Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова

Механико—математический факультет

На правах рукописи

Н. С. Гусев

УДК 514.144.23+514.172.45+514.177.2

Многомерные многогранники–следы и геометрические вариационные задачи

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико—математических наук

Научный руководитель
доктор физико—математических наук
профессор А. О. Иванов

Москва
2008

Предисловие

Известно, что кусочно–аффинные объекты (часто называются кусочно–линейными) долгое время и многообразно используются в математике и ее приложениях. Несколько столетий весьма широко используется способ аффинного (линейного) приближения или характеризации отображений и пространств. Многие компьютерные техники моделирования основаны на кусочно–аффинном подходе. В частности, так изображаются поверхности (с помощью триангуляций), а также деформации их.

При изучении геометрии "поверхностей" и функционалов на них (например, объема) необходимы средства задавать и деформировать эти "поверхности" со сложным локальным строением и возможными самоналожениями; также желательна "геометрическая наглядность". В тех же самых сложных "поверхностях" следует изучать внутренние соотношения и задачи поиска и конструирования.

Известна задача рассмотрения деформаций с изменением топологической структуры объекта, см., например, обзор в [4]. В частности, деформации, при которых меняется топологическая структура объекта, играют важную роль и в многомерных геометрических вариационных задачах, таких как проблема Плато и ее аналоги. В теории экстремальных сетей (одномерная проблема Плато) появилось понятие расщепления вершин при деформации, а также (как естественное средство моделирования их) — понятие сети–следа, как класса параметризаций сети в плоскости (параметризации эти не обязательно кусочно–аффинны), см., например, [5]. С целью наглядности в моделировании геометрических объектов с возможным изменением геометрии их, исходя из понятия расщепления у сетей–следов, в больших размерностях с ограничением типа отображений в Главе Первой определяются и изучаются многогранники–следы, их деформации и объем.

Как уже сказано, представительным примером задач с деформациями, изменяющими геометрию, является проблема Плато. Напомним, что многомерная проблема Плато состоит в поиске так называемых глобально минимальных поверхностей, т.е. поверхностей, имеющих наименьший возможный объем среди всех поверхностей с данной границей, или, скажем, в данном гомологическом (гомотопическом) классе. В 60–70-е годы XX века многомерная проблема Плато была решена (т.е. было доказано существование глобально минимальных поверхностей) для нескольких широких классов обобщенных поверхностей, таких как G-поверхности (Райфенберг [7]), целочисленные потоки (Федерер, Флеминг [8]), варифолды (Альмгрен [9]), спектральные многообразия и экстраординарные когомологии (Фоменко [10]), мультиварифолды (Дао Чонг Тхи [11]). Однако всем этим подходам не свойственна непосредственная наглядность, что ставит задачу описать геометрические особенности, связанные с проблемою Плато, более наглядно, например, на основе понятия многогранников–следов. Некоторые такие особенности рассмотрены в Главе Второй.

На двумерной плоскости известно понятие погруженных многоугольников, введенных в рассмотрение Ивановым и Тужилиным в [14]. Это понятие связано, в частности, с известным исследованием Ду и Хвана (Du, Hwang) [15] с целью доказать гипотезу Гилберта–Поллака [16] об отношении Штейнера на плоскости, см. подробности в [5] и [14]. Важно изучить соотношения погруженных многоугольников с их границами — замкнутыми ломаными. К этому вопросу в Главе Третьей предложены построения в особом случае петельных ломаных.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. О. Иванова и профессора А. А. Тужилина за постановку задач, многочисленные обсуждения, критические замечания и внимание; а также благодарит весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений, возглавляемой академиком А. Т. Фоменко, за возможность научной работы и помощь в ней.

Оглавление

I Краткое обозрение 5

II Полное изложение 18

: Введение 19

1 Кусочно–аффинные отображения и многогранники–следы 22
- 1: Введение . . . 22
- 1.1 Последовательная примитивизация . . . 23
- 1.2 Свойства смятий и контракций . . . 26
  - 1.2.1 Смятия . . . 26
  - 1.2.2 Контракции . . . 29
  - 1.2.3 Связь смятий и контракций . . . 30
- 1.3 Разложение кусочно–аффинных отображений . . . 32
  - 1.3: Введение . . . 32
  - 1.3.1 Стяжения ребер . . . 33
  - 1.3.2 Разложение на комплексе . . . 37
  - 1.3.3 Разложение на смятие и контракцию . . . 39
- 1.4 Многогранники–следы . . . 45
  - 1.4.1 Построение . . . 45
  - 1.4.2 Деформации . . . 47
  - 1.4.3 Объем . . . 50
  - 1.4.4 Объем при деформации . . . 52

2 Локальная минимальность 56
- 2: Введение . . . 56
- 2.1 Многомерный расчет . . . 57
  - 2.1.1 Расчет расщепления . . . 57
  - 2.1.2 Степени симплексов . . . 60
- 2.2 Двумерный случай в трехмерном пространстве . . . 64
  - 2.2.1 Предварение . . . 65
  - 2.2.2 Описание десяти типов сетей на сфере . . . 65
  - 2.2.3 Деформации с уменьшением объема . . . 77

3 Многоугольники–следы и их границы 85
- 3: Введение . . . 85
- 3.1 Простые необходимые условия . . . 87
- 3.2 Общее положение . . . 90
- 3.3 Ветвления . . . 91
- 3.4 Петельные ломаные–следы . . . 97
- 3.5 Весовые функции . . . 100
- 3.6 Стяжение и натяжение петель . . . 104

3.6.1 Ветвление отрицательной петли 104
3.6.2 Стяжение петли 107
3.6.3 Натяжение петли 109
3.6.4 Натуральная весовая функция и существование 112

Общие обозначения

°Во всем изложении предполагаются известными стандартные понятия топологии, теории аффинных пространств над $\mathbb{R}$, теории сетей (см., например, [5]), некоторые сведения о выпуклых множествах, и в особенности, многогранниках (см., например, [3] и [1]).
°Введем некоторые обозначения, часто используемые далее, но не общепринятые.

- Для произвольного множества A обозначим ${}^{\cup}A := \bigcup_{a:a\in A} a$,— объединение всех элементов множества A, его "тело" (заметим, что тело пустого множества — пустое множество).
- Скажем, что множество A *является измельчением* множества B или *вписано в* множество B и обозначим это отношение формулою $A \lll B$, если верно, что
  - ${}^{\cup}A = {}^{\cup}B$ и
  - $\forall b(b \in B \longrightarrow \exists C(C \subset A, {}^{\cup}C = b))$.
- Для бинарного отношения (т. е. множества упорядоченных пар, например, функции или отображения, то есть функционального бинарного отношения) $\mathfrak{f}$ обозначаются $\operatorname{im}\mathfrak{f} = \{a : \exists b(\langle b, a\rangle \in \mathfrak{f})\}$ — образ его, и $\operatorname{dom}\mathfrak{f} = \{a : \exists b(\langle a, b\rangle \in \mathfrak{f})\}$ — область действия или определения его.
- Для четкости формулировок сопоставим бинарному отношению $\mathfrak{f}$ функциональные бинарные отношения $\mathfrak{f}^{\circ}$, $\mathfrak{f}^{\circ\circ}$, $\mathfrak{f}^{\circ\circ\circ}$, где $\mathfrak{f}^{\circ} := \{\langle A, B\rangle : A \subset \operatorname{dom}\mathfrak{f}, B = \{b : \exists a(a \in A, \langle a, b\rangle \in \mathfrak{f})\}\}$,— естественное отображение, определенное на множестве всех подмножеств в $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$;

  еще заметим, что $\mathfrak{f}^{\circ\circ} = (\mathfrak{f}^{\circ})^{\circ}$; $\mathfrak{f}^{\circ\circ\circ} = (\mathfrak{f}^{\circ\circ})^{\circ} = ((\mathfrak{f}^{\circ})^{\circ})^{\circ}$.

°Представим нашу запись следующих разнообразно обозначаемых множеств:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,— все натуральные (неотрицательные целые) числа;
- $\mathbb{N}^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,— положительные целые числа;
- $\mathbb{R}_{+} = \mathbb{R}^{1}_{+} = [0, +\infty)$,— неотрицательная полуось;
- $\mathbb{R}^{\alpha}_{+} = \mathbb{R}^{\alpha-1} \times [0, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,— неотрицательное полупространство.

°Если не оговорено противное, то всякий раз при рассмотрении композиции $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ каких-либо бинарных отношений $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ предполагается их последовательная согласованность, то есть

$$\operatorname{dom}\mathfrak{a} = \operatorname{im}\mathfrak{b}.$$

°Все построения проводятся в некотором бесконечномерном вещественном аффинном пространстве Uni, причем предполагается, что на нем задана некоторая топология такая, что на каждом конечномерном аффинном подпространстве A пространства Uni она порождает топологию обычного пространства $\mathbb{R}^{\dim A}$.

Часть I

Краткое обозрение

Обзор

Диссертация состоит из Введения и трех Глав.

Во Введении содержатся некоторые основные определения и сведения.

В Первой Главе изучаются кусочно–аффинные отображения и их связь с симплициальными комплексами; вводятся особые классы тех отображений — смятия и контракции, и изучаются некоторые свойства их; еще показана представимость произвольного кусочно–аффинного отображения в виде композиции смятия и контракции; и на основе этих построений введено понятие многогранников–следов, их деформаций, объема и рассмотрено поведение объема при деформации.

Во Второй Главе рассмотрена локальная структура многогранников–следов при условии локальной минимальности их объема. При этом изучены некоторые особенности этой структуры в многомерном случае, и более подробно обсчитан двумерный случай в трехмерном пространстве.

В Третьей Главе на основе понятия многогранника–следа построено понятие ломаной–следа и многоугольника–следа, и у последнего определено понятие границы. Введено понятие петельных границ и ветвлений на них, и показано существование многоугольника–следа с заданною границею при некоторых условиях.

Предварительные сведения

°Inf · У всякого подмножества A в Uni определим его *аффинную оболочку* $\operatorname{aff} A$ как совокупность всевозможных конечных аффинных комбинаций точек множества A, *относительную внутренность* $\operatorname{rint} A$ как внутренность множества A в его аффинной оболочке $\operatorname{aff} A$ и его *относительную границу* $\operatorname{rmrg} A$ как его границу в его аффинной оболочке.

°Inf · Множество P есть *выпуклый полиэдр*, если и только если найдется непустое конечное множество S точек в Uni, относительная внутренность выпуклой оболочки которого совпадает с P.

°Inf · *Многогранником* или *многогранным множеством* или *полиэдром* называется объединение конечного числа выпуклых полиэдров. Далее будем считать, что все многогранники связны.

°Inf · *Простая ломаная* есть многогранник, гомеоморфный отрезку $[0, 1]$.

°Inf · Аффинное подпространство L пространства Uni зовется *опорною* к некоторому выпуклому полиэдру B плоскостью, если она пересекает замыкание полиэдра B и для всяких двух разных точек p и q из $\overline{B}$ если $(p, q) \cap L \neq \varnothing$, то $[p, q] \subset L$. *Грань* выпуклого полиэдра A есть всякий выпуклый полиэдр B, у которого найдется некоторая опорная к многограннику A плоскость C такая, что $\overline{A} \cap C = \overline{B}$ (обозначим через $A \lhd B$ отношение “A является гранью в B”). Также говорится, что выпуклый полиэдр A *инцидентен* выпуклому полиэдру B, если или A — грань у B или наоборот B — грань у A.

°Inf · *Вершина* есть всякий нульмерный выпуклый полиэдр. *Вершина выпуклого полиэдра* есть вершина, являющаяся его гранью, а точка x — *вершинная точка* выпуклого полиэдра, если множество $\{x\}$ — вершина его. Совокупность всех вершинных точек выпуклого полиэдра P обозначим через $\operatorname{vert} P$. *Ребро* есть одномерный выпуклый полиэдр.

°Inf · *Симплекс* есть выпуклый полиэдр с аффинно независимым множеством всех вершинных точек его.

°Inf · Для двух симплексов A и B, объединение вершинных множеств которых аффинно независимо, определяется их произведение $A * B$, также симплекс, по формуле

$$A * B = B * A := \operatorname{rint} \operatorname{conv}(\operatorname{vert} A \cup \operatorname{vert} B),$$

где conv обозначает выпуклую оболочку.

°Inf · Напомним, что два выпуклых полиэдра *согласованы*, если пересечение их замыканий или пусто или является замыканием некоторой грани в каждом из них. *Выпуклополиэдральный комплекс* $\mathfrak{a}$

есть конечное множество попарно согласованных выпуклых полиэдров. Выпуклополиэдральный комплекс $\mathfrak{a}$ *полон*, если его *тело* $^{\cup}\mathfrak{a}$ (то есть объединение всех его элементов) компактно, что эквивалентно принадлежности комплексу всякой грани всякого элемента комплекса.

°Inf · Выпуклополиэдральный комплекс *симплициален*, если каждый элемент его — симплекс.

°Df · Отображение $\mathfrak{a}$ из некоторого компактного полиэдра — подмножества пространства Uni — в то же пространство назовем *аффинным* относительно набора $\mathfrak{a}$ выпуклых полиэдров, если оно непрерывно, $^{\cup}\mathfrak{a} = \operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и отображение $\mathfrak{a}$ аффинно на каждом полиэдре из набора $\mathfrak{a}$.

°Df · Отображение $\mathfrak{a}$ из некоторого подмножества пространства Uni в это же пространство назовем *кусочно-аффинным* (сокращенно будем писать "PA—отображение"), если оно аффинно относительно некоторого набора выпуклых полиэдров.
°В книге [1] предложен иной подход к кусочной аффинности, однако на компактных полиэдрах класс кусочно—аффинных отображений тот же, что здесь.

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — некоторое PA—отображение, то

- скажем, что $\mathfrak{a}$ — *смятие*, если для всякого ребра A такого, что $A \subset \operatorname{dom}\mathfrak{a}$, верно, что множество $\mathfrak{a}^{\circ}(A)$ не одноточечно;
- в противном предыдущему случае скажем, что отображение — *консумпция*;
- скажем, что $\mathfrak{a}$ — *контракция*, если для всякой точки x из $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ верно, что множество $(\mathfrak{a}^{-1})^{\circ}(\{x\})$ связно.

К Главе Первой

Вступление

°Df · Скажем, что тройка $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f}, \mathfrak{l} \rangle$ двух полных симплициальных комплексов $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ и отображения $\mathfrak{f}$, заданного на $^{\cup}\mathfrak{k}$, *симплициальна*, если отображение $\mathfrak{f}$ аффинно относительно комплекса $\mathfrak{k}$, и для каждого симплекса $K \in \mathfrak{k}$ его образ $\mathfrak{f}^{\circ}(K) \in \mathfrak{l}$.
Скажем, что отображение $\mathfrak{a}$ *симплициально* относительно полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$, если найдется полный симплициальный комплекс $\mathfrak{l}$ такой, что тройка $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{l} \rangle$ симплициальна.

Разложение кусочно–аффинного отображения

°**Теорема** · Для всякого кусочно аффинного отображения $\mathfrak{f}$ найдется PA—контракция $\mathfrak{h}$ и PA—смятие $\mathfrak{g}$, в композиции дающие $\mathfrak{f}$, то есть $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$.

Определение многогранника–следа

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — PA—отображение, то его *редуктом* назовем всякое PA—смятие $\mathfrak{b}$ такое, что найдется PA—контракция $\mathfrak{c}$, в композиции с $\mathfrak{b}$ дающая отображение $\mathfrak{a}$ (то есть $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$).

°Df · Скажем, что два PA—отображения $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ *редуктивно—эквивалентны*, если у них есть общий редукт. То есть найдутся PA—смятие $\mathfrak{b}$, PA—контракции $\mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{c}''$ такие, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}''$.

°Th · Отношение редуктивной эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно.

°Df · Произвольное множество PA—отображений назовем *редуктивно содержательным*, если у всякого элемента того множества есть редукт в том множестве.
Обозначать будем кратко: rd-ct-множество.

°Df · Если A — некоторое rd-ct-множество, то классы редуктивно-эквивалентных элементов того множества назовем *A—многогранниками—следами*.
°Заметим, что всякий элемент всякого A—многогранника—следа обладает редуктом из того же многогранника—следа, а всякие два элемента его обладают общим редуктом из него же.

°Df · Для некоторого PA–отображения $\mathfrak{a}$ скажем, что некоторый замкнутый многогранник P — *аффиктура* к отображению $\mathfrak{a}$, если $P \subset \operatorname{dom} \mathfrak{a}$.

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — PA–отображение и P — некоторая аффиктура к отображению $\mathfrak{a}$, то *af-редуктом* пары $\langle \mathfrak{a}, P\rangle$ назовем всякую пару $\langle \mathfrak{b}, Q\rangle$ такую, что $\mathfrak{b}$ — PA–смятие, Q — аффиктура к отображению $\mathfrak{b}$, и найдется PA–контракция $\mathfrak{c}$ такая, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}^\circ(P) = Q$.

°Df · Скажем, что две пары $\langle \mathfrak{a}', P'\rangle$ и $\langle \mathfrak{a}'', P''\rangle$, где $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ — PA–отображения, P' — аффиктура к $\mathfrak{a}'$, P'' — аффиктура к $\mathfrak{a}''$, *af-редуктивно–эквивалентны*, если у них есть общий af-редукт.

°Th · Отношение af-редуктивной–эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно.

°Df · Произвольное множество пар PA–отображений и аффиктур к ним назовем *af-редуктивно содержательным*, если у всякого элемента того множества есть af-редукт в том множестве.
Обозначать будем кратко: af-rd-ct-множество.

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — некоторое af-rd-ct-множество, то классы af-редуктивно–эквивалентных элементов того множества назовем $\mathfrak{a}$–af-многогранниками–следами.

Деформации многогранников–следов

°Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторое rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni —

- *элементарная деформация* относительно четверки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, W\rangle$, если
  - при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$ и принадлежит классу W;
  - при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и всяких точках v и w из ${}^{\cup}(\operatorname{vert}^\circ(\mathfrak{a}))$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, v) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, v) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.
- *аналитическая элементарная деформация* относительно четверки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, W\rangle$, если оно элементарная деформация относительно той же четверки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, W\rangle$ такая, что при каждой точке v из ${}^{\cup}(\operatorname{vert}^\circ(\mathfrak{a}))$ отображение $\mathfrak{a}(\cdot, v)$ аналитично (то есть локально представимо степенным рядом с центром) в α и однажды непрерывно–дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$.

°Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathfrak{a}$, и некоторое af-rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni —

- *элементарная деформация* относительно пятерки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, P, W\rangle$, если
  - при каждой точке x из P отображение $\mathfrak{a}(\cdot, x)$ постоянно на $[\alpha, \beta]$;
  - при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$ и пара $\langle \mathfrak{a}(\tau, \cdot), P\rangle$ принадлежит классу W;
  - при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и всяких точках v и w из ${}^{\cup}(\operatorname{vert}^\circ(\mathfrak{a}))$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, v) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, v) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.
- *аналитическая элементарная деформация* относительно пятерки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, P, W\rangle$, если оно элементарная деформация относительно той же пятерки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, P, W\rangle$ такая, что при каждой точке v из ${}^{\cup}(\operatorname{vert}^\circ(\mathfrak{a}))$ отображение $\mathfrak{a}(\cdot, v)$ аналитично в α и однажды непрерывно–дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$.

°Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathfrak{a}$, и некоторое af-rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni — *близкосвязанная элементарная деформация* относительно пятерки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, P, W\rangle$, если оно так сказать “посимплексно элементарная деформация”, формально же, если

- при каждой точке x из P отображение $\mathfrak{a}(\cdot, x)$ постоянно на $[\alpha, \beta]$;
- при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ пара $\langle \mathfrak{a}(\tau, \cdot), P \rangle$ принадлежит классу W и при каждом симплексе A из $\mathfrak{a}$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)|_{\overline{A}}$ симплициально относительно комплекса $\mathrm{cl}_{\mathfrak{a}}\{A\}$;
- при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и при каждом симплексе A из $\mathfrak{a}$ и всяких точках v и w из $\operatorname{vert} A$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, v) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, v) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.

°Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторое [af-]rd-ct-множество W. Тогда отображение $\mathfrak{b}$ из $[\alpha, \beta]$ в совокупность W–многогранников–следов — [[близкосвязанная]] *элементарная W–деформация* относительно пары $\langle \alpha, \beta \rangle$, если найдется полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$[и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathfrak{a}$] и непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni такие, что отображение $\mathfrak{a}$ — [[близкосвязанная]] элементарная деформация относительно четверки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, W \rangle$ [пятерки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, P, W \rangle$] и при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ принадлежит множеству $\mathfrak{b}(\tau)$.

°Df · Возьмем некоторые числа α и β из $\mathbb{R}$, причем $\alpha < \beta$, и некоторое [af-]rd-ct-множество W. Тогда отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta]$ в совокупность W–многогранников–следов — [[близкосвязанная]] *W–деформация* на отрезке $[\alpha, \beta]$, если найдется набор чисел $\alpha = \tau_0 < \ldots < \tau_\nu = \beta$ таких, что при каждом $\iota = 1, \ldots, \nu$ отображение $\mathfrak{a}\big|_{[\tau_{\iota-1}, \tau_\iota]}$ — [[близкосвязанная]] элементарная W–деформация относительно пары $\langle \tau_{\iota-1}, \tau_\iota \rangle$ или пары $\langle \tau_\iota, \tau_{\iota-1} \rangle$.

Объем многогранника–следа

°Выберем некоторое конечномерное аффинное подпространство Y, в нем некоторое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и порожденный им объем mes_ι (размерностей $\iota = 0 \ldots \dim Y$).

°Df · Для всяких кусочно аффинного отображения $\mathfrak{f}$ с образом в выбранном пространстве Y, и полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально, определим *объем* $\mathrm{vol}'''_{\mathbf{k}}\, \mathfrak{f}$ по формуле

$$\mathrm{vol}'''_{\mathbf{k}}\, \mathfrak{f} := \sum_{K : K \in \mathbf{k}} \mathrm{mes}_\nu\, \mathfrak{f}^\circ(K),$$

где $\nu = \max\limits_{K : K \in \mathbf{k}} \dim K$.

°Th · Если $\mathfrak{f}$ — некоторое PA–отображение с образом в Y, то число $\mathrm{vol}'''_{\mathbf{k}}\, \mathfrak{g}$ не зависит от выбора отображения $\mathfrak{g}$ и комплекса $\mathbf{k}$ из всех таких, что $\mathfrak{g}$ — симплициальный относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$ редукт с образом в Y отображения $\mathfrak{f}$.

°Df · Для произвольного кусочно–аффинного отображения $\mathfrak{f}$, образ которого лежит в выбранном пространстве Y, определим его объем $\mathrm{vol}\, \mathfrak{f}$ как число $\mathrm{vol}'''_{\mathbf{k}}\, \mathfrak{g}$ при некотором симплициальном относительно некоторого полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$ редукте $\mathfrak{g}$ с образом в Y отображения $\mathfrak{f}$.

°Df · Для произвольного [af-]rd-ct-множества A определим для всякого A–многогранника–следа $\mathtt{A}$ его *образ* $\widetilde{\mathrm{im}}\, \mathtt{A}$ как образ некоторого представителя его ($\widetilde{\mathrm{im}}\, \mathtt{A} := \mathrm{im}\, \mathfrak{f}$, где $\mathfrak{f} \in \mathtt{A}$[или $\langle \mathfrak{f}, P \rangle \in \mathtt{A}$]), и если $\widetilde{\mathrm{im}}\, \mathtt{A}$ лежит в выбранном пространстве Y, то его объем $\mathrm{Vol}\, \mathtt{A}$ по формуле $\mathrm{Vol}\, \mathtt{A} := \mathrm{vol}\, \mathfrak{f}$, где $\mathfrak{f}$ [или $\langle \mathfrak{f}, P \rangle$] — некоторый представитель из $\mathtt{A}$.
°При этом от представителя это число не зависит.

Объем многогранников–следов при деформации

°Df · Определим множество T — совокупность всех PA–отображений с образом в Y.
Скажем, что [аналитическая] элементарная деформация $\mathfrak{a}$ относительно некоторой четверки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, T \rangle$ *проста*, если $\dim \mathrm{im}\, \mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ не зависит от τ из $[\alpha, \beta]$. Здесь размерность $\dim$ многогранника понимается как максимум из всех значений размерности симплексов, включенных в многогранник тот.

°Th

I. Пусть $\mathfrak{a}$ — простая [аналитическая] элементарная деформация относительно некоторой четверки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, T \rangle$;
тогда отображение $\mathfrak{p}$, определенное формулою $\mathfrak{p}(\tau) = \mathrm{vol}\, \mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$, непрерывно, а при аналитичности C^1—гладко.

II. Пусть $\mathfrak{n}$ — [аналитическая] T—деформация на отрезке $[\alpha, \beta]$ с постоянною размерностью образа;
тогда отображение $\mathfrak{w}$, действующее по формуле $\mathfrak{w}(\tau) = \mathrm{Vol}\, \mathfrak{n}_\tau$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, непрерывно, а при аналитичности кусочно—C^1—гладко.

К Главе Второй

Вступление

°Возьмем некоторую конечномерную плоскость Y в пространстве Uni, на этой плоскости возьмем некоторое положительно—определенное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и рассмотрим порожденные этим скалярным произведением меры (объемы) $\mathrm{mes}_0, \ldots \mathrm{mes}_{\dim Y}$ соответствующих размерностей $0, \ldots, \dim Y$.

°Df · Скажем, что точка x — точка *полуплоского типа* в многогранном множестве P, если $x \in P$, и найдется симплекс A такой, что A — открытое множество в P, есть симплекс B такой, что $\dim B + 1 = \dim A$ и $B \lhd A$ и $x \in B$ и $B \cup A$ — открытое в P множество.

°Df · Скажем при каком—либо ν из чисел $0, \ldots, \dim Y$, что множество A — *ν—квазиповерхность*, если

- оно включено в плоскость Y, многогранно, компактно;
- всякая неполуплоского типа в A точка x обладает множеством G, гомеоморфным $\mathbb{R}^\nu$, и таким, что $x \in G \subset A$;
- ν—мерно всякое множество, открытое в множестве A.

Еще скажем, что множество A — *квазиповерхность*, если оно — ν—квазиповерхность для некоторого ν из $0, \ldots, \dim Y$.

°Df · Обозначим через F множество всех пар $\langle \mathfrak{a}, M \rangle$, у которых найдется представление вида $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{b}$ — PA—смятие; $\mathfrak{c}$ — PA—контракция; M — аффиктура в PA—отображении $\mathfrak{a}$; $\mathrm{im}\, \mathfrak{a}$ и $\mathrm{dom}\, \mathfrak{b} = \mathrm{im}\, \mathfrak{c}$ — квазиповерхности; и всякая точка x из $(\mathrm{dom}\, \mathfrak{a}) \setminus M$ не полуплоского типа в $\mathrm{dom}\, \mathfrak{c}$.
Из этого определения следует, что F — af-редуктивно содержательный класс.

°Df · Скажем, что пара $\langle \mathfrak{a}', M' \rangle$ из F *проецируема* в пару $\langle \mathfrak{a}'', M'' \rangle$ из F, если найдется PA—контракция $\mathfrak{c}$ такая, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' \circ \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}^\circ(M') = M''$.

°Df · Скажем, что пара $\langle A, x \rangle$ — *локальный конус*, если $x \in A$, множество A многогранно, компактно и такое, что для всякой точки y из множества A верно, что $[x, y] \subset A$.

