1. Расстановка погрешностей

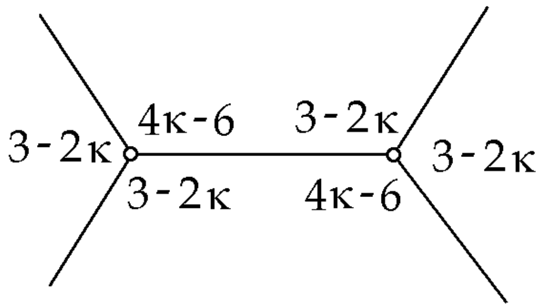


Рис. 5.2. Расстановка погрешностей

поддерево $\bar{\Gamma}$ дерева Γ, в котором вершины $z_1, \ldots, z_n$ имеют степень 3, а остальные — 1, т.е. дерево $\bar{\Gamma}$ является бинарным. По предположению индукции, для дерева $\bar{\Gamma}$ существует планарно эквивалентное ему дерево $\bar{\Gamma}'$, у которого в соседних вершинах погрешности расположены так, как показано на рис. 5.1, 5.2. Дерево Γ' получается из дерева $\bar{\Gamma}'$ путем добавления внутренней вершины степени 3, в которой углы между смежными ребрами удовлетворяют нашему требованию.

Докажем, что полученное дерево экстремально. Для этого мы покажем, что $\mathrm{Fall}_0(\Gamma') = 2$, отсюда и будет следовать экстремальность Γ'. Рассмотрим произвольный ориентированный путь $\mathcal{P}$ в Γ' и последовательность ориентированных погрешностей для него. Согласно нашей расстановке, в этой последовательности после двух ± 1 или после ± 2 будет следовать ∓ 2, две ∓ 1 или одна ∓ 1, на которой последовательность закончится. Поэтому $\mathrm{Fall}_0(\Gamma') = 2$.

2) Для произвольного вложенного дерева Γ дерево Γ' строится так, как и в бинарном случае, а в вершинах степени 2 берется угол, равный π. Для так построенного дерева Γ' будет выполнено неравенство $\mathrm{Fall}_0(\Gamma') \leqslant 3$, поэтому дерево Γ' экстремально. Теорема доказана. ■

Следствие 5.3. *Топологическое дерево T допускает топологическую λ-экстремальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.*

5.3. Стандартная евклидова плоскость как предел λ-нормированных плоскостей при $\lambda \to \infty$

Напомним, что нормированная плоскость $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ называется λ-нормированной, если единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \rho_\lambda(x) = 1\}$ является правильным 2λ-угольником. Таким образом, стандартная евклидова норма является пределом λ-норм при $\lambda \to \infty$. Экстремальные сети на λ-нормированной плоскости будем называть *λ-экстремальными.*

Напомним, что вложенная сеть на стандартной евклидовой плоскости является локально минимальной, если и только если все вершины степени 1 являются граничными и угол между каждой парой смежных ребер не меньше $\frac{2\pi}{3}$. Из структуры локально минимальных и экстремальных сетей вытекает, что если мы рассмотрим произвольную локально минимальную или экстремальную сеть на λ-нормированной плоскости и устремим λ к бесконечности, то получим экстремальную сеть на стандартной евклидовой плоскости (классы локально минимальных и экстремальных сетей на стандартной евклидовой плоскости совпадают). Возникает вопрос: *верен ли обратный результат, т.е. для любой ли экстремальной на стандартной евклидовой плоскости сети можно построить последовательность λ-экстремальных сетей, которая сходится к данной сети при $\lambda \to \infty$.*

5.3.1. Сходимость сетей

Рассмотрим на плоскости произвольную вложенную сеть Γ и последовательность вложенных сетей $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, планарно эквивалентных Γ.

Определение. Будем говорить, что последовательность сетей $\{\Gamma_n\colon G \to \mathbb{R}^2\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к сети* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, и будем писать $\Gamma_n \to \Gamma$, если для каждой вершины v параметризующего графа G последовательность $\{\Gamma_n(v)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\Gamma(v)$. Под сходимостью здесь понимаем стандартную сходимость последовательности на стандартной евклидовой плоскости, т.е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $m > N$ справедливо неравенство $\|x_m - x\| < \varepsilon$.

