

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 514.84,517.984.5

Рухиан Хомаюн

**Топологические свойства асимптотики спектра
несамосопряженного оператора
на двумерной поверхности вращения**

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор
А.И. Шафаревич

Москва — 2010

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Постановка задачи и основные определения	13
1.1 Постановка задачи	13
1.2 Линии Стокса и канонические области	14
1.3 Асимптотика фундаментальной системы решений	15
1.4 Матрицы перехода	17
1.5 Асимптотика матрицы монодромии	17
2 Асимптотика спектра оператора D на стандартной сфере S^2	19
2.1 Разделение переменных в спектральной задаче. Редукция к задаче с регулярными особыми точками	19
2.2 Топология линий Стокса и асимптотика спектра	21
2.3 Расположение спектра на комплексной плоскости	33
3 Асимптотика спектра D на поверхности вращения	42
3.1 Разделение переменных. Задача с особыми точками	42
3.2 Асимптотика спектра	44
3.3 Расположение спектра на комплексной плоскости	52
3.4 Условия квантования на римановой поверхности	54

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.

Геометрические аспекты спектральной теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов изучались в огромном количестве работ; результаты этой теории имеют много приложений в математике и теоретической физике. Спектральная теория несамосопряженных операторов, сравнительно с самосопряженным случаем развита значительно менее полно; как структура спектра, так и свойства спектрального разложения могут быть в этой ситуации весьма экзотическими. В частности, в несамосопряженном случае к настоящему времени отсутствует общая теория квазиклассических асимптотик, аналогичная теории В.П. Маслова квантования инвариантных лагранжевых многообразий. В работе [5] построены спектральные серии оператора Лапласа-Бельтрами со сносом в евклидовом пространстве, соответствующие асимптотически устойчивым положениям равновесия, предельным циклам и инвариантным торам соответствующего векторного поля. В работах [11, 12, 17, 13, 15, 6, 14] полностью исследован спектр одномерного оператора Шредингера и Орра - Зоммерфельда на отрезке с потенциалами простейшего вида (линейным, квадратичным и близким к линейному); отметим, что ряд утверждений об условиях квантования содержался еще в работе [4]. В этих работах, в частности, было показано, что спектр в квазиклассическом пределе стягивается к некоторому графу на комплексной плоскости. В работах [1, 2, 8] исследован спектр одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом простейшего вида (линейный или квадратичный тригонометрический многочлен) на окружности; в частности, был найден спектральный граф и показано, что асимптотика спектра может быть вычислена из топологических условий квантования на римановой поверхности — комплексной поверхности постоянной энергии.

В настоящей диссертации описан спектр оператора Лапласа - Бельтрами со сносом на двумерной компактной поверхности вращения, гомеоморфной сфере (рассматривается поле скоростей, направленное вдоль параллелей и линейно зависящее от высоты). Показано, что спектр вычисляется из условий квантования на соответствующей римановой поверхности, аналогичным условиям Бора - Зоммерфельда - Маслова [9, 10]; однако, в отличие от самосопряженного случая, в нашей ситуации достаточно требовать выполнения такого условия хотя бы на одном базисном цикле поверхности (раз-

ные циклы определяют разные спектральные серии). Исследован спектральный граф (состоящий из трех ребер); особенно полную информацию о нем удается получить в случае стандартной сферы – тогда асимптотика спектра выражается через эллиптические интегралы. При доказательствах соответствующих теорем применяется техника, развитая в работах [16, 7] и основанная на изучении решений спектрального уравнения в комплексной области и, в частности, на исследовании топологии т.н. графа Стокса (ребра этого графа ограничивают области, в которых справедливы квазиклассические асимптотические формулы).

Цель работы.

В настоящей работе автор ставил перед собой следующие цели:

1. Описать топологические свойства спектра несамосопряженного оператора Лапласа со сносом на двумерной поверхности вращения, гомеоморфной сфере.
2. Описать квазиклассическую асимптотику спектра несамосопряженного оператора Лапласа – Бельтрами со сносом на двумерной поверхности вращения и ее связь с топологией графа Стокса.
3. Исследовать топологию спектрального графа и его расположение на комплексной плоскости.
4. Получить простые и эффективные формулы для спектральных серий в случае стандартной сферы.

Методы исследования.

Исследования, проводимые в диссертационной работе, основаны на методах дифференциальной геометрии и топологии, спектральной теории дифференциальных операторов, аналитической теории дифференциальных уравнений. В работе используются результаты асимптотической теории дифференциальных операторов, разработанной М.В. Федорюком.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Описана квазиклассическая асимптотика спектра оператора Лапласа-Бельтрами со сносом двумерной компактной поверхности вращения. Установлена связь с топологией линий Стокса.
2. Показано, что асимптотика спектра определяется из топологических условий квантования на римановой поверхности постоянной комплексной энергии.
3. Исследован спектральный граф; показано, что он определяется топологией графа Стокса.
4. Для стандартной сферы получены простые и эффективные формулы для асимптотических собственных чисел.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и математической физики.

Апробация диссертации.

- Конференция “Современные проблемы анализа и преподавания математики”, посвященная 105-летию С.М. Никольского. Москва, МГУ, май 2010.
- Конференция “Асимптотические методы и математическая физика”. Москва, ИП-Мех РАН, май 2010.
- Семинар кафедры Дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ им М.В. Ломоносова.

Публикации.

Основные результаты работы опубликованы в двух статьях, ссылки [22, 23] на которые приведены в конце литературы.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения и трех глав, включающих в себя 11 разделов. Текст диссертации изложен на 57 страницах и дополняется 7 рисунками. Список литературы содержит 23 наименования.

Содержание работы

Введение.

Во введении приводится обзор ранее полученных результатов, связанных с темой диссертации, и обосновывается актуальность диссертационной работы.

Глава 1.

В первой главе приводятся постановка задачи и основные определения, используемые в диссертационной работе.

В разделе 1.1 определяется несамосопряженный дифференциальный оператор:

$$D = \epsilon^2 \Delta + (v, \nabla)$$

на двумерной компактной поверхности вращения M , гомеоморфной сфере; Δ — оператор Лапласа-Бельтрами, $\epsilon > 0$, v — гладкое векторное поле на M .

Далее в первой главе вводятся следующие понятия: линии Стокса и канонические области, асимптотика системы решений, матрицы перехода, регулярные особые точки и матрица монодромии. Приведены асимптотические формулы для матриц перехода и монодромии.

Глава 2.

Во второй главе проводится исследование спектра оператора

$$D = \epsilon^2 \Delta + (v, \nabla)$$

на стандартной сфере \mathbb{S}^2 .

В разделе 2.1 показано, что, для того чтобы вычислить спектр оператора D на стандартной сфере \mathbb{S}^2 , достаточно исследовать свойства обыкновенного дифференциального

уравнения с регулярными особыми точками:

$$\epsilon^2(w'' + Pw') + Qw = 0,$$

где $P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}(m+1)$, $p(x) = (1-x^2)P(x)$, $Q(x) = -\epsilon^2\frac{(m^2+m)}{1-x^2} + \frac{imx-\lambda}{1-x^2}$.

В разделе 2.2 сначала описываются разные топологические случаи строения графа Стокса. Линии Стокса на плоскости выходят из одной точки поворота $\frac{\lambda}{im}$ и двух особых точек -1 , $+1$. Условия существования спектра на стандартной сфере \mathbb{S}^2 описываются следующими леммой и теоремами:

Лемма 1. Пусть λ таково, что нет конечных линий Стокса. Тогда в $O(\epsilon^2)$ -окрестности точки λ нет точек спектра.

Конечные линии Стокса могут быть трех типов:

- Линия Стокса соединяет -1 и 1 ,
- Линия Стокса соединяет -1 и $\frac{\lambda}{im}$,
- Линия Стокса соединяет $\frac{\lambda}{im}$ и 1 .

Теорема 1. Пусть линия Стокса соединяет -1 и 1 . Пусть λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi(2n - 2m - 1) \left[\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1},$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Теорема 2. Пусть линия Стокса соединяет -1 и $z_0(\lambda) = \lambda/im$. Пусть λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi \left(-\frac{1}{4} + 2n - m \right) \left[\int_{-1}^{z_0(\lambda)} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1},$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Теорема 3. Пусть линия Стокса соединяет $z_0(\lambda)$ и 1 . Пусть λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi \left(-\frac{1}{4} + 2n - m \right) \left[\int_{z_0(\lambda)}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1},$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

В разделе 2.3 при помощи анализа соответствующих эллиптических интегралов изучается расположение точек спектра на комплексной плоскости. А именно, показано, что при $\epsilon \rightarrow 0$ спектр концентрируется в малой окрестности графа некоторого на комплексной плоскости. При каждом фиксированном m этот граф состоит из 3-х ребер, одно из которых – луч на действительной оси. Последнее обстоятельство вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i(-m, m)$

$$I(\lambda) = \operatorname{Re} \int_0^\pi \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = 0$$

тогда и только тогда, когда λ – действительное положительное число.

Два других ребра соединяют точки $\pm im$ с точкой на действительной оси; единственность этой точки вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. Уравнение

$$J(\lambda) = \operatorname{Re} \int_0^{\theta_+} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = 0$$

на параметр $\lambda \in (0, +\infty)$ имеет только одно решение λ , причем $\lambda \in (0, m \sinh \frac{\pi}{2})$. Здесь θ_\pm – решения уравнения $im \cos \theta - \lambda = 0$

$$\theta_\pm = \pm \left(\frac{\pi}{2} + i \ln \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2} + \frac{\lambda}{m} \right) \right)$$

Замечание 1. В зависимости от расположения точки спектра на комплексной плоскости λ , линии Стокса по-разному расположены на комплексной плоскости.

Случай(1): Если точка спектра совпадает с вершиной графа, расположение линий Стокса такое, как на рис.2.

Случай(2): Если точка спектра находится на линии(3)(рис.1), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 3.

Случай(3): Если точка спектра находится на линии (2), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 4.

Случай(4): Если точка спектра находится на кривой (1), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 5.

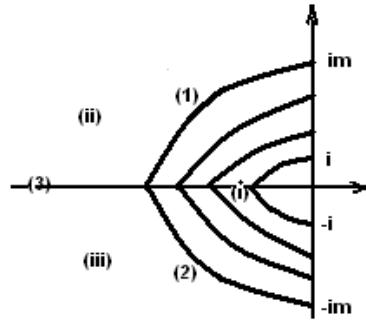


Рис. 1: Расположение спектра

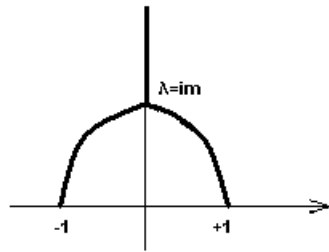


Рис. 2: Линии Стокса 1

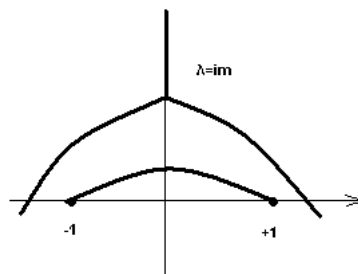


Рис. 3: Линии Стокса 2

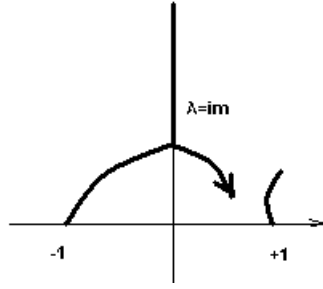


Рис. 4: Линии Стокса 3

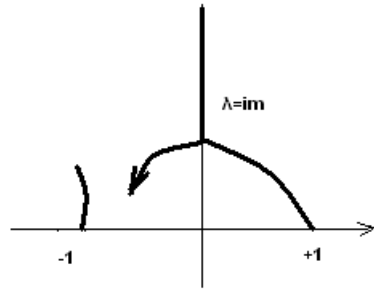


Рис. 5: Линии Стокса 4

Глава 3.

Третья глава диссертационной работы посвящена описанию спектра оператора D на поверхности вращения.

В разделе 3.1 оператор Лапласа-Бельтрами записан для случая поверхности, полученной вращением графика функции $x = f(z)$ вокруг оси z :

$$\Delta w = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial u_i} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial u_j} w =$$

$$\frac{1}{f \sqrt{f_z^2 + 1}} \frac{\partial}{\partial z} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial z} \omega + \frac{1}{f \sqrt{f_z^2 + 1}} \frac{\partial}{\partial \varphi} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \varphi} \omega,$$

здесь $g = f^2(f_z^2 + 1)$.

Уравнение :

$$\epsilon^2 \Delta \omega + (v, \nabla) \omega = \lambda \omega$$

после разделения переменных приводится к виду:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left(\psi''(z) + \frac{f_z \sqrt{f_z^2 + 1} - f f_z f_{zz} (f_z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{f (f_z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \psi'(z) \right) \\ + \left(\frac{\epsilon m^2 (f_z^2 + 1)}{f^2} + (imz - \lambda)(f_z^2 + 1) \right) \psi(z) = 0, \end{aligned}$$

где $\omega = \exp(im\varphi)\psi(z)$, $a(z) = z, \varphi$ —угол вращения.