°Df · Если $\langle A, x \rangle$ — некоторый локальный конус, то определим его *естественный край* $\mathrm{fn}(A, x)$ по формуле

$$\mathrm{fn}(A, x) := \{z : \text{для всякой точки } w \text{ из множества } A \text{ верно, что } z \notin [x, w)\}.$$

°Df · Скажем, что тройка $\langle \mathfrak{a}, M, x \rangle$ — *коническая*, если

- $\langle \mathfrak{a}, M \rangle \in F$;
- $\langle \mathrm{dom}\, \mathfrak{a}, x \rangle$ — локальный конус;
- $M = \mathrm{fn}(\mathrm{dom}\, \mathfrak{a}, x)$.

°Df · Скажем, что коническая тройка $\langle \mathfrak{a}, M, x \rangle$ *минимальна*, если при всякой элементарной простой аналитической деформации $\mathfrak{m}$ относительно некоторой пятерки $\langle 0, 1, \mathfrak{a}, P, F \rangle$ и такой, что пара $\langle \mathfrak{m}(0, \cdot), P \rangle$

проецируема в пару $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$, верно, что найдется некоторое ϵ из $(0,1)$ такое, что при всяком τ из $[0,\epsilon)$ верно $\operatorname{vol}\mathfrak{m}(\tau,\cdot) \geqslant \operatorname{vol}\mathfrak{m}(0,\cdot) = \operatorname{vol}\mathfrak{a}$.

°Df · Скажем, что пара $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ из F *локально—минимальна*, если для всякой точки x из множества $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$ найдется локальный конус $\langle C, x\rangle$ такой, что C — замкнутая окрестность точки x во множестве $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, $C \setminus \operatorname{fn} C \subset \operatorname{dom}\mathfrak{a} \setminus M$ и коническая тройка $\langle \mathfrak{a}|_C, \operatorname{fn}(C,x), x\rangle$ минимальна.

°Df · Скажем, что F—многогранник—след *локально—минимален*, если таков каждый его элемент.

Многомерный случай

°Th · Для всякой локально—минимальной пары $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ (обозначим $\nu := \dim\operatorname{im}\mathfrak{a}$) и всякого симплициального комплекса $\mathfrak{a}$ если отображение $\mathfrak{a}$ локально—инъективно на $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$, а также симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$, то

- если точка x лежит в множестве $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$, то не найдется $(\nu-1)$—мерного симплекса A в комплексе $\mathfrak{a}$ такого, что $x \in A$ и симплекс A инцидентен только одному ν—мерному симплексу комплекса $\mathfrak{a}$;

- для всякого $(\nu-1)$—мерного симплекса B' степени 2 в комплексе $\mathfrak{a}$, лежащего в $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$, верно, что симплексы $\mathfrak{a}^\circ(A'_1)$ и $\mathfrak{a}^\circ(A'_2)$ лежат в одной ν—мерной плоскости, где A'_1 и A'_2 суть те два симплекса комплекса $\mathfrak{a}$, которые инцидентны симплексу B' и имеют размерность ν;

- для всякого $(\nu-1)$—мерного симплекса B' комплекса $\mathfrak{a}$, включеного в $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$, и имеющего степень в комплексе $\mathfrak{a}$ не менее трех верно, что

  - для произвольных двух ν—мерных симплексов A'_1 и A'_2, инцидентных симплексу B', двугранный угол между симплексами $\mathfrak{a}^\circ(A'_1)$ и $\mathfrak{a}^\circ(A'_2)$ не менее $\dfrac{2\pi}{3}$;

  - в тех же условиях степень симплекса B' равна трем, и тот двугранный угол равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

Двумерный случай в трехмерном пространстве

°Th · При условии $\dim Y = 3$ рассмотрим $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ — локально—минимальную пару из F такую, что отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективно на $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$; будем считать, что $\dim\operatorname{im}\mathfrak{a} = 2$. Еще рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, и некоторую точку x такую, что $\{x\} \in \mathfrak{a}$ и $x \in (\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$. Тогда найдется локальный конус $\langle C, x\rangle$ такой, что C — замкнутая окрестность точки x в $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, отображение $\mathfrak{a}$ инъективно на C, и $\mathfrak{a}$—образ K множества $\operatorname{int}_{(\operatorname{dom}\mathfrak{a})\setminus M} C$ имеет один из следующих трех видов:

тип I: множество K лежит в некоторой плоскости;

тип II: найдется симплициальный комплекс $\mathbf{k}$ такой, что тело комплекса $\mathbf{k}$ есть K, в $\mathbf{k}$ всего три двумерных симплекса, всего один одномерный симплекс, нет нульмерных симплексов, причем двумерные симплексы инцидентны одномерному, двугранный угол между каждыми двумя двумерными симплексами составляет $120°$, и точка $\mathfrak{a}(x)$ лежит в одномерном симплексе;

тип III: найдется симплициальный комплекс $\mathbf{k}$ такой, что тело комплекса $\mathbf{k}$ есть K, в $\mathbf{k}$ всего шесть двумерных симплексов, четыре одномерных и один нульмерный, причем каждый двумерный симплекс инцидентен двум и только двум одномерным, каждый одномерный симплекс инцидентен трем и только трем двумерным, нульмерный же симплекс инцидентен всем четырем одномерным симплексам, двугранный угол между каждыми двумя двумерными симплексами, инцидентными некоторому одномерному симплексу, составляет $120°$, и нульмерный симплекс есть $\{\mathfrak{a}(x)\}$.

К Главе Третьей

Вступление

°Все построения проведем в некоторой двумерной плоскости Y с некоторым евклидовым скалярным произведением и ориентациею на ней.

°Df · *Одномерные основные отображения*

- Назовем PA−контракцию $\mathfrak{a}$ *окружностною*, если $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ гомеоморфны окружности и лежат в плоскости Y.
- Назовем PA−смятие $\mathfrak{a}$ *окружностным*, если $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ гомеоморфно окружности, а $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ лежат в плоскости Y.
- Назовем PA−отображение $\mathfrak{a}$ *окружностным*, если найдутся окружностное смятие $\mathfrak{b}$ и окружностная контракция $\mathfrak{c}$ такие, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$.

°Df · *Двумерные основные отображения*

- Назовем PA−контракцию $\mathfrak{a}$ *круговою*, если
  - $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ гомеоморфны двумерному замкнутому диску и лежат в плоскости Y;
  - в каждой точке из $\operatorname{rint}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, в которой отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективно, отображение $\mathfrak{a}$ сохраняет ориентацию плоскости Y;
  - $\mathfrak{a}^\circ(\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \subset \operatorname{rmrg}\operatorname{im}\mathfrak{a}$.
- Назовем PA−смятие $\mathfrak{a}$ *круговым*, если
  - $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ гомеоморфно двумерному замкнутому диску;
  - $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ лежат в плоскости Y;
  - отображение $\mathfrak{a}$ регулярно;
  - отображение $\mathfrak{a}$ сохраняет ориентацию плоскости Y в каждой точке множества $\operatorname{rint}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$.
- Назовем PA−отображение $\mathfrak{a}$ *круговым*, если найдутся круговое смятие $\mathfrak{b}$ и круговая контракция $\mathfrak{c}$ такие, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$.

°Df · Назовем *классом отмеченных окружностных отображений* множество всех пар вида $\langle \mathfrak{a}, \varnothing \rangle$, где $\mathfrak{a}$ — окружностное отображение.
Заметим, что $\varnothing$ — аффиктура в окружностном отображении. Еще заметим, что этот класс по определению своему редуктивно содержателен.

°Df · Назовем *классом отмеченных круговых отображений* множество всех пар вида $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle$, где $\mathfrak{a}$ — круговое отображение.
Заметим, что $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ — аффиктура в круговом отображении $\mathfrak{a}$.
°Еще заметим, что этот класс редуктивно содержателен.

°Df · Для кругового отображения $\mathfrak{a}$ определим F−границу $\operatorname{mrg}\mathfrak{a}$ его по формуле

$$\operatorname{mrg}\mathfrak{a} := \mathfrak{a}\big|_{\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}}.$$

Для отмеченного кругового отображения $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle$ определим F−границу $\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle)$ его по формуле

$$\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle) := \langle \mathfrak{a}\big|_{\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}}, \varnothing \rangle.$$

°Ясно, что для всякого отмеченного кругового отображения $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}\rangle$ его F—граница $\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ есть отмеченное окружностное отображение.

°Df · Определим *ломаные—следы* как классы эквивалентных пар из класса отмеченных окружностных отображений и определим *многоугольники—следы* как классы эквивалентных пар из класса отмеченных круговых отображений.
Канонический представитель ломаной— или многоугольника—следа — пара из него такая, что отображение в ней — смятие.

°Df · Для многоугольника—следа A определим его *границу* $\operatorname{Mrg}(\mathrm{A})$ как класс отмеченных окружностных отображений эквивалентных отмеченному окружностному отображению $\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}\rangle)$, для некоторого представителя $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}\rangle$ многоугольника—следа A.

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — некоторое PA—отображение из Y в Y, то обозначим через $C_\infty(\mathfrak{a})$ единственную неограниченную связную компоненту множества $Y \setminus \operatorname{im}\mathfrak{a}$.

Общее положение

°Df · Скажем, что окружностное смятие $\mathfrak{a}$ находится в *общем положении*, если

1. $\{a : \exists b(b \neq a, \mathfrak{a}(a) = \mathfrak{a}(b))\}$ конечно;
2. у каждой точки из $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ не более двух $\mathfrak{a}$—прообразов;
3. в каждой точке a, у которой два $\mathfrak{a}$—прообраза, найдется ее окрестность U в плоскости Y такая, что $\mathfrak{a}$—прообраз ее состоит из двух связных компонент A и B, на каждой из которых отображение $\mathfrak{a}$ инъективно, и при всяком достаточно малом непрерывном деформировании обоих отображений $\mathfrak{a}|_A$ и $\mathfrak{a}|_B$ их образы пересекаются.

Скажем, что ломаная—след находится в *общем положении*, если отображение некоторого ее канонического представителя находится в общем положении.

°Df · Скажем, что круговое смятие $\mathfrak{a}$ находится в *общем положении*, если его F—граница $\operatorname{mrg}\mathfrak{a}$ находится в общем положении, а также верно, что $\mathfrak{a}$—образ каждой точки из $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, в которой отображение $\mathfrak{a}$ не локально инъективно, имеет только один $\mathfrak{a}$—прообраз на $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$.
Скажем, что многоугольник—след находится в *общем положении*, если отображение некоторого его канонического представителя находится в общем положении.

°Df · Определим *ориентированный граф* $\operatorname{Gr}(\mathrm{A})$ ломаной—следа A в общем положении как совокупность всех одноточечных множеств (называемых *вершинами*) вида $\{a\}$, где точка a имеет два $\mathfrak{a}$—прообраза, для некоторого канонического представителя $\langle \mathfrak{a}, \varnothing\rangle$ ломаной—следа A, объединенную с совокупностью всех связных компонент (называемых *дугами*) множества $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ за вычетом всех точек, имеющих два $\mathfrak{a}$—прообраза, причем на дугах этих рассматривается ориентация от ориентации положительного обхода множества $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$. При этом инцидентность вершины V дуге A понимается как $V \subset \overline{A}$.

°Df · Выберем также у каждой ломаной—следа A какой-нибудь ориентированный дуальный граф $\operatorname{duGr}(\mathrm{A})$. То есть образуем совокупность $\mathbf{k}$ всех связных компонент дополнения до Y тела графа $\operatorname{Gr}(\mathrm{A})$ и

- выберем в каждой компоненте K из $\mathbf{k}$ по точке p_K (при этом множества $\{p_K\}$ суть *вершины* дуального графа),
- для всяких двух связных компонент K и L, обладающих общим одномерным фрагментом F границы, выберем некоторую простую ломаную M (при этом эта ломаная без двух ее крайних точек есть *дуга* дуального графа) так, что крайние точки ее суть две точки p_K и p_L, и лежит она в объединении тех множеств K и L и их общего фрагмента границы, и пересекает этот фрагмент единожды в точке x,

- на ломаной той выберем ориентацию такую, что если выбрать точку y на ломаной M и точку z на том фрагменте (так же ломаной) так, что $[x, y] \subset M$, $[x, z] \subset F$, пара $\langle x, y\rangle$ — из выбираемой ориентации, а пара $\langle x, z\rangle$ — из ориентации фрагмента F, порожденной ориентациею той дуги графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$, в которую он включен, и пара $\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz}\rangle$ — положительно ориентирована.

Еще, заметив, что в дуальном графе есть ровно одна вершина, соответствующая неограниченной связной компоненте $C_\infty(\mathrm{A})$ дополнения в плоскости Y множеству $\mathrm{im}\,\mathfrak{a}$, определим *конечную часть* $\mathrm{fdGr}(\mathrm{A})$ *дуального графа* как дуальный граф за вычетом той самой вершины и дуг, ей инцидентных.

°Df · *Условие необходимости*
Пусть A — ломаная–след в общем положении. Тогда для A *выполнены условия необходимости* в том и только том случае, в котором $\mathrm{fdGr}(\mathrm{A})$ — связен и все ребра графа $\mathrm{duGr}(\mathrm{A})$ инцидентные бесконечной вершине ориентированы одновременно или к ней или от нее.

Ветвления

°Df · Рассмотрим некоторое круговое смятие $\mathfrak{a}$, точку x из $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$, и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, и у которого точка x — вершинная. Рассмотрим все вершинные точки w комплекса $\mathbf{k}$ такие, что ребро (x, w) (у него вершинные точки суть x и w) — элемент комплекса $\mathbf{k}$, и пронумеруем $\mathfrak{v}_0, \ldots, \mathfrak{v}_\nu$ все те точки так, чтобы $\measuredangle\big(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota)\big) > 0$ при всех $\iota = 1, \ldots, \nu$.
Тогда определим число $\deg'_{\mathbf{k},\mathfrak{a}}(x)$ по формуле (см. рис. $\boxed{1}$)

$$\deg'_{\mathbf{k},\mathfrak{a}}(x) := \left\lfloor \frac{\sum\limits_{\iota=1,\ldots,\nu} \measuredangle(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota))}{2\pi} \right\rfloor .$$

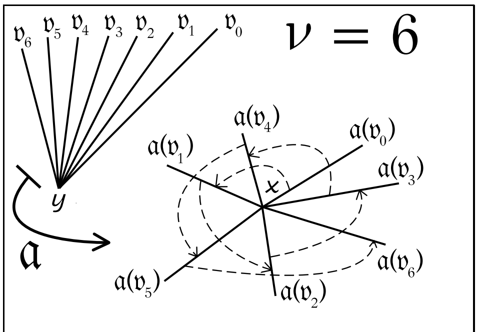


Рис. 1. пример к степени $\deg = 1$

°Th · Пусть $\mathfrak{a}$ — круговое смятие в общем положении; x — точка из $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$; $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ — симплициальные комплексы, относительно которых отображение $\mathfrak{a}$ симплициально, а точка x — вершинная каждому из них.
Тогда $\deg'_{\mathbf{k}',\mathfrak{a}}(x) = \deg'_{\mathbf{k}'',\mathfrak{a}}(x)$.

°Df · Определим для кругового смятия $\mathfrak{a}$ в общем положении и точки x на множестве $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$ *степень* $\deg_{\mathfrak{a}} x$ *точки* x *относительно отображения* $\mathfrak{a}$ как число $\deg'_{\mathbf{k},\mathfrak{a}}(x)$ для некоторого комплекса $\mathbf{k}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$ и которому точка x — вершинная.

°Th · Рассмотрим круговое смятие $\mathfrak{a}$ и круговое инъективное отображение $\mathfrak{b}$ такое, что $\mathrm{dom}\,\mathfrak{a} = \mathrm{im}\,\mathfrak{b}$. Также возьмем некоторую точку x на множестве $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{b}$. Тогда $\deg_{\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}} x = \deg_{\mathfrak{a}} \mathfrak{b}(x)$.

°Df · Рассмотрим многоугольник–след A в общем положении и точку x, лежащую на теле графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$, но не в вершине его. Тогда степенью $\deg_{\mathrm{A}} x$ точки x относительно многоугольника–следа A назовем число $\deg_{\mathfrak{a}} y$, где $\langle \mathfrak{a}, \mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}\rangle$ — некоторый канонический представитель многоугольника–следа A и точка y — единственный $\mathfrak{a}$–прообраз точки x на множестве $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$.

°Df · Рассмотрим многоугольник—след A в общем положении и точку x, лежащую на теле графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$, но не в вершине его. Тогда назовем точку x *точкою степени* $\deg_{\mathrm{A}} x$ *относительно многоугольника—следа* A, а если $\deg_{\mathrm{A}} x > 0$, то назовем ее *точкою ветвления относительно многоугольника—следа* A.

Петельность

°Df · Пусть $\mathbf{a}$ — окружностное отображение. Тогда отображение $\mathbf{b}$, включенное в $\mathbf{a}$, назовем *параметрическою петлею* в $\mathbf{a}$, если или $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, при условии, что $\mathbf{a}$ инъективно; или, если $\mathbf{a}$ не инъективно, то $\operatorname{dom} \mathbf{b}$ гомеоморфно невырожденному отрезку в $\mathbb{R}$, отображение $\mathbf{b}$ инъективно на множестве $\operatorname{reg} \operatorname{dom} \mathbf{b}$ и склеивает концы множества $\operatorname{dom} \mathbf{b}$, а также $\operatorname{im} \mathbf{a} \cap \operatorname{int}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{C}_\infty(\mathbf{b})) = \varnothing$. При этом множество $\mathrm{Y} \setminus \mathrm{C}_\infty(\mathbf{b})$ назовем *областью, ограниченною параметрическою петлею* $\mathbf{b}$. Точку же $\mathbf{b}(x)$, где x — одна из двух нерегулярных точек множества $\operatorname{dom} \mathbf{b}$, назовем *основанием* параметрической петли $\mathbf{b}$. См. рис. 2.

°Df · Скажем, что множество L — *петля* в ломаной—следе A, если найдется канонический представитель $\langle \mathbf{a}, \varnothing \rangle$ ломаной—следа A и параметрическая петля $\mathbf{b}$ в нем, для которых $\operatorname{im} \mathbf{b} = \mathrm{L}$. При этом назовем отображение $\mathbf{b}$ *параметризациею* петли L. Основание же параметрической петли $\mathbf{b}$ назовем основанием петли L.

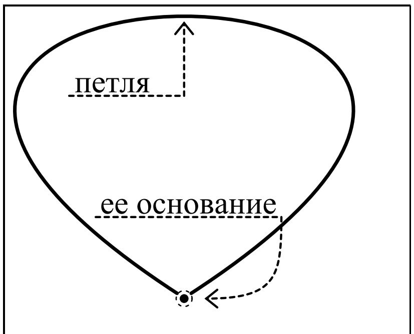


Рис. 2. петля и ее основание

°Df · Если для A выполнены условия необходимости, то для параметрической петли $\mathbf{b}$ в некотором каноническом представителе $\langle \mathbf{a}, \varnothing \rangle$ ломаной—следа A и для петли L в ломаной—следе A, где $\operatorname{im} \mathbf{b} = \mathrm{L}$, определим знак $\operatorname{lsign}'_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ параметрической петли $\mathbf{b}$ по следующей формуле (взяв ориентацию на $\operatorname{dom} \mathbf{b}$ от ориентации положительного обхода $\operatorname{dom} \mathbf{a}$):

$$\operatorname{lsign}'_{\mathbf{a}} \mathbf{b} := \begin{cases} -1, & \text{если параметризация } \mathbf{b} \text{ обходит область, ею ограниченную,} \\ & \text{против часовой стрелки (в положительном направлении);} \\ +1, & \text{если параметризация } \mathbf{b} \text{ обходит область, ею ограниченную,} \\ & \text{по часовой стрелке (в отрицательном направлении);} \end{cases}$$

и определим знак $\operatorname{lsign}_{\mathrm{A}} \mathrm{L}$ петли L в ломаной—следе A как $\operatorname{lsign}_{\mathrm{A}} \mathrm{L} := \operatorname{lsign}'_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$.

°Df · Для двух ломаных—следов A и B в общем положении, с выполненными условиями необходимости и петли L в A скажем, что

A *происходит из* B *порождением петли* L и запишем $\mathrm{A} = \mathrm{B} \oplus \mathrm{L}$,

или

B *происходит из* A *вырождением петли* L и запишем $\mathrm{B} = \mathrm{A} \ominus \mathrm{L}$,

если найдутся такие канонический представитель $\langle \mathbf{a}, \varnothing \rangle$ ломаной—следа A, канонический представитель $\langle \mathbf{b}, \varnothing \rangle$ ломаной—следа B, параметрическая петля $\mathbf{c}$ в A и кусочно аффинное отображение $\mathbf{d}$, из множества $\operatorname{dom} \mathbf{a} \setminus \operatorname{reg} \operatorname{dom} \mathbf{c}$ на $\operatorname{dom} \mathbf{b}$, инъективное на $\operatorname{dom} \mathbf{a} \setminus \operatorname{dom} \mathbf{c}$, что $\mathbf{b} \circ \mathbf{d} = \mathbf{a}|_{\operatorname{dom} \mathbf{a} \setminus \operatorname{reg} \operatorname{dom} \mathbf{c}}$.

°Df · Скажем, что ломаная—след A *простая*, если у нее есть инъективный канонический представитель, сохраняющий положительный обход области им ограниченной.
Скажем, что ломаная—след A в общем положении с выполненными условиями необходимости *петельная*, если найдется набор $\mathfrak{m}_0, \ldots, \mathfrak{m}_\nu$ ломаных—следов в общем положении с условиями необходимости и набор петель $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\nu$ в соответственно $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\nu$ такие, что $\mathfrak{m}_\nu = \mathrm{A}$, $\mathfrak{m}_0$ — простая ломаная—след, $\mathfrak{m}_\iota = \mathfrak{m}_{\iota-1} \oplus \mathfrak{l}_\iota$, при $\iota = 1, \ldots, \nu$.

°Df · Скажем, что многоугольник—след *петельный*, если его граница петельная.

Весовые функции

°Df · Рассмотрим ломаную—след A. Тогда функцию $\mathfrak{a}$, действующую на множестве $\mathrm{Arc}(\mathrm{A})$ всех дуг графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$ и принимающую произвольные целочисленные значения, назовем *весовою*.

°Df · Рассмотрим две ломаные—следы A и B, где A происходит из B порождением петли L знака $\sigma \in \{-1, +1\}$ с основанием x на дуге A графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{B})$, причем

> если B проста, то дуга A подразделена точкою x на одну дугу A' в графе $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$,
>
> если же B не проста, то дуга A подразделена точкою x на две дуги A' и A'' в графе $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$.

Рассмотрим еще весовые функции $\mathfrak{a}$ на A и $\mathfrak{b}$ на B. Тогда скажем, что эти весовые функции *согласованы*, если в случае простоты ломаной—следа B

$$\mathfrak{b}(A) = \mathfrak{a}(A') + (\mathfrak{a}(L) + \sigma);$$

или в случае непростоты ломаной—следа B

$$\mathfrak{b}(K) = \begin{cases} \mathfrak{a}(K), & \text{если } K \text{ — дуга в } \mathrm{Gr}(\mathrm{A}) \text{ и в } \mathrm{Gr}(\mathrm{B}); \\ \mathfrak{a}(A') + (\mathfrak{a}(L) + \sigma) + \mathfrak{a}(A''), & \text{если } K = A. \end{cases}$$

°Df · Рассмотрим петельную ломаную—след A и некоторую весовую функцию $\mathfrak{a}$ на ней. Тогда скажем, что эта весовая функция $\mathfrak{a}$ *простая*, если найдется последовательность $\mathfrak{b}_0, \ldots \mathfrak{b}_\nu$ ломаных—следов и весовых функций $\mathfrak{c}_0, \ldots, \mathfrak{c}_\nu$ на тех ломаных—следах со свойствами

1. $\mathfrak{b}_\nu = \mathrm{A}$;
2. $\mathfrak{b}_0$ — простая;
3. $\mathfrak{b}_\kappa$ происходит из $\mathfrak{b}_{\kappa-1}$ порождением петли, $\kappa = 1, \ldots, \nu$;
4. $\mathfrak{c}_\kappa$ и $\mathfrak{c}_{\kappa-1}$ согласованы, $\kappa = 1, \ldots, \nu$;
5. $\mathfrak{c}_0 \equiv 0$;
6. $\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{a}$;
7. $\mathfrak{c}_\kappa(A) \geqslant 0$ при $A \in \mathrm{dom}\, \mathfrak{c}_\kappa$ и $\kappa = 0, \ldots, \nu$;
8. $\mathfrak{c}_\kappa(A) > 0$, если A — петля знака -1 в $\mathfrak{b}_\kappa$ при $\kappa = 1, \ldots, \nu$.

Реализация

°Df · Рассмотрим некоторый многоугольник—след A в общем положении, его некоторый канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \mathrm{rmrg}\, \mathrm{dom}\, \mathfrak{a} \rangle$ и некоторую дугу A графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{Mrg}\, \mathrm{A})$. Тогда определим число

$$\mathrm{pend}'_{\mathfrak{a}}(A) := \sum_{x : x \in ((\mathrm{mrg}\, \mathfrak{a})^{-1})^\circ(A)} \deg_{\mathfrak{a}} x.$$

°Df · Ясно, что не зависит от представителя $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg} \operatorname{dom} \mathfrak{a} \rangle$ многоугольника—следа A следующее число:

$$\operatorname{pend}_{\mathrm{A}}(A) := \operatorname{pend}'_{\mathfrak{a}}(A).$$

Эту функцию назовем *степенною весовою функциею* того многоугольника—следа A.

°Th · Если A — петельная ломаная—след и $\mathfrak{p}$ — правильная весовая функция на A. То найдется петельный многоугольник—след B с границею A и $\operatorname{pend}_{\mathrm{B}} = \mathfrak{p}$.

Часть II

Полное изложение

Введение

Аффинные объекты

°Inf · У всякого подмножества A в Uni определим его *аффинную оболочку* $\operatorname{aff} A$ как совокупность всевозможных конечных аффинных комбинаций точек множества A, *относительную внутренность* $\operatorname{rint} A$ как внутренность множества A в его аффинной оболочке $\operatorname{aff} A$ и его *относительную границу* $\operatorname{rmrg} A$ как его границу в его аффинной оболочке.

Полиэдры

°Inf · Множество P есть *выпуклый полиэдр*, если и только если найдется непустое конечное множество S точек в Uni, относительная внутренность выпуклой оболочки которого совпадает с P.

°Inf · *Многогранником* или *многогранным множеством* или *полиэдром* называется объединение конечного числа выпуклых полиэдров. Далее будем считать, что все многогранники связны.

°Inf · *Простая ломаная* есть многогранник, гомеоморфный отрезку $[0, 1]$.

°Inf · Аффинное подпространство L пространства Uni зовется *опорною* к некоторому выпуклому полиэдру B плоскостью, если она пересекает замыкание полиэдра B и для всяких двух разных точек p и q из $\overline{B}$ если $(p, q) \cap L \neq \varnothing$, то $[p, q] \subset L$. *Грань* выпуклого полиэдра A есть всякий выпуклый полиэдр B, у которого найдется некоторая опорная к многограннику A плоскость C такая, что $\overline{A} \cap C = \overline{B}$ (обозначим через $A \lhd B$ отношение “A является гранью в B”). Также говорится, что выпуклый полиэдр A *инцидентен* выпуклому полиэдру B, если или A — грань у B или наоборот B — грань у A.