Определение. Будем говорить, что сеть Γ *допускает λ-минимальную (экстремальную) реализацию*, если существует собственное движение стандартной евклидовой плоскости, переводящее сеть Γ в локально минимальную (экстремальную) сеть на λ-нормированной плоскости.

Теорема 5.6. *Локально минимальное на стандартной евклидовой плоскости дерево, содержащее вершины степени 3, λ-минимально (экстремально) реализуется, если и только если $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$.*

Доказательство. *Необходимость.* Из структуры локально минимальных сетей на стандартной евклидовой плоскости и локально минимальных сетей на λ-нормированных плоскостях сразу следует, что $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$.

Достаточность. Покажем, что любое локально минимальное на стандартной евклидовой плоскости дерево Γ является λ-экстремальным, где $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$.

Угол между смежными ребрами в дереве Γ не меньше $\dfrac{2\pi}{3}$, поэтому погрешность между смежными ребрами, одно из которых является точечным, равна нулю для внутренней вершины и не больше нуля для граничной. Получаем, что $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$. Следовательно, по основной теореме, дерево Γ является λ-экстремальным. Теорема доказана. ■

Из доказательства теоремы 5.6 сразу вытекает

Следствие 5.4. *Произвольное локально минимальное на стандартной евклидовой плоскости дерево является λ-экстремальным, где $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$.*

Следствие 5.5. *Для любого вложенного экстремального на стандартной евклидовой плоскости дерева Γ существует последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=5}^{\infty}$ вложенных λ-экстремальных деревьев, подпоследовательность которой сходится к Γ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Пусть дано произвольное вложенное экстремальное на стандартной евклидовой плоскости дерево Γ. Из структуры экстремальных деревьев на стандартной евклидовой плоскости и из следствия 5.4 следует, что Γ является деревом Штейнера и λ-экстремальным, где $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Используя теорему 5.5, мы можем построить последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=5}^{\infty}$ вложенных λ-экстремальных деревьев, у которой каждое дерево Γ_λ, где $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$, совпадает с деревом Γ. Подпоследовательность, состоящая из Γ_λ, где $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$, будет сходится к Γ при $\lambda \to \infty$. Следствие доказано. ■

Определение. Пусть вершина z степени k погруженного дерева $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ инцидентна последовательным при обходе вершины z против часовой стрелки ребрам $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, ориентированным от их общей вершины. Для каждой пары соседних ребер (γ_i, γ_{i+1}), где $i = 1, \ldots, k$ и $\gamma_{k+1} = \gamma_1$, обозначим через $\angle(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \in [0, 2\pi)$ *ориентированный угол между ребрами* γ_i и γ_{i+1}, который проходится от ребра γ_i до ребра γ_{i+1} против часовой стрелки. Таким образом, каждой вершине дерева Γ, с точностью до циклического порядка, ставится в соответствие последовательность ориентированных углов, которую мы будем обозначать через $\Big(\alpha_{1,2}(z), \alpha_{2,3}(z), \ldots, \alpha_{k,k+1}(z)\Big)$. Последовательность $\big(\beta_{1,2}, \beta_{2,3}, \ldots, \beta_{k,k+1}\big)$, где $\beta_{i,i+1} \in [0, 2\pi)$, называется *допустимой последовательностью степени* k, если $\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_{i,i+1} = 2\pi$.

Лемма 5.1. *Рассмотрим произвольное вложенное дерево* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$. *Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для каждой вершины* z *степени* k *дерева* Γ *и любой допустимой последовательности* $\Big(\beta_{1,2}(z), \beta_{2,3}(z), \ldots, \beta_{k,k+1}(z)\Big)$ *степени* k *такой, что* $|\alpha_{i,i+1}(z) - \beta_{i,i+1}(z)| < \varepsilon$, *существует планарно эквивалентное дереву* Γ *вложенное дерево* $\Gamma'\colon G \to \mathbb{R}^2$, *полученное заменой в каждой вершине* z *углов* $\alpha_{i,i+1}(z)$ *на* $\beta_{i,i+1}(z)$ *и имеющее ребра той же длины, что и у дерева* Γ.

Определение. Дерево Γ' из леммы 5.1 назовем *ε-приближением дерева* Γ.