В разделе 3.2 асимптотика спектра на поверхности вращения описана посредством следующих теорем:

Теорема 4. Пусть линия Стокса соединяет z_1 и z_2 , а λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi \left(n - \frac{1}{2} + 2m \right) \left(\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2 + 1)} dt \right)^{-1},$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Теорема 5. Пусть линия Стокса соединяет z_1 и $\frac{\lambda}{im}$, а λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi \left(2n - \frac{1}{4} - m \right) \left[\int_{z_1}^{\frac{\lambda}{im}} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2 + 1)} dz \right]^{-1},$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Теорема 6. Пусть линия Стокса соединяет $\frac{\lambda}{im}$ и z_2 и λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi \left(2n + \frac{1}{4} - m \right) \left[\int_{z_2}^{\frac{\lambda}{im}} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2 + 1)} dz \right]^{-1},$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

В разделе 3.3 описано расположение спектра на комплексной плоскости в случае поверхности вращения. Спектр концентрируется в окрестности некоторого графа, гооморфного графу, представленному на рис.1; каждое ребро графа пересекается вертикальной прямой не более чем в одной точке. Кроме того, доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *Если функция f является четной, то одно из ребер спектрального графа лежит на действительной оси.*

Наконец, в разделе 3.4 показано, что асимптотика спектра может быть вычислена из условий квантования, похожих на правила Бора – Зоммерфельда – Маслова [9],[10]; эти условия задаются на римановой поверхности постоянной комплексной энергии. Именно, пусть M – стандартная сфера; рассмотрим риманову поверхность, заданную в \mathbb{C}^2 уравнением $(z^2 - 1)p^2 + imz = \lambda$. Эта поверхность гомеоморфна тору с тремя проколами; она получается из двух экземпляров комплексной плоскости z склейкой вдоль разрезов, соединяющих точки ± 1 и точку λ/im с бесконечно удаленной. На этой поверхности определяются три цикла γ^j , $j = 1, 2, 3$ так, чтобы проекции этих циклов на плоскость z совпадают с отрезками $[-1, 1]$, $[-1, \lambda/im]$, $[1, \lambda/im]$ соответственно. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Уравнения, определяющие асимптотику спектра согласно теоремам 1 – 3, могут быть записаны в виде*

$$\frac{1}{2\pi} \epsilon \int_{\gamma_j} pdz = n + \frac{\mu_j}{2},$$

где $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$.

Замечание 2. *В отличие от условий Маслова, которые должны быть выполнены на любом цикле вещественного лагранжсева многообразия, приведенные выше комплексные условия квантования должны быть выполнены хотя бы на одном цикле; разные циклы определяют разные спектральные серии.*

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико–математических наук, профессору А. И. Шафаревичу — за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико–математического факультета МГУ за творческую атмосферу и доброжелательное отношение.

Глава 1

Постановка задачи и основные определения

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим несамосопряженный дифференциальный оператор

$$D = \epsilon^2 \Delta + (v, \nabla) \tag{1.1}$$

на двумерной компактной поверхности вращения M , гомеоморфной сфере; здесь Δ —оператор Лапласа – Бельтрами, $\epsilon > 0$, v — гладкое векторное поле на M . Наша цель – вычисление асимптотики спектра оператора D при $\epsilon \rightarrow 0$.

Поверхность M возникает при вращении графика положительной функции $x = f(z)$ вокруг оси z ; f определена на отрезке $[z_1, z_2]$, причем $f(z_1) = f(z_2) = 0$ (точные условия на f сформулированы ниже). В качестве координат на M выберем пару z, φ , где φ – угол вращения, а в качестве v – векторное поле вида $v = a(z) \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $a(z)$ – линейная функция.

В первой части работы мы рассмотрим самый простой случай, когда M – стандартная сфера $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$; в дальнейшем вычислим спектр оператора D для произвольной поверхности вращения и выясним, как он зависит от геометрии M .

Отметим, что оператор D не самосопряжен (и даже не симметричен) в $L_2(M)$; сопряженный оператор задается выражением

$$D^* = \epsilon^2 \Delta - (v, \nabla).$$

Спектр этого оператора при $\epsilon \rightarrow 0$ концентрируется вблизи некоторого графа на комплексной плоскости; расположение графа зависит от вида поверхности M .

После разделения переменных спектральная задача для оператора D сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с особыми точками (соответствующими полюсам поверхности вращения). Мы изучаем асимптотику решений этого уравнения в комплексной плоскости, применяя технику линий Стокса и канонических областей; ниже приводятся необходимые сведения.

1.2 Линии Стокса и канонические области

Рассмотрим уравнение

$$\epsilon^2(w'' + Pw') + Qw = 0 \quad (1.2)$$

где параметр $\epsilon \rightarrow 0$, функции P, Q мероморфны в комплексной плоскости переменной z . Мы будем рассматривать функции, имеющие полюса не выше первого порядка.

Определение 1.2.1. *Точкой поворота называется нуль или полюс функции Q ; порядок нуля называется порядком точки поворота (полюса считаются точками поворота порядка -1).*

Определение 1.2.2. *Обозначим*

$$S(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{Q(t)} dt$$

где z_0 — точка поворота. Максимальная связная компонента линии уровня

$$\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0$$

называется линией Стокса (ЛС).

Линии Стокса обладают следующими свойствами:

- (1) Линия Стокса начинается в точке поворота и заканчивается либо в точке поворота, либо в бесконечности.
- (2) Линия Стокса не может содержать точки поворота внутри себя.
- (3) Линия Стокса не может пересекать себя или другую линию Стокса.
- (4) Из точки поворота кратности d выходят $d + 2$ линии Стокса.

Объединение всех ЛС уравнения называется графом Стокса. Граф Стокса не может содержать топологической окружности.

Линии Стокса разбивают плоскость \mathbb{C} на области, гомеоморфные полуплоскости или полосе.

Определение 1.2.3. *Канонической областью называется область на комплексной плоскости, содержащая внутри себя ровно одну линию Стокса, ограниченная другими линиями Стокса и такая, что функция S (при выборе непрерывной ветви корня) взаимно однозначно отображает эту область на комплексную плоскость с конечным или бесконечным числом вертикальных разрезов.*

Каноническая область может быть задана точкой поворота и линией Стокса, выходящей из нее (эта линия содержится внутри канонической области).

1.3 Асимптотика фундаментальной системы решений

Рассмотрим два случая. 1. Пусть сперва коэффициенты P и Q уравнения (1.2) – голоморфные функции. Фиксируем тройку (l, z_0, D) , где z_0 – точка поворота, l – выходящая из нее линия Стокса, и D – соответствующая каноническая область. Определим ветвь функции $S(z_0, z)$ в D так, чтобы

$$\operatorname{Im} S(z_0, z) > 0, z \in l.$$

В области D существует фундаментальная система решений уравнения (1.2) со следующей асимптотикой:

$$u(z) = cQ^{\frac{-1}{4}}(z) \exp\left\{\frac{1}{\epsilon} S(z_0, z)\right\} (1 + O(\epsilon))$$

$$v(z) = cQ^{\frac{-1}{4}}(z) \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon} S(z_0, z)\right\} (1 + O(\epsilon)).$$

Здесь c нормировочная постоянная; фиксируем ее условиями:

$$|c| = 1, \lim_{z \rightarrow z_0} \arg[cQ^{\frac{-1}{4}}(z)] = 0.$$

Определение 1.3.1. *Пара функций u, v называется канонической фундаментальной системой решений (ФСР), соответствующей тройке (z_0, l, D) .*

В пересечении $D_j \cap D_k$ двух канонических областей любое решение $w(z)$ можно представить в виде:

$$w(z) = \alpha_j u_j + \beta_j v_j = \alpha_k u_k + \beta_k v_k;$$

коэффициенты α, β связаны посредством матрицы Ω_{jk} :

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \Omega_{jk} \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}.$$

Определение 1.3.2. Матрица Ω_{jk} называется матрицей перехода между тройками (z_j, l_j, D_j) и (z_k, l_k, D_k) .

В следующем параграфе приводится асимптотика этих матриц при $\epsilon \rightarrow 0$.

2. Пусть коэффициенты P, Q имеют полюс в точке z_0 . Фиксируем точку a в окрестности точки z_0 , не лежащую на выходящей из z_0 линии Стокса. В окрестности точки a определены два линейно независимых ростка аналитических функций – решения уравнения (1.2). Их можно аналитически продолжить в окрестность точки z_0 с разрезом вдоль кривой l ; в этой области существуют два решения с асимптотикой следующего вида:

$$w_{1,2}(z, \epsilon) = w_{1,2}(z, \epsilon, a) \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\pm\epsilon)^{-\frac{k}{2}} \int_a^z y_k(t) dt\right\} (1 + O(\epsilon)) \quad (1.3)$$

где:

$$w_{1,2}(z, \epsilon, a) = Q(z)^{-\frac{1}{4}} f(a, z) \exp\{\pm i\epsilon^{-\frac{1}{2}} S(a, z)\}$$

$$S(a, z) = \int_a^z \sqrt{Q(t)} dt,$$

$$f(a, z) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_a^z P(t) dt\right\}$$

$$y_0 = -\frac{Q'(z)}{4Q(z)} - \frac{P(z)}{2},$$

$$y_{k+1}(z) = \frac{i}{2\sqrt{Q(z)}} [y'_k(z) + P(z)y_k(z) + \sum_{j=0}^k y_j(z)y_{k-j}(z)],$$

$$y_1(z) = \frac{i}{2\sqrt{Q(z)}} [y'_0(z) + \left(\frac{Q'(z)}{4Q(z)}\right)^2 - \frac{Q^2(z)}{4}].$$

Ряды здесь и всюду ниже понимаются как асимптотические. В параграфе 1.5 приведена асимптотика матрицы оператора монодромии в базисе w_1, w_2 .

1.4 Матрицы перехода

Асимптотика матриц перехода, определенных в пункте (1.3), зависит от взаимного расположения троек (l, z, D) ; выделяется четыре элементарных матрицы перехода, комбинируя которые, можно двигаться по произвольным цепочкам канонических областей.

Первый тип: $(l, z_1, D) \rightarrow (l, z_2, D)$ – меняется только направление ЛС между двумя точками поворота (такой переход существует только для конечной ЛС):

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{1}{\epsilon}\alpha} \\ e^{i\frac{1}{\epsilon}\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

где $\alpha = |S(z_1, z_2)|$, $e^{i\varphi_0} = \frac{c_1}{c_2}$.

Второй тип: $(l_1, z_1, D) \rightarrow (l_2, z_2, D)$ – меняется и линия Стокса и точка поворота; каноническая область общая, причем лучи $S(l_1)$ и $S(l_2)$ направлены в одну сторону:

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\epsilon}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}\alpha} \end{pmatrix}$$

где $\alpha = S(z_1, z_2)$, $Re\alpha > 0$, $e^{i\varphi_0} = \frac{c_1}{c_2}$.

третий тип: $(l, z_0, D_1) \rightarrow (l, z_0, D_2)$ – меняется только каноническая область:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 + \eta_{11} & w_{12} \\ w_{12} & 1 + \eta_{22} \end{pmatrix}$$

где

$$\eta_{11} = \eta_{22} = O(\epsilon), w_{12} = O(\exp(-2\frac{1}{\epsilon}(a_+ - t))), w_{21} = O(\exp(-2\frac{1}{\epsilon}(a_- - t)))$$

$$t > 0, t \rightarrow 0, -a_- < ReS < a_+.$$

Такая матрица при $\epsilon \rightarrow 0$ стремится к единичной.

Четвертый тип: $(l_1, z_0, D_1) \rightarrow (l_2, z_0, D_2)$ – точка поворота фиксирована, меняются каноническая область и линия Стокса:

$$\Omega = e^{-\frac{i\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + O(\epsilon).$$

1.5 Асимптотика матрицы монодромии

Рассмотрим окрестность регулярной особой точки уравнения (2.1) с разрезом вдоль линии Стокса; будем считать верхним берегом разреза тот, на котором $ImS > 0$. Пусть x –

точка, лежащая на верхнем берегу разреза, и кривая $\alpha^+(x)$ соединяет постоянную точку a (в D) и x ($\text{Im}z > 0$ на этой кривой). Обозначим $w_j(x + i0, \epsilon)$ ($j = 1, 2$) решение, полученное при аналитическом продолжении ростка w_j вдоль $\alpha^+(x)$, а через $w_j(x - i0, \epsilon)$ – решение, полученное продолжением w_j при вдоль $\alpha^-(x)$ – кривой, симметричной $\alpha^+(x)$ относительно вещественной оси. Положим $w = (w_1, w_2)^t$ – вектор решений уравнения (1.2); матрица оператора монодромии в базисе w определяется следующим образом:

$$w(x - i0, \epsilon) \equiv T_1(\epsilon)w(x + i0, \epsilon).$$

Асимптотика этой матрицы имеет вид:

$$t_{11} = O(\epsilon), \quad t_{12} = A$$

$$t_{21} = -A^{-1}a_+^{-1} + O(\epsilon), \quad t_{22} = 1 + a_+^{-1} + O(\epsilon),$$

где

$$a_{\pm} = \exp\{2\pi i\rho_{\pm}\}, \quad A = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^{\frac{k}{2}} \alpha_k\right\}.$$

Здесь ρ_{\pm} – характеристические показатели особой точки z_0 , α_k – коэффициенты, вычисляемые по рекуррентным формулам. Таким образом, известна асимптотика матрицы оператора монодромии в фиксированном базисе; будем называть этот базис *базисом стандартных решений* (в отличие от канонических ФСР, определенных в п.1.3).

Глава 2

Асимптотика спектра оператора D на стандартной сфере \mathbb{S}^2

В этой главе изучается спектральная задача для оператора D на стандартной сфере. Мы вычисляем асимптотику спектра этого оператора и определяем расположение точек спектра на комплексной плоскости.

2.1 Разделение переменных в спектральной задаче. Редукция к задаче с регулярными особыми точками

Если векторное поле v направлено вдоль параллелей, переменные в спектральной задаче разделяются и вопрос сводится к изучению спектра обыкновенного дифференциального оператора. В этом параграфе приводятся соответствующие формулы.