°Inf · *Вершина* есть всякий нульмерный выпуклый полиэдр. *Вершина выпуклого полиэдра* есть вершина, являющаяся его гранью, а точка x — *вершинная точка* выпуклого полиэдра, если множество $\{x\}$ — вершина его. Совокупность всех вершинных точек выпуклого полиэдра P обозначим через $\operatorname{vert} P$. *Ребро* есть одномерный выпуклый полиэдр.

Симплексы

1 °Inf · *Симплекс* есть выпуклый полиэдр с аффинно независимым множеством всех вершинных точек его.

°Inf · Для двух симплексов A и B, объединение вершинных множеств которых аффинно независимо, определяется их произведение $A * B$, также симплекс, по формуле

$$A * B = B * A := \operatorname{rint} \operatorname{conv}(\operatorname{vert} A \cup \operatorname{vert} B),$$

где conv обозначает выпуклую оболочку.

Выпуклополиэдральные комплексы

°Inf · Напомним, что два выпуклых полиэдра *согласованы*, если пересечение их замыканий или пусто или является замыканием некоторой грани в каждом из них. *Выпуклополиэдральный комплекс* $\mathfrak{a}$ есть конечное множество попарно согласованных выпуклых полиэдров. Выпуклополиэдральный комплекс $\mathfrak{a}$ *полный*, если его *тело* ${}^{\cup}\mathfrak{a}$ (то есть объединение всех его элементов) компактно, что эквивалентно принадлежности комплексу всякой грани всякого элемента комплекса.

°Inf · Подмножеству $\mathfrak{a}$ некоторого выпуклополиэдрального комплекса $\mathfrak{p}$ сопоставляются следующие три подмножества того же комплекса (обозначим через $A \lhd B$ отношение “A является гранью в B”):

звезда

$$\mathrm{st}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a} := \{B : B \in \mathfrak{p}, A \lhd B\};$$

замыкание

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a} := \{B : B \in \mathfrak{p}, B \lhd A\};$$

линк

$$\mathrm{lk}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a} := (\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}\,\mathrm{st}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a}) \setminus (\mathrm{st}_{\mathfrak{p}}\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a}).$$

°Inf · Выпуклополиэдральный комплекс *симплициален*, если каждый элемент его — симплекс.

Кусочно–аффинные отображения

°Df · Отображение $\mathfrak{a}$ из некоторого компактного полиэдра — подмножества пространства Uni — в то же пространство назовем *аффинным* относительно набора $\mathfrak{a}$ выпуклых полиэдров, если оно непрерывно, ${}^{\cup}\mathfrak{a} = \mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$ и отображение $\mathfrak{a}$ аффинно на каждом полиэдре из набора $\mathfrak{a}$.

°Df · Отображение $\mathfrak{a}$ из некоторого подмножества пространства Uni в это же пространство назовем *кусочно–аффинным* (сокращенно будем писать “PA–отображение”), если оно аффинно относительно некоторого набора выпуклых полиэдров.
°В книге [1] предложен иной подход к кусочной аффинности, однако на компактных полиэдрах класс кусочно–аффинных отображений тот же, что здесь.

°Exp · Из книги [1] известно, что композиция $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$ двух кусочно–аффинных отображений $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ также кусочно–аффинное отображение.

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — некотрое PA–отображение, то

- скажем, что $\mathfrak{a}$ — *смятие*, если для всякого ребра A такого, что $A \subset \mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$, верно, что множество $\mathfrak{a}^{\circ}(A)$ не одноточечно;
- в противном предыдущему случае скажем, что отображение — *консумпция*;
- скажем, что $\mathfrak{a}$ — *контракция*, если для всякой точки x из $\mathrm{im}\,\mathfrak{a}$ верно, что множество $(\mathfrak{a}^{-1})^{\circ}(\{x\})$ связно.

Кусочно–аффинные отображения и комплексы

°Inf · Всякой точке x, лежащей в аффинной оболочке некоторого симплекса S, взаимнооднозначно соответствует система вещественных чисел $(S_x^v, v \in \mathrm{vert}\,S)$, называемая *барицентрическими координатами* точки x относительно симплекса S, по правилу

$$\begin{cases} (1)\ (S_x^v, v \in \mathrm{vert}\,S) \text{ — аффинный набор весов на вершинных точках} \\ \text{симплекса } S, \text{ то есть } \sum\limits_{v : v \in \mathrm{vert}\,S} S_x^v = 1; \\ (2) \text{ а также } \sum\limits_{v : v \in \mathrm{vert}\,S} S_x^v v = x. \end{cases}$$

2 °Exp · Заметим, что в каждом выпуклополиэдральном комплексе $\mathbf{k}$ у каждой точки $\mathfrak{a}$ его тела существует единственный его элемент $\mathsf{K} =: \Pi_{\mathbf{k}}\mathfrak{a}$, содержащий точку $\mathfrak{a}$. В случае симплициального комплекса определяются *координаты точки* $\mathfrak{a}$ *относительно комплекса*, то есть система вещественных чисел

$$\left(\mathbf{k}_{\mathfrak{a}}^{\nu} := \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{если } \nu \notin \operatorname{vert} \Pi_{\mathbf{k}}\mathfrak{a}; \\ (\Pi_{\mathbf{k}}\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}}^{\nu}, & \text{если } \nu \in \operatorname{vert} \Pi_{\mathbf{k}}\mathfrak{a} \end{array} \right\}, \quad \nu \in {}^{\cup}(\operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{k}))\right).$$

3 °Exp · Из книги [1] известно, что для всякого кусочно–аффинного отображения $\mathfrak{f}$ и всякого полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ аффинно, верна следующая формула:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = \sum_{\nu:\nu\in{}^{\cup}(\operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{k}))} \mathbf{k}_{\mathfrak{a}}^{\nu}\mathfrak{f}(\nu), \quad \forall \mathfrak{a} \in \operatorname{dom} \mathfrak{f}.$$

Глава 1

Кусочно–аффинные отображения и многогранники–следы

Предисловие

Хорошо известно, что кусочно–аффинные отображения вполне дискретизуются, то есть такое отображение может быть вполне описано конечным числовым набором. Также можно сказать, что эти отображения геометрически наглядны. Нами они избраны как простое средство конструировать „обобщенные поверхности“, в которых возможны самопересечения и самоналожения.

Важная цель — построить стандартное представление произвольного кусочно–аффинного отображения в виде композиции нескольких также кусочно–аффинных отображений, но выбранных из некоторых специальных классов их. Потому в начале рассмотрены некоторые классы кусочно–аффинных отображений, а затем обосновано искомое представление.

И в конце описаны многогранники–следы, их деформации и объем в связи с деформациями.

1∼Введение

Симплификация

4 °Заметка · У всякого конечного множества $\mathfrak{a}$ выпуклых полиэдров существует симплициальный комплекс $\mathfrak{b}$, измельчающий множество $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b} \lll \mathfrak{a}$).

5 °Exp · У всякого выпуклополиэдрального комплекса $\mathfrak{p}$ существует симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$, *диагонализующий* комплекс $\mathfrak{p}$, то есть

$$\mathfrak{k} \lll \mathfrak{p} \quad \text{и} \quad {}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{k})) = {}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{p})),$$

при этом нет добавления новых вершин.

Симплициальность и примитивность

°Df · Скажем, что тройка $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f}, \mathfrak{l} \rangle$ двух полных симплициальных комплексов $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ и отображения $\mathfrak{f}$, заданного на ${}^{\cup}\mathfrak{k}$, *симплициальна*, если отображение $\mathfrak{f}$ аффинно относительно комплекса $\mathfrak{k}$, и для каждого симплекса $\mathsf{K} \in \mathfrak{k}$ его образ $\mathfrak{f}^{\circ}(\mathsf{K}) \in \mathfrak{l}$.
Скажем, что отображение $\mathfrak{a}$ *симплициально* относительно полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$, если найдется полный симплициальный комплекс $\mathfrak{l}$ такой, что тройка $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{l} \rangle$ симплициальна.

6 °Df · Последовательность $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu \rangle$, где $\nu \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{k}$ — полный симплициальный комплекс и отображения $\mathfrak{f}_\iota$ последовательно согласованы (то есть $\operatorname{im} \mathfrak{f}_{\iota-1} = \operatorname{dom} \mathfrak{f}_\iota$, где $\iota = 1, \ldots, \nu$), назовем *примитивною* и обозначим это свойство через $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu \rangle \in \operatorname{Seq}[\nu]$, если отображение $\mathfrak{f}_0$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{k}$, и для всякого $\iota = 1, \ldots, \nu$ отображение $\mathfrak{f}_\iota$ симплициально относительно комплекса $(\mathfrak{f}_{\iota-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$.

Измельчение прообраза

7 °Exp · Из книги [1] известно, что для всякого отображения $\mathfrak{f}$, аффинного относительно некоторого полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$, и всякого симплициального комплекса $\mathfrak{a}$, являющегося измельчением множества $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$, верно, что множество $\operatorname{frg}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{k},\mathfrak{f}} := \mathfrak{b}$, определенное формулою

$$\mathfrak{b} := \{B : \exists A, K (A \in \mathfrak{a}, K \in \mathfrak{k}, K \cap (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(A) = B, \mathfrak{f}^{\circ}(B) = A)\},$$

является полным выпуклополиэдральным комплексом, измельчающим комплекс $\mathfrak{k}$ (так порождается правильное измельчение прообраза по заданному измельчению образа).

1.1 Последовательная примитивизация

Примитивизующий комплекс

°Нижеследующее Утверждение 8 является обобщением Теоремы 2.14 в [1], что кусочно—аффинное отображение можно представить симплициальным отображением на некотором симплициальном комплексе.

8 °Th · Для произвольного конечного последовательно согласованного набора кусочно—аффинных отображений $\mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu$ (то есть $\nu \in \mathbb{N}$, $\operatorname{im} \mathfrak{f}_{\iota-1} = \operatorname{dom} \mathfrak{f}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \nu$) найдется полный симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$, примитивизующий набор этих отображений, то есть $\mathfrak{k} : \langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu \rangle \in \operatorname{Seq}[\nu]$ (см. Определение 6).

Доказательство

°Возьмем некоторые комплексы $\mathfrak{a}_\iota$, относительно которых аффинны соответственно отображения $\mathfrak{f}_\iota$ при $\iota = 0, \ldots, \nu$.

°Далее определим индуктивно комплексы

- $\mathfrak{b}_0 := \mathfrak{a}_0$;
- при $\iota = 1, \ldots, \nu$ если уже определен комплекс $\mathfrak{b}_{\iota-1}$, то по Замечанию 4 найдется полный симплициальный комплекс $\mathfrak{b}_\iota$ такой, что $\mathfrak{b}_\iota \lll \mathfrak{a}_\iota \cup (\mathfrak{f}_{\iota-1})^{\circ\circ}(\mathfrak{b}_{\iota-1})$;
- аналогично найдется некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{b}_{\nu+1}$ такой, что $\mathfrak{b}_{\nu+1} \lll (\mathfrak{f}_\nu)^{\circ\circ}(\mathfrak{b}_\nu)$.

°Далее обратно-индуктивно определим выпуклополиэдральные и симплициальные комплексы

- $\mathfrak{c}_\nu := \operatorname{frg}^{\mathfrak{b}_{\nu+1}}_{\mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{f}_\nu}$,— выпуклополиэдральный комплекс по Утверждению 7, и по Замечанию 5 найдется некоторая диагонализация $\mathfrak{d}_\nu$ выпуклополиэдрального комплекса $\mathfrak{c}_\nu$;
- при $\iota = \nu, \ldots, 1$ если уже определен комплекс $\mathfrak{d}_\iota$, то аналогично определим выпуклополиэдальный комплекс $\mathfrak{c}_{\iota-1} := \operatorname{frg}^{\mathfrak{d}_\iota}_{\mathfrak{b}_{\iota-1}, \mathfrak{f}_{\iota-1}}$, и аналогично существует некоторая диагонализация $\mathfrak{d}_{\iota-1}$ этого комплекса $\mathfrak{c}_{\iota-1}$.

°Итак, комплекс $\mathfrak{k} := \mathfrak{d}_0$ — искомый. Q.E.D.

Вспомогательные свойства выпуклых многогранников

9 °Exp · Для всякого топологического векторного пространства A над $\mathbb{R}$, всякого выпуклого открытого подмножества B того пространства A и всякого линейного подпространства L того же пространства A если $\mathsf{B} \cap \mathsf{L} = \varnothing$, то найдется непрерывный линейный функционал $\mathfrak{f}$ на A такой, что $\ker \mathfrak{f} \supset \mathsf{L}$, и для всякой точки x из B верно $\mathfrak{f}(x) > 0$.

10 °Th · Для всякого выпуклого множества A и опорной к нему плоскости L верно, что

1. если L' — аффинное подпространство в Uni, $L' \subset L$, $L' \cap \overline{A} = L \cap \overline{A}$, то L' — опорная плоскость к A;
2. $\overline{A} \cap \operatorname{aff}(L \cap \overline{A}) = \overline{A} \cap L$; $\operatorname{aff}(\overline{A} \cap L)$ — опорная плоскость к A.

Доказательство
°Возьмем некоторое выпуклое множество A и некоторую опорную к нему плоскость L.
°Заметим, что из Определения 1 следует, что $A \neq \varnothing$.
°Возьмем некоторую плоскость L' такую, что $L' \subset L$, $L' \cap \overline{A} = L \cap \overline{A}$.
°Заметим, что $L' \cap \overline{A} = L \cap \overline{A} \neq \varnothing$.
°Рассмотрим две точки a и b из $\overline{A}$.
°Если $(a, b) \cap L' \neq \varnothing$, то $(a, b) \cap L \supset (a, b) \cap L' \neq \varnothing$. Так как плоскость L опорная к A, заключим, что $[a, b] \subset L$.
°Таким образом, $[a, b] \subset \overline{A} \cap L = L' \cap \overline{A}$, и первое заявленное свойство обосновано.
°Заметим, что $\operatorname{aff}(L \cap \overline{A})$ — аффинное подпространство в L, ибо $L \cap \overline{A} \neq \varnothing$.
°Еще заметим, что $\operatorname{aff}(L \cap \overline{A}) \cap \overline{A} \supset (L \cap \overline{A}) \cap \overline{A} = L \cap \overline{A}$, а также $\operatorname{aff}(L \cap \overline{A}) \subset \operatorname{aff} L = L$. Следовательно, $L \cap \overline{A} \supset \operatorname{aff}(L \cap \overline{A}) \cap \overline{A}$. То есть $\overline{A} \cap \operatorname{aff}(L \cap \overline{A}) = \overline{A} \cap L$.
°Из уже доказанного следует, что $\operatorname{aff}(L \cap \overline{A})$ — опорная плоскость к A, и второе заявление также обосновано. Q.E.D.

11 °Th · Для всякого выпуклого полиэдра A, всякой его точки m и всякой точки n из $\operatorname{rmrg} A$ если число ϵ положительно, то точка $(1 + \epsilon) \cdot n + (-\epsilon) \cdot m$ не принадлежит $\overline{A}$.

Доказательство
°Возьмем некоторый выпуклый полиэдр A, некоторую его точку m, некоторую точку n из $\operatorname{rmrg} A$ и некоторое положительное число ϵ.
°По Утверждению 9 найдется непрерывное аффинное отображение $\mathfrak{f}$ из пространства $\operatorname{aff} A$ в $\mathbb{R}$, отделяющее выпуклое множество A от аффинного подпространства $\{n\}$. То есть верно

$$\mathfrak{f}(n) = 0, \quad \forall x (x \in A \longrightarrow \mathfrak{f}(x) > 0).$$

°Заметим, что

$$\mathfrak{f}((1 + \epsilon) \cdot n + (-\epsilon) \cdot m) = (1 + \epsilon) \cdot \mathfrak{f}(n) + (-\epsilon) \cdot \mathfrak{f}(m) = (1 + \epsilon) \cdot 0 + (-\epsilon) \cdot \mathfrak{f}(m) < 0.$$

°Итак, точка $(1 + \epsilon) \cdot n + (-\epsilon) \cdot m$ по непрерывности отображения $\mathfrak{f}$ не попадет в $\overline{A}$. Q.E.D.

12 °Th · Для всякого выпуклого полиэдра A и всяких двух его граней B и C если $\mathsf{C} \subset \overline{\mathsf{B}}$, то $\mathsf{C} \lhd \mathsf{B}$.

Доказательство
°Возьмем некоторые выпуклые полиэдры A, B и C такие, что $\mathsf{B} \lhd A$, $\mathsf{C} \lhd A$ и $\mathsf{C} \subset \overline{\mathsf{B}}$.
°Из Определения 1 следует, что найдется опорная к полиэдру A плоскость L такая, что $\operatorname{rint}(L \cap \overline{A}) = \mathsf{C}$. Заметим еще, что $\operatorname{aff} \mathsf{C} = \operatorname{aff} \overline{\mathsf{C}}$, и $L \cap \overline{A} = \overline{\mathsf{C}}$.
°Обозначим $L' := \operatorname{aff} \mathsf{C}$.
°Заметим, что $\overline{\mathsf{C}} = \overline{A} \cap L \supset \overline{A} \cap L' = \overline{A} \cap \operatorname{aff} \overline{\mathsf{C}} \supset \overline{\mathsf{C}}$, и $\overline{A} \cap L' = \overline{A} \cap \operatorname{aff} \mathsf{C} = \overline{\mathsf{C}} \neq \varnothing$.
°Заметим, что

$$\overline{\mathsf{B}} \cap \operatorname{aff} \mathsf{C} = (\overline{\mathsf{B}} \cap \overline{A}) \cap \operatorname{aff} \mathsf{C} = \overline{\mathsf{B}} \cap (\overline{A} \cap \operatorname{aff} \mathsf{C}) = \overline{\mathsf{B}} \cap \overline{\mathsf{C}} = \overline{\mathsf{C}}.$$

°По Утверждению 10 плоскость L' опорна к A.
°Возьмем некоторые точки p и q из $\overline{B}$ такие, что $(p, q) \cap L' \neq \varnothing$.
°Тогда $p, q \in \overline{A}$ и $(p, q) \cap L' \neq \varnothing$. По доказанной опорности плоскости L' к A верно $[p, q] \subset L'$.
°Итак, плоскость L' опорна к B и $C \lhd B$. **Q.E.D.**

13 °**Th** · Для всякого выпуклого полиэдра A, всяких его граней B и C, а также точек p из B и q из C если не существует D такого, что $D \neq A$, $D \lhd A$, $B \lhd D$, $C \lhd D$, то $(p, q) \subset A$.

Доказательство

°Возьмем некоторый выпуклый полиэдр A, некоторые его грани B и C такие, что не существует D такого, что $D \neq A$, $D \lhd A$, $B \lhd D$, $C \lhd D$, а также некоторые точки p из B и q из C.
°Допустим, что найдется точка r такая, что $r \in (p, q)$ и $r \notin A$.
°Заметим, что из допущенного следует, что $r \in \overline{A}$, ибо $p, q \in \overline{A}$. То есть $r \in \operatorname{rmrg} A$.
°По Утверждению 9 отделим некоторым аффинным отображением $\mathfrak{f}$ из $\operatorname{aff} A$ в $\mathbb{R}$ точку r от A (то есть $\mathfrak{f}(r) = 0$, $\mathfrak{f}(x) > 0$ при $x \in A$).
°Определим плоскость $X := \{x : \mathfrak{f}(x) = 0\}$.
°Тогда $r \in X \cap \overline{A} \neq \varnothing$, и если $s, t \in \overline{A}$ и $(s, t) \cap X \neq \varnothing$, то найдется точка x и число ϵ из $(0, 1)$ такие, что $x \in X$ и $x = \epsilon \cdot s + (1 - \epsilon) \cdot t$. Таким образом, $0 = \mathfrak{f}(x) = \epsilon \cdot \mathfrak{f}(s) + (1 - \epsilon) \cdot \mathfrak{f}(t)$, но по непрерывности отображения $\mathfrak{f}$ верно $\mathfrak{f}(s), \mathfrak{f}(t) \geqslant 0$, ибо $s, t \in \overline{A}$. Отсюда $\mathfrak{f}(s), \mathfrak{f}(t) = 0$ и $s, t \in X$, следовательно $[s, t] \subset X$. Итак, плоскость X опорна к A.
°Определим $G := \operatorname{rint}(X \cap \overline{A})$,— грань в A.
°Заметим, что $G \neq A$, ибо $G \subset X$, а $X \cap A = \varnothing$.
°Еще заметим, что $p, q \in \overline{A}$, $r \in (p, q) \cap X$, и отсюда $[p, q] \subset X$.
°Установим, что $B, C \subset X$. Рассмотрим грань B, а грань C аналогична.
°Возьмем некоторую точку x из B.
°Тогда найдется точка y такая, что $[y, x] \subset B$ и $p \in (y, x)$. То есть $(y, x) \cap X \neq \varnothing$.
°Так как плоскость X опорна к A, верно $[y, x] \subset X$ и $x \in X$.
°Итак, $B, C \subset X \cap \overline{A} = \overline{G}$ и из условия доказуемого Утверждения $B, C \lhd A$ по Утверждению 12 $B, C \lhd G$, что противоречит условию. **Q.E.D.**

14 °**Th** · Для всяких выпуклых полиэдров A и B если $B \subset \overline{A}$, то найдется выпуклый полиэдр C такой, что $B \subset C$ и $C \lhd A$.

Доказательство

°Возьмем некоторые выпуклые полиэдры A и B такие, что $B \subset \overline{A}$.
°Заметим, что $\overline{A} = \bigsqcup\limits_{Q : Q \lhd A} Q$. Следовательно, найдется выпуклый полиэдр C такой, что $B \cap C \neq \varnothing$ и $C \lhd A$.
°Допустим, что $B \setminus C \neq \varnothing$.
°Выберем некоторую точку x из $B \cap C$ и точку z из $B \setminus C$.
°По относительной открытости выпуклого полиэдра B найдется положительное число ϵ такое, что точки $p := (1 + \epsilon) \cdot x + (-\epsilon) \cdot z$ и $q := (1 + \epsilon) \cdot z + (-\epsilon) \cdot x$ лежат в B.
°Так как $z \in \overline{A}$, найдется выпуклый полиэдр D такой, что $z \in D \lhd A$.
°Возможны следующие два случая:

- $z \in \operatorname{rmrg} C$;
- $z \in \overline{A} \setminus \overline{C}$, и тем самым $D \not\lhd C$.

°В первом из этих случаев по Утверждению 11 $q \notin \overline{C}$. При этом $q \in B \subset \overline{A}$ и $q \in \operatorname{aff} C$, ибо q — аффинная комбинация точек из $\overline{C}$. Отсюда $q \in \overline{A} \cap \operatorname{aff} C$ и по Утверждению 10 верно $\overline{A} \cap \operatorname{aff} C = \overline{C}$. Противоречие.
°Во втором же случае определим

$$\boldsymbol{e} := \{E : E \lhd A \quad \text{и} \quad C, D \lhd E\}.$$

°Заметим, что $\boldsymbol{e} \neq \varnothing$, ибо $A \in \boldsymbol{e}$.
°Еще заметим, что полиэдр A конечномерен, отчего

$$\min_{\triangleleft} \boldsymbol{e} = \{Q : \forall W (W \in \boldsymbol{e} \quad \& \quad W \triangleleft Q \longrightarrow W = Q)\} \neq \varnothing.$$

°Возьмем некоторый E из $\min_{\triangleleft} \boldsymbol{e}$.
°Тогда

$$p = (1+\epsilon)\cdot x + (-\epsilon)\cdot z = (1+2\epsilon)\cdot x + (-2\epsilon)\cdot(\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot z),$$

то есть p — аффинная комбинация точек x и $(\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot z)$.
°Заметим, что $x \in C \triangleleft E$ и $x \in \operatorname{aff} E$. А также $(\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot z) \in \operatorname{aff} E$. Таким образом $p \in \operatorname{aff} E$.
°По Утверждению 13 $(\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot z) \in E$. По Утверждению 11 $p \notin \overline{E}$, ибо $x \in \operatorname{rmrg} E$.
°Но $p \in \overline{A}$ и $p \in \overline{A} \cap \operatorname{aff} E = \overline{E}$ по Утверждению 10,— противоречие. Q.E.D.

Симплициальное измельчение

15 °Th · Для всякого кусочно–аффинного отображения $\mathfrak{f}$ и полного симплициального комплекса $\mathfrak{l}$ таких, что $^{\cup}\mathfrak{l} = \operatorname{dom} \mathfrak{f}$, найдется полный симплициальный комплекс $\mathfrak{n}$ такой, что он вписан в комплекс $\mathfrak{l}$ и относительно его симплициально отображение $\mathfrak{f}$.

Доказательство

°Возьмем некоторое кусочно–аффинное отображение $\mathfrak{f}$ и полный симплициальный комплекс $\mathfrak{l}$ такие, что $^{\cup}\mathfrak{l} = \operatorname{dom} \mathfrak{f}$. Еще возьмем некоторое инъективное отображение $\mathfrak{p}$, действующее на вершинном множестве $^{\cup}(\operatorname{vert}^{\circ}(\mathfrak{l}))$ комплекса $\mathfrak{l}$, образ $\operatorname{im} \mathfrak{p}$ которого аффинно независим.
°Продолжив его аффинно на каждом симплексе комплекса $\mathfrak{l}$, образуем отображение $\mathfrak{q}$. Обозначим $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{q}^{-1}$ и $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{f}$.
°Заметим, что они последовательно согласованы.
°Применив к ним Утверждение 8, рассмотрим комплекс $\mathfrak{m}$, существующий по тому утверждению. Образуем симплекс $S := \operatorname{rint} \operatorname{conv} \operatorname{im} \mathfrak{p}$.
°Если симплекс $M \in \mathfrak{m}$, то $M \subset {}^{\cup}\mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathfrak{l}) \subset \overline{S}$.
°Из Утверждения 14 заключим, что найдется подгрань L у симплекса S такая, что $M \subset L$. Ясно, что эта подгрань есть $\mathfrak{q}$–образ некоторого симплекса комплекса $\mathfrak{l}$. Итак, комплекс $\mathfrak{m}$ измельчает комплекс $\mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathfrak{l})$.
°Следовательно, комплекс $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}_0{}^{\circ\circ}(\mathfrak{m})$ измельчает комплекс $\mathfrak{l}$. А отображение $\mathfrak{g}_1$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{n}$. Q.E.D.

1.2 Свойства смятий и контракций

1.2.1 Смятия

Переходный гомеоморфизм

16 °Th · Для всяких симплициальных троек $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f}, \mathfrak{m} \rangle$ и $\langle \mathfrak{l}, \mathfrak{g}, \mathfrak{m} \rangle$ если отображения $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ суть смятия, и $\mathfrak{h}$ — некоторая непрерывная инъекция из множества $^{\cup}\mathfrak{k} = \operatorname{dom} \mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom} \mathfrak{g} = {}^{\cup}\mathfrak{l}$, и $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}$, то тройка $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l} \rangle$ также симплициальна.

Доказательство

°Возьмем некоторые симплициальные тройки $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f}, \mathfrak{m} \rangle$ и $\langle \mathfrak{l}, \mathfrak{g}, \mathfrak{m} \rangle$ такие, что отображения $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ суть смятия, и некоторую непрерывную инъекцию $\mathfrak{h}$ из множества $^{\cup}\mathfrak{k} = \operatorname{dom} \mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom} \mathfrak{g} = {}^{\cup}\mathfrak{l}$ такую, что $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}$.