Лемма 5.2. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *— произвольное вложенное дерево с* 1-*граничным ребром* $\gamma = \{\Gamma\colon e \to \mathbb{R}^2\}$. *Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел* ε_n, $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *причем каждому* ε_n *поставлено в соответствие* ε_n-*приближение* $\Gamma_n\colon G \to \mathbb{R}^2$ *дерева* Γ *такое, что* $\Gamma_n\big|_e \to \gamma$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $\Gamma_n \to \Gamma$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное вложенное дерево с 1-граничным ребром $\gamma = [x, y]$, где x — граничная вершина степени 1, и $\Gamma_n\colon G \to \mathbb{R}^2$ — ε_n-приближение дерева Γ, где $\Gamma_n\big|_e \to \gamma$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Берем произвольную вершину $v \in G$. Рассмотрим пути $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_n$ в Γ и Γ_n соответственно, где путь $\mathcal{P}$ соединяет вершины x и $\Gamma(v)$, а $\mathcal{P}_n$ — вершины x и $\Gamma_n(v)$. Пусть $\mathcal{P} = \{\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}\}$. Поскольку дерево Γ_n является ε_n-приближением Γ_n дерева Γ, то $\mathcal{P}_n = \{\gamma^n, \gamma_1^n, \ldots, \gamma_{k-1}^n\}$, где ребро γ_j^n имеет ту же длину l_j, что и γ_j, а направление φ_j^n ребра γ_j^n сходится к направлению φ_j ребра γ_j при $n \to \infty$, так как пути содержат конечное число ребер. Имеем

$$\Gamma(v) = le^{\varphi} + \sum_{j=1}^{k-1} l_j e^{i\varphi_j},\ \Gamma_n(v) = le^{\varphi^n} + \sum_{j=1}^{k-1} l_j e^{i\varphi_j^n},$$

где l — длина ребра γ, а φ — направление. Таким образом,

$$\|\Gamma(v) - \Gamma_n(v)\| \leqslant l\|e^{i\varphi} - e^{i\varphi^n}\| + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \|e^{i\varphi_j} - e^{i\varphi_j^n}\|.$$

Следовательно, $\Gamma_n(v) \to \Gamma(v)$ при $n \to \infty$ (так как $\varphi^n \to \varphi$ и $\varphi_j^n \to \varphi_j$ при $n \to \infty$). Лемма доказана. ∎

Теорема 5.7. *Для любого вложенного экстремального на стандартной евклидовой плоскости дерева Γ существует последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=5}^{\infty}$ вложенных λ-экстремальных деревьев, сходящаяся к Γ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Построим сходящуюся к Γ последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=5}^{\infty}$ вложенных λ-экстремальных деревьев.

Для $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$ возьмем деревья Γ_λ, совпадающие с Γ.

Для других λ, $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, где $\varkappa = 1, 2$, построим λ-экстремальные деревья Γ_λ, являющиеся $\dfrac{3\pi}{\lambda}$-приближением дерева Γ и имеющие ребра той же евклидовой длины, что и Γ. Строим деревья Γ_λ, как в доказательстве теоремы 5.5, только для граничных вершин степени 2 возьмем углы, равные $\alpha + \dfrac{(6-\varkappa)\pi}{3\lambda} + \varepsilon_\lambda$, где α — это угол в дереве Γ, соответствующий данной граничной вершине степени 2, а $0 \leqslant \varepsilon_\lambda < \dfrac{\pi}{\lambda}$ выбирается из условия, что все ребра из Γ_λ точечны. Поскольку $\alpha \geqslant \dfrac{2\pi}{3}$, то, по основной теореме, все деревья Γ_λ экстремальны.

Сети Γ_λ могут не быть вложенными. Выберем такое λ^*, что все сети Γ_λ, где $\lambda \geqslant \lambda^*$, являются вложенными.

Пусть $\gamma = [x, y]$, где вершина x имеет степень 1, — произвольное 1-граничное ребро дерева Γ. Используя движения λ-нормированных плоскостей, мы совместим граничную вершину, соответствующую x, с самой вершиной x так, чтобы направление ребра, соответствующего γ, отличалось от направления ребра γ не больше чем на $\dfrac{\pi}{2\lambda}$. Используя леммы 5.1 и 5.2, мы получаем, что построенная последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=\lambda^*}^{\infty}$ сходится к Γ при $\lambda \to \infty$.