Напомним, что оператор D имеет следующий вид:

$$D = \epsilon^2 \Delta + (v, \nabla),$$

где Δ —оператор Лапласа-Бельтрами. В координатах (θ, φ) (θ — широта, φ — долгота, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) этот оператор выглядит следующим образом

$$\Delta = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.1)$$

Спектральная задача для оператора D в координатах θ, φ запишется так:

$$\epsilon^2 \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) + a(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \lambda Y,$$

где:

$$v = a \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

После замены $Y = u(\theta)\nu(\varphi)$ предыдущее уравнение запишется в виде:

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \nu - \tan \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \nu - \frac{1}{\cos^2 \theta} u \frac{\partial^2 \nu}{\partial \varphi^2} \right) + a(\theta) \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} u = \lambda u(\theta)\nu(\varphi);$$

подставляя $\nu = e^{im\varphi}$, получаем для u :

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \tan \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} u \right) + ima u = \lambda u$$

или, после замены $\sin \theta = x$

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (1-x^2) - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{m^2}{1-x^2} u \right) + ima(x)u = \lambda u$$

.

Обозначим $u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} w(x)$ и перепишем последние уравнения в виде:

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} (1-x^2) - 2x(m+1) \frac{\partial w(x)}{\partial x} - (m^2+m)w(x) \right) + ima(x)w(x) = \lambda w(x)$$

и при $a(x) = x$ получаем:

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} (1-x^2) - 2x(m+1) \frac{\partial w(x)}{\partial x} - (m^2+m)w(x) \right) + imxw(x) = \lambda w(x)$$

Очевидно, последнее уравнение можно переписать так:

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} (1-x^2) - 2x(m+1) \frac{\partial w(x)}{\partial x} - (m^2+m)w(x) \right) + (imx - \lambda)w(x) = 0$$

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} (1-x^2) - 2x(m+1) \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right) + (-\epsilon^2(m^2+m) + imx - \lambda)w(x) = 0$$

$$\epsilon^2 (w''(x) - \frac{2x}{1-x^2} (m+1)w'(x)) + (-\epsilon^2 \frac{(m^2+m)}{1-x^2} + \frac{imx - \lambda}{1-x^2})w(x) = 0 \quad (2.2)$$

Ясно, что уравнение (2.2) имеет вид:

$$\epsilon^2 (w'' + Pw') + Qw = 0 \quad (2.3)$$

где $P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}(m+1)$, $p(x) = (1-x^2)P(x)$, $Q(x) = -\epsilon^2 \frac{(m^2+m)}{1-x^2} + \frac{imx - \lambda}{1-x^2} \simeq \frac{imx - \lambda}{1-x^2}$.

В уравнении (2.3) функции P, Q голоморфны в любой односвязной области комплексной плоскости x , не содержащей отрезка $[-1, 1]$. Уравнение имеет 2 особые точки $x = 1, x = -1$; обе являются регулярными с характеристическими показателями $(0, \rho_+), (0, \rho_-)$, где $\rho_{\pm} = 1 \pm \frac{p(\pm 1)}{2}$.

Таким образом, исследование спектра исходного оператора сводится к описанию спектра обыкновенного дифференциального оператора (2.3) с двумя регулярными особыми точками. Ясно, что в особых точках (соответствующих полюсам сферы) надо требовать аналитичности собственной функции. Таким образом задача сводится к отысканию асимптотики чисел λ , для которых существует решение уравнения (2.3), аналитическое в обеих особых точках $x = \pm 1$. Далее в этой главе решается именно эта задача.

2.2 Топология линий Стокса и асимптотика спектра

Рассмотрим линии Стокса уравнения (2.3). Имеется две точки поворота порядка -1 (особые точки ± 1) и одна точка поворота порядка 1 (точка $x_0 = \frac{\lambda}{im}$). Асимптотика спектра определяется топологией графа Стокса; ясно, что возможны следующие топологические случаи.

Случай 1. Все 5 линий Стокса заканчиваются в бесконечности; в этом случае нет конечных линий Стокса.

Случай 2. Одна из трех линий Стокса, выходящих из точки поворота x_0 , заканчивается в особой точке; две других заканчиваются в бесконечности.

Случай 3. Две из трех линий Стокса, выходящих из точки поворота x_0 , заканчиваются в особых точках, а третья уходит на бесконечность.

Случай 4. Линия Стокса выходящая из одной особой точки, заканчивается в другой; линии, выходящие из точки x_0 , заканчиваются в бесконечности.

Связь топологии линий Стокса с асимптотикой спектра описывается приведенными ниже леммой и теоремами.

Лемма 2.2.1. Пусть λ таково, что нет конечных линий Стокса. Тогда в $O(\epsilon^2)$ — окрестности точки λ нет точек спектра.

Доказательство. Для того что бы комплексное число λ было точкой спектра, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение уравнения (2.3), однозначное в окрест-

ностях особых точек $z = 1$ и $z = -1$. Пусть T_1, T_2 – матрицы операторов монодромии, соответствующих особым точкам $x = +1$ и $x = -1$ соответственно в некотором базисе; указанное однозначное решение существует, если существует двумерный вектор l , для которого

$$lT_1 = l, lT_2 = l.$$

Существование l зависит от матриц T_1, T_2 ; мы вычислим асимптотику этих матриц. Обозначим через w_1, w_2 фундаментальную систему решений уравнения (2.3), определенную в окрестности особой точки $x = -1$ по формулам п.1.5; аналогичные решения, соответствующие точке $x = 1$, обозначим u_1, u_2 . Через a_1 будем обозначать точку, фигурирующую в определении решений u , а через a_2 – соответствующую точку для решений w . Напомним что для решений u

$$u(x - i0) = T_1 u(x + i0),$$

причем матрица монодромии T_1 в базисе u имеет следующую асимптотику:

$$T_1 = \begin{pmatrix} O(\epsilon^2) & A \\ -A^{-1}a_+^{-1} + O(\epsilon^2) & 1 + a_+^{-1} + O(\epsilon^2), \end{pmatrix}$$

откуда

$$u_1(x - i0) = O(\epsilon^2)u_1(x + i0) + Au_2(x + i0),$$

$$u_2(x - i0) = (-A^{-1}a_+^{-1} + O(\epsilon^2))u_1(x + i0) + (1 + a_+^{-1} + O(\epsilon^2))u_2(x + i0)$$

Аналогично, в окрестности точки $x = -1$ имеем

$$w(x - i0) = \tilde{T}_1 w(x + i0),$$

где \tilde{T}_1 – матрица монодромии, соответствующая точке $x = -1$ в базисе w . Ее асимптотика имеет вид

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} O(\epsilon^2) & \tilde{A} \\ -\tilde{A}^{-1}\tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2) & 1 + \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2) \end{pmatrix},$$

откуда

$$w_1(x - i0) = O(\epsilon^2)w_1(x + i0) + \tilde{A}w_2(x + i0)$$

$$w_2(x - i0) = (-\tilde{A}^{-1}\tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2))w_1(x + i0) + (1 + \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2))w_2(x + i0).$$

Таким образом, нам известны асимптотики матриц монодромии в разных базисах; чтобы выписать условия принадлежности точки λ спектру оператора D , надо вычислить матрицу перехода между этими базисами (точнее, ее асимптотику). В нашем случае это достаточно просто, поскольку окрестности точек $x = \pm 1$ (без разрезов вдоль выходящих из них линий Стокса) лежат в одной канонической области. Отсюда аналогично [16] получаем, что $w_1 = c_1 u_1$, $w_2 = c_2 u_2$; поэтому

$$c_1 u_1(x - i0) = O(\epsilon^2) c_1 u_1(x + i0) + \tilde{A} c_2 u_2(x + i0)$$

$$c_2 u_2(x - i0) = (-\tilde{A}^{-1} \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2)) c_1 u_1(x + i0) + (1 + \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2)) c_2 u_2(x + i0),$$

откуда следуют формулы для асимптотики матрицы монодромии T_2 , соответствующие особой точке $x = -1$ в базисе u ($u(x - i0) = T_2 u(x + i0)$):

$$T_2 = \begin{pmatrix} O(\epsilon^2) & \tilde{A} \frac{c_2}{c_1} \\ (-\tilde{A}^{-1} \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2)) \frac{c_1}{c_2} & 1 + \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2) \end{pmatrix}$$

Таким образом, найдена асимптотика матриц двух операторов монодромии в одном и том же базисе u ; это позволяет выписать условие существования у этих матриц общего собственного вектора l . Для его координат l_1, l_2 получаем:

$$l_1 = l_1 O(\epsilon^2) + l_2 (-A^{-1} a_+^{-1} + O(\epsilon^2)), \quad l_2 = l_1 A + l_2 (1 + a_+^{-1} + O(\epsilon^2))$$

и

$$l_1 = l_1 O(\epsilon^2) + l_2 (\tilde{A}^{-1} \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2)) \frac{c_1}{c_2}, \quad l_2 = (l_1 \tilde{A} \frac{c_2}{c_1} + l_2 (1 + \tilde{a}_+^{-1} + O(\epsilon^2)))$$

Отсюда следует соотношение на элементы матриц T , представляющее собой уравнение на точки спектра оператора D :

$$\frac{A a_+}{\tilde{A} \tilde{a}_+} = \frac{c_2}{c_1} + O(\epsilon^2).$$

Напомним (см. п.1.5), что

$$A = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \alpha_k},$$

$$\tilde{A} = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \tilde{\alpha}_k},$$

откуда

$$\frac{A}{\tilde{A}} = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)}$$

$$\frac{a_+}{\tilde{a}_+} = e^{\pi i (p(1) + p(-1))}.$$

с другой стороны, по определению решений u, w имеем:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{w_2}{u_2} = e^{2\left[\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}} dt\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \int_{a_2}^{a_1} y_j(t) dt\right)\right]}$$

и уравнение на точки спектра принимает вид:

$$e^{2\left[\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}} dt\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \int_{a_2}^{a_1} y_j(t) dt\right)\right]} = e^{\pi i(p(1)+p(-1)) + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)} + O(\epsilon^2). \quad (2.4)$$

Ясно, что асимптотические ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \int_{a_2}^{a_1} y_j(t) dt$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)$$

ограничены при $\epsilon \rightarrow 0$; с другой стороны, ветвь корня $\sqrt{\frac{imx-\lambda}{1-x^2}}$ фиксирована таким образом, что

$$\text{Im} \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}} dt < 0.$$

Это значит, что функция

$$e^{2\left[\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}} dt\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \int_{a_2}^{a_1} y_j(t) dt\right)\right]}$$

экспоненциально растет при $\epsilon \rightarrow 0$, поэтому функция

$$e^{2\left[\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}} dt\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \int_{a_2}^{a_1} y_j(t) dt\right)\right]} - e^{\pi i(p(1)+p(-1)) + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)}$$

не обращается в нуль в рассматриваемой точке λ , откуда по теореме Гурвица вытекает, что в $O(\epsilon^2)$ -окрестности такой точки нет точек спектра оператора D .

Замечание 2.2.1. Из утверждения В леммы (2.2.1) следует, что точки спектра лежат в окрестностях множеств на комплексной плоскости λ , для которых граф Стокса содержит конечные линии. Конечные типы линии Стокса могут быть трех типов:

- линия Стокса соединяет точки -1 и 1 .
- линия Стокса соединяет точки -1 и $\frac{\lambda}{im}$.
- линия Стокса соединяет точки $\frac{\lambda}{im}$ и 1 .

Ниже отдельно разбирается каждый из этих случаев и доказывається, что все они вносят вклад в спектр.

Теорема 2.2.1. Пусть линия Стокса соединяет особые точки -1 и 1 . Пусть λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi(2n - 2m - 1) \left[\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1}$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D , лежащее в $O(\epsilon^2)$ -окрестности точки λ .

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Доказательство. В этом случае, аналогично разобранным в лемме 2.2.1, достаточно описать условия существования вектора l , для которого $lT_j = l$, $j = 1, 2$ (здесь, как и ранее, T_j – матрицы двух операторов монодромии, записанные в общем базисе). Для рассматриваемого расположения линий Стокса асимптотика обеих матрицы T_j в одном и том же базисе вычислена в работе М.В. Федорюка [16]. Именно, если u_1, u_2 – решения, определенные выше (см. доказательство предыдущей леммы), то в базисе u матрица монодромии T_1 определена формулами п.1.5, а матрица T_2 состоит из элементов τ_{ij} следующего вида (см. [16]):

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 1 + a_-^{-1}, & \tau_{22} &= 0 \\ \tau_{12} &= -ABa_-^{-1}, & \tau_{21} &= -(AB)^{-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A &= \exp\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \alpha_k \right\}, \\ B &= e^{\frac{i}{\epsilon} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \int_{\gamma} y_k(t) dt}. \end{aligned}$$

Здесь γ – кривая, обходящая конечную линию Стокса, соединяющую точки ± 1 . Старшая часть B при $\epsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$B = \exp\left\{ -2\frac{i}{\epsilon} \int_{-1}^1 \left| \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} \right| dt + \pi i(\rho_+ + \rho_- - 1) \right\} [1 + O(\epsilon^2)].$$

Теперь уравнение на точки спектра выписывается точно так же, как равенство (2.4); оно имеет вид

$$B = a_- a_+,$$

или

$$e^{\frac{i}{\epsilon} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt} = e^{-i\pi(2m+1)} + O(\epsilon^2).$$

Здесь мы учили, что $\rho_+ = 1 + \frac{P(1)}{2} = 1 - (m + 1)$ и $\rho_- = 1 - \frac{P(-1)}{2} = 1 - (m + 1)$.