°Рассмотрим симплекс K из комплекса $\mathfrak{k}$.
°Обозначим $\mathfrak{f}^{\circ}(\mathsf{K}) =: \mathsf{M} \in \mathfrak{m}$.
°Заметим, что на этом симплексе K выполняется $(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h})|_{\mathsf{K}} = \mathfrak{f}|_{\mathsf{K}}$, и, следовательно, $\mathfrak{g}\big|_{\mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{K})} \circ \mathfrak{h}|_{\mathsf{K}} = \mathfrak{f}|_{\mathsf{K}}$.
°Еще заметим, что из условия утверждения сего следует, что

$$\mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{K}) \subset (\mathfrak{g}^{-1})^{\circ}(\mathsf{M}) = \bigcup_{\mathsf{L}:\mathfrak{g}^{\circ}(\mathsf{L})=\mathsf{M}} \mathsf{L}.$$

При этом все такие симплексы L одной размерности, и, следовательно, являются связными компонентами в их объединении.
°Из непрерывности отображения $\mathfrak{h}$ следует, что множество $\mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{K})$ связно, и, следовательно, лежит в только одном из симплексов L таком, что $\mathsf{L} \in \mathfrak{l}$ и $\mathfrak{g}^{\circ}(\mathsf{L}) = \mathsf{M}$.
°Из равенства $\mathfrak{g}^{\circ}(\mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{K})) = \mathsf{M}$ и того, что отображение $\mathfrak{g}$ — смятие, вытекает, что $\mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{K}) = \mathsf{L}$, то есть $\mathfrak{h}$—образ симплекса K заполняет весь симплекс L.
°Аффинность отображения $\mathfrak{h}$ на симплексе K следует из формулы $\mathfrak{h}|_{\mathsf{K}} = (\mathfrak{g}|_{\mathsf{L}})^{-1} \circ \mathfrak{f}|_{\mathsf{K}}$, причем верно также, что $\mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{K}) = ((\mathfrak{g}|_{\mathsf{L}})^{-1} \circ \mathfrak{f}|_{\mathsf{K}})^{\circ}(\mathsf{K})$, где L — единственный, как выяснено выше, симплекс из комплекса $\mathfrak{l}$, пересекающий множество $\mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{K})$. Q.E.D.

17 °Th · Для всяких кусочно—аффинных смятий $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ если $\mathfrak{h}$ — некоторая непрерывная биекция множества $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom}\mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}$, то отображение $\mathfrak{h}$ кусочно—аффинно.

Доказательство

°Возьмем некоторые кусочно—аффинные смятия $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ и некоторую непрерывную биекциюя $\mathfrak{h}$ множества $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom}\mathfrak{g}$ такую, что $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}$.
°Еще возьмем некоторые комплексы $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$, относительно которых соответственно аффинны отображения $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$.
°По Замечанию 4 существует полный симплициальный комплекс $\mathfrak{m}$, измельчающий множество $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathfrak{k}) \cup \mathfrak{g}^{\circ\circ}(\mathfrak{l})$.
°Образуем комплексы $\mathfrak{m}_{\mathfrak{f}}$ и $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$ относительно пар комплексов $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ соответственно, как это описано в Утверждении 7, с последующею их диагонализациею:

- определим вспомогательные выпуклополиэдральные комплексы

$$\mathfrak{m}'_{\mathfrak{f}} := \operatorname{frg}^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{k},\mathfrak{f}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{m}'_{\mathfrak{g}} := \operatorname{frg}^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{l},\mathfrak{g}};$$

- по Замечанию 5 найдутся

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{m}_{\mathfrak{f}} & \text{— некоторая диагонализация комплекса } \mathfrak{m}'_{\mathfrak{f}}, \\ \mathfrak{m}_{\mathfrak{g}} & \text{— некоторая диагонализация комплекса } \mathfrak{m}'_{\mathfrak{g}}. \end{array}$$

°Заметим, что для троек $\langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{f}, \mathfrak{m} \rangle$, $\langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \mathfrak{m} \rangle$ выполнены условия Утверждения 16.
°Таким образом, $\mathfrak{h}$ кусочно—аффинна. Q.E.D.

Автоморфизмы смятий

°Df · Скажем, что непрерывная инъекция $\mathfrak{m}$ — $\mathfrak{a}$—*автоморфизм* для некоторого PA—смятия $\mathfrak{a}$, если $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{m}$.
°Заметим, что по Утверждению 17 отображение $\mathfrak{m}$ кусочно—аффинно.

°Th · Для всякого PA—смятия $\mathfrak{a}$ совокупность всех $\mathfrak{a}$—автоморфизмов образует конечную группу относительно операции композиции отображений.

Доказательство

°Возьмем некоторое PA—смятие $\mathfrak{a}$.
°Заметим что если $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{m}'$, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{m} = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{m}') \circ \mathfrak{m} = \mathfrak{a} \circ (\mathfrak{m}' \circ \mathfrak{m})$.

°Покажем конечность.
°Выберем некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$ и некоторый его симплекс K.
°Обозначим $\mathsf{P} := \mathfrak{m}^{\circ}(\mathsf{K})$.
°Заметим, что $\mathfrak{a}|_{\mathsf{K}} = \mathfrak{a}|_{\mathsf{P}} \circ \mathfrak{m}|_{\mathsf{K}}$.
°Выберем некоторый симплекс K' из $\mathbf{k}$ такой, что $\mathsf{K}' \cap \mathsf{P} \neq \varnothing$, и некоторую точку x из $\mathsf{K}' \cap \mathsf{P}$.
°Тогда $\mathfrak{a}^{\circ}(\mathsf{K}') \ni \mathfrak{a}(x) \in \mathfrak{a}^{\circ}(\mathsf{P}) = \mathfrak{a}^{\circ}(\mathsf{K})$. Откуда $\mathfrak{a}^{\circ}(\mathsf{K}') \cap \mathfrak{a}^{\circ}(\mathsf{K}) \neq \varnothing$.
°По симплициальности отображения $\mathfrak{a}$ относительно комплекса $\mathbf{k}$ и дизъюнктивности комплекса $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ заметим, что $\mathfrak{a}^{\circ}(\mathsf{K}') = \mathfrak{a}^{\circ}(\mathsf{K})$, откуда $\dim \mathsf{K}' = \dim \mathsf{K}$. Таким образом, множество P может пересекаться только с симплексами размерности $\dim \mathsf{K}$ из комплекса $\mathbf{k}$.
°Из связности множества P (как непрерывного образа связного множества) следует, что оно пересекается только с одним симплексом K', а тем самым $\mathsf{P} \subset \mathsf{K}'$ и, следовательно, $\mathsf{P} = \mathsf{K}'$.
°Итак, отображение $\mathfrak{m}$ может переводить каждый симплекс из комплекса $\mathbf{k}$ только в его же симплексы, причем аффинно. И число возможностей конечно. Q.E.D.

Смятия и консумпции

18 °Th · Для произвольного отображения $\mathfrak{f}$, действующего на некотором многогранном множестве в пространство Uni, верны следующие два утверждения:

1. если найдется выпуклое и непустое подмножество P множества $\operatorname{dom} \mathfrak{f}$, для которого $\mathfrak{f}|_{\mathsf{P}}$ аффинно и не инъективно, то отображение $\mathfrak{f}$ — консумпция;

2. если отображение $\mathfrak{f}$ — консумпция, то для всякого конечного дизъюнктивного разбиения $\mathfrak{p}$ множества $\operatorname{dom} \mathfrak{f}$ на выпуклые множества найдется в $\mathfrak{p}$ такой элемент P, что $\mathfrak{f}|_{\mathsf{P}}$ не инъективна.

Доказательство
°Возьмем некоторое отображение $\mathfrak{f}$ такое, что $\operatorname{dom} \mathfrak{f}$ — полиэдр.
°Если отображение $\mathfrak{f}|_{\mathsf{P}}$ аффинно и не инъективно, и множество P выпукло и не пусто, то P содержит в себе не менее двух точек a, b (а значит и отрезок между ними), образы которых совпадают. Таким образом, $\mathfrak{f}^{\circ}((a, b))$ — одноточечное множество.
°Если отображение $\mathfrak{f}$ — консумпция, то существует ребро (a, b) такое, что $[a, b] \subset \operatorname{dom} \mathfrak{f}$ и $\mathfrak{f}^{\circ}((a, b))$ точечно.
°Заметим, что найдется в $\mathfrak{p}$ такой элемент P, что $(a, b) \cap \mathsf{P}$ содержит в себе некоторое ребро, ибо $\mathfrak{p}$ — конечное разбиение на выпуклые множества. Тогда образ этого ребра одноточечен. Q.E.D.

19 °Th · Для всякого кусочно–аффинного отображения $\mathfrak{f}$ следующие высказывания эквивалентны друг другу:

1. $\mathfrak{f}$ — консумпция;

2. отображение $\mathfrak{f}$ аффинно относительно некоторого полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$ и $\mathfrak{f}$ не инъективна на одном из симплексов в $\mathbf{k}$;

3. для всякого полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ аффинно, верно, что отображение $\mathfrak{f}$ не инъективно на одном из симплексов в $\mathbf{k}$.

Доказательство
°Возьмем некоторое кусочно–аффинное отображение $\mathfrak{f}$ и некоторый комплекс $\mathbf{k}$, относительно которого аффинно отображение $\mathfrak{f}$.
°Если отображение $\mathfrak{f}$ — консумпция, то из Утверждения 18 следует, что отображение $\mathfrak{f}$ не инъективно на некотором симплексе из $\mathbf{k}$, отсюда же следует и последний пункт.
°Обратные переходы также следуют из того же Утверждения 18. Q.E.D.

20 °Th · Для всяких двух кусочно–аффинных отображений $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ таких, что $\operatorname{im}\mathfrak{f} = \operatorname{dom}\mathfrak{g}$, верно, что отображение $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ — смятие, если и только если оба отображения $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ суть смятия.

Доказательство

°Возьмем некоторые кусочно–аффинные отображения $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ такие, что $\operatorname{im}\mathfrak{f} = \operatorname{dom}\mathfrak{g}$.
°Ясно, что утверждаемое эквивалентно следующему:

“$\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ — консумпция $\iff$ $\mathfrak{f}$ или $\mathfrak{g}$ — консумпция”

°Заметим, что $(\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f})^\circ((a,b)) = \mathfrak{g}^\circ(\mathfrak{f}^\circ((a,b)))$.
°Если $\mathfrak{f}$ отображает (a,b) в одноточечное множество, то $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ так же.
°Если же $\mathfrak{f}^\circ((a,b))$ не одноточечно, то оно является ломаною и $\mathfrak{g}^\circ$–образ от него одноточечен, а значит $\mathfrak{g}$ отображает некоторое ребро, включенное в ту ломаную, в одноточечное множество.
°Если $\mathfrak{f}$ отображет некоторое ребро в одноточечное множество, то $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ — такое же.
°Если $\mathfrak{g}$ — консумпция, то существует ребро, вырождаемое отображением $\mathfrak{g}$, а его $\mathfrak{f}$–прообраз содержит в себе некоторое ребро, которое вырождается отображением $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$. Q.E.D.

Регулярность

°Inf · В выпуклополиэдральном комплексе $\mathbf{k}$ полиэдр — *главный*, если и только если он не является гранью во всяком ином полиэдре того же комплекса $\mathbf{k}$. Скажем еще, что точка множества A *регулярна* во множестве A, если у нее найдется гомеоморфная некоторому $\mathbb{R}^\gamma$ окрестность в этом множестве.

21 °Заметка · Во всяком выпуклополиэдральном комплексе $\mathbf{k}$ всякий главный полиэдр является окрестностью в теле того же комплекса каждой своей точки. Таким образом, точки главного полиэдра регулярны во множестве ${}^\cup\mathbf{k}$.

°Df · Скажем, что PA–отображение *регулярно*, если оно инъективно в некоторой окрестности каждой регулярной точки своей области действия.

22 °Th · Всякое регулярное кусочно–аффинное отображение есть смятие.

Доказательство

°Рассмотрим некоторое регулярное кусочно–аффинное отображение $\mathfrak{f}$ и комплекс $\mathbf{k}$, относительно которого оно аффинно.
°Допустим, что есть симплекс $K \in \mathbf{k}$ такой, что $\mathfrak{f}|_K$ вырождено.
°Заметим, что существует в комплексе $\mathbf{k}$ симплекс M такой, что $K \lhd M$ и M максимален по отношению $\lhd$ в комплексе $\mathbf{k}$.
°Еще заметим, что отображение $\mathfrak{f}|_M$ вырождено, ибо $\mathfrak{f}$ аффинно на M и непрерывно.
°Однако по Замечанию 21 симплекс M состоит из регулярных в теле комплекса $\mathbf{k}$ точек, и мы пришли к противоречию со свойствами отображения $\mathfrak{f}$. Q.E.D.

23 °Th · Таким образом, из Утверждений 22 и 17 следует, что для всяких кусочно–аффинных регулярных отображений $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ и непрерывной биекции $\mathfrak{h}$ множества $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ на множество $\operatorname{dom}\mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{h} = \mathfrak{f}$, верно, что отображение $\mathfrak{h}$ кусочно–аффинно.

1.2.2 Контракции

Композиция

24 °Th · Для всякого непрерывного отображения $\mathfrak{f}$ из компактного топологического пространства в хаусдорфовое если $\mathfrak{f}$–прообраз всякого одноточечного множества ее образного пространства связен, то $\mathfrak{f}$–прообраз всякого связного замкнутого подмножества ее образа замкнут и связен.

Доказательство

°Возьмем некоторое непрерывное отображение $\mathfrak{f}$ из компактного топологического пространства в хаусдорфовое такое, что $\mathfrak{f}$—прообраз всякого одноточечного множества ее образного пространства связен.
°Рассмотрим некоторое непустое связное замкнутое множество Y, включенное в $\operatorname{im}\mathfrak{f}$.
°И обозначим $A := (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(Y)$. Ясно, что оно замкнуто.
°Чтобы доказать связность множества A, рассмотрим такие два множества B и C, что $B \cup C = A$, $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$ и B, C — замкнуты.
°Заметим, что B и C компактны по компактности множества $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$.
°Обозначим $B' := \mathfrak{f}^{\circ}(B)$ и $C' := \mathfrak{f}^{\circ}(C)$.
°Из компактности множеств B и C, непрерывности отображения $\mathfrak{f}$ и хаусдорфовости образного пространства следует, что множества B' и C' замкнуты.
Ясно также, что $B' \cup C' = Y$. Из связности множества Y и замкнутости и непустоты множеств B' и C' следует, что $B' \cap C' \neq \varnothing$.
°Возьмем некоторую точку $b \in B' \cap C'$.
°По условию множество $D := (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\{b\})$ связно. Заметим, что $D \cap B \neq \varnothing$ и $D \cap C \neq \varnothing$. Еще заметим, что $D = (D \cap B) \cup (D \cap C)$. Таким образом $(D \cap B) \cap (D \cap C) \neq \varnothing$.
°Итак, $B \cap C \neq \varnothing$. Q.E.D.

25 °Th · Композиция $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ двух PA—контракций $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ — также PA—контракция.
Доказательство
°Рассмотрим некоторые PA—контракции $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ такие, что $\operatorname{im}\mathfrak{f} = \operatorname{dom}\mathfrak{g}$. Возьмем точку $\mathfrak{a} \in \operatorname{im}\mathfrak{g}$.
°Обозначим $A := (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}((\mathfrak{g}^{-1})^{\circ}(\{\mathfrak{a}\}))$.
°Множество A является $\mathfrak{f}$—прообразом связного замкнутого множества $(\mathfrak{g}^{-1})^{\circ}(\{\mathfrak{a}\})$. По Утверждению 24 оно связно (и замкнуто). Q.E.D.

Прообразный симплекс

26 °Th · Для всякого полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$, всякой контракции $\mathfrak{f}$, симплициальной относительно комплекса $\mathbf{k}$, и всякого симплекса L из комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ размерности $\nu := \dim\operatorname{dom}\mathfrak{f} = \dim{}^{\cup}\mathbf{k}$ найдется один и только один симплекс K комплекса $\mathbf{k}$, $\mathfrak{f}$—образ которого есть симплекс L.
Доказательство
°Рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$, некоторую контракцию $\mathfrak{f}$, симплициальную относительно комплекса $\mathbf{k}$, и некоторый симплекс L из комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ размерности $\nu := \dim\operatorname{dom}\mathfrak{f} = \dim{}^{\cup}\mathbf{k}$.
°Обозначим множество $\mathfrak{a} := \{K : K \in \mathbf{k}, \quad \mathfrak{f}^{\circ}(K) = L\}$.
°Заметим, что у каждого симплекса K из множества $\mathfrak{a}$ размерность равна ν. Таким образом они все одной размерности, и, следовательно, суть связные компоненты в их объединении ${}^{\cup}\mathfrak{a}$.
°Возьмем некоторую точку x из симплекса L.
°Тогда множество $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\{x\})$ связно и пересекается с каждым симплексом из $\mathfrak{a}$. Следовательно, $\operatorname{card}\mathfrak{a} = 1$. Q.E.D.

1.2.3 Связь смятий и контракций

Общетопологическое построение

27 °Th · Для всяких непрерывных отображений $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, определенных на некотором компактном топологическом пространстве, если $\operatorname{im}\mathfrak{b}$ хаусдорфово, и отображение $\mathfrak{c}$ таково, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} \circ \mathfrak{b}$, то отображение $\mathfrak{c}$ непрерывно.
Доказательство
°Рассмотрим некоторое замкнутое подмножество F множества $\operatorname{im}\mathfrak{a}$.

°Тогда

$$(\mathfrak{c}^{-1})^{\circ}(F) = \{x : \mathfrak{c}(x) \in F\} = \{x : \exists y(\mathfrak{b}(y) = x,\ \mathfrak{c}(x) \in F)\} =$$
$$= \{x : \exists y(\mathfrak{b}(y) = x,\ \mathfrak{c}(x) = \mathfrak{c}(\mathfrak{b}(y)) = \mathfrak{a}(y) \in F)\} = \mathfrak{b}^{\circ}((\mathfrak{a}^{-1})^{\circ}(F)).$$

°При этом множество $(\mathfrak{a}^{-1})^{\circ}(F)$ замкнуто как непрерывный прообраз замкнутого, а также оно компактно как замкнутое подмножество компактного.
Множество же $\mathfrak{b}^{\circ}((\mathfrak{a}^{-1})^{\circ}(F))$ компактно как непрерывный образ компактного, и замкнуто как компактное подмножество хаусдорфова.
°Итак, множество $(\mathfrak{c}^{-1})^{\circ}(F)$ замкнуто, а потому отображение $\mathfrak{c}$ непрерывно. Q.E.D.

Построение гомеоморфизма

28 °Th · Для всяких кусочно–аффинных смятий $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ и кусочно–аффинных контракций $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ если $\mathfrak{f}_1 \circ \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2 \circ \mathfrak{g}_2$ (заметим здесь, что $\operatorname{dom}\mathfrak{g}_1 = \operatorname{dom}\mathfrak{g}_2 =: R$, а также $\operatorname{im}\mathfrak{f}_1 = \operatorname{im}\mathfrak{f}_2 =: \tilde{R}$), то найдется инъективное кусочно–аффинное действующее на $\operatorname{im}\mathfrak{g}_2$ отображение $\mathfrak{h}$ такое, что $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{f}_1 \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}_2$.

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im}\mathfrak{g}_1 \arrow[dr, "\mathfrak{f}_1"] & & & & \operatorname{im}\mathfrak{g}_1 \arrow[dr, "\mathfrak{f}_1"] & \\
R \arrow[ur, "\mathfrak{g}_1"] \arrow[dr, "\mathfrak{g}_2"'] & & \tilde{R} & \Longrightarrow \exists\mathfrak{h}: & R \arrow[ur, "\mathfrak{g}_1"] \arrow[dr, "\mathfrak{g}_2"'] & & \tilde{R} \\
& \operatorname{im}\mathfrak{g}_2 \arrow[ur, "\mathfrak{f}_2"'] & & & & \operatorname{im}\mathfrak{g}_2 \arrow[ur, "\mathfrak{f}_2"'] \arrow[uu, "\mathfrak{h}"] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство

°Рассмотрим некоторые кусочно–аффинные смятия $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ и кусочно–аффинные контракции $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ такие, что $\mathfrak{f}_1 \circ \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2 \circ \mathfrak{g}_2$.
°Возьмем некоторую ломаную линию L в $\operatorname{dom}\mathfrak{g}_1 = \operatorname{dom}\mathfrak{g}_2$ такую, что $\mathfrak{g}_1{}^{\circ}(L)$ — одноточечное множество.
Тогда $\mathfrak{f}_2{}^{\circ}(\mathfrak{g}_2{}^{\circ}(L)) = \mathfrak{f}_1{}^{\circ}(\mathfrak{g}_1{}^{\circ}(L))$ — одноточечное множество.
Так как $\mathfrak{f}_2$ — смятие, и $\mathfrak{g}_2{}^{\circ}(L)$ — ломаная линия, верно, что $\mathfrak{g}_2{}^{\circ}(L)$ — одноточечное множество.
Итак, отображения $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ одновременно отправляют ломаные в точки.
°Возьмем некоторые точки x и y из $\operatorname{dom}\mathfrak{g}_1$ такие, что $\mathfrak{g}_1(x) = \mathfrak{g}_1(y)$.
Тогда из того, что $\mathfrak{g}_1$ — кусочно–аффинная контракция, следует, что найдется ломаная линия L такая, что $L \subset \operatorname{dom}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1{}^{\circ}(L) = \{\mathfrak{g}_1(x)\}$, $x, y \in L$.
Как уже показано, множество $\mathfrak{g}_2{}^{\circ}(L)$ одноточечно и $\mathfrak{g}_2(x) = \mathfrak{g}_2(y)$.
Итак, отображения $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ одновременно склеивают точки.
°Таким образом, нижеследующая формула корректно определяет отображение $\mathfrak{h}$ — биекцию множеств $\operatorname{dom}\mathfrak{f}_2$ и $\operatorname{dom}\mathfrak{f}_1$:

$$\{\mathfrak{h}(x)\} := \mathfrak{g}_1{}^{\circ}((\mathfrak{g}_2^{-1})^{\circ}(\{x\})), \quad x \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}_2.$$

°Рассмотрим произвольную точку y из $\operatorname{dom}\mathfrak{g}_1 = \operatorname{dom}\mathfrak{g}_2$. Тогда

$$\{\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_2(y))\} = \mathfrak{g}_1{}^{\circ}((\mathfrak{g}_2^{-1})^{\circ}(\{\mathfrak{g}_2(y)\})),$$

то есть

$$\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1. \tag{1}$$

Если $x \in \operatorname{dom}\mathfrak{h}$, то найдется точка y такая, что $\mathfrak{g}_2(y) = x$. Потому

$$(\mathfrak{f}_1 \circ \mathfrak{h})(x) = \mathfrak{f}_1(\mathfrak{h}(\mathfrak{g}_2(y))) = \mathfrak{f}_1(\mathfrak{g}_1(y)) = \mathfrak{f}_2(\mathfrak{g}_2(y)) = \mathfrak{f}_2(x). \tag{2}$$

°Из формулы (1) и Утверждения 27 следует, что отображение $\mathfrak{h}$ непрерывно.
Из формулы (2), Утверждения 17 и непрерывности следует, что отображение $\mathfrak{h}$ кусочно–аффинно.
Q.E.D.

1.3 Разложение кусочно–аффинных отображений

1.3~Введение

Стяжения ребер

°Df · Скажем, что отображение $\mathfrak{a}$ — *стяжение* ребра E относительно комплекса $\mathbf{k}$, если $\mathsf{E} \in \mathbf{k}$, отображение $\mathfrak{a}$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{k}$, ограничение этого отображения на ребро E не инъективно и если две различные точки — вершинные в каких–либо симплексах комплекса $\mathbf{k}$, и не суть обе вершинные в ребре E, то отображение $\mathfrak{f}$ принимает различные значения на этих двух точках.

°Df · Назовем примитивную последовательность $\langle \mathbf{k}, \mathfrak{f}_0, \dots, \mathfrak{f}_\nu \rangle$ *реберно–контракционною* и обозначим это свойство через $\langle \mathbf{k}, \mathfrak{f}_0, \dots, \mathfrak{f}_\nu \rangle \in \mathrm{Seq}_{\mathrm{ec}}[\nu]$, если найдутся ребра (одномерные симплексы) $\mathsf{E}_0, \dots, \mathsf{E}_\nu$ такие, что отображение $\mathfrak{f}_0$ — стяжение ребра E_0 относительно комплекса $\mathbf{k}$, и для всякого $\iota = 1, \dots, \nu$ верно, что отображение $\mathfrak{f}_\iota$ — стяжение ребра E_ι относительно комплекса $(\mathfrak{f}_{\iota-1} \circ \dots \circ \mathfrak{f}_0)^{\circ\circ}(\mathbf{k})$.

Общий взгляд на комплексы

°Inf · *Абстрактный комплекс* A с *отношением подчинения* $\preccurlyeq$ есть множество A с отношением порядка $\preccurlyeq$ на нем, то есть для них верны следующие свойства:

- рефлексивность:
  $$\mathsf{a} \preccurlyeq \mathsf{a}, \quad \forall \mathsf{a} \in \mathsf{A};$$
- антисимметричность:
  $$\mathsf{a} \preccurlyeq \mathsf{b} \quad \& \quad \mathsf{b} \preccurlyeq \mathsf{a} \Longrightarrow \mathsf{a} = \mathsf{b}, \quad \forall \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathsf{A};$$
- транзитивность:
  $$\mathsf{a} \preccurlyeq \mathsf{b} \quad \& \quad \mathsf{b} \preccurlyeq \mathsf{c} \Longrightarrow \mathsf{a} \preccurlyeq \mathsf{c}, \quad \forall \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathsf{A}.$$

°Пример · Важный пример абстрактного комплекса — абстрактный (простой) граф, то есть произвольное конечное множество элементов — множеств мощности 1 или 2 — с условием, что если множество мощности 2 принадлежит графу, то каждое его подмножество мощности 1 также принадлежит графу. Отношение же подчинения есть включение одного элемента в другой.

29 °Inf · У произвольного подмножества B некоторого комплекса A с отношением подчинения $\preccurlyeq$ определяются следующие три множества:

- *звезда*:
  $$\mathrm{St}^{\preccurlyeq}_{\mathsf{A}}\, \mathsf{B} := \{\mathsf{a} : \exists \mathsf{b}(\mathsf{b} \in \mathsf{B} \quad \& \quad \mathsf{b} \preccurlyeq \mathsf{a})\};$$
- *замыкание*:
  $$\mathrm{Cl}^{\preccurlyeq}_{\mathsf{A}}\, \mathsf{B} := \{\mathsf{a} : \exists \mathsf{b}(\mathsf{b} \in \mathsf{B} \quad \& \quad \mathsf{a} \preccurlyeq \mathsf{b})\};$$
- *линк*:
  $$\mathrm{Lk}^{\preccurlyeq}_{\mathsf{A}}\, \mathsf{B} := (\mathrm{Cl}^{\preccurlyeq}_{\mathsf{A}}\, \mathrm{St}^{\preccurlyeq}_{\mathsf{A}}\, \mathsf{B}) \setminus (\mathrm{St}^{\preccurlyeq}_{\mathsf{A}}\, \mathrm{Cl}^{\preccurlyeq}_{\mathsf{A}}\, \mathsf{B}).$$

1.3.1 Стяжения ребер

Критерий контракции у стяжений ребер

30 °**Заметка** · Если некоторый симплекс M и симплициальный комплекс $\mathfrak{m}$ таковы, что $M \cap {}^{\cup}\mathfrak{m} \neq \varnothing$ и $\operatorname{vert} M \subset {}^{\cup}(\operatorname{vert}^{\circ}\mathfrak{m})$, то $M \in \mathfrak{m}$.