Строим последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=5}^{\infty}$, дополняя последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=\lambda^*}^{\infty}$ вложенными λ-экстремальными планарно эквивалентными Γ сетями Γ_λ, которые мы можем построить согласно теореме 5.5. Теорема доказана. ■

5.3.2. Строгая сходимость сетей

Рассмотрим на плоскости произвольную вложенную сеть Γ и последовательность вложенных сетей $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, планарно эквивалентных Γ.

Определение. Будем говорить, что последовательность сетей $\{\Gamma_n\colon G \to \mathbb{R}^2\}_{n=1}^{\infty}$ *строго сходится к сети* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, и будем писать $\Gamma_n \xrightarrow{s} \Gamma$, если для каждой граничной вершины $v \in \partial G$ параметризующего графа G справедливо равенство $\Gamma_n(v) = \Gamma(v)$ и для каждой внутренней вершины v из G последовательность $\{\Gamma_n(v)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\Gamma(v)$.

Из доказательства следствия 5.5 сразу вытекает

Утверждение 5.4. *Для любого вложенного экстремального на стандартной евклидовой плоскости дерева Γ существует последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=5}^{\infty}$ вложенных λ-экстремальных деревьев, подпоследовательность которой строго сходится к Γ при $\lambda \to \infty$.*

Замечание. Не для каждого вложенного экстремального на стандартной евклидовой плоскости дерева существует последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=\lambda^*}^{\infty}$ (для некоторого λ^*) вложенных λ-экстремальных сетей, сходящаяся к данному дереву при $\lambda \to \infty$. Проблемы могут возникнуть в случае, когда сеть содержит граничные вершины степени 2 и 3. Рассмотрим сеть Γ, состоящую из трех ребер и четырех граничных вершин, см. рис. 5.3. Пусть угол между ребрами равен $\dfrac{2\pi}{3}$. Сеть Γ экстремальна на стандартной евклидовой плоскости, но последовательности экстремальных сетей, строго сходящейся к ней, не существует. Действительно, из определения строгой сходимости следует, что все сети последовательности должны совпадать с Γ, но на λ-нормированной, где $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, $\varkappa = 1, 2$, сеть Γ даже не является локально минимальной. Аналогично, не существует последовательности экстремальных сетей, строго сходящейся к сети, изображенной на рис. 5.4 $\left(\text{углы везде равны } \dfrac{2\pi}{3}\right)$, поскольку эта сеть не является локально минимальной на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 2 \pmod 3$.

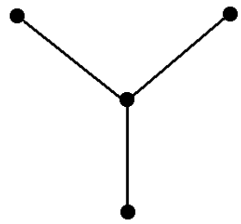


Рис. 5.3. Не существует сходящейся экстремальной подпоследовательности.

Рис. 5.4. Не существует сходящейся экстремальной подпоследовательности.

Длину произвольной сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ обозначим через $\ell_\lambda(\Gamma)$, а на стандартной евклидовой плоскости $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ — через $\ell_e(\Gamma)$.

Лемма 5.3. *Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ произвольный вектор η и произвольную сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$. Тогда $\rho_\lambda(\eta) \to \|\eta\|$ при $\lambda \to \infty$ и $\ell_\lambda(\Gamma) \to \ell_e(\Gamma)$ при $\lambda \to \infty$.*

Пусть G — произвольный топологический граф с границей ∂G, и пусть задано граничное отображение $\partial\colon \partial G \to \mathbb{R}^2$. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ произвольную последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$ вложенных деревьев $\Gamma_n\colon G \to \mathbb{R}^2$ типа G с границей ∂ и последовательность λ_n-нормированных плоскостей $(\mathbb{R}^2, \rho_{\lambda_n})$ такую, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Лемма 5.4. *Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)$, равный l. Тогда существует дерево (возможно, содержащее вырожденные ребра) $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ типа G с евклидовой длиной $\ell_e(\Gamma) = l$ и с границей ∂.*

Доказательство. Положим $a = \inf\limits_{\{\bar\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2 | \partial\bar\Gamma=\partial\}} \{|l - \ell_e(\bar\Gamma)|\}$. Если $a = 0$, то утверждение настоящей леммы справедливо. Допустим, что $a > 0$.