Теперь из теоремы Гурвица вытекает, что в $O(\epsilon^2)$ -окрестности каждого решения уравнения

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt = \pi(2n - 2m - 1)$$

расположена точка спектра оператора D . Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. Пусть линия Стокса соединяет -1 и $x_0(\lambda)$. Пусть λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(-\frac{1}{4} + 2n - m\right) \left[\int_{-1}^{x_0(\lambda)} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1}.$$

Тогда существует соответствующее значение $\tilde{\lambda}$ оператора D , для которого

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Доказательство. Вопрос снова сводится к вычислению асимптотик матриц операторов монодромии в общем базисе. Мы уже видели, что топология графа Стокса существенно влияет на эти асимптотики.

Если точки -1 и $z_0(\lambda)$ соединены линией Стокса, возникает новое расположение канонических областей. В отличие от предыдущих случаев, мы не можем вычислить матрицы монодромии в общем базисе, используя только аналитическое продолжение базисных решений – стандартные решения (см п.1.5), определенные в окрестности разных особых точек, соответствуют разным каноническим областям, поэтому приходится использовать матрицы перехода, описанные в п. 1.4. В нашем случае возможны две различных топологии графа Стокса. Именно, рассмотрим точку поворота $x_0(\lambda)$ и рассмотрим объединение двух бесконечных линий Стокса, выходящих из этой точки. Полученная кривая делит комплексную плоскость на две части; особые точки ± 1 могут лежать либо в одной из них, либо в разных. В первом случае окрестности особых точек (без разрезов) попадают в область, не содержащую линий Стокса, и вычисление асимптотик матриц монодромии аналогично приведенному при доказательстве леммы 2.2.1 и теоремы 2.2.2. Рассмотрим второй случай; введем следующие обозначения.

Пусть l , l_1 , l_2 – три линии Стокса, выходящие из $x_0(\lambda) = \frac{\lambda}{im}$, причем l – ограниченный путь между -1 и $x_0(\lambda)$, l_1 – линия Стокса, лежащая слева от l , и l_2 – линия Стокса, лежащая справа от l (т.е. поворот от l к l_1 вокруг x_0 происходит против часовой стрелки, а от l к l_2 – по часовой стрелке). Отметим, что пути l_1 , l_2 заканчиваются в бесконечности. Обозначим через D область между кривыми l_1 и l_2 , содержащую l ,

через D_1 —область между l и l_2 , содержащую l_1 , и через D_2 —область между l_1 и l , содержащую l_2 . Наконец, линию Стокса, выходящую из точки $x = 1$ обозначим через l_3 (рис.2.1):

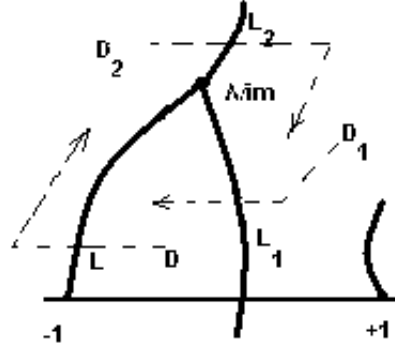


Рис. 2.1: расположение линий Стокса и канонических областей

Пусть $w_{1,2}$ — стандартные решения, соответствующие точке $x = -1$ (см. п. 1.5), $v_{1,2}$ — стандартные решения, соответствующие точке $x = 1$. Поскольку известны асимптотики операторов монодромии, соответствующих особым точкам ± 1 , в базисах $v_{1,2}$ и $w_{1,2}$ соответственно, для того, чтобы выписать уравнение на собственные числа, достаточно найти асимптотику матрицы перехода между этими базисами. Для этого рассмотрим канонические ФСР, соответствующие точке поворота $x = x_0(\lambda)$ и линиям Стокса l, l_1, l_2 (см. п.1.3); будем обозначать их $u, v, (u_1, v_1), (u_2, v_2)$ соответственно. Определим искомую матрицу Ω равенством

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

и представим ее в виде произведения:

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2$$

где:

$$\Omega_2 : v_{1,2} \longrightarrow u_1, v_1$$

$$\Omega_2 : (l_3, 1, D_1) \longrightarrow (l_1, x_0(\lambda), D_1)$$

$$\Omega_2 = e^{i\Theta_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_3 : u_1, v_1 \longrightarrow u, v$$

$$\Omega_3 : (l_1, x_0(\lambda), D_1) \longrightarrow (l, x_0(\lambda), D)$$

$$\Omega_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(\epsilon^2) & i(1 + O(\epsilon^2)) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_4 : u, v \longrightarrow w_{1,2}$$

$$\Omega_4 : (l, x_0(\lambda), D) \longrightarrow (l, -1, D)$$

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1} \\ e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь

$$\tau_1 = \int_{-1}^{x_0(\lambda)} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt$$

$$\Theta_1 = \int_{x_0(\lambda)}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt.$$

Приведенные формулы следуют из определения канонических фундаментальных систем решений и из формул для асимптотик матриц перехода, приведенных в п. 1.4. Вычисляя произведение, получаем

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + \tau_1)} & i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\tau_1 - \Theta_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(\tau_1 + \Theta_1)} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $Re\tau_1 = 0$ (потому что линия Стокса соединяет -1 и $x_0(\lambda)$), т.е. $e^{\int_{-1}^{x_0(\lambda)} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt} = e^{i\varphi}$ поэтому,

$$\Omega = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + i\varphi)} & i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \Theta_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \Theta_1)} \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть T, \tilde{T} – матрицы монодромии, соответствующие точкам ∓ 1 в базисах w, v соответственно; их асимптотики приведены в п.1.5. Условие существования собственного вектора $l = lT$ имеет вид:

$$\frac{c_1}{c_2} = -A^{-1}a_+^{-1}$$

и

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = -\tilde{A}^{-1}\tilde{a}_+^{-1}.$$

Из равенства $l_1 w_1 + l_2 w_2 = \tilde{l}_1 v_1 + \tilde{l}_2 v_2$ с учетом вычисленной асимптотики матрицы перехода Ω получаем:

$$\tilde{c}_1 = c_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + i\varphi)} + c_2 i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \Theta_1)}$$

$$\tilde{c}_2 = c_2 e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \Theta_1)}$$

откуда:

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = \frac{c_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + i\varphi)} + c_2i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \Theta_1)}}{c_2e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \Theta_1)}}$$

Поскольку $Re\Theta_1 > 0$, $e^{-\frac{1}{\epsilon}\Theta_1}$ экспоненциально мало; поэтому

$$ie^{-2i\frac{1}{\epsilon}\varphi}(1 + O(\epsilon^2)) = -\tilde{A}^{-1}\tilde{a}_+^{-1} = -\tilde{A}^{-1}a_-^{-1}.$$

Это и есть уравнение на собственные числа. Для вычисления его асимптотики напомним, что $a_{\pm} = \exp\{2\pi i\rho_{\pm}\}$, где $\rho_{\pm} = 1 \pm \frac{p(\pm 1)}{2}$ и $\tilde{A} = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \tilde{\alpha}_k}$.

Уравнение принимает вид:

$$ie^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi}(1 + O(\epsilon^2)) = -e^{-i\rho}e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi}, \quad \rho = 2\pi\rho_-$$

или

$$e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi}(1 + O(\epsilon^2)) = -e^{i(\frac{1}{\epsilon}\varphi - \rho)}.$$

Отсюда получаем:

$$e^{i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})}(1 + O(\epsilon^2)) + e^{-i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})} = 0$$

По теореме Гурвица, корни этого уравнения близки к корням уравнения

$$e^{i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})} + e^{-i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})} = 0;$$

точнее, точки спектра находятся в $O(\epsilon^2)$ -окрестностях решений уравнений

$$2 \cos(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}) = 0,$$

или

$$-\frac{1}{\epsilon}\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi - \frac{\rho}{2}$$

Подставляя сюда выражение для φ , получаем

$$-\frac{1}{\epsilon} \int_{-1}^{x_0(\lambda)} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt = \frac{\pi}{4} + 2n\pi - \frac{\rho}{2}$$

или, окончательно

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi(-\frac{1}{4} + 2n - m) \left[\int_{-1}^{x_0(\lambda)} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1}$$

и теорема доказана.

Теорема 2.2.3. Пусть линия Стокса соединяет $x_0(\lambda)$ и 1. Пусть λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(-\frac{1}{4} + 2n - m\right) \left[\int_{x_0(\lambda)}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1}$$

тогда существует соответствующее значение $\tilde{\lambda}$ оператора D , для которого

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Доказательство. Ситуация аналогична рассмотренной при доказательстве предыдущей теоремы. Будем считать, что объединение двух бесконечных линий Стокса, выходящих из точки поворота $x_0(\lambda)$ разделяет точки ± 1 и введем следующие обозначения.

Пусть l , l_1 , l_2 — три линии Стокса, выходящие из $x_0(\lambda) = \frac{\lambda}{im}$, причем l_1 — ограниченный путь между 1 и $x_0(\lambda)$, l_2 — линия Стокса, лежащая слева от l , и l_1 — линия Стокса, лежащая справа от l (т.е. поворот от l к l_2 вокруг x_0 происходит против часовой стрелки, а от l к l_1 — по часовой стрелке). Отметим, что пути l , l_2 заканчиваются в бесконечности. Обозначим через D область между кривыми l_1 и l_2 , содержащую l , через D_1 — область между l и l_2 , содержащую l_1 , и через D_2 — область между l_1 и l , содержащую l_2 (рис.2.1). Наконец, линию Стокса, выходящую из точки $x = -1$ обозначим через l_3 (рис.2.2):

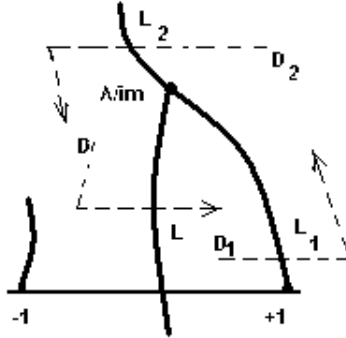


Рис. 2.2: расположение линий Стокса и канонических областей

Пусть $w_{1,2}$ — стандартные решения, соответствующие точке $x = -1$ (см. п. 1.5), $v_{1,2}$ — стандартные решения, соответствующие точке $x = 1$. Рассмотрим канонические ФСР, соответствующие точке поворота $x = x_0(\lambda)$ и линиям Стокса l, l_1, l_2 (см. п.1.3); будем обозначать их u, v , (u_1, v_1) , (u_2, v_2) соответственно. Обозначим через Ω матрицу перехода от w к v :

$$\Omega : w_{1,2} \longrightarrow v_{1,2}$$

и представим ее в виде произведения:

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2.$$

Здесь

$$\Omega_2 : w_{1,2} \longrightarrow u, v$$

$$\Omega_2 : (l_2, -1, D) \longrightarrow (l, x_0(\lambda), D)$$

$$\Omega_2 = e^{i\tau_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1} \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \int_{-1}^{x_0(\lambda)} \sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}} dt. \text{ Далее,}$$

$$\Omega_3 : u, v \longrightarrow u_1, v_1$$

$$\Omega_3 : (l, x_0(\lambda), D) \longrightarrow (l_1, x_0(\lambda), D_1)$$

$$\Omega_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(\epsilon^2) & i(1 + O(\epsilon^2)) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_4 : u_1, v_1 \longrightarrow v_{1,2}$$

$$\Omega_4 : (l_1, x_0(\lambda), D_1) \longrightarrow (l_1, 1, D_1)$$

$$T_4 = e^{i\Theta_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} \\ e^{\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} & 0 \end{pmatrix}$$

где $\Theta_1 = \int_{x_0(\lambda)}^1 \sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}} dt$ и $Re\Theta_1 = 0$ (линия Стокса соединяет $x_0(\lambda)$ и 1), поэтому $e^{\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} = e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi}$ для матрицы Ω получаем

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi} \\ e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(\epsilon^2) & i(1 + O(\epsilon^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1} \end{pmatrix},$$

откуда

$$T = \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi+\tau_1)} & (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi-\tau_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi+\tau_1)} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если $l_1 w_1 + l_2 w_2 = \tilde{l}_1 v_1 + \tilde{l}_2 v_2$, то

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi+\tau_1)} & (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi-\tau_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi+\tau_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\tilde{l}_1 = l_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi+\tau_1)} + l_2(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi-\tau_1)}$$

$$\tilde{l}_2 = l_2 e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi+\tau_1)}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\tilde{l}_1}{\tilde{l}_2} = \frac{l_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)} + l_2(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \tau_1)}}{l_2 e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)}}.$$

С другой стороны, если l, \tilde{l} – собственные векторы соответствующих матриц монодромии, то

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = -\tilde{A}^{-1} \tilde{a}_+^{-1} = -\tilde{A}^{-1} a_-^{-1}$$

Поскольку $e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1}$ экспоненциально растет (т.е. $Re\tau_1 > 0$), из последнего равенства следует, что

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = -\tilde{A}^{-1} a_-^{-1} = \left(\frac{c_1}{c_2} e^{\frac{2}{\epsilon}(i\varphi - \tau_1)} + i e^{\frac{-2i}{\epsilon}\varphi} \right) (1 + O(\epsilon^2)).$$

Поскольку $e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1}$ экспоненциально убывает, получаем

$$-\tilde{A}^{-1} a_-^{-1} = i e^{-2i\frac{1}{\epsilon}\varphi} (1 + O(\epsilon^2)) = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-2i\frac{1}{\epsilon}\varphi} (1 + O(\epsilon^2))$$

или

$$-e^{-i\rho} e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi} (1 + O(\epsilon^2)).$$

Это и есть уравнение на собственные числа. По теореме Гурвица корни уравнения

$$e^{-i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)} + e^{i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)} (1 + O(\epsilon^2)) = 0$$

находятся в $O(\epsilon^2)$ -окрестностях корней уравнения

$$e^{-i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)} + e^{i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)} = 0.$$

Таким образом, точки спектра находятся в $O(\epsilon^2)$ -окрестностях корней уравнения

$$2 \cos\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi\right) = 0,$$

находятся из равенств

$$\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

или

$$\frac{1}{\epsilon}\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi + \frac{\rho}{2}$$

Наконец, подставляя выражение для φ , получаем

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(-\frac{1}{4} + 2n - m\right) \left[\int_{x_0(\lambda)}^1 \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \right]^{-1}$$

и теорема доказана.