31 °**Th** · Стяжение $\mathfrak{f}$ ребра E относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$ является PA–контракциею, если и только если ребро E "линково" в комплексе $\mathbf{k}$, то есть $\operatorname{lk}_{\mathbf{k}}\{E\} = \bigcap\limits_{V:V\lhd E, \dim V=0} \operatorname{lk}_{\mathbf{k}}\{V\}$.

Доказательство
°Обозначим $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{k}) =: \mathbf{k}'$. Еще обозначим $W := {}^{\cup}(\operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{k}))$ и $W' := {}^{\cup}(\operatorname{vert}^{\circ}(\mathbf{k}'))$.
Еще обозначим a_1 и a_2 две вершинные точки ребра E.
°Отметим, что условие линковости этого ребра E имеет вид

$$\operatorname{lk}_{\mathbf{k}}\{E\} = \left(\operatorname{lk}_{\mathbf{k}}\{\{a_1\}\}\right) \cap \left(\operatorname{lk}_{\mathbf{k}}\{\{a_2\}\}\right),$$

что эквивалентно тому, что если

$$A * \{a_1\} \in \mathbf{k}, \quad a_1 \notin \overline{A}, \quad A * \{a_2\} \in \mathbf{k}, \quad a_2 \notin \overline{A},$$

то

$$A * E \in \mathbf{k} \quad \text{и} \quad \overline{A} \cap \overline{E} = \varnothing.$$

°Заметим, что по условию отображение $\mathfrak{f}$ — стяжение ребра E, что влечет равенство $\mathfrak{f}(a_1) = \mathfrak{f}(a_2)$.
°Обозначим $\mathfrak{f}(a_1) =: q$.
°Рассмотрим две точки m и n из комплекса ${}^{\cup}\mathbf{k}$ такие, что $\mathfrak{f}(m) = \mathfrak{f}(n)$.
°К этим точкам введем координаты их относительно комплекса ${}^{\cup}\mathbf{k}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{w:w\in W} \mathfrak{m}_w \cdot w; \\ n &= \sum_{w:w\in W} \mathfrak{n}_w \cdot w. \end{aligned}$$

°По Замечанию 3

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(m) &= \sum_{w:w\in W} \mathfrak{m}_w \cdot \mathfrak{f}(w) = \sum_{w:w\in W\setminus\{a_1,a_2\}} \mathfrak{m}_w \cdot \mathfrak{f}(w) + (\mathfrak{m}_{a_1} + \mathfrak{m}_{a_2}) \cdot q; \\ \mathfrak{f}(n) &= \sum_{w:w\in W} \mathfrak{n}_w \cdot \mathfrak{f}(w) = \sum_{w:w\in W\setminus\{a_1,a_2\}} \mathfrak{n}_w \cdot \mathfrak{f}(w) + (\mathfrak{n}_{a_1} + \mathfrak{n}_{a_2}) \cdot q. \end{aligned}$$

Из единственности координат точки относительно симплициального комплекса заключим, что

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_w = \mathfrak{n}_w & \text{при } w \in W \setminus \{a_1, a_2\}; \\ \mathfrak{m}_{a_1} + \mathfrak{m}_{a_2} = \mathfrak{n}_{a_1} + \mathfrak{n}_{a_2}. \end{cases}$$

°Предположим, что ребро E линково.
°И покажем ниже, что отображение $\mathfrak{f}$ — контракция.
°Возьмем точку x в ${}^{\cup}\mathbf{k}'$ с координатным представлением $x = \sum\limits_{w:w\in W'} \mathfrak{x}_w \cdot w$.
°Если точка x лежит в ${}^{\cup}(\mathbf{k}' \setminus \operatorname{st}_{\mathbf{k}'}\{\{q\}\})$, то $\mathfrak{x}_q = 0$. Следовательно, (так как координаты относительно симплициального комплекса неотрицательны) если точка $\tilde{x}$ с координатным представлением $\tilde{x} = \sum\limits_{w:w\in W} \tilde{\mathfrak{x}}_w \cdot w$ такова, что $\mathfrak{f}(\tilde{x}) = x$, то $\tilde{\mathfrak{x}}_{a_1} + \tilde{\mathfrak{x}}_{a_2} = \mathfrak{x}_q$ и $\tilde{\mathfrak{x}}_w = \mathfrak{x}_{\mathfrak{f}(w)}$ при $w \in W \setminus \{a_1, a_2\}$.
°То есть найдется только одна точка $\tilde{x}$ такая, что $\mathfrak{f}(\tilde{x}) = x$. Итак, в этом случае прообраз одноточечного множества $\{x\}$ связен.

°Если точка $\tilde{x}$ с координатным представлением $\tilde{x} = \sum\limits_{w:w\in W} \tilde{\mathfrak{x}}_w \cdot w$ такова, что $\mathfrak{f}(\tilde{x}) = q$ (то есть $x = q$), то $\tilde{\mathfrak{x}}_{a_1} + \tilde{\mathfrak{x}}_{a_2} = \mathfrak{x}_q = 1$ и $\tilde{\mathfrak{x}}_w = \mathfrak{x}_{\mathfrak{f}(w)} = 0$ при $w \in W \setminus \{a_1, a_2\}$. Итак, в этом случае прообраз одноточечного множества $\{x\}$ есть $\overline{E}$.
°Далее рассмотрим случай $x \in {}^{\cup}\big(\mathrm{st}_{\mathbf{k}'}\{\{q\}\}\big)$ и $x \neq q$.
°К нашей точке x построим несколько объектов. Найдется симплекс S в комплексе $\mathbf{k}'$ такой, что $x \in S * \{q\}$ и $\{q\} \not\triangleleft S$. Найдутся точка y в симплексе S и число ϵ из интервала $(0, 1)$ такие, что $x = \epsilon \cdot q + (1-\epsilon)\cdot y$. По уже доказанному для точки y найдется единственная точка $\tilde{y}$ такая, что $\mathfrak{f}(\tilde{y}) = y$. Аналогично для симплекса S найдется единственный симплекс $\tilde{S}$ такой, что $\mathfrak{f}^{\circ}(\tilde{S}) = S$. Еще определим точки $g_1 := \epsilon \cdot a_1 + (1-\epsilon)\cdot \tilde{y}$ и $g_2 := \epsilon \cdot a_2 + (1-\epsilon)\cdot\tilde{y}$. И $U := (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\{x\})$.
°Если точка $\tilde{x}$ с координатным представлением $\tilde{x} = \sum\limits_{w:w\in W} \tilde{\mathfrak{x}}_w \cdot w$ такова, что $\mathfrak{f}(\tilde{x}) = x$, то

$$\mathfrak{f}(\tilde{x}) = \sum_{w:w\in W\setminus\{a_1,a_2\}} \tilde{\mathfrak{x}}_w \cdot \mathfrak{f}(w) + \tilde{\mathfrak{x}}_{a_1}\cdot q + \tilde{\mathfrak{x}}_{a_2}\cdot q = (1-\epsilon)\cdot y + \epsilon\cdot q.$$

По единственности координат точки относительно симплициального комплекса видим, что $\tilde{x} = (1-\epsilon)\cdot\tilde{y} + \tilde{\mathfrak{x}}_{a_1}\cdot a_1 + \tilde{\mathfrak{x}}_{a_2}\cdot a_2$ и $\tilde{\mathfrak{x}}_{a_1} + \tilde{\mathfrak{x}}_{a_2} = \epsilon$. Обозначим $\alpha := \dfrac{\tilde{\mathfrak{x}}_{a_1}}{\epsilon}$. Тогда

$$\tilde{x} = (1-\epsilon)\cdot\tilde{y} + \alpha\cdot\epsilon\cdot a_1 + (1-\alpha)\cdot\epsilon\cdot a_2 = \tag{3}$$

$$= \alpha\cdot(1-\epsilon)\cdot\tilde{y} + (1-\alpha)\cdot(1-\epsilon)\cdot\tilde{y} + \alpha\cdot\epsilon\cdot a_1 + (1-\alpha)\cdot\epsilon\cdot a_2 =$$
$$= \alpha\cdot g_1 + (1-\alpha)\cdot g_2.$$

°Если точка $\tilde{x} \in (g_1, g_2)$, то $\tilde{x} \in \tilde{S} * E$. По предположенной линковости ребра E получим, что $\tilde{x} \in U$. То есть $U = [g_1, g_2]$. И потому отображение $\mathfrak{f}$ — контракция.
°Предположим теперь, что $\mathfrak{f}$ — PA–контракция.
°Рассмотрим симплекс $\tilde{S}$ из $\big(\mathrm{lk}_{\mathbf{k}}\{\{a_1\}\}\big) \cap \big(\mathrm{lk}_{\mathbf{k}}\{\{a_2\}\}\big)$.
°Обозначим $\mathfrak{f}^{\circ}(\tilde{S}) =: S$.
°Возьмем в симплексе $S * \{q\}$ некоторую точку x.
°Тогда множество $U := (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\{x\})$ связно. Как уже показано в формуле (3) $U \subset [g_1, g_2]$. И по построению $g_1, g_2 \in U$. То есть $U = [g_1, g_2]$.
°Таким образом, $\tilde{S} * E \cap \mathrm{dom}\,\mathfrak{f} \neq \varnothing$. И по замечанию 30 $\tilde{S} * E \in \mathbf{k}$ и по построению $\overline{\tilde{S}} \cap \overline{E} = \varnothing$. И всё полностью обосновано. Q.E.D.

Связность прообраза

32 °Th · Для всякого стяжения $\mathfrak{f}$ ребра E относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$ и всякого симплекса $L \in \mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ верно, что множество $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L})$ связно.

Доказательство

°Рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$, некоторое его ребро E и стяжение $\mathfrak{f}$ ребра E относительно комплекса $\mathbf{k}$.
°Обозначим $\mathfrak{f}^{\circ}(E) = \{v\}$ — точечное множество.
°Заметим, что $\{v\}$ и L соотносятся следующим образом:

1. или $\neg\{v\} \triangleleft L$,
2. или $\{v\} \triangleleft L$.

°Рассмотрим случай (1): вершины в $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(L)$ не суть вершины в ребре $E =: (a, b)$.
°Заметим, что отображение $\mathfrak{f}^{\circ}$ инъективно на множестве этих вершин, а значит и на всех симплексах на этих вершинах, следовательно, $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L})$ — замкнутый симплекс из комплекса $\mathbf{k}$.
°Рассмотрим случай (2): $\mathrm{vert}\, L =: \{v, w_1, \ldots, w_\nu\}$.

°Заметим, что

$$(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L}) = \bigcup_{S:S\in\mathbf{k},\mathrm{vert}\,S\subset\{a,b,\mathfrak{f}^{-1}(w_1),\dots,\mathfrak{f}^{-1}(w_\nu)\}} S.$$

°Симплекс L является образом некоторого симплекса не меньшей размерности, то есть найдется в комплексе $\mathbf{k}$ симплекс K, вершинное множество которого включено в $\{a, b, \mathfrak{f}^{-1}(w_1), \dots, \mathfrak{f}^{-1}(w_\nu)\}$, $\mathrm{card\,vert}\,K = \nu + 1$. Таким образом можно считать, что $a \in \mathrm{vert}\,K$.
°Возьмем две точки $x', x'' \in (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(\overline{L})$.
°Тогда $x' \in S'$ и $x'' \in S''$, для некоторых симплексов S', S'' в комплексе $\mathbf{k}$ таких, что $\mathrm{vert}\,S', \mathrm{vert}\,S'' \subset \{a, b, \mathfrak{f}^{-1}(w_1), \dots, \mathfrak{f}^{-1}(w_\nu)\}$.
°Рассмотрим случаи взаиморасположения.
°$S', S'' \lhd K$: здесь x' и x'' связаны отрезком в $\overline{K}$.
°$S' \lhd K, \neg(S'' \lhd K)$: у симплекса S'' есть вершинная точка не из $\mathrm{vert}\,K$, т.е. точка b.
В связи с тем, что $x'' \in \overline{S''}$, ясно, что точка x'' связана с точкою b в $\overline{S''}$.
Далее заметим, что точка b связана отрезком $\overline{E}$ с точкою a, ибо $v \in \mathrm{vert}\,L$.
Ясно также, что точка a связана с точкою x' в $\overline{K}$.
°$\neg(S' \lhd K), \neg(S'' \lhd K)$: у симплексов S', S'' есть вершинная точка b, т.е. точки x', x'' связаны с точкою b. Q.E.D.

°**Заметка** · Следующее утверждение подобно Утверждению 24. Еще заметим, что прообраз вершины связен по Утверждению 32, но прообраз одноточечного подмножества образа стяжения не всегда связен, например, рис. 1.1 (пример и для Утверждения 31).

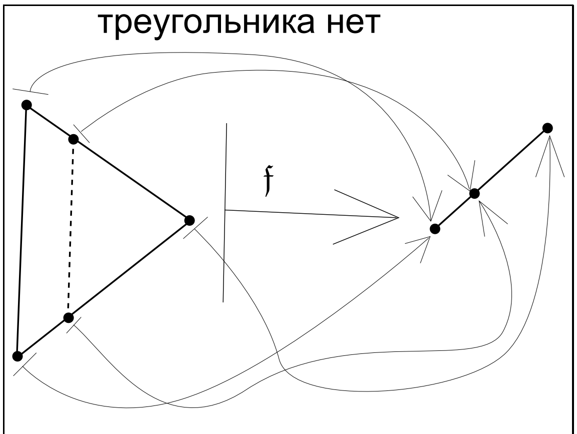


Рис. 1. пример несвязного прообраза

33 °**Th** · Для стяжения $\mathfrak{f}$ ребра E относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$ и всякого подкомплекса $\mathbf{t}$ в комплексе $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$, у которого множество ${}^{\cup}\mathbf{t}$ замкнуто и связно, верно, что множество $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}({}^{\cup}\mathbf{t})$ связно и замкнуто.

Доказательство

°Выберем некоторый подкомплекс $\mathbf{t}$ в комплексе $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ такой, что множество ${}^{\cup}\mathbf{t}$ замкнуто и связно. Еще выберем некоторые точки x' и x'' из $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}({}^{\cup}\mathbf{t})$.
°Для x' и x'' найдутся T', T'' такие, что

$$T', T'' \in \mathbf{t}, \quad x' \in (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(T'), \quad x'' \in (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(T'').$$

°По Утверждению 32

- соединим точку x' с некоторою вершинною точкою в $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(T')$;
- соединим точку x'' с некоторою вершинною точкою в $(\mathfrak{f}^{-1})^{\circ}(T'')$.

°Таким образом можно считать, что точки x', x'' суть вершинные, и точки $\mathfrak{f}(x'), \mathfrak{f}(x'')$ также суть вершинные в $\mathbf{t}$, и от вершинной точки $\mathfrak{f}(x')$ до вершинной точки $\mathfrak{f}(x'')$ в $\mathbf{t}$ есть пореберный путь

$$\{\mathfrak{f}(x')\} = V_0, \quad U_1, \quad V_1, \quad \ldots, \quad U_\nu, \quad V_\nu = \{\mathfrak{f}(x'')\},$$

где U_ι — ребра в $\mathbf{t}$, и V_ι — вершины этих ребер:

$$V_{\iota-1} \lhd U_\iota \rhd V_\iota \quad \text{и} \quad \{\mathfrak{f}(x')\} \lhd U_1, \quad \{\mathfrak{f}(x'')\} \lhd U_\nu.$$

°У элементов этого пути прообразы

$$(\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\{\mathfrak{f}(x')\}), \quad (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\overline{U_1}), \quad (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(V_1), \ldots, \quad (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\overline{U_\nu}), \quad (\mathfrak{f}^{-1})^\circ(\{\mathfrak{f}(x'')\})$$

связны по Утверждению 32 и каждая последовательная соседняя пара имеет общую часть, т.е. точки x', x'' связаны.
°Замкнутость следует из непрерывности. Q.E.D.

Дизъюнктивность и переход

34 °Th · Для стяжения $\mathfrak{f}$ ребра E относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$ и всякого непустого множества $\mathbf{S}$ попарно непересекающихся (то есть множество $\mathbf{S}$ дизъюнктивно) полных связных подкомплексов полного симплициального комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ верно, что множество $\boldsymbol{W} := \{\mathbf{d} : \exists \mathbf{s}(\mathbf{s} \in \mathbf{S}, \mathbf{d} = (\mathfrak{f}^{-1})^{\circ\circ}(\mathbf{s}))\}$ дизъюнктивно, непусто и состоит из того же числа элементов, что и $\mathbf{S}$, при этом тело каждого элемента (а каждый такой элемент — симплициальный комплекс) множества $\boldsymbol{W}$ замкнуто и связно (то есть элемент — полный связный симплициальный комплекс).

Доказательство

°Замкнутость следует из непрерывности, а связность из Утверждения 33, дизъюнктивность, непустота и число элементов очевидны. Q.E.D.

35 °Заметка · Из Утверждения 34 следует, что если для некоторой реберно—контракционной примитивной последовательности (см. Определение 6) $\langle \mathbf{k}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\nu \rangle$ обозначить $\mathfrak{g} := (\mathfrak{f}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0)$ и $\boldsymbol{w} := \big\{\{w\} : w \in \mathfrak{g}^\circ\big(^{\cup}\big(\mathrm{vert}^\circ(\mathbf{k})\big)\big)\big\}$ (множество всех вершин симплексов из комплекса $\mathfrak{g}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$), то от отображения $\mathfrak{g}$ устанавливается биективное соответствие множества $\mathfrak{g}^\circ$—прообразов всех вершин из $\boldsymbol{w}$ и самою совокупностью $\boldsymbol{w}$ всех вершин симплексов комплекса $\mathfrak{g}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$.

°Th · Для всяких реберно—контракционных примитивных последовательностей $\langle \mathbf{k}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\alpha \rangle$ и $\langle \mathbf{k}, \mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_\beta \rangle$ таких, что всякое ребро E комплекса $\mathbf{k}$ вырождается отображением $\mathfrak{p} := \mathfrak{f}_\alpha \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0$ (то есть $\mathrm{card}(\mathfrak{p}^\circ(E)) = 1$), если и только если оно вырождается отображением $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}_\beta \circ \ldots \circ \mathfrak{g}_0$, найдется инъективное отображение $\mathfrak{h}$ такое, что тройка $\langle \mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{k}), \mathfrak{h}, \mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathbf{k}) \rangle$ симплициальна и $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Доказательство

°Рассмотрим некоторые реберно—контракционные примитивные последовательности $\langle \mathbf{k}, \mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_\alpha \rangle$ и $\langle \mathbf{k}, \mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_\beta \rangle$.
°Предположим, что всякое ребро E комплекса $\mathbf{k}$ вырождается отображением $\mathfrak{p} := \mathfrak{f}_\alpha \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_0$ (то есть $\mathrm{card}(\mathfrak{p}^\circ(E)) = 1$), если и только если оно вырождается отображением $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}_\beta \circ \ldots \circ \mathfrak{g}_0$.
°По Утверждению 35 сопоставим вершинам в $\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ их $\mathfrak{p}^\circ$—прообразы, и заметим, что эти множества суть $\mathfrak{q}^\circ$—прообразы вершин в $\mathfrak{q}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$, чем получим соответствие на вершинах, ибо отображения $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ понижают размерность каждого симплекса в комплексе $\mathbf{k}$ на одинаковое число.
°Действительно, если $K \in \mathbf{k}$, то $K = K_1 * K_2 = K_3 * K_4$, где $\mathfrak{p}|_{K_1}$ постоянно, а $\mathfrak{p}|_{K_2}$ инъективно; $\mathfrak{q}|_{K_3}$ постоянно, а $\mathfrak{q}|_{K_4}$ инъективно; достаточно показать, что $K_1 = K_3$ в случае, когда $\mathfrak{p}|_K$ и $\mathfrak{q}|_K$ вырождены.
°Рассмотрим K_1. Если $\mathfrak{q}|_{K_1}$ не постоянно, то найдется ребро S такое, что $S \lhd K_1$ и $\mathfrak{q}|_S$ инъективно, что противоречит условию одновременной вырожденности.
°Продолжим полученное соответствие вершин по аффинности на каждом симплексе в $\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$ до отображения $\mathfrak{h}$.
Если $L \in \mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$, то $\exists K(K \in (\mathfrak{p}^{-1})^\circ(L), \mathfrak{p}|_K$ инъективно). Тогда $\mathfrak{q}|_K$ инъективно и вершины симплекса $\mathfrak{q}^\circ(K)$ суть $\mathfrak{h}$—образы вершин симплекса L.

1.3.2 Разложение на комплексе

Выделение стяжения ребра

36 °Th · Для всякого полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$ и всякой консумпции $\mathfrak{f}$, симплициальной относительно его, найдется стяжение $\mathfrak{h}$ некоторого ребра E относительно комплекса $\mathfrak{k}$, а также симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$ отображение $\mathfrak{g}$, такие, что $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{f}$.

Доказательство

°Рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$ и консумпцию $\mathfrak{f}$, симплициальную относительно его.

°По Утверждению 19 найдется такой K, что $\mathsf{K} \in \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{f}|_{\mathsf{K}}$ — не инъективно. При этом (в связи с тем, что отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно $\mathfrak{k}$) существует одномерный симплекс E такой, что $\mathsf{E} \lhd \mathsf{K}$, и отображение $\mathfrak{f}$ отображает две вершинные точки a и b ребра E в одну точку s.

°Таким образом, по Замечанию 3

$$\mathfrak{f}(u) = \sum_{v: v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{k}), v \neq a, b} \mathfrak{k}_u^v \mathfrak{f}(v) + (\mathfrak{k}_u^a + \mathfrak{k}_u^b)s, \quad u \in \operatorname{dom} \mathfrak{f}.$$

°Возьмем точку c вне аффинной оболочки множества ${}^{\cup}\mathfrak{k}$ и определим отображение $\mathfrak{h}$ на $\operatorname{dom}\mathfrak{f}$ по формуле

$$\mathfrak{h}(u) := \sum_{v: v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{k}), v \neq a, b} \mathfrak{k}_u^v v + (\mathfrak{k}_u^a + \mathfrak{k}_u^b)c, \quad u \in \operatorname{dom} \mathfrak{f}.$$

°При этом ясно, что отображение $\mathfrak{h}$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{k}$, комплекс $\mathfrak{l} := \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$ полон, ${}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{l})) = \{c\} \cup ({}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{k})) \setminus \{a, b\})$, отображение $\mathfrak{h}$ — стяжение ребра E относительно комплекса $\mathfrak{k}$ и

$$\mathfrak{l}_{\mathfrak{h}(u)}^v = \begin{cases} \mathfrak{k}_u^v, & \text{если } v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{l}), \quad v \neq c, \quad u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}; \\ \mathfrak{k}_u^a + \mathfrak{k}_u^b, & \text{если } v = c, \quad u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}. \end{cases}$$

°Определим на $\operatorname{im}\mathfrak{h} = {}^{\cup}\mathfrak{l}$ еще отображение $\mathfrak{g}$ по формуле

$$\mathfrak{g}(z) := \sum_{v: v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{l}), v \neq c} \mathfrak{l}_z^v \mathfrak{f}(v) + \mathfrak{l}_z^c s, \quad z \in \operatorname{im}\mathfrak{h}.$$

°При этом отображение $\mathfrak{g}$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{l}$, и

$$(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h})(u) = \mathfrak{g}(\mathfrak{h}(u)) = \sum_{v: v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{l}), v \neq c} \mathfrak{l}_{\mathfrak{h}(u)}^v \mathfrak{f}(v) + \mathfrak{l}_{\mathfrak{h}(u)}^c s =$$

$$= \sum_{v: v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{l}), v \neq c} \mathfrak{k}_u^v \mathfrak{f}(v) + (\mathfrak{k}_u^a + \mathfrak{k}_u^b)s =$$

$$= \sum_{v: v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{k}), v \neq a, b} \mathfrak{k}_u^v \mathfrak{f}(v) + (\mathfrak{k}_u^a + \mathfrak{k}_u^b)s = \mathfrak{f}(u), \quad u \in \operatorname{dom}\mathfrak{f}.$$

Q.E.D.

Построение разложения

°Df · Определим у пары $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{f} \rangle$, где отображение $\mathfrak{f}$ аффинно относительно комплекса $\mathfrak{k}$, *число вырождения* $\mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathfrak{k})$ по формуле $\mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathfrak{k}) := \operatorname{card}\{\mathsf{E} : \mathsf{E}$ — ребро в комплексе $\mathfrak{k}$, на котором отображение $\mathfrak{f}$ не инъективно$\}$.

37 °Th · Для всякого полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$ и стяжения $\mathfrak{h}$ ребра A относительно $\mathfrak{k}$ и всякого отображения $\mathfrak{f}$, симплициального относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$, верно $\mathfrak{z}(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})) < \mathfrak{z}(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{h}, \mathfrak{k})$.

Доказательство

°Рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$ и стяжение $\mathfrak{h}$ некоторого ребра A относительно $\mathbf{k}$ и некоторое отображение $\mathfrak{f}$, симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$.
°Обозначим

$$\boldsymbol{e} := \{\mathsf{E} : \mathsf{E} \text{ — вырожденное отображением } \mathfrak{f}\circ\mathfrak{h} \text{ ребро в } \mathbf{k}\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}} := \{\tilde{\mathsf{E}} : \tilde{\mathsf{E}} \text{ — вырожденное отображением } \mathfrak{f} \text{ ребро в } \mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{k})\},$$

причем $\operatorname{card}\boldsymbol{e} = \mathfrak{z}(\mathfrak{f}\circ\mathfrak{h},\mathbf{k})$ и $\operatorname{card}\tilde{\boldsymbol{e}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{f},\mathfrak{h}^{\circ\circ}\mathbf{k})$.
°Заметим, что если $\tilde{\mathsf{E}} \in \tilde{\boldsymbol{e}}$, то в $\boldsymbol{e}$ существует ребро $\mathsf{E} : \mathfrak{h}^{\circ}(\mathsf{E}) = \tilde{\mathsf{E}}$. Таким образом, $\mathfrak{z}(\mathfrak{f},\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{k})) \leqslant \mathfrak{z}(\mathfrak{f}\circ\mathfrak{h},\mathbf{k})$.
°По условию отображение $\mathfrak{h}$ стягивает A из $\mathbf{k}$, и потому $A \in \boldsymbol{e}$, а множество $\mathfrak{h}^{\circ}(A)$ одноточечно. Таким образом, не все ребра из множества $\boldsymbol{e}$ переводятся отображением $\mathfrak{h}$ в множество $\tilde{\boldsymbol{e}}$ и неравенство строгое. Q.E.D.

38 °**Теорема** · Для всякой кусочно—аффинной консумпции $\mathfrak{f}$ и всякого полного симплициального комплекса $\mathbf{k}$, относительно которого то отображение симплициально, найдутся смятие $\mathfrak{g}$ и стяжения $\mathfrak{h}_0,\ldots,\mathfrak{h}_\nu$ некоторых ребер такие, что (см. Определение 6)

$$\langle \mathbf{k},\mathfrak{h}_0,\ldots,\mathfrak{h}_\nu\rangle \in \mathrm{Seq}_{\mathrm{ec}}[\nu],$$

$$\langle \mathbf{k},\mathfrak{h}_0,\ldots,\mathfrak{h}_\nu,\mathfrak{g}\rangle \in \mathrm{Seq}[\nu+1],$$

причем отображение $\mathfrak{g}$ — смятие, и $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}\circ\mathfrak{h}_\nu\circ\ldots\circ\mathfrak{h}_0$.