По определению предела $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) = l$, существует N_1 такое, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство $|l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| < a/3$. По лемме 5.3, евклидова длина дерева Γ_n равна $\ell_e(\Gamma_n) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \ell_\lambda(\Gamma_n)$. Следовательно, существует $M > 0$ такое, что для любого $\lambda > M$ справедливо неравенство $|\ell_e(\Gamma_n) - \ell_\lambda(\Gamma_n)| < a/3$. Поскольку $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то существует N_2 такое, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство $\lambda_n > M$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. При $n > N$ имеем три неравенства: $|l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| < a/3$, $|\ell_e(\Gamma_n) - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| < a/3$, $|l - \ell_e(\Gamma_n)| \geqslant a$. Получили противоречие, так как

$$a \leqslant |l - \ell_e(\Gamma_n)| = |l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) + \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) - \ell_e(\Gamma_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| + |\ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) - \ell_e(\Gamma_n)| < 2a/3.$$

Лемма доказана. ■

Теорема 5.8. *Для любого вложенного бинарного экстремального на стандартной евклидовой плоскости дерева Γ^* существует последовательность $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda=\lambda^*}^{\infty}$ вложенных бинарных λ-экстремальных деревьев, строго сходящаяся к Γ^* при $\lambda \to \infty$.*

Замечание. В теореме 5.8 число λ^* зависит от дерева Γ^*.

Доказательство. Пусть $\Gamma^*\colon G^* \to \mathbb{R}^2$, $\partial\Gamma^* = \partial$, — произвольное вложенное бинарное экстремальное дерево евклидовой длины $\ell_e(\Gamma^*) = l^*$ на стандартной евклидовой плоскости. Из алгоритма Хванга-Мелзака [14] вытекает единственность экстремального дерева данного типа и данной границы на стандартной евклидовой плоскости, поэтому, поскольку евклидова норма строго выпукла, по утверждению 1.4, для любого дерева $\Gamma\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂, отличного от Γ^*, справедливо неравенство

$$\ell_e(\Gamma) > \ell_e(\Gamma^*) = l^*. \qquad (*)$$

Рассмотрим одно из деревьев $\Gamma_\lambda\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂, слабо экстремальное на $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$. Отметим, что Γ_λ может содержать вырожденные ребра. Из выпуклости ρ_λ вытекает, что $\ell_\lambda(\Gamma_\lambda) \leqslant \ell_\lambda(\Gamma)$ для любого дерева $\Gamma\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂. Для каждого дерева Γ_λ, содержащего вырожденные ребра, рассмотрим погруженное дерево $\Gamma'_\lambda\colon G'_\lambda \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\Gamma'_\lambda \circ \pi = \Gamma^*$, где $\pi\colon G^* \to G'_\lambda$ — слабая проекция.

Пусть K — множество всех λ таких, что $\ell_\lambda(\Gamma'_\lambda) < \ell_\lambda(\Gamma)$ для любого погруженного дерева $\Gamma\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂. Докажем, что множество K конечно, т.е., начиная с некоторого λ, на каждой λ-нормированной плоскости существует погруженное слабо экстремальное дерево типа G^* и с границей ∂. Предположим, что множество таких λ счетно. Поскольку, с точностью до эквивалентности, существует конечное число деревьев G'_λ, на которые можно слабо спроецировать дерево G^*, то из последовательности $\{\lambda\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, для которой все сети Γ'_{λ_n} имеют одинаковый тип G' и одинаковую границу ∂', где $\partial' \circ \pi = \partial$. Рассмотрим последовательность длин $\{l_{\lambda_n} = \ell_{\lambda_n}(\Gamma'_{\lambda_n})\}_{n=1}^\infty$. Поскольку эта последовательность ограничена с обеих сторон, то из нее можно выделить сходящуюся к некоторому конечному l' подпоследовательность $\{l_{\lambda_{n_k}}\}_{k=1}^\infty$. По лемме 5.4, найдется дерево $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\ell_e(\Gamma') = l'$ и $\partial\Gamma' = \partial'$. Рассмотрим дерево $\bar\Gamma\colon G^* \to \mathbb{R}^2$, определяемое равенством $\bar\Gamma = \Gamma' \circ \pi$. Заметим, что дерево $\bar\Gamma$ содержит вырожденные ребра, имеет границу $\partial = \partial' \circ \pi$ и евклидову длину l'. Из леммы 5.3 вытекает, что $\ell_\lambda(\Gamma^*) \to \ell_e(\Gamma^*) = l^*$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $\ell_{\lambda_n}(\Gamma_{\lambda_n}) < \ell_{\lambda_n}(\Gamma^*)$, получаем $l' \leqslant l^*$, что противоречит неравенству $(*)$.