2.3 Расположение спектра на комплексной плоскости

В предыдущем параграфе получены уравнения, описывающие асимптотику спектра оператора Лапласа со сносом на стандартной сфере \mathbb{S}^2 . Эти уравнения выражаются через эллиптические интегралы. В этом параграфе при помощи анализа соответствующих интегралов мы выясним расположение спектра на комплексной плоскости.

Замечание 2.3.1. Мы будем рассматривать интегралы вида

$$\int_{\zeta} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt.$$

Замена $t = \cos \theta$ приводит этот интеграл к виду

$$\int_{\zeta} \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt = - \int_{\eta} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta.$$

Конечно, в нашей ситуации роль η будут играть вполне определенные пути на комплексной плоскости.

В следующих двух утверждениях мы будем иметь дело с этими интегралами только в отношении равенства их нулю:

Лемма 2.3.1. При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i(-m, m)$

$$I(\lambda) = Im \int_0^{\pi} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = 0$$

тогда и только тогда, когда λ — действительное отрицательное число.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i(-m, m)$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и $\lambda_1 \geq 0$; тогда:

$$Re(im \cos \theta - \lambda) = -\lambda_1 \leq 0$$

для любого $\theta \in (0, \pi)$. Поскольку $\lambda \notin i(-m, m)$ то $\arg(im \cos \theta - \lambda) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Поэтому $\arg \sqrt{im \cos \theta - \lambda} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ или $\arg \sqrt{im \cos \theta - \lambda} \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

Напомним что, при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i(-m, m)$ не существует $\theta \in (0, \pi)$, для которого $\sqrt{im \cos \theta - \lambda} = 0$; поэтому $Im \sqrt{im \cos \theta - \lambda} \neq 0$ и, следовательно, $Im \int_0^{\pi} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta \neq 0$. Значит, если

$$Im \int_0^{\pi} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = 0$$

то

$$Re \lambda < 0.$$

С другой стороны, если $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-$ то $Re(im \cos \theta - \lambda) = -Re\lambda > 0$ для любого $\theta \in (0, \pi)$, поэтому можно зафиксировать ветвь корня с разрезом вдоль луча $(-\infty, 0]$. Зафиксируем такую ветвь условием $Re\sqrt{im \cos \theta - \lambda} > 0$.

Теперь надо показать, что при любом фиксированном значении $Re\lambda$, подынтегральная функция в $I(\lambda)$ строго монотонно убывает по $Im\lambda$ для любого $\theta \in (0, \pi)$. Действительно,

$$\frac{\partial Im\sqrt{im \cos \theta - \lambda}}{\partial \lambda_2} = Im \frac{-i}{2\sqrt{im \cos \theta - \lambda}} = -Re \frac{1}{2\sqrt{im \cos \theta - \lambda}} < 0$$

по выбору ветви корня. Поэтому уравнение $I(\lambda) = 0$ при фиксированном $Re\lambda$ имеет не более одного решения по $Im\lambda$.

Осталось доказать, что для любого $\lambda \in (-\infty, 0)$:

$$Im \int_0^\pi \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = 0$$

; тогда из уже доказанного будет следовать, что $0 \notin I((\mathbb{C} \setminus i(-m, m)) \setminus (-\infty, 0))$. Заметим, что при таком λ подынтегральная функция в $I(\lambda)$ меняет знак при симметрии относительно $\frac{\pi}{2}$.

Действительно, $arg\sqrt{im \cos \theta - \lambda} \in (0, \pi)$ по выбору ветви корня и

$$sign \cos\left(\frac{1}{2} arg(im \cos \theta - \lambda)\right) = sign(\cos \theta)$$

следовательно, по формуле косинуса половинного угла:

$$\cos\left(\frac{1}{2} arg(im \cos \theta - \lambda)\right) = sign(\cos \theta) \cdot \sqrt{1 - \frac{\frac{\lambda}{\sqrt{m^2 \cos^2 \theta + \lambda^2}}}{2}}.$$

Значит

$$Im\sqrt{im \cos \theta - \lambda} = \sqrt[4]{m^2 \cos^2 \theta + \lambda^2} sign(\cos \theta) \cdot \sqrt{1 - \frac{\frac{\lambda}{\sqrt{m^2 \cos^2 \theta + \lambda^2}}}{2}}$$

и, кроме того,

$$Im\sqrt{im \cos(\pi - \theta) - \lambda} = -\sqrt[4]{m^2 \cos^2 \theta + \lambda^2} sign(\cos \theta) \cdot \sqrt{1 - \frac{\frac{\lambda}{\sqrt{m^2 \cos^2 \theta + \lambda^2}}}{2}}.$$

Поэтому при $\lambda \in (-\infty, 0)$:

$$Im \int_0^\pi \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = Im \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta + Im \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = 0$$

и лемма доказана.

Значит, мы доказали что часть спектра, определяемая условиями теоремы (2.2.1), лежит вблизи действительной оси (точнее, отрицательной полуоси).

Замечание 2.3.2. Решение уравнения $im \cos \theta - \lambda = 0$ (точка поворота в координате θ) имеет вид:

$$\theta_{\pm} = -i \ln(i\lambda \pm \sqrt{-\lambda^2 - m^2}) - \ln m$$

можно объяснить в следующем:

$$\theta_{\pm} = \pm \arccos \left[\frac{\text{sign} Im \lambda}{m \sqrt{2}} \sqrt{|\frac{\lambda}{m}|^2 + 1 - \sqrt{(|\frac{\lambda}{m}|^2 + 1)^2 - 4(\frac{Im \lambda}{m})^2}} \right] +$$

$$i \ln \frac{\pm \sqrt{2} \frac{Re \lambda}{m} + \sqrt{1 - |\frac{\lambda}{m}|^2 + 2(\frac{Re \lambda}{m})^2} + \sqrt{(|\frac{\lambda}{m}|^2 + 1)^2 - 4(\frac{Im \lambda}{m})^2}}{\sqrt{1 - |\frac{\lambda}{m}|^2 + \sqrt{(|\frac{\lambda}{m}|^2 + 1)^2 - 4(\frac{Im \lambda}{m})^2}}}$$

где $Re \lambda \neq 0$. При $\lambda \in (-\infty, 0)$, из последних равенств следует, что:

$$\theta_{\pm} = \pm \left(\frac{\pi}{2} + i \ln \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2} + \frac{\lambda}{m} \right) \right)$$

Лемма 2.3.2. Уравнение

$$J(\lambda) = Im \int_0^{\theta_+} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = 0$$

на параметр $\lambda \in (0, +\infty)$ имеет только одно решение λ_0 , причем $\lambda_0 \in (-m \sinh \frac{\pi}{2}, 0)$.

Доказательство. При $\lambda \in (-\infty, 0)$ образ пути интегрирования под действием функции $im \cos \theta - \lambda$ не переходит через луч $(-\infty, 0)$. Значит, можно зафиксировать ветвь корня с разрезом вдоль этого луча. Выберем такую ветвь:

$$\sqrt{\cdot} : \mathcal{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \{z \in \mathcal{C} | Im z > 0\}$$

Тогда получаем:

$$Im \int_0^{\theta_+} \sqrt{im \cos \theta - \lambda} d\theta = Im \int_0^1 \theta_0 \sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda} dr = Im \int_0^1 \theta_0 \sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda} dr,$$

где $\theta = \theta_+ r$, $\theta_+ = \frac{\pi}{2} + i \ln \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2} + \frac{\lambda}{m} \right)$, $r \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим производную подынтегрального выражения по параметру λ :

$$\frac{\partial Im[\theta_0 \sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda}]}{\partial \lambda} = -Im \frac{\theta_0}{2 \sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda}}.$$

поскольку для $\eta(r) = im \cos(\theta_+ r) - \lambda$ при $\lambda \in (-\infty, 0)$ имеем равенство:

$$\eta(r) = im \cos(\theta_+ r) - \lambda = im \frac{e^{i\theta_0 r} + e^{-i\theta_0 r}}{2} - \lambda = im \frac{e^{\frac{\lambda}{m} r} + e^{-\frac{\lambda}{m} r}}{2} - \lambda,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\eta(r) &= m \frac{e^{\frac{\lambda}{m}r} + e^{-\frac{\lambda}{m}r}}{2} - \lambda > 0 \\ \operatorname{Re}\eta(r) &= -\lambda > 0 \end{aligned}$$

то есть $\eta(r)$ лежит во внутренности первого квадрата, а $\arg \eta(r) \in (0, \pi/2)$, Значит $\eta(r)$ не пересекает луча $(-\infty, 0]$ при $r \in (0, 1)$ что позволяет нам выбрать ветвь корня, как и ранее, с разрезом вдоль $(-\infty, 0]$. Тогда получаем:

$$\arg \frac{\theta_0}{2\sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda}} = \arg \theta_0 - \arg \sqrt{\eta(r)} = \arg \theta_0 - \frac{1}{2} \arg \eta(r) \in (0, \frac{3\pi}{4}),$$

откуда:

$$\operatorname{Im} \frac{\theta_0}{2\sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda}} > 0.$$

Значит, в этом случае так же, как и раньше, мы можем доказать, что производная подынтегрального выражения в $J(\lambda)$:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}[\theta_0 \sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda}]}{\partial \lambda} = -\operatorname{Re} \frac{\theta_0}{2\sqrt{im \cos(\theta_0 r) - \lambda}} < 0$$

для любого λ на $(-\infty, 0)$ и для любого $r \in (0, 1)$. Таким образом, подынтегральное выражение строго монотонно убывает по λ на $(-\infty, 0)$ для любого $r \in (0, 1)$. Значит (так как интегрирование ведется по множеству положительной меры) и сам интеграл $J(\lambda)$ монотонно убывает по λ на $(-\infty, 0)$. Отсюда следует, что уравнение $J(\lambda) = 0$ на параметр $J(\lambda) \in (0, +\infty)$ может иметь не более одного решения.

Оценим $J(0)$ (здесь учтено, что $\theta_+(0) = \frac{\pi}{2} + i \ln(\sqrt{1+0}+0) = \frac{\pi}{2}$):

$$J(0) = \operatorname{Im} \int_0^{\theta_+(0)} \sqrt{im \cos \theta} d\theta = \operatorname{Im} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{im \cos \theta} d\theta < 0,$$

так как $\sqrt{im \cos \theta} \in (1+i) \cdot (0, +\infty)$ на интервале $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ (по выбору ветви корня), а значит, $\operatorname{Im} \sqrt{im \cos \theta} < 0$ на всем интервале интегрирования.

При $\lambda = -m \sinh \frac{\pi}{2}$ имеем $z_+ = \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{2}$, $\arg z_+ = \frac{\pi}{4}$ и мы знаем, что $\arg \eta(r) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. значит:

$$\arg(\theta_+ \sqrt{im \cos(\theta_+ r) - \lambda})|_{\lambda = -m \sinh \frac{\pi}{2}} = \arg \theta_+ + \frac{1}{2} \arg \eta(r) \in \frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}).$$

То есть

$$\operatorname{Im}(\theta_+ \sqrt{im \cos(\theta_+ r) - \lambda})|_{\lambda = -m \sinh \frac{\pi}{2}} > 0$$

при любом $r \in (0, 1)$, откуда $J(-m \sinh \frac{\pi}{2}) > 0$. Таким образом $J(0) < 0$, $J(m \sinh \frac{\pi}{2}) > 0$. Так как функция $J(\lambda)$ непрерывна по λ то отсюда следует, что существует точка $\lambda \in (-m \sinh \frac{\pi}{2}, 0)$ в которой $J(\lambda) = 0$. Кроме того, эта точка, по доказанному, единственная.

Замечание 2.3.3. Совершенно аналогично работам [1,2] доказывается, что части спектра, описанные в теоремах 2.2.2 и 2.2.3, располагаются вблизи двух кривых, соединяющих точку λ_0 , описанную в предыдущей лемме, с точками $\pm im$, причем эти кривые симметричны относительно действительной оси. Таким образом, спектр в пределе концентрируется в окрестности трехвалентного графа с вершиной в точке λ_0 , ребра которого определяются мнимыми частями условий квантования, полученных выше (см. теоремы 2.2.1 – 2.2.3).

В зависимости от расположения точки спектра на комплексной плоскости λ , линии Стокса по-разному расположены на комплексной плоскости.

Случай(1): Если точка спектра совпадает с вершиной спектрального графа (т.е. точкой, указанной в лемме 2.3.2), расположение линий Стокса такое, как на рис. 2.4.

Случай(2): Если точка спектра находится на линии(3)(рис. 2.3), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 2.5.

Случай(3): Если точка спектра находится на линии (2), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 2.6.

Случай(4): Если точка спектра находится на кривой (1), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 2.7.

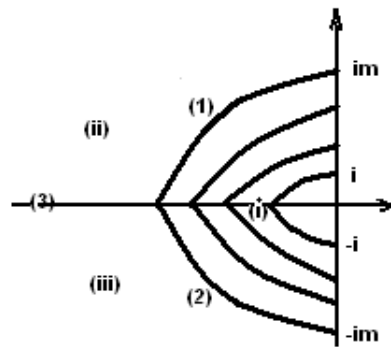


Рис. 2.3: Расположение спектра

Отметим, что в областях (ii) и (iii) нет точек спектра; эти области соответствуют графам Стокса, не содержащим конечных линий (случай общего положения).