Доказательство

°По Утверждениям 36 и 37 отображение $\mathfrak{f}$ можно разложить в композицию стяжения ребра в $\mathbf{k}$ и отображения, симплициального относительно соответствующего (“стянутого”) комплекса, при этом число ребер, на которых отображение неинъективно, у новой симплициальной пары строго меньше, чем у исходной. Потому искомое разложение достигается за конечное число таких шагов. Q.E.D.

Факторизация

39 °Th · Для произвольного полного симплициального комплекса $\mathfrak{a}$ и симплициальных относительно комплекса $\mathfrak{a}$ отображений $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ таких, что $\mathfrak{a}_2(\nu') = \mathfrak{a}_2(\nu'')$ как только ν' и ν'' — две произвольные вершинные точки каких-либо симплексов комплекса $\mathfrak{a}$ такие, что $\mathfrak{a}_1(\nu') = \mathfrak{a}_1(\nu'')$, найдется единственное отображение $\mathfrak{r}$ такое, что $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{r}\circ\mathfrak{a}_1$.
При этом отображение $\mathfrak{r}$ непрерывно, симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}_2{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$.

Доказательство

°Рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и симплициальные относительно его отображения $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ такие, что если ν' и ν'' — две произвольные вершинные точки каких-либо симплексов комплекса $\mathfrak{a}$ такие, что $\mathfrak{a}_1(\nu') = \mathfrak{a}_1(\nu'')$, то $\mathfrak{a}_2(\nu') = \mathfrak{a}_2(\nu'')$.
°Если две точки x' и x'' из $\operatorname{dom}\mathfrak{a}_1 = \operatorname{dom}\mathfrak{a}_2$ таковы, что $\mathfrak{a}_1(x') = \mathfrak{a}_1(x'')$, то они имеют соответствующие координаты $\mathfrak{x}'$ и $\mathfrak{x}''$ относительно комплекса $\mathfrak{a}$. Тогда обозначив $Q := {}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}))$, $\hat{Q} := \mathfrak{a}_1{}^{\circ}(Q) = {}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})))$, и для каждой точки $\hat{w}$ из $\hat{Q}$ выбрав точку $\mathfrak{s}(\hat{w})$ из Q такую, что $\mathfrak{a}_1(\mathfrak{s}(\hat{w})) = \hat{w}$, посчитаем

$$\mathfrak{a}_1(x') = \sum_{w:w\in Q}\mathfrak{x}'_w\cdot\mathfrak{a}_1(w) = \sum_{\hat{w}:\hat{w}\in\hat{Q}}\left(\sum_{w:w\in Q,\mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}}\mathfrak{x}'_w\right)\cdot\mathfrak{a}_1(\mathfrak{s}(\hat{w})) =$$

$$= \sum_{\hat{w}:\hat{w}\in\hat{Q}}\left(\sum_{w:w\in Q,\mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}}\mathfrak{x}'_w\right)\cdot\hat{w},$$

аналогично

$$\mathfrak{a}_1(x'') = \sum_{w:w\in Q} \mathfrak{x}''_w \cdot \mathfrak{a}_1(w) = \sum_{\hat{w}:\hat{w}\in \hat{Q}} \left(\sum_{w:w\in Q, \mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}} \mathfrak{x}''_w \right) \cdot \mathfrak{a}_1(\mathfrak{s}(\hat{w})) =$$

$$= \sum_{\hat{w}:\hat{w}\in \hat{Q}} \left(\sum_{w:w\in Q, \mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}} \mathfrak{x}''_w \right) \cdot \hat{w},$$

откуда по единственности координат точки относительно комплекса

$$\sum_{w:w\in Q, \mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}} \mathfrak{x}'_w = \sum_{w:w\in Q, \mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}} \mathfrak{x}''_w$$

при каждой точке $\hat{w}$ из $\hat{Q}$. Следовательно,

$$\mathfrak{a}_2(x') = \sum_{w:w\in Q} \mathfrak{x}'_w \cdot \mathfrak{a}_2(w) = \sum_{\hat{w}:\hat{w}\in \hat{Q}} \left(\sum_{w:w\in Q, \mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}} \mathfrak{x}'_w \right) \cdot \mathfrak{a}_2(\mathfrak{s}(\hat{w})) =$$

$$= \sum_{\hat{w}:\hat{w}\in \hat{Q}} \left(\sum_{w:w\in Q, \mathfrak{a}_1(w)=\hat{w}} \mathfrak{x}''_w \right) \cdot \mathfrak{a}_2(\mathfrak{s}(\hat{w})) = \sum_{w:w\in Q} \mathfrak{x}''_w \cdot \mathfrak{a}_2(w) = \mathfrak{a}_2(x'').$$

°Определим отображение $\mathfrak{h}$ на множестве всех пар вида $\langle a, \mathfrak{a}_1(a)\rangle$, где $a \in \operatorname{dom} \mathfrak{a}_1$, по формуле $\mathfrak{h}(a, \mathfrak{a}_1(a)) := \mathfrak{a}_2(a)$. Заметим, что если $b := \mathfrak{a}_1(a') = \mathfrak{a}_1(a'')$, то по показанному $\mathfrak{a}_2(a') = \mathfrak{a}_2(a'')$ и $\mathfrak{h}(a', b) = \mathfrak{a}_2(a') = \mathfrak{a}_2(a'') = \mathfrak{h}(a'', b)$. Таким образом корректно определяется отображение $\mathfrak{r}(b) := \mathfrak{h}(a, b)$, для некоторой точки a такой, что $\mathfrak{a}_1(a) = b$. При этом $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}_1(a)) = \mathfrak{h}(a, \mathfrak{a}_1(a)) = \mathfrak{a}_2(a)$.
°Покажем единственность. Если $\mathfrak{r}'$ — некоторое иное отображение такое, что $\mathfrak{r}' \circ \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$, и $b \in \operatorname{im} \mathfrak{a}_1$, то найдется a такая, что $\mathfrak{a}_1(a) = b$, и тогда $\mathfrak{r}'(b) = \mathfrak{r}'(\mathfrak{a}_1(a)) = \mathfrak{a}_2(a) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}_1(a)) = \mathfrak{r}(b)$.
°Непрерывность следует из Утверждения 27.
°Покажем аффинность отображения $\mathfrak{r}$ на симплексе A комплекса $\mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$. Рассмотрим некоторый симплекс $\tilde{A}$ комплекса $\mathfrak{a}$ такой, что $\mathfrak{a}_1{}^{\circ}(\tilde{A}) = A$. Если a' и a'' — точки симплекса A, и α — число из $(0, 1)$, то найдутся точки $\tilde{a}'$ и $\tilde{a}''$ симплекса $\tilde{A}$ такие, что $\mathfrak{a}_1(\tilde{a}') = a'$ и $\mathfrak{a}_1(\tilde{a}'') = a''$. Тогда $\mathfrak{r}(a') = \mathfrak{a}_2(\tilde{a}')$ и $\mathfrak{r}(a'') = \mathfrak{a}_2(\tilde{a}'')$. Заметим, что $a''' := \alpha \cdot a' + (1-\alpha) \cdot a'' \in A$, и $\tilde{a}''' := \alpha \cdot \tilde{a}' + (1-\alpha) \cdot \tilde{a}'' \in \tilde{A}$, и $\mathfrak{a}_1(\tilde{a}''') = a'''$. Тогда $\mathfrak{r}(a''') = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}_1(\tilde{a}''')) = \mathfrak{a}_2(\tilde{a}''') = \alpha \cdot \mathfrak{a}_2(\tilde{a}') + (1-\alpha) \cdot \mathfrak{a}_2(\tilde{a}'') = \alpha \cdot \mathfrak{r}(a') + (1-\alpha) \cdot \mathfrak{r}(a'')$.
°Покажем симплициальность. Возьмем некоторый симплекс A из комплекса $\mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$ и некоторый симплекс $\tilde{A}$ комплекса $\mathfrak{a}$ такой, что $\mathfrak{a}_1{}^{\circ}(\tilde{A}) = A$. Тогда $\mathfrak{r}^{\circ}(A) = \mathfrak{r}^{\circ}(\mathfrak{a}_1{}^{\circ}(\tilde{A})) = \mathfrak{a}_2{}^{\circ}(\tilde{A}) \in \mathfrak{a}_2{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$. При этом у всякого симплекса A комплекса $\mathfrak{a}_2{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$ есть симплекс A' комплекса $\mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$ такой, что $\mathfrak{r}^{\circ}(A') = A$. Так как найдется симплекс $\hat{A}$ комплекса $\mathfrak{a}$ такой, что $A = \mathfrak{a}_2{}^{\circ}(\hat{A}) = (\mathfrak{r} \circ \mathfrak{a}_1)^{\circ}(\hat{A}) = \mathfrak{r}^{\circ}(\mathfrak{a}_1{}^{\circ}(\hat{A})) = \mathfrak{r}^{\circ}(A')$, где $A' := \mathfrak{a}_1{}^{\circ}(\hat{A}) \in \mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$. Q.E.D.

1.3.3 Разложение на смятие и контракцию

Целость и центральные подразделения

40 °Df · Рассмотрим выпуклополиэдральные комплексы $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$, из которых комплекс $\mathfrak{l}$ вписан в комплекс $\mathfrak{k}$. Тогда скажем, что набор $\mathfrak{m}$ полиэдров из комплекса $\mathfrak{l}$ (то есть $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{l}$) *цел* относительно комплекса $\mathfrak{k}$, если ${}^{\cup}\mathfrak{m} \in \mathfrak{k}$.
Скажем, что целый относительно комплекса $\mathfrak{k}$ набор $\mathfrak{s}$ полиэдров из комплекса $\mathfrak{l}$ *мажорирует* целый относительно комплекса $\mathfrak{k}$ набор $\mathfrak{t}$ полиэдров из комплекса $\mathfrak{l}$ и обозначим это $\mathfrak{s} \sqsupset \mathfrak{t}$, если $\operatorname{cl}_{\mathfrak{l}} \mathfrak{s} \supset \mathfrak{t}$.

°Заметка · Заметим, что все целые относительно комплекса $\mathfrak{k}$ наборы полиэдров из комплекса $\mathfrak{l}$ образуют абстрактный комплекс относительно отношения подчинения $\sqsubset$, изоморфный комплексу $\mathfrak{k}$ с отношением подчинения $\lhd$.

41 °Df · Опишем *центральное подразделение* произвольного полного выпуклополиэдрального комплекса $\mathfrak{l}$. См. схему $\boxed{1.2}$. Выберем сначала у каждого его элемента L по точке: $\mathfrak{c}_L \in L$, $L \in \mathfrak{l}$. Затем индуктивно построим следующие симплициальные комплексы:

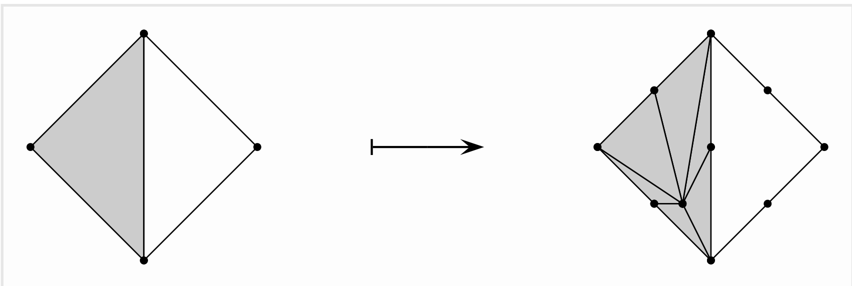
- $\mathfrak{n}^0 := \{L : L \in \mathfrak{l}, \dim L = 0\}$;
- если при $\kappa \in \mathbb{N}$ комплекс $\mathfrak{n}^\kappa$ построен, то комплекс $\mathfrak{n}^{\kappa+1}$ определим формулою

$$\mathfrak{n}^{\kappa+1} := \mathfrak{n}^\kappa \sqcup \{\{\mathfrak{c}_L\} : L \in \mathfrak{l}, \dim L = \kappa + 1\} \sqcup$$

$$\sqcup \{N : \exists L, Z (L \in \mathfrak{l}, \dim L = \kappa + 1, Z \in \mathfrak{n}^\kappa, Z \subset \operatorname{rmrg} L, N = \{\mathfrak{c}_L\} * Z)\}.$$

Комплекс $\mathfrak{m} := \bigcup\limits_{\kappa : \kappa \in \mathbb{N}} \mathfrak{n}^\kappa$ называется центральным подразделением комплекса $\mathfrak{l}$ относительно центров $\mathfrak{c}_L$ при $L \in \mathfrak{l}$.

°Заметка · Если $\mathfrak{l}$ — центральное подразделение некоторого полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$ относительно некоторых центров $\mathfrak{c}_K$ при $K \in \mathfrak{k}$, то для всякого K из $\mathfrak{k}$ множество $\mathfrak{w} := \{L : \{\mathfrak{c}_K\} \lhd L \in \mathfrak{l}\}$ — целый набор относительно комплекса $\mathfrak{k}$; при этом центральная точка $\mathfrak{c}_K$ однозначно соответствует набору $\mathfrak{w}$.



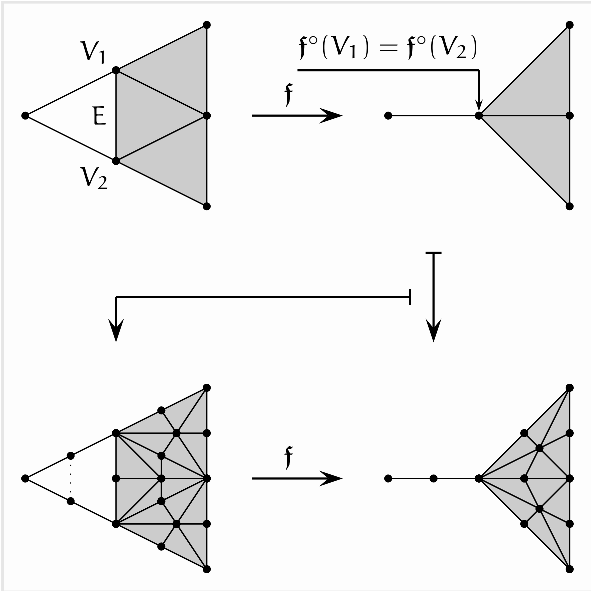
Диаг. 2. центральное подразделение

Особое центральное подразделение

°В следующих двух пунктах 42 и 43 определяется понятие специального центрального подразделения, порожденное PA–отображением.

42 °Df · *У стяжения ребра*

Если $\mathfrak{f}$ — стяжение ребра $E = V_1 * V_2$ относительно полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$, и $\mathfrak{l}$ — некоторое центральное подразделение (см. Определение 41) комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$, то опишем *доцентрованный прообраз* комплекса $\mathfrak{l}$ относительно отображения $\mathfrak{f}$ и комплекса $\mathfrak{k}$. См. схему $\boxed{1.3}$.



Диаг. 3. доцентрованный прообраз

Обозначим $\mathfrak{a} := \operatorname{frg}^{\mathbf{l}}_{\mathbf{k},\mathfrak{f}}$,— выпуклополиэдральный комплекс по Утверждению 7. В нем только элементы, включенные в симплексы комплекса $\mathbf{k}$, являющиеся надгранями ребра E, не суть непременно симплексы.
Выберем в каждом ребре A комплекса $\mathfrak{a}$ таком, что $\mathfrak{f}^\circ(A)$ — одноточечно, по точке $\mathfrak{c}_A$. Обозначим также $\mathfrak{g} = \{A : A \in \mathfrak{a}, \exists K(K \in \mathbf{k}, K \rhd E, A \subset K)\}$.
Индуктивно определим симплициальные комплексы

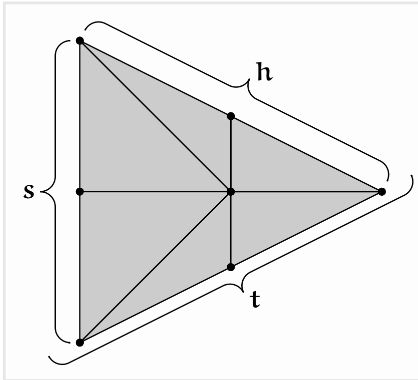
- $\mathbf{b}^1 := (\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{g}) \cup \{V_1 * \{\mathfrak{c}_E\}, \quad \{\mathfrak{c}_E\}, \quad \{\mathfrak{c}_E\} * V_2\}$;
- далее если комплекс $\mathbf{b}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^+$, построен, то комплекс $\mathbf{b}^{\nu+1}$ определяется формулою

$$\mathbf{b}^{\nu+1} := \mathbf{b}^\nu \cup \Big\{\{\mathfrak{c}_A\}, \quad \{\mathfrak{c}_A\} * B :$$
$$\exists A, K, B(A \in \operatorname{dom} \mathfrak{c}, \quad A \subset K \in \mathbf{k}, \quad \dim K = \nu + 1, \quad K \rhd E, \quad B \in \mathbf{b}^\nu, \quad B \subset \operatorname{rmrg} K)\Big\}.$$

Наконец искомый комплекс $\mathbf{c}$ определим по формуле $\mathbf{c} := \bigcup\limits_{\nu:\nu\in\mathbb{N}^+} \mathbf{b}^\nu$.
°Заметим, что он является центральным подразделением комплекса $\mathbf{k}$ и при этом отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно его.
Еще заметим, что если $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ и $\mathbf{h}$ — целые относительно комплекса $\mathbf{k}$ наборы полиэдров (здесь — симплексов) из комплекса $\mathbf{c}$, причем

$${}^\cup\mathbf{s} = E, \quad \mathbf{s} \sqsubset \mathbf{t} \sqsupset \mathbf{h}, \quad \mathbf{s} \not\sqsubset \mathbf{h}, \quad 1 + \dim {}^\cup\mathbf{h} = \dim {}^\cup\mathbf{t}, \quad \{x\} \in \mathbf{h} \quad \text{и} \quad \{y\} \in \mathbf{t},$$

то $\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}(y)$. См. схему $\boxed{1.4}$.



Диаг. 4. к боковинам и склейке

43 °Df · *Обще*

Если отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ — некоторое центральное подразделение (см. Определение 41) комплекса $\mathfrak{f}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$, то опишем *доцентрованный прообраз* $\mathbf{f}$ комплекса $\mathfrak{l}$ относительно отображения $\mathfrak{f}$ и комплекса $\mathfrak{k}$

- Если отображение $\mathfrak{f}$ — смятие, то множество $\mathbf{f} := \mathrm{frg}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{k},\mathfrak{f}}$ (см. Утверждение 7),— полный симплициальный комплекс, и зовется доцентрованным прообразом.
- Если же $\mathfrak{f}$ — консумпция, то по Теореме 38 найдутся отображения $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0, \ldots, \mathfrak{h}_\nu$ такие, что
  - отображение $\mathfrak{h}_0$ — стяжение некоторого ребра относительно комплекса $\mathfrak{k}$,
  - отображение $\mathfrak{h}_\iota$ — стяжение некоторого ребра относительно комплекса $(\mathfrak{h}_{\iota-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$ при всех $\iota = 1, \ldots, \nu$,
  - отображение $\mathfrak{g}$ — симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{k}' := (\mathfrak{h}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$ смятие,
  - а также $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}_\nu \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0$.
- Заметим, что множество $\mathfrak{b} := \mathrm{frg}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{k}',\mathfrak{g}}$ — полный симплициальный комплекс.
- Определим индуктивно последовательность полных симплициальных комплексов $\mathfrak{c}_\nu, \ldots, \mathfrak{c}_0$ следующим образом:
  - $\mathfrak{c}_\nu$ — доцентрованный прообраз (см. Определение 42) комплекса $\mathfrak{b}$ относительно отображения $\mathfrak{h}_\nu$ и комплекса $(\mathfrak{h}_{\nu-1} \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$.
  - $\mathfrak{c}_{\iota-1}$ — аналогично доцентрованный прообраз комплекса $\mathfrak{c}_\iota$ относительно отображения $\mathfrak{h}_{\iota-1}$ и комплекса $(\mathfrak{h}_{\iota-2} \circ \ldots \circ \mathfrak{h}_0)^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$.
- Обозначим $\mathbf{f} := \mathfrak{c}_0$. Этот комплекс называется доцентрованным прообразом.

°При этом ясно, что комплекс $\mathbf{f}$ является центральным подразделением комплекса $\mathfrak{k}$ и верно, что отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{f}$.
Еще заметим, что если $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{h}$ — целые относительно комплекса $\mathfrak{k}$ наборы полиэдров (здесь — симплексов) из комплекса $\mathbf{f}$, причем ${}^{\cup}\mathfrak{s}$ — ребро, на котором не инъективно отображение $\mathfrak{f}$, а также

$$\mathfrak{s} \sqsubset \mathfrak{t} \sqsupset \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{s} \not\sqsubset \mathfrak{h}, \quad 1 + \dim {}^{\cup}\mathfrak{h} = \dim {}^{\cup}\mathfrak{t}, \quad \{x\} \in \mathfrak{h} \quad \text{и} \quad \{y\} \in \mathfrak{t},$$

то $\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}(y)$.

Построение

44 °**Теорема** · Для всякого кусочно аффинного отображения $\mathfrak{f}$

1. если $\mathbf{k}$ — некоторый полный симплициальный комплекс, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{f}$, то найдется некоторое центральное подразделение $\mathbf{f}$ комплекса $\mathbf{k}$, а также PA−контракция $\mathfrak{h}$, симплициальная относительно комплекса $\mathbf{f}$, и симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{h}^{\circ\circ}(\mathbf{f})$ PA−смятие $\mathfrak{g}$ такие, что $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$;

2. найдется PA−контракция $\mathfrak{h}$ и PA−смятие $\mathfrak{g}$, в композиции дающие $\mathfrak{f}$, то есть $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$.

Доказательство

°Второе утверждение следует из первого и существования симплициального комплекса, относительно которого кусочно аффинное отображение симплициально.

°Для доказательства первого утверждения рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$ и некоторое отображение $\mathfrak{f}$, симплициальное относительно комплекса $\mathbf{k}$.

°Если отображение $\mathfrak{f}$ — смятие, то в качестве разложения возьмем $\mathfrak{g} := \mathfrak{f}$ и $\mathfrak{h} := \mathrm{id}_{\mathrm{dom}\,\mathfrak{f}}$, в качестве комплекса $\mathbf{f}$ возьмем произвольное центральное подразделение комплекса $\mathbf{k}$.

°Если же $\mathfrak{f}$ — консумпция, то нижеследующее индуктивное построение (пп. I−V) приводит к искомому разложению.

°*Приуготовление*

Проведем построение комплекса $\mathbf{f}$ из Определения 43 для наших комплекса $\mathbf{k}$ и отображения $\mathfrak{f}$, однако не возьмем название отображения $\mathfrak{g}$.

Построение индуктивно, причем местами совместно будут описаны основание и шаг индукции. При каждом натуральном ι до некоторого, определенного ниже, максимального μ формируем симплициальный комплекс $\mathbf{l}_\iota$, абстрактный комплекс $\mathbf{D}_\iota$ наборов из $\mathbf{l}_\iota$ с подчинением $\sqsubset_\iota$, функцию $\mathfrak{c}_\iota(\cdot)$ "центров", совокупность $\mathbf{E}_\iota$, выбранный набор $\mathbf{s}_\iota$, совокупность $\mathbf{A}_\iota$, совокупность $\mathbf{F}_\iota$, и отображения $\mathfrak{h}'_\iota$, $\mathfrak{h}_\iota$, $\mathfrak{r}_\iota$, $\mathfrak{r}'_\iota$.

°*Схема*

Поясним, что применение дальнейших построений проходит в порядке

1. (I.1), (II, III, IV, V) (при $\iota = 0$),

2. и далее циклично при $\iota > 0$ (I.2, II, III, IV, V).

°*I. Формирование комплексов и совокупностей*

I.1. Построение при $\iota = 0$. Еще обозначим $\mathfrak{r}'_{-1} := \mathfrak{f}$.

1. $\mathbf{l}_0 := \mathbf{f}$.

2. Обозначим через $\mathbf{D}_0$ абстрактный комплекс целых относительно комплекса $\mathbf{k}$ наборов симплексов из комплекса $\mathbf{l}_0$. И обозначим отношение подчинения $\sqsubset_0 := \sqsubset$. Еще заметим, что у каждого набора $\mathbf{t}$ из $\mathbf{D}_0$ найдется единственная ("центральная") точка $\mathfrak{c}_0(\mathbf{t})$ такая, что $\{\mathfrak{c}_0(\mathbf{t})\} \in \mathbf{t}$.

3. $\mathbf{E}_0 := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \in \mathbf{D}_0, {}^{\cup}\mathbf{s}$ — ребро в комплексе $\mathbf{k}$, на котором отображение $\mathfrak{f}$ не инъективно$\}$.

4. Выберем некоторый набор $\mathbf{s}_0$ из $\mathbf{E}_0$. И определим $\mathbf{A}_0 := \big\{\boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} \in \mathbf{D}_0, \dim {}^{\cup}\boldsymbol{e} = 1, \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \sqsubset_0 \boldsymbol{e}, \dim {}^{\cup}\boldsymbol{v} = 0\} = \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \sqsubset_0 \mathbf{s}_0, \dim {}^{\cup}\boldsymbol{v} = 0\}\big\}$. И заметим, что $\mathbf{A}_0 = \{\mathbf{s}_0\}$.

5. $\mathbf{F}_0 := \mathrm{St}_{\mathbf{D}_0}^{\sqsubset_0} \mathbf{A}_0$. Скажем, что набор $\mathbf{h}$ из $\mathbf{D}_0$ — 0−*боковина* в наборе $\mathbf{t}$ из $\mathbf{F}_0$, если $\mathbf{h} \sqsubset_0 \mathbf{t}$, $\dim {}^{\cup}\mathbf{h} = \dim {}^{\cup}\mathbf{t} - 1$, $\mathbf{h} \notin \mathbf{F}_0$.

   Заметим также, что таких наборов $\mathbf{h}$ ровно два в каждом $\mathbf{t}$ из $\mathbf{F}_0$ — по одному на каждый одноэлементный набор ("вершину") из $\mathbf{D}_0$, подчиненный некоторому набору из $\mathbf{A}_0$.

I.2. Построение при $\iota > 0$, если $\mathbf{E}_{\iota-1} \neq \mathbf{A}_{\iota-1}$ (отсюда определяется число μ, то есть максимум тех ι, при которых $\mathbf{E}_{\iota-1} \neq \mathbf{A}_{\iota-1}$).