Таким образом, начиная с некоторого λ существуют на λ-нормированных плоскостях слабо экстремальные погруженные деревья Γ_λ типа G^* и с границей ∂. Поскольку G^* является бинарным деревом, то базовый тип расщепления дерева Γ_λ совпадает с самим деревом, поэтому дерево Γ_λ экстремально. Из структуры экстремальных деревьев следует, что каждое дерево Γ_λ планарно эквивалентно дереву Γ^* и последовательность $\{\Gamma_\lambda\}$ сходится к Γ^* при $\lambda \to \infty$. Теорема доказана. ■

Литература

[1] M. Alfaro, M. Conger, K. Hodges, A. Levy, R. Kochar, L. Kuklinski, Z. Mahmood and K. von Haam. The structure of singularities in Φ-minimizing networks in $\mathbb{R}^2$ // Pacific J. Math. 149. 1991. Pp. 201-210.

[2] D. Cieslic. The vertex-degrees of Steiner minimal trees in Minkowski planes // Topics in Combinatorics and Graph Theory (R. Bodendiek and R. Henn, eds.). Physica-Verlag. Heidelberg. 1990. Pp. 201–206.

[3] E. J. Cockayne. On the Steiner Problem // Canad. Math. Bull. 10. 1967. Pp. 431–450.

[4] D. Z. Du, F. K. Hwang and J. F. Weng. Steiner minimal trees for Regular Polygons // Disk. and Comp. Geometry. Vol. 2. 1987. Pp. 65–84.

[5] P. Fermat. Abhandlungen über Maxima und Minima // В книге: Oswalds, Klassiker der Exakten Wissenschaften. 1934. N 238.

[6] R. L. Francis. A note on the optimum location of new machines in existing plant layouts // J. Indust. Engrg. Vol. 14. 1963. Pp. 57–59.

[7] M. R. Garey and D. S. Johnson. The Rectilinear Steiner Problem is NP-Complete // SIAM J. Appl. Math. Vol. 32. 1977. Pp. 826–834.

[8] M. Hanan. On Steiner's Problem with Rectilinear Distance // SIAM J. Appl. Math. Vol. 14. 1966. Pp. 255–265.

[9] F. K. Hwang. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM J. of Appl. Math. Vol. 30. 1976. Pp. 104–114.

[10] А. О. Иванов. Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев // Матем. сборник. 1995. Т. 186. N 9. С. 45–76.

[11] А. О. Иванов. Геометрические свойства локально минимальных сетей // Дисс. доктора физ.-мат. наук, М.: МГУ. 1998.

[12] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations: CRC Press. 1994.

[13] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Классификация минимальных скелетов с правильной границей // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. N 4. С. 157–158.

[14] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Разветвлённые геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей. — The Edwin Mellen Press. Lewiston-Queenston-Lampeter 1999.

[15] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin. Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore 912805. 2001.

[16] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Разветвлённые геодезические в нормированных пространствах // Известия Российской академии наук. Серия матем. 2002. Т. 66. N 5. С. 33–82.

[17] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Теория экстремальных сетей. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.

[18] Д. П. Ильютко. Локально минимальные сети в N-нормированных пространствах // Матем. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 656–668.

[19] Д. П. Ильютко. N-нормированные плоскости // В книге: А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Теория экстремальных сетей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. С. 319–341.

[20] Д. П. Ильютко. Экстремальные сети на плоскостях Минковского // Материалы VIII Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”. Тезисы. Москва 2004. Издательство мех-мат МГУ. С. 392–395.