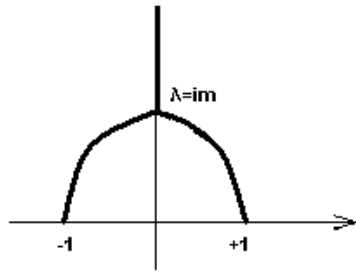


Рис. 2.4: Линии Стокса 1

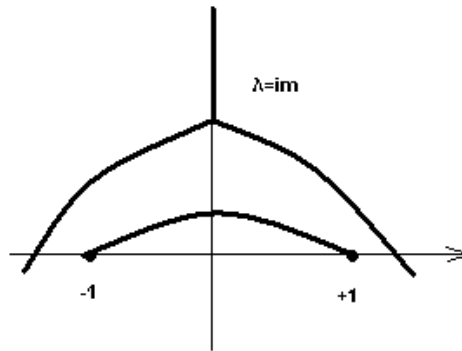


Рис. 2.5: Линии Стокса 2

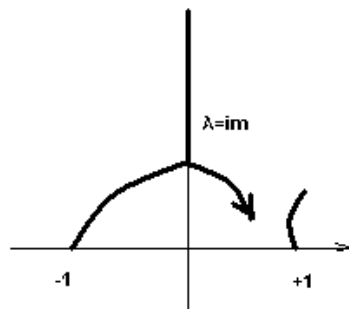


Рис. 2.6: Линии Стокса 3

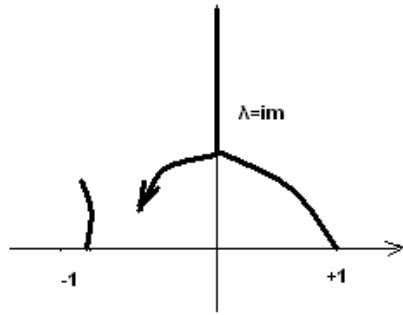


Рис. 2.7: Линии Стокса 4

Замечание 2.3.4. Можно найти направления, в которых линии Стокса выходят из точек $x = -1$, $x = 1$ и $x = \frac{\lambda}{im}$. Для этого достаточно разложить соответствующие подинтегральные выражения вблизи этих точек и вычислить асимптотику функции S при приближении к точке поворота. Приведем соответствующие формулы.

Случай(1): Пусть линия Стокса выходит из точки $x = -1$, тогда при $x \rightarrow -1$:

$$q(x) = \frac{imx - \lambda}{1 - x^2} \simeq \frac{\lambda + im}{-2}(x + 1)^{-1}$$

поэтому

$$S(x) = \int_{-1}^x \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \simeq \sqrt{\frac{\lambda + im}{-2}} \cdot \frac{(x + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

Уравнение линии Стокса имеет вид $ImS(x) = 0$, т.е. асимптотически

$$Im\sqrt{-(\lambda + im)(x + 1)} = 0.$$

Если $t = (\lambda + im)(x + 1)$, то $t < 0$ и можно вычислить касательную к линии Стокса в виде:

$$x = -1 + \frac{t}{\lambda + im} = -1 + \frac{t}{|\lambda + im|^2}(\bar{\lambda} - im)$$

$$= -1 + \frac{t}{|\lambda + im|^2}(\lambda_1 - i(\lambda_2 + m)).$$

Поскольку $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 + m > 0$, линия Стокса выходит из точки $x = -1$ вверх и вправо.

Случай(2): Пусть линия Стокса выходит из точки $x = 1$, тогда:

$$q(x) = \frac{imx - \lambda}{1 - x^2} \simeq \frac{im - \lambda}{2}(x - 1)^{-1},$$

поэтому

$$S(x) = \int_1^x \sqrt{\frac{imt - \lambda}{1 - t^2}} dt \simeq \sqrt{\frac{im - \lambda}{2}} \cdot \frac{(x - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

Уравнение линии Стокса имеет вид $ImS(x) = 0$, т.е. асимптотически

$$Im\sqrt{(im - \lambda)(x - 1)} = 0$$

если $t = (im - \lambda)(x + 1)$ то $t > 0$ и можно вычислить касательную к линии Стокса в виде:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{t}{im - \lambda} = 1 + \frac{t}{|im - \lambda|^2}(\bar{\lambda} + im) \\ &= 1 + \frac{t}{|im - \lambda|^2}(\lambda_1 + i(m - \lambda_2)) \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_1 < 0$ и $m - \lambda_2 > 0$ и линия Стокса выходит из точки $x = 1$ вверх и влево.

Случай(3): Пусть линия Стокса выходит из точки $x_0 = \frac{\lambda}{im}$, тогда:

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{\frac{imx - \lambda}{1 - x^2}} = \sqrt{\frac{im(x - x_0)}{1 + \frac{\lambda^2}{m^2}}} = \sqrt{\frac{im^3}{m^2 + \lambda^2}} \cdot \sqrt{x - x_0}.$$

Уравнение линии Стокса имеет вид $ImS(x) = 0$, т.е. асимптотически

$$ImS(x) = Im \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{im^3}{m^2 + \lambda^2}} \sqrt{x - x_0} dt = 0.$$

Можно вычислить асимптотику S : $S \sqrt{z_0}(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$ где $z_0 = \frac{im^3}{m^2 + \lambda^2} = |z_0|e^{i\psi}$ и $x - x_0 = |x - x_0|e^{i\varphi}$ поэтому

$$S \sqrt{|z_0|} \cdot |x - x_0|^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\psi}{2}} e^{\frac{3i\varphi}{2}} |S| e^{i(\frac{\psi}{2} + \frac{3\varphi}{2})}.$$

По определению линии Стокса, $\sin(\frac{\psi}{2} + \frac{3\varphi}{2}) = 0$ и $\varphi = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\psi}{3}$.

В этом случае направление линий Стокса зависит от значения $z_0 = \frac{im^3}{m^2 + \lambda^2}$. Рассмотрим несколько случаев.

- Если λ действительное число, то $\frac{m^3}{m^2 + \lambda^2}$ также действительное число и z_0 находится на мнимой оси ($\psi = \frac{\pi}{2}$).

- Если λ мнимое число, то $\lambda = Im\lambda$ и $|Im\lambda| < m$ значит $m^2 + \lambda^2 = m^2 - Im\lambda^2 > 0$, поэтому в этом случае также $\frac{m^3}{m^2 + \lambda^2}$ действительное число и z_0 находится на мнимой оси ($\psi = \frac{\pi}{2}$).

- Если $\lambda = \epsilon + i\lambda_2$ то

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{im^3}{m^2 + \lambda^2} = \frac{im^3}{m^2 + \epsilon^2 - \lambda_2^2 + 2i\epsilon\lambda_2} \simeq \frac{im^3}{m^2 - \lambda_2^2 + \epsilon 2i\lambda_2} \\ &\simeq \frac{im^3}{m^2 - \lambda_2^2} + \epsilon \cdot \frac{-im^3 2i\lambda_2}{(m^2 - \lambda_2^2)^2} = \frac{im^3}{m^2 - \lambda_2^2} + \frac{2\lambda_2 m^3}{(m^2 - \lambda_2^2)^2} \cdot \epsilon \end{aligned}$$

значит относительно предыдущей ситуации ($\lambda = i\lambda_2$) точка z_0 находится правее и направление линии Стокса тоже вращается направо ($\psi < \frac{\pi}{2}$).

- Если $\lambda = \lambda_1 + i\epsilon$ то

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{im^3}{m^2 + \lambda^2} = \frac{im^3}{m^2 - \epsilon^2 + \lambda_1^2 + 2i\epsilon\lambda_1} \simeq \frac{im^3}{m^2 + \lambda_1^2 + \epsilon 2i\lambda_1} \\ &\simeq \frac{im^3}{m^2 + \lambda_1^2} + \epsilon \cdot \frac{-im^3 2i\lambda_1}{(m^2 + \lambda_1^2)^2} = \frac{im^3}{m^2 + \lambda_1^2} + \frac{2\lambda_1 m^3}{(m^2 + \lambda_1^2)^2} \cdot \epsilon \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_1 < 0$, поэтому относительно ситуации ($\lambda = \lambda_1$) точка z_0 находится левее и линии Стокса тоже вращается налево ($\psi > \frac{\pi}{2}$).

Замечание 2.3.5. По расположению линий Стокса и их направлению можно сказать, что с ними происходит при переходе из одной области на плоскости λ в другую. Например, при переходе параметра λ из области (II) в (III) через линию (3) на рисунке (2.1), линии Стокса вращаются влево. Так как в (II) λ имеет вид $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и, если при переходе через линию (3), λ становится действительной, причем мнимая часть λ уменьшается, то линии Стокса вращаются налево ($\psi > \frac{\pi}{2}$). При переходе из (3) в (III) ситуация аналогична.

Глава 3

Асимптотика спектра D на поверхности вращения

В этой главе мы изучаем асимптотику спектра оператора D на произвольной компактной поверхности вращения, гомеоморфной сфере. Мы начнем с формулировки задачи и ее редукции к обыкновенному дифференциальному уравнению.

3.1 Разделение переменных. Задача с особыми точками

В этом пункте мы будем рассматривать поверхность M , полученную вращением гладкой кривой, заданной на плоскости (x, z) уравнением $x = f(z)$, $z \in [z_1, z_2]$, вокруг оси z . Относительно f предполагается, что $f(z) = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}f_0(z)$, где f_0 – многочлен, не обращающийся в нуль в достаточно большой области на комплексной плоскости, содержащей отрезок $[z_1, z_2]$ действительной оси. Такие условия обеспечивают гладкость поверхности вращения M в полюсах z_1, z_2 . Параметрические уравнения поверхности имеют вид:

$$r(z, \varphi) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z),$$

где φ – угол вращения. Оператор Лапласа, в координатах z, φ имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial u_i} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (3.1)$$

где

$$u_1 = z, u_2 = \varphi, g = \det g_{ij}$$

и g^{ij} — обратная матрица к метрическому тензору

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (r_z, r_z) & (r_z, r_\varphi) \\ (r_\varphi, r_z) & (r_\varphi, r_\varphi) \end{pmatrix}$$

В координатах z, φ оператор Δ имеет вид:

$$\Delta\omega = \frac{1}{f\sqrt{f_z^2+1}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f}{\sqrt{f_z^2+1}} \frac{\partial}{\partial z} \omega + \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \omega \quad (3.2)$$

Мы рассматриваем уравнение

$$\epsilon^2 \Delta\omega + (v, \nabla)\omega = \lambda\omega$$

где $v = a(z) \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

После разделения переменных при $a(z) = z$ получаем:

$$\epsilon^2(\psi''(z) + \frac{f_z\sqrt{f_z^2+1} - f f_z f_{zz}(f_z^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{f(f_z^2+1)^{\frac{1}{2}}} \psi'(z)) + (\frac{\epsilon^2 m^2 (f_z^2+1)}{f^2} + (imz - \lambda)(f_z^2+1))\psi(z) = 0 \quad (3.3)$$

где $\omega = \exp(im\varphi)\psi(z)$.

Отметим, что, если $f(z) = \sqrt{1-z^2}$, предыдущее уравнение принимает вид:

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} (1-x^2) - 2x \frac{\partial w(x)}{\partial x} - \frac{m^2}{1-x^2} w(x) \right) + imxw(x) = \lambda w(x).$$

Конечно, это — исследованное выше уравнение (случай стандартной сферы). Так же, как и в случае сферы, полученное уравнение содержит две особые точки z_1, z_2 (отметим, что $f'(z_1) = \infty, f'(z_2) = \infty$). Кроме того, имеется одна точка поворота $imz = \lambda$.

Найдем характеристические показатели особых точек. В окрестности регулярной особой точки z_1 (или z_2) функция f имеет вид $f(z) = \sqrt{z-z_1}w(z)$ (или $f(z) = \sqrt{z-z_2}w(z)$), где w аналитическая функция.

Наше уравнение имеет вид (1.2), где:

$$P(z) = \frac{f_z\sqrt{f_z^2+1} - f f_z f_{zz}(f_z^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{f(f_z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

или

$$P(z) = \frac{f_z}{f} - \frac{f_z f_{zz}}{f_z^2+1}$$

и

$$Q(z) = (imz - \lambda)(f_z^2+1).$$

В окрестности особой точки (например, z_1) уравнение (3.3) имеет вид:

$$(z - z_1)^2 a(z) \psi''(z) + (z - z_1) b(z) \psi'(z) - m^2 c(z) \psi(z) = 0, \quad (3.4)$$

где a, b, c – аналитические функции, равные 1 в точке z_1 . Пусть $\psi = (z - z_1)^\rho w(z)$ – решение уравнения (3.4) ($w(z)$ – аналитическая функция); тогда, если

$$\psi(z) = (z - z_1)^\rho (w_0 + w_1(z - z_1) + w_2(z - z_1)^2 + \dots),$$

то будем иметь:

$$\psi'(z) = \rho(z - z_1)^{\rho-1} (w_0 + w_1(z - z_1) + w_2(z - z_1)^2 + \dots) + (z - z_1)^\rho (w_1 + 2w_2(z - z_1) + \dots)$$

$$\begin{aligned} \psi''(z) = \rho(\rho-1)(z-z_1)^{\rho-2} (w_0 + w_1(z-z_1) + w_2(z-z_1)^2 + \dots) + 2\rho(z-z_1)^{\rho-1} (w_1 + 2w_2(z-z_1) + \dots) + \\ (z - z_1)^\rho (2w_2 + 6w_3(z - z_1) + \dots). \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в уравнение (3.4), получим:

$$\begin{aligned} (z - z_1)^2 \psi''(z) = \rho(\rho - 1)(z - z_1)^\rho (w_0 + w_1(z - z_1) + w_2(z - z_1)^2 + \dots) + \\ 2\rho(z - z_1)^{\rho+1} (w_1 + 2w_2(z - z_1) + \dots) + (z - z_1)^{\rho+2} (2w_2 + 6w_3(z - z_1) + \dots) \end{aligned}$$

Поскольку

$$m^2 \psi(z) = m^2 (z - z_1)^\rho (w_0 + w_1(z - z_1) + w_2(z - z_1)^2 + \dots)$$

$$(z - z_1) \psi'(z) = \rho(z - z_1)^\rho (w_0 + w_1(z - z_1) + w_2(z - z_1)^2 + \dots) + (z - z_1)^{\rho+1} (w_1 + 2w_2(z - z_1) + \dots),$$

приравняв к нулю коэффициент при $(z - z_1)^\rho$, получаем характеристическое уравнение:

$$\rho(\rho - 1) + \rho - m^2 = 0,$$

откуда находим характеристические показатели: $\rho = \pm m$ или $\rho_+ = |m|$, $\rho_- = -|m|$.