1. $\mathbf{l}_\iota := \mathfrak{r}_{\iota-1}{}^{\circ\circ}(\mathbf{l}_{\iota-1})$;
2. $\mathbf{D}_\iota := \mathfrak{r}_{\iota-1}{}^{\circ\circ\circ}(\mathbf{D}_{\iota-1})$. И отношение подчинения $\sqsubset_\iota$ такое, что $\mathbf{q} \sqsubset_\iota \boldsymbol{w} \iff \mathbf{q} \subset \mathrm{cl}_{\mathbf{l}_\iota} \boldsymbol{w}$. Еще заметим, что у каждого набора $\mathbf{t}$ из $\mathbf{D}_\iota$ найдется единственная ("центральная") точка $\mathfrak{c}_\iota(\mathbf{t})$ такая, что $\{\mathfrak{c}_\iota(\mathbf{t})\} \in \mathbf{t}$, причем $\mathfrak{c}_\iota(\mathfrak{r}_{\iota-1}{}^{\circ\circ}(\mathbf{s})) = \mathfrak{r}_{\iota-1}(\mathfrak{c}_{\iota-1}(\mathbf{s}))$, где $\mathbf{s} \in \mathbf{D}_{\iota-1}$.
3. $\mathbf{E}_\iota := \mathfrak{r}_{\iota-1}{}^{\circ\circ\circ}(\mathbf{E}_{\iota-1} \setminus \mathbf{A}_{\iota-1})$. Заметим еще, что число элементов в множестве $\mathbf{E}_\iota$ меньше числа элементов множества $\mathbf{E}_{\iota-1}$.
4. Выберем некоторый набор $\mathbf{s}_\iota$ из $\mathbf{E}_\iota$. И определим $\mathbf{A}_\iota := \big\{\boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} \in \mathbf{D}_\iota, \dim{}^\cup \boldsymbol{e} = 1, \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \sqsubset_\iota \boldsymbol{e}, \dim{}^\cup \boldsymbol{v} = 0\} = \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \sqsubset_\iota \mathbf{s}_\iota, \dim{}^\cup \boldsymbol{v} = 0\}\big\}$.
5. $\mathbf{F}_\iota := \mathrm{St}^{\sqsubset_\iota}_{\mathbf{D}_\iota} \mathbf{A}_\iota$. Скажем, что набор $\mathbf{h}$ из $\mathbf{D}_\iota$ — ι–боковина в наборе $\mathbf{t}$ из $\mathbf{F}_\iota$, если $\mathbf{h} \sqsubset_\iota \mathbf{t}$, $\dim{}^\cup \mathbf{h} = \dim{}^\cup \mathbf{t} - 1$, $\mathbf{h} \notin \mathbf{F}_\iota$.

   Заметим также, что таких наборов $\mathbf{h}$ ровно два в каждом $\mathbf{t}$ из $\mathbf{F}_\iota$ — по одному на каждый одноэлементный набор ("вершину") из $\mathbf{D}_\iota$, подчиненный некоторому набору из $\mathbf{A}_\iota$.

°*II. Смежность*

Скажем, что два набора $\mathbf{t}'$ и $\mathbf{t}''$ из $\mathbf{F}_\iota$ смежны, если найдется их общая ι–боковина, то есть набор $\mathbf{h}$ такой, что $\mathbf{t}' \sqsupset_\iota \mathbf{h}$, $\mathbf{t}'' \sqsupset_\iota \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \notin \mathbf{F}_\iota$, $\dim{}^\cup \mathbf{h} + 1 = \dim{}^\cup \mathbf{t}' = \dim{}^\cup \mathbf{t}''$.

Определим также наименьшее отношение эквивалентности, содержащее данное отношение смежности. В каждой размерности $\lambda = 1, 2, \ldots$ тел наборов из $\mathbf{F}_\iota$ пронумеруем некоторым (произвольным) образом их эквивалентные классы: $\mathbf{G}^\lambda_0, \ldots, \mathbf{G}^\lambda_{\tau_\lambda}$.

°*III. Построение промежуточных отображений*

1. Теперь индуктивно по размерности $\lambda = 1, \ldots$ и индукциею же по номеру $\kappa = 0, \ldots, \tau_\lambda$ определим значения оображение $\mathfrak{h}'_\iota$. Оно действует на совокупности точек вида $\mathfrak{c}^\iota_\mathbf{t}$ и $\mathfrak{c}^\iota_\mathbf{h}$, где $\mathbf{t} \in \mathbf{F}_\iota$ и $\mathbf{h}$ — ι–боковина в $\mathbf{t}$.

   $\lambda = 1$: Здесь $\mathbf{G}^1_0 = \mathbf{A}_\iota$, $\tau_\lambda = 0$. Всем центральным точкам ν вида $\nu = \mathfrak{c}^\iota_\mathbf{t}, \mathfrak{c}^\iota_\mathbf{h}$, где $\mathbf{t} \in \mathbf{A}_\iota$, $\mathbf{h}$ — ι–боковина в $\mathbf{t}$, сопоставим значением $\mathfrak{h}'_\iota(\nu)$ некоторую одну и ту же точку вне аффинной оболочки множества ${}^\cup \mathbf{l}_\iota$.

   $\lambda > 1$: Предположив, что на центральных точках компонент меньших размерностей $(1, \ldots, \lambda - 1)$ отображение $\mathfrak{h}'_\iota$ построено, центральным точкам ν вида $\nu = \mathfrak{c}^\iota_\mathbf{t}, \mathfrak{c}^\iota_\mathbf{h}$, где $\mathbf{t} \in \mathbf{G}^\lambda_0$, $\mathbf{h}$ — ι–боковина в $\mathbf{t}$, сопоставим значением $\mathfrak{h}'_\iota(\nu)$ некоторую одну и ту же точку вне аффинной оболочки множества ${}^\cup \mathbf{l}_\iota$, объединенного с множеством всех уже построенных $\mathfrak{h}'_\iota$–значений. Далее при том же λ такое же построение с заменою $0 \to \kappa = 1, \ldots, \tau_\lambda$.

2. Определим отображение $\mathfrak{h}_\iota$ на вершинных точках комплекса $\mathbf{l}_\iota$ по формуле (где обозначено $\mathbf{Z}_\iota := \mathrm{Lk}^{\sqsubset_\iota}_{\mathbf{D}_\iota} \mathbf{A}_\iota$)

$$\mathfrak{h}_\iota(\nu) := \begin{cases} \nu, & \text{если } \nu \text{ — не вершинная точка во всяком } \mathbf{t} \text{ из } \mathbf{F}_\iota \\ & \text{или } \nu \text{ — вершинная точка в некотором } \mathbf{t} \text{ из } \mathbf{Z}_\iota; \\ \mathfrak{h}'_\iota(\nu), & \text{если } \nu \text{ — вершинная точка в некотором } \mathbf{t} \text{ из } \mathbf{F}_\iota \\ & \text{и } \nu \text{ — не вершинная точка во всяком } \mathbf{t} \text{ из } \mathbf{Z}_\iota. \end{cases}$$

   Заметим здесь, что точки второго типа суть точки вида $\nu = \mathfrak{c}^\iota_\mathbf{t}, \mathfrak{c}^\iota_\mathbf{h}$, где $\mathbf{t} \in \mathrm{St}^{\sqsubset_\iota}_{\mathbf{D}_\iota} \mathbf{A}_\iota$, $\mathbf{h}$ — ι–боковина в $\mathbf{t}$.

3. Затем отображение $\mathfrak{r}_\iota$ определяется как посимплексно аффинное продолжение отображения $\mathfrak{h}_\iota$ на комплексе $\mathbf{l}_\iota$.

°*IV. Связь отображений*
Если $\mathfrak{h}_\iota(\nu') = \mathfrak{h}_\iota(\nu'')$, то покажем, что $\mathfrak{r}'_{\iota-1}(\nu') = \mathfrak{r}'_{\iota-1}(\nu'')$. Действительно, если $\nu' = \nu''$, то равенство верно. Если же $\nu' \neq \nu''$, то склейка $\mathfrak{h}_\iota(\nu') = \mathfrak{h}_\iota(\nu'')$ возможна только в случае, что точки ν' и ν'' суть центральные в соответствующих некоторых наборах $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}''$ таких, что найдется класс эквивалентности (см. пункт II) в F_ι, и каждый набор из этих двух или сам принадлежит указанному классу, или есть ι–боковина некоторого элемента того класса. При $\iota = 0$ по замечанию из Определения 43 такие центральные точки склеиваются отображением $\mathfrak{f} = \mathfrak{r}'_{-1}$; а при $\iota > 0$ эту склейку покажем ниже.
Таким образом, если $\mathfrak{r}_\iota(\nu') = \mathfrak{r}_\iota(\nu'')$, то $\mathfrak{r}'_{\iota-1}(\nu') = \mathfrak{r}'_{\iota-1}(\nu'')$ при всяких вершинных точках ν' и ν'' комплекса $\mathbf{l}_\iota$.
По Утверждению 39 найдется единственное отображение $\mathfrak{r}'_\iota$ такое, что

$$\mathfrak{r}'_{\iota-1} = \mathfrak{r}'_\iota \circ \mathfrak{r}_\iota, \tag{4}$$

оно симплициально (и по определению непрерывно) относительно комплекса $\mathfrak{r}_\iota{}^{\circ\circ}(\mathbf{l}_\iota)$ и $\mathfrak{r}'_\iota{}^{\circ\circ}(\mathfrak{r}_\iota{}^{\circ\circ}(\mathbf{l}_\iota)) = \mathfrak{r}'_{\iota-1}{}^{\circ\circ}(\mathbf{l}_\iota)$.
°*V. Склейки*
Докажем на этапе ι свойство, аналогическое замечанию из Определения 43, что даст нам возможность на этапе $\iota+1$ разложения (4). Рассмотрим некоторый набор $\mathbf{t}$ из комплекса $\mathbf{D}_{\iota+1} = \mathfrak{r}_\iota{}^{\circ\circ\circ}(\mathbf{D}_\iota)$. Заметим, что набор $\mathbf{t}$ имеет вид $\mathbf{t} = \mathfrak{r}_\iota{}^{\circ\circ}(\mathbf{t}')$, для некоторого набора $\mathbf{t}'$ из комплекса $\mathbf{D}_\iota$, причем из построения отображения $\mathfrak{r}_\iota$ можно считать, что отображение $\mathfrak{r}_\iota$ инъективно на ${}^\cup\mathbf{t}'$. Таким образом, если отображение $\mathfrak{r}'_{\iota-1}$ клеит центральную точку $\mathfrak{c}_\iota(\mathfrak{q})$ и центральную точку $\mathfrak{c}_\iota(\mathfrak{w})$, то эти точки не склеены отображением $\mathfrak{r}_\iota$, следовательно, они склеены отображением $\mathfrak{r}'_\iota$.

Отсюда следует также, что на следующем этапе определяемые A_ι и E_ι по формулам из пт. I.2 связаны соотношением $\mathsf{A}_\iota \subset \mathsf{E}_\iota$. А именно, если набор $\boldsymbol{e}$ из A_ι, то он есть также инъективный образ некоторого набора в $\mathbf{D}_{\iota-1}$, и так далее до прообраза в $\mathbf{D}_0$, вершинные точки тела которого склеены отображением $\mathfrak{f}$ (из определения совокупности A_ι). Таким образом, этот прообраз в $\mathbf{D}_0$ принадлежит совокупности E_0, и отсюда исходный набор $\boldsymbol{e}$ лежит в E_ι.
°Итак ясно, что $\mathfrak{f} = \mathfrak{r}'_\mu \circ \mathfrak{r}_\mu \circ \ldots \circ \mathfrak{r}_0$, при этом каждое отображение $\mathfrak{r}_\iota$ из построения его как посимплексно–аффинного продолжения отображения $\mathfrak{h}_\iota$ есть PA–контракция, а отображение $\mathfrak{r}'_\mu$ — смятие, что следует из определения числа μ: отображение $\mathfrak{r}'_\mu$ инъективно на теле всякого набора из $\mathfrak{r}_\mu{}^{\circ\circ\circ}(\mathbf{D}_\mu)$ с одномерным телом, и по Утверждению 19 с учетом симплициальности отображения $\mathfrak{r}'_\mu$.
°Наконец переобозначим $\mathfrak{g} := \mathfrak{r}'_\mu$, $\mathfrak{h} := \mathfrak{r}_\mu \circ \ldots \circ \mathfrak{r}_0$, где $\mathfrak{h}$ — контракция по Утверждению 25. Q.E.D.

1.4 Многогранники–следы

Предисловие

Как уже сказано в начале этой главы, кусочно–аффинные отображения хорошо дискретизуются, и они избраны как простое средство конструировать “обобщенные поверхности”, в которых возможны самопересечения и самоналожения. Кроме самого введения понятий к полиэдрам–следам, рассмотрены некоторые деформации их, объем, а также изучено поведение объема при специальных деформациях.

1.4.1 Построение

Редуктивная эквивалентность

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — PA–отображение, то его *редуктом* назовем всякое PA–смятие $\mathfrak{b}$ такое, что найдется PA–контракция $\mathfrak{c}$, в композиции с $\mathfrak{b}$ дающая отображение $\mathfrak{a}$ (то есть $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$).

°Заметим, что существование редукта обеспечено Теоремою 44. Еще заметим, что по Утверждению 28 два редукта одного отображения отличаются на кусочно—аффинный гомеоморфизм.

°Df · Скажем, что два PA—отображения $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ *редуктивно—эквивалентны*, если у них есть общий редукт. То есть найдутся PA—смятие $\mathfrak{b}$, PA—контракции $\mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{c}''$ такие, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}''$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{dom}\mathfrak{a}' = \operatorname{dom}\mathfrak{c}' \arrow[r, "\mathfrak{c}'"] \arrow[dr, bend right, "\mathfrak{a}'"'] & \operatorname{im}\mathfrak{c}' = \operatorname{dom}\mathfrak{b} = \operatorname{im}\mathfrak{c}'' \arrow[d, "\mathfrak{b}"] & \operatorname{dom}\mathfrak{c}'' = \operatorname{dom}\mathfrak{a}'' \arrow[l, "\mathfrak{c}''"'] \arrow[dl, bend left, "\mathfrak{a}''"] \\
 & \operatorname{im}\mathfrak{a}' = \operatorname{im}\mathfrak{b} = \operatorname{im}\mathfrak{a}'' &
\end{tikzcd}$$

Диаг. 5. к редуктивной эквивалентности

°Заметим, что отображение редуктивно—эквивалентно своему каждому редукту. А если отображение редуктивно—эквивалентно некоторому кусочно—аффинному смятию, то из Утверждения 28 следует, что это смятие — также редукт того отображения.

45 °Th · Отношение редуктивной эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Доказательство

°Рефлексивность и симметричность его очевидны из определения его.
°Чтобы показать его транзитивность, рассмотрим три PA—отображения $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'''$.
°Предположим, что $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ редуктивно—эквивалентны, и $\mathfrak{a}''$ и $\mathfrak{a}'''$ редуктивно—эквивалентны. То есть найдутся PA—смятия $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}'''$, а также PA—контракции $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''_1$, $\mathfrak{c}''_2$, $\mathfrak{c}'''$ такие, что

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}' \circ \mathfrak{c}',$$

$$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}' \circ \mathfrak{c}''_1,$$
$$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}''' \circ \mathfrak{c}''_2,$$
$$\mathfrak{a}''' = \mathfrak{b}''' \circ \mathfrak{c}'''.$$

°По Утверждению 28 найдется инъективное PA—отображение $\mathfrak{i}$ такое, что $\mathfrak{b}' \circ \mathfrak{i} = \mathfrak{b}'''$. Следовательно,

$$\mathfrak{a}''' = \mathfrak{b}''' \circ \mathfrak{c}''' = (\mathfrak{b}' \circ \mathfrak{i}) \circ \mathfrak{c}''' = \mathfrak{b}' \circ (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{c}''').$$

°Из Утверждения 25 следует, что $\mathfrak{i} \circ \mathfrak{c}'''$ — PA—контракция, как композиция контракций.
Итак, $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}'''$ редуктивно—эквивалентны. Q.E.D.

°Df · Произвольное множество PA—отображений назовем *редуктивно содержательным*, если у всякого элемента того множества есть редукт в том множестве.
Обозначать будем кратко: rd-ct-множество.

46 °Df · Если $\mathfrak{A}$ — некоторое rd-ct-множество, то классы редуктивно-эквивалентных элементов того множества назовем *$\mathfrak{A}$—многогранниками—следами*.
°Заметим, что всякий элемент всякого $\mathfrak{A}$—многогранника—следа обладает редуктом из того же многогранника—следа, а всякие два элемента его обладают общим редуктом из него же.

Аффиктурная редуктивная эквивалентность

°Df · Для некоторого PA–отображения $\mathfrak{a}$ скажем, что некоторый замкнутый многогранник P — *аффиктура* к отображению $\mathfrak{a}$, если $P \subset \operatorname{dom} \mathfrak{a}$. тут есть с сочек

°Df · Если $\mathfrak{a}$ — PA–отображение и P — некоторая аффиктура к отображению $\mathfrak{a}$, то *af-редуктом* пары $\langle \mathfrak{a}, P \rangle$ назовем всякую пару $\langle \mathfrak{b}, Q \rangle$ такую, что $\mathfrak{b}$ — PA–смятие, Q — аффиктура к отображению $\mathfrak{b}$, и найдется PA–контракция $\mathfrak{c}$ такая, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}^{\circ}(P) = Q$.

°Df · Скажем, что две пары $\langle \mathfrak{a}', P' \rangle$ и $\langle \mathfrak{a}'', P'' \rangle$, где $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ — PA–отображения, P' — аффиктура к $\mathfrak{a}'$, P'' — аффиктура к $\mathfrak{a}''$, *af-редуктивно–эквивалентны*, если у них есть общий af-редукт.

47 °Th · Отношение af-редуктивной–эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Доказательство

°Демонстрируется аналогично Доказательству Утверждения 45.
°Рефлексивность и симметричность очевидны из определения.
°Чтобы показать транзитивность, рассмотрим три PA–отображения $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'''$, и P', P'', P''' — соответствующие аффиктуры к этим отображениям.
°Предположим, что $\langle \mathfrak{a}', P' \rangle$ и $\langle \mathfrak{a}'', P'' \rangle$ af-редуктивно–эквивалентны, и $\langle \mathfrak{a}'', P'' \rangle$ и $\langle \mathfrak{a}''', P''' \rangle$ af-редуктивно–эквивалентны. То есть найдутся PA–смятия $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}'''$, PA–контракции $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{c}_2''$, $\mathfrak{c}'''$ и замкнутые многогранники Q', Q''' такие, что

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}' \circ \mathfrak{c}', \quad Q' = \mathfrak{c}'^{\circ}(P') \text{ — аффиктура к } \mathfrak{b}';$$

$$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}' \circ \mathfrak{c}_1'', \quad Q' = \mathfrak{c}_1''^{\circ}(P'') \text{ — аффиктура к } \mathfrak{b}';$$
$$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}''' \circ \mathfrak{c}_2'', \quad Q''' = \mathfrak{c}_2''^{\circ}(P'') \text{ — аффиктура к } \mathfrak{b}''';$$
$$\mathfrak{a}''' = \mathfrak{b}''' \circ \mathfrak{c}''', \quad Q''' = \mathfrak{c}'''^{\circ}(P''') \text{ — аффиктура к } \mathfrak{b}'''.$$

°По Утверждению 28 найдется инъективное PA–отображение $\mathfrak{i}$ такое, что $\mathfrak{b}' \circ \mathfrak{i} = \mathfrak{b}'''$ и $\mathfrak{i} \circ \mathfrak{c}_2'' = \mathfrak{c}_1''$. Следовательно,

$$\mathfrak{a}''' = \mathfrak{b}''' \circ \mathfrak{c}''' = (\mathfrak{b}' \circ \mathfrak{i}) \circ \mathfrak{c}''' = \mathfrak{b}' \circ (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{c}''')$$

и

$$Q' = \mathfrak{c}_1''^{\circ}(P'') = (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{c}_2'')^{\circ}(P'') = \mathfrak{i}^{\circ}(Q'''),$$

откуда $(\mathfrak{i} \circ \mathfrak{c}''')^{\circ}(P''') = \mathfrak{i}^{\circ}(Q''') = Q'$.
°Из Утверждения 25 следует, что $\mathfrak{i} \circ \mathfrak{c}'''$ — PA–контракция, как композиция контракций.
Итак, $\langle \mathfrak{a}', P' \rangle$ и $\langle \mathfrak{a}''', P''' \rangle$ af-редуктивно–эквивалентны с общим af-редуктом $\langle \mathfrak{b}', Q' \rangle$. Q.E.D.

°Df · Произвольное множество пар PA–отображений и аффиктур к ним назовем *af-редуктивно содержательным*, если у всякого элемента того множества есть af-редукт в том множестве.
Обозначать будем кратко: af-rd-ct-множество.

48 °Df · Если $\mathfrak{a}$ — некоторое af-rd-ct-множество, то классы af-редуктивно–эквивалентных элементов того множества назовем $\mathfrak{a}$–af-многогранниками–следами.

1.4.2 Деформации

Параметрические деформации

49 °Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторое rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni —

- *элементарная деформация* относительно четверки $\langle \alpha, \beta, \mathfrak{a}, W \rangle$, если
  - при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$ и принадлежит классу W;

- при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и всяких точках v и w из $^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}))$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, v) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, v) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.

• *аналитическая элементарная деформация* относительно четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{W}\rangle$, если оно элементарная деформация относительно той же четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{W}\rangle$ такая, что при каждой точке v из $^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}))$ отображение $\mathfrak{a}(\cdot, v)$ аналитично (то есть локально представимо степенным рядом с центром) в α и однажды непрерывно—дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$.

°Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathfrak{a}$, и некоторое af-rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni —

• *элементарная деформация* относительно пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{P}, \mathsf{W}\rangle$, если

  - при каждой точке x из P отображение $\mathfrak{a}(\cdot, x)$ постоянно на $[\alpha, \beta]$;
  - при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$ и пара $\langle\mathfrak{a}(\tau, \cdot), \mathsf{P}\rangle$ принадлежит классу W;
  - при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и всяких точках v и w из $^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}))$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, v) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, v) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.

• *аналитическая элементарная деформация* относительно пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{P}, \mathsf{W}\rangle$, если оно элементарная деформация относительно той же пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{P}, \mathsf{W}\rangle$ такая, что при каждой точке v из $^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}))$ отображение $\mathfrak{a}(\cdot, v)$ аналитично в α и однажды непрерывно—дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$.

°Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathfrak{a}$, и некоторое af-rd-ct-множество W. Тогда непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni — *близкосвязанная элементарная деформация* относительно пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{P}, \mathsf{W}\rangle$, если оно так сказать "посимплексно элементарная деформация", формально же, если

• при каждой точке x из P отображение $\mathfrak{a}(\cdot, x)$ постоянно на $[\alpha, \beta]$;

• при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ пара $\langle\mathfrak{a}(\tau, \cdot), \mathsf{P}\rangle$ принадлежит классу W и при каждом симплексе A из $\mathfrak{a}$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)|_{\overline{A}}$ симплициально относительно комплекса $\mathrm{cl}_{\mathfrak{a}}\{A\}$;

• при всяких числах σ и τ из $(\alpha, \beta]$ и при каждом симплексе A из $\mathfrak{a}$ и всяких точках v и w из $\mathrm{vert}\, A$ верно, что если $\mathfrak{a}(\sigma, v) = \mathfrak{a}(\sigma, w)$, то $\mathfrak{a}(\tau, v) = \mathfrak{a}(\tau, w)$.

Классовые деформации

°Df · Возьмем некоторые разные числа α и β из $\mathbb{R}$ и некоторое [af-]rd-ct-множество W. Тогда отображение $\mathfrak{b}$ из $[\alpha, \beta]$ в совокупность W—многогранников—следов — [[*близкосвязанная*]] *элементарная W—деформация* относительно пары $\langle\alpha, \beta\rangle$, если найдется полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$[и некоторый замкнутый полиэдр P, являющийся объединением симплексов из $\mathfrak{a}$] и непрерывное отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta] \times {}^{\cup}\mathfrak{a}$ в Uni такие, что отображение $\mathfrak{a}$ — [[близкосвязанная]] элементарная деформация относительно четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{W}\rangle$ [пятерки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{P}, \mathsf{W}\rangle$] и при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ принадлежит множеству $\mathfrak{b}(\tau)$.

°Df · Возьмем некоторые числа α и β из $\mathbb{R}$, причем $\alpha < \beta$, и некоторое [af-]rd-ct-множество W. Тогда отображение $\mathfrak{a}$ из $[\alpha, \beta]$ в совокупность W—многогранников—следов — [[*близкосвязанная*]] *W—деформация* на отрезке $[\alpha, \beta]$, если найдется набор чисел $\alpha = \tau_0 < \ldots < \tau_\nu = \beta$ таких, что при каждом $\iota = 1, \ldots, \nu$ отображение $\mathfrak{a}\big|_{[\tau_{\iota-1}, \tau_\iota]}$ — [[близкосвязанная]] элементарная W—деформация относительно пары $\langle\tau_{\iota-1}, \tau_\iota\rangle$ или пары $\langle\tau_\iota, \tau_{\iota-1}\rangle$.

Параметрическое разложение

50 °Th · Для произвольных разных вещественных чисел α и β, полного симплициального комплекса $\mathfrak{a}$ и всякой [аналитической] элементарной деформации $\mathfrak{a}$ относительно четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, W\rangle$ (где обозначена W совокупность всех (вообще всех) PA—отображений) найдутся

1. некоторое центральное подразделение $\mathfrak{b}$ комплекса $\mathfrak{a}$,
2. контракция $\mathfrak{c}$, симплициальная относительно $\mathfrak{b}$, и
3. [аналитическая] элементарная деформация $\mathfrak{b}$ относительно четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{m}, W\rangle$ (где $\mathfrak{m} := \mathfrak{c}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$)

такие, что

- отображение $\mathfrak{b}(\tau, \cdot)$ — смятие при $\tau \in (\alpha, \beta]$;
- $\mathfrak{a}(\tau, x) = \mathfrak{b}(\tau, \mathfrak{c}(x))$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$ и $x \in {}^{\cup}\mathfrak{a}$.

Доказательство

°Выберем некоторые разные вещественные числа α и β, полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторую [аналитическую] элементарную деформацию $\mathfrak{a}$ относительно четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, W\rangle$.

°Заметим, что если ν' и ν'' суть точки из ${}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}))$ такие, что $\mathfrak{a}(\beta, \nu') = \mathfrak{a}(\beta, \nu'')$, то из условия одинаковой склейки при $\tau \in (\alpha, \beta]$ (см. второе условие в Определении 49) следует, что $\mathfrak{a}(\tau, \nu') = \mathfrak{a}(\tau, \nu'')$ при $\tau \in (\alpha, \beta]$. По непрерывности $\mathfrak{a}(\alpha, \nu') = \mathfrak{a}(\alpha, \nu'')$.

°По Утверждению 39 при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ найдется единственное симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{a}(\beta, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$ отображение $\mathfrak{r}(\tau, \cdot)$ такое, что $\mathfrak{r}(\tau, \cdot) \circ \mathfrak{a}(\beta, \cdot) = \mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ и $\mathfrak{r}(\tau, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{a}(\beta, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}(\tau, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$.

°Еще заметим, что отображение $\mathfrak{r}$ образуется аффинною комбинациею параметризованных вершинных точек (см. еще Утверждение 39 и Замечание 3). И поэтому отображение $\mathfrak{r}$ непрерывно по совокупности аргументов.

°Чтобы построить комплекс $\mathfrak{b}$ выберем некоторое центральное подразделение $\mathfrak{l}''$ в комплексе $\mathfrak{a}(\alpha, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$. Затем по Определению 43 построим некоторый доцентрованный прообраз $\mathfrak{l}'$ комплекса $\mathfrak{l}''$ относительно отображения $\mathfrak{r}(\alpha, \cdot)$ и комплекса $\mathfrak{a}(\beta, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$. И по тому же описанию построим некоторый доцентрованный прообраз $\mathfrak{b}$ комплекса $\mathfrak{l}'$ относительно отображения $\mathfrak{a}(\beta, \cdot)$ и комплекса $\mathfrak{a}$.

°Установим, что $\mathfrak{a}(\alpha, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{b}$. Если симплекс B принадлежит комплексу $\mathfrak{b}$, то $\mathfrak{a}(\alpha, \cdot)^{\circ}(B) = \mathfrak{r}(\alpha, \cdot)^{\circ}\Big(\mathfrak{a}(\beta, \cdot)^{\circ}(B)\Big)$.