[21] Д. П. Ильютко. Локально минимальные и экстремальные сети на n-нормированных плоскостях // Труды Воронежской зимней математической школы 2004. Воронеж: ВорГУ. 2004. С. 82–88.

[22] Д. П. Ильютко, Геометрический критерий экстремальности произвольного дерева на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 5$ // Международная школа-конференция по анализу и геометрии, посвященная 75-летию академика Ю. Г. Решетняка. Тез. док. Новосибирск. 2004. С. 108–111.

[23] Д. П. Ильютко. Геометрический критерий экстремальности произвольного дерева на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 2 \pmod 3$ и

$\lambda \geqslant 7$ // Труды участников международной школы-семинара по анализу геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Тез. док. Ростов-на-Дону. 2004. С. 27–29.

[24] Д. П. Ильютко. Геометрия экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях // Вестник МГУ, сер. 1. Матем. Мех. 2005. N 4. С. 52–54

[25] V. Jarnik and M. Kössler. O minimalnich grafeth obeahujiicich n danijch bodu // Cas. Pest. Mat. a Fys. Vol. 63. 1934. Pp. 223-235.

[26] Г. А. Карпунин. Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера // Матем. сборник. 2000. Т. 191. N 2. С. 64–90.

[27] Г. А. Карпунин. Теория Морса минимальных сетей // Дисс. кандидата физ.-мат. наук, М.: МГУ, 2001.

[28] G. R. Lawlor and F. Morgan. Paired calibrations applied to soap films, immisceble fluids, and surfaces or networks minimizing other norms // Pacific J. Math., 166. 1994. Pp. 55–83.

[29] D. T. Lee and C. F. Shen. The Steiner Minimal Tree Problem in the λ-geometry Plane // В книге: ISAAC'96, Lecture Notes in Comp. Science, 1178, Springer-Verlag. 1996. Pp. 247–255.

[30] M. Sarrafzadeh and C. K. Wong. Hierarchical Steiner Tree Construction in Uniform Orientations // IEEE Trans. on Computer-Aided Design. Vol. 11. N 9. 1992. Pp. 1095–1103.

[31] W. D. Smith. How to find Steiner minimal trees in Euclidean d-space // Algoritmica. 1992. N 7. Pp. 137–177.

[32] Konrad J. Swanepoel. The Local Steiner Problem in Normed Planes // Networks. Vol. 36. 2000. Pp. 104–113.

[33] А. А. Тужилин. Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами // Матем. сборник. 1996. Т. 187. N 4. С. 117–159.

[34] А. А. Тужилин. Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами // Матем. заметки. 1997. Т. 61. Вып. 6.

[35] А. А. Тужилин. Полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей, двойственные триангуляции которых являются скелетами // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. N 2. С. 511–562.

[36] А. А. Тужилин. Классификация локально минимальных плоских сетей с выпуклыми границами // Дисс. доктора физ.-мат. наук, М.: МГУ. 1997.

Список работ автора по теме диссертации

[1] Д. П. Ильютко. Локально минимальные сети в N-нормированных пространствах // Матем. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 656–668.

[2] Д. П. Ильютко. N-нормированные плоскости // В книге: А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Теория экстремальных сетей, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. С. 319–341.

[3] Д. П. Ильютко. Экстремальные сети на плоскостях Минковского // Материалы VIII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения". Тезисы. Москва 2004. Издательство мех-мат МГУ. С. 392–395.

[4] Д. П. Ильютко. Локально минимальные и экстремальные сети на n-нормированных плоскостях // Труды Воронежской зимней математической школы 2004. Воронеж: ВорГУ. 2004. С. 82–88.

[5] Д. П. Ильютко. Геометрический критерий экстремальности произвольного дерева на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 5$ // Международная школа-конференция по анализу и геометрии, посвященная 75-летию академика Ю. Г. Решетняка. Тез. док. Новосибирск. 2004. С. 108–111.

[6] Д. П. Ильютко. Геометрический критерий экстремальности произвольного дерева на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 2 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 7$ // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Тез. док. Ростов-на-Дону. 2004. С. 27–29.

[7] Д. П. Ильютко. Геометрия экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях // Вестник МГУ, сер. 1. Матем. Мех. 2005. N 4. С. 52–54