3.2 Асимптотика спектра

Для того, чтобы описать асимптотику спектра в случае поверхности вращения, мы применим тот же метод, что и в главе 2. Именно, мы рассмотрим точки поворота и линии Стокса уравнения (3.3) и, пользуясь информацией о канонических областях, вычислим асимптотику матриц операторов монодромии в одном и том же базисе.

Замечание 3.2.1. В нашем случае точки поворота – нули и полюса функции

$$q(z) = (imz - \lambda)(f_z^2 + 1)$$

; так же, как и в случае сферы, их три – две особые точки z_1 и z_2 (полюса поверхности) и одна точка поворота порядка 1 $z_0(\lambda) = \frac{\lambda}{im}$.

Леммы (2.2.1) без изменений переносится на наш общий случай; таким образом, если λ таково, что граф Стокса не содержит конечных линий, то в $O(\epsilon^2)$ -окрестности этой точки нет точек спектра.

Теорема 3.2.1. Пусть линия Стокса соединяет z_1 и z_2 , а λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi(n - \frac{1}{2} + 2m) \left(\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(imz - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt \right)^{-1}.$$

Тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора, для которого

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Доказательство. аналогично доказательству теоремы 2.2.1; кратко приведем соответствующие рассуждения. Пусть w_1 и w_2 – решения уравнения (3.3) в окрестности точки z_1 , определенные в п. 1.5 (аналогичные решения в окрестности точки z_2 обозначим v_1 и v_2 . Как уже отмечалось:

$$w_{1,2}(x + i0) = -i|q(x)|^{-\frac{1}{4}}[1 + O(\epsilon^2)] \exp\left\{\mp \frac{i}{\epsilon} \int_{a_1}^z |\sqrt{q(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha^+} p(t) dt\right\}$$

$$v_{1,2}(x + i0) = -i|q(x)|^{-\frac{1}{4}}[1 + O(\epsilon^2)] \exp\left\{\mp \frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^z |\sqrt{q(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha^+} p(t) dt\right\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.2.2 устанавливается, что – отношение c_1 функций w_1 и v_1 имеет вид:

$$c_1 = \frac{w_1}{v_1} = \frac{-i|q(x)|^{-\frac{1}{4}}[1 + O(\epsilon^2)] \exp\left\{-\frac{i}{\epsilon} \int_{a_1}^z |\sqrt{q(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha^+} p(t) dt\right\}}{-i|q(x)|^{-\frac{1}{4}}[1 + O(\epsilon^2)] \exp\left\{-\frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^z |\sqrt{q(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha^+} p(t) dt\right\}}.$$

Пренебрегая слагаемыми порядка ϵ^2 , после элементарных преобразований получаем:

$$c_1 = \frac{w_1}{v_1} = \exp\left\{+\frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^{a_1} |\sqrt{q(t)}| dt + \frac{1}{2} \int_{a_2}^{a_1} p(t) dt\right\}.$$

Аналогично вычисляется связь между w_1 и v_1 :

$$c_2 = \frac{w_2}{v_2} = \exp\left\{-\frac{i}{\epsilon} \int_{a_2}^{a_1} |\sqrt{q(t)}| dt - \frac{1}{2} \int_{a_2}^{a_1} p(t) dt\right\}.$$

Отношение $\frac{c_2}{c_1}$ имеет вид:

$$\frac{c_2}{c_1} = \exp\left\{2\frac{i}{\epsilon} \int_{a_1}^{a_2} |\sqrt{q(t)}| dt + \int_{\gamma} p(t) dt\right\};$$

таким образом:

$$\frac{c_2}{c_1} = \exp\left\{2\frac{i}{\epsilon} \int_{a_1}^{a_2} |\sqrt{q(t)}| dt + \pi i\right\}$$

С другой стороны, как и в предыдущей главе, известно, что (обозначения те же, что в гл. 2 и п.1.5):

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{Aa_+}{\tilde{A}\tilde{a}_+}$$

где

$$\frac{A}{\tilde{A}} = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)} \sim e^{\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0} \sim 1,$$

$$a_+ = \exp\{2\pi i \rho_+\},$$

$$a_- = \exp\{2\pi i \rho_-\}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{a_+}{a_-} = \exp\{2\pi i (\rho_+ - \rho_-)\} = \exp\{4m\pi i\},$$

откуда

$$\exp\left\{2\frac{i}{\epsilon} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(imz - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt + \pi i\right\} = \exp\{4m\pi i + 2n\pi i\}$$

или

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(n - \frac{1}{2} + 2m\right) \left(\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(imz - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt\right)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.2.2. Соединение двух особых точек линией Стокса – самая простая ситуация; в этом случае можно найти соотношение между базисами, определенными вблизи особых точек, не прибегая к аппарату канонических областей и матриц перехода. Далее рассматриваются случаи соединения линией Стокса точки поворота $z_0(\lambda) = \frac{\lambda}{im}$ с одной из особых точек.

Теорема 3.2.2. Пусть линия Стокса соединяет z_1 и $\frac{\lambda}{im}$, а λ таково, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(2n - \frac{1}{4} - m\right) \left[\int_{z_1}^{\frac{\lambda}{im}} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2 + 1)} dz\right]^{-1}$$

тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D , для которого:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Доказательство. Точка поворота уравнения (3.3) имеет вид $z_0 = \frac{\lambda}{im}$. Аналогично доказательству теоремы 2.2.2, будем считать, что две бесконечные линии Стокса, выходящие из точки поворота, разделяют особые точки (в противном случае особые можно воспользоваться аналитическим продолжением). Пусть l , l_1 , l_2 – три линии Стокса, выходящие из $z_0(\lambda) = \frac{\lambda}{im}$, причем l – ограниченный путь между z_1 и $x_0(\lambda)$, l_1 – линия Стокса, лежащая слева от l , и l_2 – линия Стокса, лежащая справа от l (т.е. поворот от l к l_1 вокруг z_0 происходит против часовой стрелки, а от l к l_2 – по часовой стрелке). Отметим, что пути l_1 , l_2 заканчиваются в бесконечности. Обозначим через D область между кривыми l_1 и l_2 , содержащую l , через D_1 – область между l и l_2 , содержащую l_1 , и через D_2 – область между l_1 и l , содержащую l_2 . Наконец, линию Стокса, выходящую из точки z_2 обозначим через l_3 .

Пусть $w_{1,2}$ – стандартные решения, соответствующие точке $z = z_1$ (см. п. 1.5), $v_{1,2}$ – стандартные решения, соответствующие точке $z = z_2$. Поскольку известны асимптотики операторов монодромии, соответствующих особым точкам $z_{2,1}$, в базисах $v_{1,2}$ и $w_{1,2}$ соответственно, для того, чтобы выписать уравнение на собственные числа, достаточно найти асимптотику матрицы перехода между этими базисами. Для этого рассмотрим канонические (ФСР), соответствующие точке поворота $z = z_0(\lambda)$ и линиям Стокса l, l_1, l_2 (см. п.1.3); будем обозначать их $u, v, (u_1, v_1), (u_2, v_2)$ соответственно. Определим искомую матрицу Ω равенством

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

и представим ее в виде произведения:

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2$$

где:

$$\Omega_2 : v_{1,2} \longrightarrow u_1, v_1$$

$$\Omega_2 : (l_3, z_2, D_1) \longrightarrow (l_1, z_0(\lambda), D_1)$$

$$\Omega_2 = e^{i\Theta_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_3 : u_1, v_1 \longrightarrow u, v$$

$$\Omega_3 : (l_1, z_0(\lambda), D_1) \longrightarrow (l, z_0(\lambda), D)$$

$$\Omega_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(\epsilon^2) & i(1 + O(\epsilon^2)) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_4 : u, v \longrightarrow w_{1,2}$$

$$\Omega_4 : (l, z_0(\lambda), D) \longrightarrow (l, z_1, D)$$

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1} \\ e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь

$$\tau_1 = \int_{z_1}^{z_0(\lambda)} \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt$$

$$\Theta_1 = \int_{z_0(\lambda)}^{z_2} \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt.$$

Выражения для матриц Ω_j приведены в [16] и в п.1.4 (см. определение канонических (ФСР) и матриц перехода). Таким образом, для искомой матрицы получаем

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + \tau_1)} & i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\tau_1 - \Theta_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(\tau_1 + \Theta_1)} \end{pmatrix}.$$

Поскольку линия Стокса соединяет z_1 и $z_0(\lambda)$, $Re\tau_1 = 0$, т.е. $e^{\int_{z_1}^{z_0(\lambda)} \sqrt{(imt - \lambda)(1 + f_z^2)} dt} = e^{i\varphi}$, откуда

$$\Omega = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + i\varphi)} & i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \Theta_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \Theta_1)} \end{pmatrix}.$$

Пусть T, \tilde{T} – матрицы монодромии, соответствующие точкам $z_{2,1}$ в базисах w, v соответственно (см. п.1.5 для соответствующих асимптотик). Условие существования собственного вектора $l = lT$ имеет вид:

$$\frac{c_1}{c_2} = -A^{-1}a_+^{-1}$$

и

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = -\tilde{A}^{-1}\tilde{a}_+^{-1}.$$

Из равенства $l_1 w_1 + l_2 w_2 = \tilde{l}_1 v_1 + \tilde{l}_2 v_2$ с учетом приведенной выше формулы для асимптотики матрицы перехода Ω получаем:

$$\tilde{c}_1 = c_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + i\varphi)} + c_2 i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \Theta_1)}$$

$$\tilde{c}_2 = c_2 e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \Theta_1)}$$

откуда:

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = \frac{c_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(\Theta_1 + i\varphi)} + c_2i(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \Theta_1)}}{c_2e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \Theta_1)}}$$

Заметим, что $Re\Theta_1 > 0$, т.е. $e^{-\frac{1}{\epsilon}\Theta_1}$ экспоненциально мало; поэтому

$$ie^{-2i\frac{1}{\epsilon}\varphi}(1 + O(\epsilon^2)) = -\tilde{A}^{-1}\tilde{a}_+^{-1} = -\tilde{A}^{-1}a_-^{-1}.$$

Это и есть уравнение на собственные числа. Поскольку $a_{\pm} = \exp\{2\pi i\rho_{\pm}\}$, где $\rho_{\pm} = 1 \pm \frac{P(z_{2,1})}{2}$ и $\tilde{A} = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \tilde{\alpha}_k}$, уравнение имеет вид:

$$ie^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi}(1 + O(\epsilon^2)) = -e^{-i\rho}e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi}, \quad \rho = 2\pi\rho_-$$

или

$$e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi}(1 + O(\epsilon^2)) = -e^{i(\frac{1}{\epsilon}\varphi - \rho)}.$$

Отсюда получаем:

$$e^{i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})}(1 + O(\epsilon^2)) + e^{-i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})} = 0$$

По теореме Гурвица, корни этого уравнения расположены в $O(\epsilon^2)$ -окрестностях решений уравнений

$$e^{i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})} + e^{-i(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2})} = 0;$$

последнее можно переписать в виде

$$2 \cos(-\frac{1}{\epsilon}\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}) = 0,$$

или

$$-\frac{1}{\epsilon}\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi - \frac{\rho}{2}$$

Подставляя сюда выражение для φ , получаем

$$-\frac{1}{\epsilon} \int_{z_1}^{z_0(\lambda)} \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt = \frac{\pi}{4} + 2n\pi - \frac{\rho}{2}$$

или, с учетом выражения для ρ ,

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi(-\frac{1}{4} + 2n - m) \left[\int_{z_1}^{z_0(\lambda)} \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt \right]^{-1}$$

и теорема доказана.

В конце этого пункта мы рассмотрим последний случай соединения точек поворота линиями Стокса.

Теорема 3.2.3. Пусть линия Стокса соединяет $\frac{\lambda}{im}$ и z_2 , а λ так, что

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi(2n + \frac{1}{4} - m) \left[\int_{z_2}^{\frac{\lambda}{im}} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2 + 1)} dz \right]^{-1}$$

тогда существует соответствующее значение $\tilde{\lambda}$ оператора:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Доказательство. Пусть l, l_1, l_2 — три линии Стокса, выходящие из $z_0(\lambda) = \frac{\lambda}{im}$, причем l_1 — ограниченный путь между z_2 и $x_0(\lambda)$, l_2 — линия Стокса, лежащая слева от l , и l_1 — линия Стокса, лежащая справа от l (т.е. поворот от l к l_2 вокруг x_0 происходит против часовой стрелки, а от l к l_1 — по часовой стрелке). Отметим, что пути l, l_2 заканчиваются в бесконечности. Обозначим через D область между кривыми l_1 и l_2 , содержащую l , через D_1 — область между l и l_2 , содержащую l_1 , и через D_2 — область между l_1 и l , содержащую l_2 . Наконец, линию Стокса, выходящую из точки z_1 обозначим через l_3 (рис.2.2):

Пусть $w_{1,2}$ — стандартные решения, соответствующие точке z_1 (см. п. 1.5), $v_{1,2}$ — стандартные решения, соответствующие точке z_2 . Рассмотрим канонические (ФСР), соответствующие точке поворота $z_0(\lambda)$ и линиям Стокса l, l_1, l_2 (см. п.1.3); будем обозначать их $u, v, (u_1, v_1), (u_2, v_2)$ соответственно. Обозначим через Ω матрицу перехода от w к v :

$$\Omega : w_{1,2} \longrightarrow v_{1,2}$$

и представим ее в виде произведения:

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2.$$

Здесь

$$\Omega_2 : w_{1,2} \longrightarrow u, v$$

$$\Omega_2 : (l_2, z_1, D) \longrightarrow (l, z_0(\lambda), D)$$

$$\Omega_2 = e^{i\pi_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1} \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \int_{z_1}^{z_0(\lambda)} \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt. \text{ Далее,}$$

$$\Omega_3 : u, v \longrightarrow u_1, v_1$$

$$\Omega_3 : (l, z_0(\lambda), D) \longrightarrow (l_1, z_0(\lambda), D_1)$$

$$\Omega_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(\epsilon^2) & i(1 + O(\epsilon^2)) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_4 : u_1, v_1 \longrightarrow v_{1,2}$$

$$\Omega_4 : (l_1, z_0(\lambda), D_1) \longrightarrow (l_1, 1, D_1)$$

$$T_4 = e^{i\Theta_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} \\ e^{\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} & 0, \end{pmatrix}$$

где $\Theta_1 = \int_{x_0(\lambda)}^1 \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt$ и $Re\Theta_1 = 0$ (поскольку линия Стокса соединяет $z_0(\lambda)$ и z_2), поэтому $e^{\frac{1}{\epsilon}\Theta_1} = e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi}$. Таким образом, для матрицы Ω получаем

$$\Omega = \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi} \\ e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(\epsilon^2) & i(1 + O(\epsilon^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1} \end{pmatrix},$$

откуда

$$T = \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)} & (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \tau_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если $l_1 w_1 + l_2 w_2 = \tilde{l}_1 v_1 + \tilde{l}_2 v_2$, то

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)} & (1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \tau_1)} \\ 0 & e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 &= l_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)} + l_2(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \tau_1)} \\ \tilde{l}_2 &= l_2 e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\tilde{l}_1}{\tilde{l}_2} = \frac{l_1(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)} + l_2(1 + O(\epsilon^2))e^{-\frac{1}{\epsilon}(i\varphi - \tau_1)}}{l_2 e^{\frac{1}{\epsilon}(i\varphi + \tau_1)}}.$$

С другой стороны, если l, \tilde{l} – собственные векторы соответствующих матриц монодромии, то

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = -\tilde{A}^{-1} \tilde{a}_+^{-1} = -\tilde{A}^{-1} a_-^{-1}$$

Поскольку $e^{\frac{1}{\epsilon}\tau_1}$ экспоненциально растет (т.е. $Re\tau_1 > 0$), из последнего равенства следует, что

$$\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} = -\tilde{A}^{-1} a_-^{-1} = \left(\frac{c_1}{c_2} e^{\frac{2}{\epsilon}(i\varphi - \tau_1)} + i e^{\frac{-2i}{\epsilon}\varphi} \right) (1 + O(\epsilon^2)).$$

Поскольку $e^{-\frac{1}{\epsilon}\tau_1}$ экспоненциально убывает, получаем

$$-\tilde{A}^{-1} a_-^{-1} = i e^{-2i\frac{1}{\epsilon}\varphi} (1 + O(\epsilon^2)) = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-2i\frac{1}{\epsilon}\varphi} (1 + O(\epsilon^2))$$

откуда находим уравнения на собственные числа

$$-e^{-i\rho}e^{i\frac{1}{\epsilon}\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{1}{\epsilon}\varphi}(1 + O(\epsilon^2)).$$

По теореме Гурвица корни уравнения

$$e^{-i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)} + e^{i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)}(1 + O(\epsilon^2)) = 0$$

находятся в $O(\epsilon^2)$ -окрестностях корней уравнения

$$e^{-i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)} + e^{i(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi)} = 0.$$

Другими словами, точки спектра находятся в $O(\epsilon^2)$ -окрестностях корней уравнения

$$2 \cos\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi\right) = 0,$$

которые находятся из равенств

$$\frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\epsilon}\varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

или

$$\frac{1}{\epsilon}\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi + \frac{\rho}{2}$$

Наконец, подставляя выражение для φ , получаем

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(-\frac{1}{4} + 2n - m\right)\left[\int_{x_0(\lambda)}^1 \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt\right]^{-1}$$

и теорема доказана.

3.3 Расположение спектра на комплексной плоскости

Спектр на комплексной плоскости расположен вблизи множества, определяемого условиями квантования, полученными в предыдущих теоремах. Мнимые части этих условий определяют кривые, в $O(\epsilon^2)$ -окрестностях которых расположен спектр (ребра спектрального графа).

Обозначим $q(z) = (\lambda - imz)(f_z^2 + 1)$, тогда ребра определяются условием вещественности интеграла $\int_{\zeta} \sqrt{q(t)} dt$, где ζ – путь на комплексной плоскости. Напомним что на сфере было доказано, что $Im \int_0^{2\pi} \sqrt{q(t)} dt = 0$ тогда и только тогда, когда λ -действительное отрицательное число. Для произвольной поверхности вращения это, вообще говоря, не

так; можно лишь высказать некоторые утверждения о расположении соответствующего ребра спектрального графа. Именно, рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве леммы 2.3.1, показывают, что любая вертикальная прямая пересекает ребро спектрального графа, заданное уравнением

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(imt - \lambda)(f_z^2 + 1)} dt = 0$$

не более одного раза. Это следует из неравенства

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \operatorname{Im} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{Im} \sqrt{q(z)} dz = \operatorname{Im} \frac{f_z^2 + 1}{\sqrt{q(z)}} i = \operatorname{Re} \frac{f_z^2 + 1}{\sqrt{q(z)}} > 0$$

(см. лемму 2.3.1); здесь $\lambda_2 = \operatorname{Im} \lambda$. Действительно, из этого неравенства следует, что подинтегральная функция строго монотонна по λ_2 , а значит, обращается в нуль не более одного раза. Аналогичное свойство справедливо и для двух других ребер – это следует из неравенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \operatorname{Im} \int_{z_1}^{\frac{\lambda}{im}} \sqrt{q(z)} dz &> 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \operatorname{Im} \int_{\frac{\lambda}{im}}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz &> 0. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.3.2.

В заключение отметим, что при четной функции f одно из ребер графа лежит на действительной оси. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3.1. *Пусть $z_1 = -z_2$ и функция f четная. Тогда*

$$\operatorname{Im} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2 + 1)} dz = 0$$

тогда и только тогда, когда λ -действительное отрицательное число.

Доказательство. Достаточно проверить, что при указанных λ мнимая часть интеграла обращается в нуль. Для этого сделаем в интеграле замену переменной $z = z_2 \alpha$; получим при $\lambda = \lambda_1$:

$$\operatorname{Im} \int_{-1}^1 \sqrt{(\lambda - imz_2 \alpha)(f_{z_2 \alpha}^2 + 1)} d(z_2 \alpha) = \operatorname{Im} \int_{-1}^1 z_2 \sqrt{(\lambda - imz_2 \alpha)(f_{z_2 \alpha}^2 + 1)} d\alpha.$$

Заменяя $\alpha = \cos \theta$, находим:

$$\operatorname{Im} \int_{\pi}^0 z_2 \sqrt{(\lambda - imz_2 \alpha)(f_{z_2 \alpha}^2 + 1)} d\alpha =$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \int_{\pi}^0 z_2 \sqrt{(\lambda - imz_2 \cos \theta) \left(\frac{1}{z_2^2} f_{\cos \theta}^2 + 1 \right)} d(\cos \theta) = \\
& -\operatorname{Im} \int_{\pi}^0 z_2 \sin \theta \sqrt{(\lambda - imz_2 \cos \theta) \left(\frac{1}{z_2^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} f_{\theta}^2 + 1 \right)} d\theta = \\
& \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \sqrt{(\lambda - imz_2 \cos \theta) (f_{\theta}^2 + z_2^2 \sin^2 \theta)} d\theta = \\
& -\operatorname{Im} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{imz_2 \cos \theta - \lambda} \sqrt{f_{\theta}^2 + z_2^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
& + \operatorname{Im} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{imz_2 \cos \theta - \lambda} \sqrt{f_{\theta}^2 + z_2^2 \sin^2 (\pi - \theta)} d\theta = 0
\end{aligned}$$

3.4 Условия квантования на римановой поверхности

Полученная асимптотика спектра может быть вычислена из условий квантования, похожих на правила Бора – Зоммерфельда – Маслова ([9],[10]); эти условия задаются на римановой поверхности постоянной комплексной энергии. Именно, пусть M – стандартная сфера; рассмотрим риманову поверхность, заданную в \mathbb{C}^2 уравнением $(z^2 - 1)p^2 + imz = \lambda$. Эта поверхность гомеоморфна тору с тремя проколами; она получается из двух экземпляров комплексной плоскости z склейкой вдоль разрезов, соединяющих точки ± 1 и точку λ/im с бесконечно удаленной. На этой поверхности определяются три цикла γ^j , $j = 1, 2, 3$ так, чтобы проекции этих циклов на плоскость z совпадали с отрезками $[-1, 1]$, $[-1, \lambda/im]$, $[1, \lambda/im]$ соответственно. Следующее утверждение непосредственно вытекает из теорем 2.2.1 – 2.2.3:

Предложение 3.4.1. *Уравнения, определяющие асимптотику спектра, могут быть записаны в виде*

$$\frac{1}{2\pi} \epsilon \int_{\gamma_j} p dz = n + \frac{\mu_j}{2},$$

где $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$.

Замечание 3.4.1. *В отличие от условий Маслова, которые должны быть выполнены на любом цикле вещественного лагранжева многообразия, приведенные выше комплексные условия квантования должны быть выполнены хотя бы на одном цикле; разные циклы определяют разные спектральные серии.*

Литература

- [1] С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич, “Спектр и псевдоспектр несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами”, Матем. заметки, 80:3 (2006), 356–366
- [2] С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич, “Квантованные римановы поверхности и квазиклассические спектральные серии для несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами”, ТМФ, 148:2 (2006), 206–226
- [3] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Введение в теорию линейных несаосопряженных операторов, М., Наука, 1965.
- [4] Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров, О задачах на собственные значения для уравнений второго порядка в случае нелинейной зависимости от параметра λ , ДАН, 1963, 52:1, 28-30.
- [5] С.Ю. Доброхотов, Виктор Мартинес Оливе, В.Н. Колокольников. Мат. Заметки, 1995, 58(2), 880-884
- [6] А. В. Дьяченко, А. А. Шкаликов, “О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем”, Функц. анализ и его прил., 36:3 (2002), 71–75
- [7] М. А. Евграфов, М. В. Федорюк, “Асимптотика решений уравнения $w''(z) - p(z, \lambda)w(z) = 0$ $\lambda \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости z , УМН, 21:1 (1966), 3–50
- [8] А. И. Есина, А. И. Шафаревич Условия квантования на римановых поверхностях и квазиклассический спектр оператора Шредингера с комплексным потенциалом Матем. заметки, 2010, 88:2, 229–248
- [9] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965

- [10] В.П. Маслов, Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, М., Наука, 1987.
- [11] С. А. Степин. Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному. УМН, 50:6 (1995), 219–220
- [12] С. А. Степин О спектральных свойствах задачи Орра–Зоммерфельда при исчезающей вязкости Функциональный анализ и его приложения, 1996, 30:4, 88–91
- [13] С. А. Степин, А. А. Аржанов, “Квазиклассические спектральные асимптотики и явление Стокса для уравнения Вебера”, Докл. РАН, 378:1 (2001), 18–21
- [14] С.А. Степин, В.А. Титов. О концентрации спектра в модельной задаче сингулярной теории возмущений, Доклады РАН, 2007, 75:2, 197–200.
- [15] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, “О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля”, Изв. РАН. Сер. матем., 66:4 (2002), 177–204
- [16] М. В. Федорюк, Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983
- [17] А. А. Шкаликов, О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи, Матем. заметки, 62:6 (1997), 950–953
- [18] E. B. Davies, Pseudospectra of differential operators, J. Operator Theory, 43:2 (2000), 243–262
- [19] S.Yu.Dobrokhotov, V.N. Kolokoltsov, V.Martinez Olive. Quasimodes of the diffusion operator $-\epsilon\Delta + V\dot{\nabla}$, corresponding to asymptotically stable limit cycles of the field V . Sobretiro de Sociedad Matematica Mexicana, 1994, 11, 81–89.
- [20] P. G. Drazin, W. H. Reid, Hydrodynamic Stability, Cambridge Monogr. Mech. Appl. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981
- [21] [L. N. Trefethen, Pseudospectra of linear operators, ISIAM 95, Proceedings of the Third international congress on industrial and applied mathematics (Hamburg, 1995), Math. Res., 87, Akademie Verlag, Berlin, 1996, 401–434

- [22] Roohian H. *Semiclassical Asymptotics of the Spectrum of a Nonselfadjoint Operator on the Sphere* / H. Roohian, A. I. Shafarevich // Russian Journal of mathematical Physics — 16, № 2. — 2009. p. 309–314.
- [23] Roohian H. *Semiclassical Asymptotics behavior of the Spectrum of a Nonselfadjoint Elliptic Operator on a Two-Dimensional Surface of Revolution* / H. Roohian, A. I. Shafarevich // Russian Journal of mathematical Physics — 17, № 3. — 2010. p. 328–333.