Обозначив $L' := \mathfrak{a}(\beta, \cdot)^{\circ}(B)$, заметим, что $L' \in \mathfrak{l}'$. Таким образом, $\mathfrak{a}(\alpha, \cdot)^{\circ}(B) = \mathfrak{r}(\alpha, \cdot)^{\circ}(L') \in \mathfrak{l}''$, по построению четвертого пункта.

Далее установим, что при каждом τ из $[\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{r}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{l}'$. При $\tau = \alpha$ симплициальность следует из построения комплекса $\mathfrak{l}'$. А при $\tau \in (\alpha, \beta]$ симплициальность следует из гомеоморфности отображения $\mathfrak{r}(\tau, \cdot)$ и аффинности его на симплексах комплекса $\mathfrak{l}'$ как подмножествах симплексов комплекса $\mathfrak{a}(\beta, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$.

°Заметим, что $\mathfrak{r}(\tau, \cdot)$—образы вершинных точек в комплексе $\mathfrak{l}'$ суть аффинные суммы $\mathfrak{a}(\tau, \cdot)$—образов соответствующих вершинных точек в комплексе $\mathfrak{a}$ с постоянными коэффициентами. Следовательно, гладкость и аналитичность сохраняются.

°Произведем по Теореме 44 разложение $\mathfrak{a}(\beta, \cdot) = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{c}$ отображения $\mathfrak{a}(\beta, \cdot)$, где $\mathfrak{c}$ — контракция, симплициальная относительно комплекса $\mathfrak{b}$, и $\mathfrak{g}$ — смятие, симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{c}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$. Обозначим $\mathfrak{b}(\tau, \cdot) := \mathfrak{r}(\tau, \cdot) \circ \mathfrak{g}$. По доказанному, это $\mathfrak{b}$ [аналитично] непрерывно по совокупности аргументов, при $\tau \in [\alpha, \beta]$ отображение $\mathfrak{r}(\tau, \cdot)$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{c}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$.

°Если $\tau \in (\alpha, \beta]$, то $\mathfrak{b}(\tau, \cdot) = \mathfrak{r}(\tau, \cdot) \circ \mathfrak{g}$ — композиция PA—гомеоморфизма и смятия, то есть — смятие.

Q.E.D.

1.4.3 Объем

Формулы объема

°При рассмотрении некоторой плоскости A в Uni конечной размерности ν, с заданным на векторах над тою плоскостью евклидовым (то есть положительно определенным) скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, будем рассматривать порожденные этим скалярным произведением объемы $\mathrm{mes}_0,\ldots,\mathrm{mes}_\nu$ симплексов из той плоскости.
°Для нескольких векторов $v_1,\ldots,v_\alpha$ определим *матрицу Грама*

$$\mathrm{Gram}(v_1,\ldots,v_\alpha) := \begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \ldots & \langle v_1,v_\alpha\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle v_\alpha,v_1\rangle & \ldots & \langle v_\alpha,v_\alpha\rangle \end{pmatrix}$$

этих векторов.

51 °Заметка · Если $\sigma\in\mathbb{N}$ и $a_0,\ldots,a_\sigma$ — аффинно независимое семейство точек из плоскости A, то обозначим $S := \mathrm{rint\,conv}\{a_0,\ldots,a_\sigma\}$. И тогда

$$\begin{aligned}&\mathrm{mes}_\iota(S) \text{ не определен при } \iota = 0,\ldots,\sigma-1;\\ &\mathrm{mes}_\iota(S) = 0 \text{ при } \iota = \sigma+1,\ldots,\nu;\\ &\mathrm{mes}_\sigma(S) = \frac{1}{\sigma!}\sqrt{\det\mathrm{Gram}(\overrightarrow{a_0a_1},\ldots,\overrightarrow{a_0a_\sigma})}.\end{aligned}$$

К этим формулам напомним, что если векторы $v_1,\ldots,v_\alpha$ линейно зависимы, то

$$\det\mathrm{Gram}(v_1,\ldots,v_\alpha) = 0.$$

Объем отображения на комплексе

°Выберем некоторое конечномерное аффинное подпространство Y, в нем некоторое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и порожденный им объем mes_ι (размерностей $\iota = 0\ldots\dim\mathsf{Y}$).

°Df · Для всяких кусочно аффинного отображения $\mathfrak{f}$ с образом в выбранном пространстве Y, и полного симплициального комплекса $\mathfrak{k}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально, определим *объем* $\mathrm{vol}'''_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{f}$ по формуле

$$\mathrm{vol}'''_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{f} := \sum_{K:K\in\mathfrak{k}} \mathrm{mes}_\nu\,\mathfrak{f}^\circ(K),$$

где $\nu = \max\limits_{K:K\in\mathfrak{k}} \dim K$.

52 °Th · Отображение vol''' не зависит от комплекса.
То есть если некоторое отображение $\mathfrak{f}$ симплициально относительно некоторых полных симплициальных комплексов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то $\mathrm{vol}'''_{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{f} = \mathrm{vol}'''_{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{f}$.

Доказательство

°Рассмотрим сначала некоторое кусочно—аффинное отображение $\mathfrak{f}$ и симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$, относительно которого оно симплициально, и еще некоторый симплициальный комплекс $\mathfrak{l}$, измельчающий комплекс $\mathfrak{k}$, и относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ также симплициально.
°Заметим, что

$$\mathrm{vol}'''_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{f} = \sum_{L:L\in\mathfrak{l}} \mathrm{mes}_\nu\,\mathfrak{f}^\circ(L) = \sum_{K:K\in\mathfrak{k}}\left(\sum_{L:L\in\mathfrak{l},L\subset K} \mathrm{mes}_\nu\,\mathfrak{f}^\circ(L)\right).$$

Ясно также, что внутренняя сумма совпадает с числом $\mathrm{mes}_\nu\,\mathfrak{f}^\circ(K)$.

°Итак, в этом случае независимость доказана.
°Рассмотрим два комплекса $\mathfrak{k}'$ и $\mathfrak{k}''$, а также симплициальное относительно их отображение $\mathfrak{f}$.
°Тогда найдется некоторый симплициальный комплекс $\mathfrak{l}$, измельчающий оба комплекса $\mathfrak{k}'$ и $\mathfrak{k}''$.
°Заметим, что из Утверждения 15 следует существование комплекса $\mathfrak{n}$, измельчающего комплекс $\mathfrak{l}$ относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально.
°Из первой части доказательства вытекает, что $\mathrm{vol}'''_{\mathfrak{k}'}\,\mathfrak{f} = \mathrm{vol}'''_{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{f} = \mathrm{vol}'''_{\mathfrak{k}''}\,\mathfrak{f}$. Q.E.D.

°Df · Определим объем $\mathrm{vol}''\,\mathfrak{f}$ кусочно—аффинного отображения $\mathfrak{f}$ по формуле

$$\mathrm{vol}''\,\mathfrak{f} = \mathrm{vol}'''_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{f}$$

для некоторого комплекса $\mathfrak{k}$, относительно которого отображение $\mathfrak{f}$ симплициально.

Объем отображения

°Df · Для произвольного кусочно—аффинного отображения $\mathfrak{f}$, образ которого лежит в выбранном пространстве Y, и всякого разложения $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$ его в композицию PA—смятия $\mathfrak{g}$ и PA—контракции $\mathfrak{h}$, определим объем $\mathrm{vol}'(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ по формуле

$$\mathrm{vol}'(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}) := \mathrm{vol}''\,\mathfrak{g}.$$

53 °Th · Отображение vol' не зависит от первых двух своих аргументов.

Доказательство

°Возьмем некоторое кусочно—аффинное отображение $\mathfrak{f}$ и следующие два представления его:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_1 \circ \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_2 \circ \mathfrak{h}_2,$$

где $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ суть PA—контракции, а $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ суть кусочно—аффинные смятия.
°По Теореме 28 найдется кусочно—аффинный гомеоморфизм $\mathfrak{p}$ множества $\mathrm{im}\,\mathfrak{h}_1$ на множество $\mathrm{im}\,\mathfrak{h}_2$ такой, что $\mathfrak{g}_2 \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1$.
°Далее, как и в доказательстве Утверждения 52, по Утверждению 8 найдется некоторый симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$, относительно которого отображение $\mathfrak{p}$ симплициально, и относительно $\mathfrak{p}$—образа которого (то есть $\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$) отображение $\mathfrak{g}_2$ также симплициально. Тогда отображение $\mathfrak{g}_1$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{k}$.
°Таким образом, обозначив через ν размерность образа отображения $\mathfrak{f}$, получаем следующее равенство:

$$\mathrm{vol}'(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{f}) = \mathrm{vol}''\,\mathfrak{g}_1 = \mathrm{vol}'''_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{g}_1 =$$
$$= \sum_{\mathsf{K}:\mathsf{K}\in\mathfrak{k}} \mathrm{mes}_\nu\,\mathfrak{g}_1{}^\circ(\mathsf{K}) = \sum_{\mathsf{K}:\mathsf{K}\in\mathfrak{k}} \mathrm{mes}_\nu\,\mathfrak{g}_2{}^\circ(\mathfrak{p}^\circ(\mathsf{K})) = \sum_{\mathsf{L}:\mathsf{L}\in\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})} \mathrm{mes}_\nu\,\mathfrak{g}_2{}^\circ(\mathsf{L}) =$$
$$= \mathrm{vol}'''_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})}\,\mathfrak{g}_2 = \mathrm{vol}''\,\mathfrak{g}_2 = \mathrm{vol}'(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}).$$

°Итак, требуемое доказано. Q.E.D.

°Df · Для произвольного кусочно аффинного отображения $\mathfrak{f}$, образ которого лежит в выбранном пространстве Y, определим его объем $\mathrm{vol}\,\mathfrak{f} := \mathrm{vol}'(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{f})$, где $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}$,— некоторое разложение в композицию кусочно аффинного смятия $\mathfrak{g}$ и PA—контракции $\mathfrak{h}$.

Объем многогранника—следа

°Df · Для произвольного [af-]rd-ct-множества A определим для всякого A—многогранника—следа $\mathbb{A}$ его образ $\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathbb{A}$ как образ некоторого представителя его ($\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathbb{A} := \mathrm{im}\,\mathfrak{f}$, где $\mathfrak{f} \in \mathbb{A}$[или $\langle\mathfrak{f}, \mathsf{P}\rangle \in \mathbb{A}$]), и если $\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathbb{A}$ лежит в выбранном пространстве Y, то его объем $\mathrm{Vol}\,\mathbb{A}$ по формуле $\mathrm{Vol}\,\mathbb{A} := \mathrm{vol}\,\mathfrak{f}$, где $\mathfrak{f}$ [или $\langle\mathfrak{f}, \mathsf{P}\rangle$] — некоторый представитель из $\mathbb{A}$.
°Независимость от представителя ясна. В самом деле, если $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ — два представителя A—многогранника—следа $\mathbb{A}$, тогда по Определению 46 найдутся их общий редукт $\mathfrak{g}$ и две PA—контракции $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ такие, что $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}_2$. Тогда $\mathrm{vol}\,\mathfrak{f}_1 = \mathrm{vol}'(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}_1) = \mathrm{vol}''\,\mathfrak{g} = \mathrm{vol}'(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}_2) = \mathrm{vol}\,\mathfrak{f}_2$. [af-случай аналогичен, но Определение 48.]

1.4.4 Объем при деформации

Параметризованный симплекс

°Обозначим через Y некоторое конечномерное аффинное подпространство в пространстве Uni. На векторах этого Y введем некоторое евклидово скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
°Возьмем набор непрерывных отображений $\mathfrak{p}_0,\dots,\mathfrak{p}_\omega$, действующих из некоторого отрезка $[\alpha,\beta]$ вещественных чисел ($\alpha<\beta$) в пространство Y, и таких, что множество

$$\mathfrak{g}(\tau) := \bigcup_{\iota=0,\dots,\omega} \{\mathfrak{p}_\iota(\tau)\}, \quad \tau\in[\alpha,\beta],$$

аффинно независимо (это не исключает совпадения значений тех отображений при некоторых числах τ), а при $\tau\in(\alpha,\beta]$ верно, что $\operatorname{card}\mathfrak{g}(\tau)=1+\omega$.

°Df · Определим отображения

$$\mathfrak{y}_\iota(\tau) := \overrightarrow{\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_\iota}, \quad \iota=1,\dots\omega, \quad \tau\in[\alpha,\beta];$$

$$\mathfrak{z}(\tau) := \operatorname{Gram}(\mathfrak{y}_1(\tau),\dots,\mathfrak{y}_\omega(\tau)), \quad \tau\in[\alpha,\beta].$$

Еще зададим отображение $\mathfrak{m}$ формулою

$$\mathfrak{m}(\tau) := \operatorname{mes}_\omega \operatorname{conv}\mathfrak{g}(\tau) \quad \text{при } \tau\in[\alpha,\beta].$$

54 °Th · Отображение $\mathfrak{m}$ обладает следующими свойствами:

1. $\mathfrak{m}(\tau)>0$ при $\tau\in(\alpha,\beta]$;
2. отображение $\mathfrak{m}$ непрерывно на отрезке $[\alpha,\beta]$;

   если отображения $\mathfrak{p}_0,\dots,\mathfrak{p}_\omega$ дифференцируемы (D^1) на отрезке $[\alpha,\beta]$, то $\mathfrak{m}$ дифференцируемо (D^1) на отрезке $[\alpha,\beta]$, где на концах отрезка $[\alpha,\beta]$ подразумевается соответствующая односторонняя производная;

   если отображения $\mathfrak{p}_0,\dots,\mathfrak{p}_\omega$ суть C^1–гладкие на отрезке $[\alpha,\beta]$ и аналитичны в точке α (то есть каждое из них представимо рядом по степеням $(\tau-\alpha)$ с ненулевым радиусом сходимости), то $\mathfrak{m}$ — C^1–гладкое на отрезке $[\alpha,\beta]$;
3. в случае D^1 производная в каждой точке τ, где $\mathfrak{m}(\tau)>0$, вычисляется по формуле

$$\dot{\mathfrak{m}}(\tau) = \frac{1}{\omega!}\cdot\frac{\operatorname{tr}\big(\mathfrak{z}(\tau)^*\dot{\mathfrak{z}}(\tau)\big)}{2\sqrt{\det\mathfrak{z}(\tau)}},$$

   где звезда * обознает транспонированную матрицу алгебраических дополнений;
4. в случае D^1 и $\mathfrak{m}(\alpha)=0$, и нумерации такой, что $\mathfrak{p}_0(\alpha)=\mathfrak{p}_1(\alpha)$, производная вычисляется по формуле

$$\dot{\mathfrak{m}}(\alpha) = \frac{1}{\omega!}\sqrt{\det\operatorname{Gram}\big(\dot{\mathfrak{y}}_1(\alpha),\mathfrak{y}_2(\alpha),\dots,\mathfrak{y}_\omega(\alpha)\big)}.$$

Доказательство
°Первое — следствие из Определения 51.

°Третье следует из того же Определения 51 и из известной формулы (она считается непосредственно) для производной определителя, а именно:

$$\dot{\det}\begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{11}(\tau) & \dots & \mathfrak{c}_{1\nu}(\tau) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mathfrak{c}_{\nu 1}(\tau) & \dots & \mathfrak{c}_{\nu\nu}(\tau) \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{11}(\tau) & \dots & \mathfrak{c}_{1\nu}(\tau) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mathfrak{c}_{\nu 1}(\tau) & \dots & \mathfrak{c}_{\nu\nu}(\tau) \end{pmatrix}^{*} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathfrak{c}}_{11}(\tau) & \dots & \dot{\mathfrak{c}}_{1\nu}(\tau) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dot{\mathfrak{c}}_{\nu 1}(\tau) & \dots & \dot{\mathfrak{c}}_{\nu\nu}(\tau) \end{pmatrix}\right).$$

°Покажем четвертое. Так как $\det \mathfrak{z}(\alpha) = 0$, производная вычисляется по следующей формуле (здесь "$\epsilon \searrow 0$" обозначает стремление к нулю справа):

$$\dot{\mathfrak{m}}(\alpha) = \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{1}{\epsilon\cdot\omega!}\sqrt{\det \operatorname{Gram}\big(\mathfrak{y}_1(\alpha+\epsilon),\dots,\mathfrak{y}_\omega(\alpha+\epsilon)\big)} =$$

$$= \frac{1}{\omega!}\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\det \operatorname{Gram}\big(\mathfrak{y}_1(\alpha+\epsilon),\dots,\mathfrak{y}_\omega(\alpha+\epsilon)\big)} =$$

$$= \frac{1}{\omega!}\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{\epsilon}\det{}^{1/2}\begin{pmatrix} \epsilon^2\big\langle \mathfrak{s}(\epsilon),\mathfrak{s}(\epsilon)\big\rangle & \epsilon\big\langle \mathfrak{s}(\epsilon),\mathfrak{d}_2(\epsilon)\big\rangle & \dots & \epsilon\big\langle \mathfrak{s}(\epsilon),\mathfrak{d}_\omega(\epsilon)\big\rangle \\ \epsilon\big\langle \mathfrak{d}_2(\epsilon),\mathfrak{s}(\epsilon)\big\rangle & \big\langle \mathfrak{d}_2(\epsilon),\mathfrak{d}_2(\epsilon)\big\rangle & \dots & \big\langle \mathfrak{d}_2(\epsilon),\mathfrak{d}_\omega(\epsilon)\big\rangle \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \epsilon\big\langle \mathfrak{d}_\omega(\epsilon),\mathfrak{s}(\epsilon)\big\rangle & \big\langle \mathfrak{d}_\omega(\epsilon),\mathfrak{d}_2(\epsilon)\big\rangle & \dots & \big\langle \mathfrak{d}_\omega(\epsilon),\mathfrak{d}_\omega(\epsilon)\big\rangle \end{pmatrix}$$

при $\epsilon \searrow 0$, где введены обозначения: $\mathfrak{s}(\epsilon) = \dot{\mathfrak{y}}_1(\alpha) + \overline{\overline{o}}(1)$ (при $\epsilon \searrow 0$), $\mathfrak{d}_\iota(\epsilon) = \mathfrak{y}_\iota(\alpha+\epsilon)$, где $\iota = 2,\dots,\omega$. В завершение заметим, что по свойству определителя число ϵ сокращается.
°Покажем второе. Непрерывность следует из непрерывности квадратного корня, детерминанта и скалярного произведения; дифференцируемость показана в (3,4); C^1–гладкость при $\det \mathfrak{z}(\alpha) \neq 0$ следует из формулы производной квадратного корня, а при $\det \mathfrak{z}(\alpha) = 0$ чтобы показать C^1 рассмотрим (существующее из условия сего пункта) разложение отображения $\det \mathfrak{z}(\tau)$ в ряд Тейлора по степеням $(\tau-\alpha)$:

$$\det \mathfrak{z}(\tau) = \sum_{\iota:\iota\in\mathbb{N}} \frac{1}{\iota!}\sigma_\iota(\tau-\alpha)^\iota, \quad \tau\in[\alpha,\beta].$$

Ясно, что $\sigma_0 = 0$ (ибо $\det \mathfrak{z}(\alpha) = 0$). Из вычислений к четвертому пункту следует $\sigma_1 = 0$ (ибо предел вида $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0}\frac{\epsilon^2}{\epsilon}$).
°Итак,

$$\text{при } \tau>\alpha\text{: } \dot{\sqrt{\det \mathfrak{z}}}(\tau) = \frac{\frac{1}{1!}\sigma_2(\tau-\alpha)+\frac{1}{2!}\sigma_3(\tau-\alpha)^2+\dots}{2\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2(\tau-\alpha)^2+\frac{1}{3!}\sigma_3(\tau-\alpha)^3+\dots}};$$

$$\text{при } \tau=\alpha\text{: } \dot{\sqrt{\det \mathfrak{z}}}(\alpha) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2\epsilon^2+\frac{1}{3!}\sigma_3\epsilon^3+\dots} = \lim_{\epsilon\searrow 0}\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2+\frac{1}{3!}\sigma_3\epsilon+\dots} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}.$$

°Наконец, рассмотрим два случая

при $\sigma_2 \neq 0$:

$$\lim_{\tau\searrow\alpha} \sqrt{\dot{\det}\,\mathfrak{z}}(\tau) = \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{\frac{1}{1!}\sigma_2\epsilon + \frac{1}{2!}\sigma_3\epsilon^2 + \ldots}{2\sqrt{\frac{1}{2!}\sigma_2\epsilon^2 + \frac{1}{3!}\sigma_3\epsilon^3 + \ldots}} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{2}} = \sqrt{\dot{\det}\,\mathfrak{z}}(\alpha);$$

при $\sigma_2 = 0$ есть κ такое, что $\mathbb{N} \ni \kappa \geqslant 3$, $\sigma_2 = \ldots = \sigma_{\kappa-1} = 0$ и $\sigma_\kappa \neq 0$, откуда

$$\lim_{\tau\searrow\alpha} \sqrt{\dot{\det}\,\mathfrak{z}}(\tau) = \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{\frac{1}{(\kappa-1)!}\sigma_\kappa\epsilon^{\kappa-1} + \frac{1}{\kappa!}\sigma_{\kappa+1}\epsilon^\kappa + \ldots}{2\sqrt{\frac{1}{\kappa!}\sigma_\kappa\epsilon^\kappa + \frac{1}{(\kappa+1)!}\sigma_{\kappa+1}\epsilon^{\kappa+1} + \ldots}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{\sqrt{\kappa!}}{(\kappa-1)!}\sqrt{\sigma_\kappa}\,\epsilon^{\left(\frac{\kappa-2}{2}\right)} = 0 = \sqrt{\frac{\sigma_2}{2}} = \sqrt{\dot{\det}\,\mathfrak{z}}(\alpha).$$

Результат

°Df · Определим множество T — совокупность всех PA−отображений с образом в Y.
Скажем, что [аналитическая] элементарная деформация $\mathfrak{a}$ относительно некоторой четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{T}\rangle$ *проста*, если $\dim \operatorname{im} \mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ не зависит от τ из $[\alpha, \beta]$. Здесь размерность $\dim$ многогранника понимается как максимум из всех значений размерности симплексов, включенных в многогранник тот.

55 °Th

I. Пусть $\mathfrak{a}$ — простая [аналитическая] элементарная деформация относительно некоторой четверки $\langle\alpha, \beta, \mathfrak{a}, \mathsf{T}\rangle$;

тогда отображение $\mathfrak{p}$, определенное формулою $\mathfrak{p}(\tau) = \operatorname{vol} \mathfrak{a}(\tau, \cdot)$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$, непрерывно, а при аналитичности C^1−гладко.

II. Пусть $\mathfrak{n}$ — [аналитическая] T−деформация на отрезке $[\alpha, \beta]$ с постоянною размерностью образа;

тогда отображение $\mathfrak{w}$, действующее по формуле $\mathfrak{w}(\tau) = \operatorname{Vol} \mathfrak{n}_\tau$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, непрерывно, а при аналитичности кусочно−C^1−гладко.

Доказательство

°II очевидно следует из I.
°Докажем I. По Утверждению 50 найдется разложение $\mathfrak{a}(\tau, x) = \mathfrak{b}(\tau, \mathfrak{c}(x))$, и другие объекты оттуда.
°Заметим, что функция объема $\mathfrak{p}(\tau) = \operatorname{vol} \mathfrak{a}(\tau, \cdot) = \operatorname{vol} \mathfrak{b}(\tau, \cdot)$ при $\tau \in [\alpha, \beta]$. Определим $\mu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}(\alpha, \cdot)$ и последний объем опишем подробнее

$$\text{если } \tau > \alpha, \text{ то } \operatorname{vol} \mathfrak{b}(\tau, \cdot) = \operatorname{vol}'' \mathfrak{b}(\tau, \cdot) = \sum_{M : M \in \mathfrak{m}} \operatorname{mes}_\mu (\mathfrak{b}(\tau, \cdot))^\circ(M).$$

°Еще рассмотрим отображение $\hat{\mathfrak{p}}(\tau) := \sum_{M : M \in \mathfrak{m}} \operatorname{mes}_\mu (\mathfrak{b}(\tau, \cdot))^\circ(M)$, при $\tau \in [\alpha, \beta]$.
°Из Утверждений 54 и 50 следует, что отображение $\hat{\mathfrak{p}}$ непрерывно (соответственно, C^1−гладко) на $[\alpha, \beta]$.
°Уже показано, что при $\mathfrak{p}(\tau) = \hat{\mathfrak{p}}(\tau)$ $\tau > \alpha$. Покажем, что $\mathfrak{p}(\alpha) = \hat{\mathfrak{p}}(\alpha)$.
°Построим по Описанию 43 доцентрованный прообраз $\mathfrak{n}$ некоторого центрального подразделения комплекса $\mathfrak{b}(\alpha, \cdot)^{\circ\circ}(\mathfrak{m})$ относительно отображения $\mathfrak{b}(\alpha, \cdot)$ и комплекса $\mathfrak{m}$.
°Для рассмотрения объема отображения $\mathfrak{b}(\alpha, \cdot)$ возьмем относительно комплекса $\mathfrak{n}$ разложение $\mathfrak{b}(\alpha, \cdot) = \mathfrak{q} \circ \mathfrak{r}$ по Теореме 44. Объем считается по формуле

$$\mathfrak{p}(\alpha) = \operatorname{vol} \mathfrak{b}(\alpha, \cdot) = \operatorname{vol} \mathfrak{q} = \sum_{T : T \in \mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathfrak{n})} \operatorname{mes}_\mu \mathfrak{q}^\circ(T).$$

°Увидим, что $\hat{\mathfrak{p}}(\alpha) = \operatorname{vol}\mathfrak{q}$. Действительно, запишем равенство

$$\hat{\mathfrak{p}}(\alpha) = \sum_{N:N\in\mathfrak{n}} \operatorname{mes}_\mu (\mathfrak{b}(\alpha,\cdot))^\circ(N) =$$

$$= \sum_{T:T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathfrak{n})} \left(\sum_{N:N\in\mathfrak{n},\mathfrak{r}^\circ(N)=T} \operatorname{mes}_\mu (\mathfrak{q}\circ\mathfrak{r})^\circ(N) \right) =$$

$$= \sum_{T:T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathfrak{n})} \left(\sum_{N:N\in\mathfrak{n},\mathfrak{r}^\circ(N)=T} \operatorname{mes}_\mu \mathfrak{q}^\circ(T) \right) =$$

$$= \sum_{T:T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathfrak{n})} (\operatorname{mes}_\mu \mathfrak{q}^\circ(T)) \cdot \operatorname{card}\{N : N\in\mathfrak{n}, \mathfrak{r}^\circ(N) = T\}.$$

°Убедимся, что в последней сумме если $\operatorname{mes}_\mu \mathfrak{q}^\circ(T) > 0$, то $\operatorname{card}\{N : N\in\mathfrak{n}, \mathfrak{r}^\circ(N) = T\} = 1$. Действительно, μ–объем больше нуля только у симплексов T размерности μ. А размерность тела комплекса $\mathfrak{n}$ совпадает с размерностью тела комплекса $\mathfrak{m}$, в свою очередь совпадающею с размерностью образа отображения $\mathfrak{a}(\beta,\cdot)$, равною тому же числу μ.
°Следовательно, по Утверждению 26 число $\mathfrak{r}$–прообразных симплексу T симплексов N равно единице. Таким образом,

$$\hat{\mathfrak{p}}(\alpha) = \sum_{T:T\in\mathfrak{r}^{\circ\circ}(\mathfrak{n})} \operatorname{mes}_\mu \mathfrak{q}^\circ(T) = \operatorname{vol}\mathfrak{q}.$$

Q.E.D.

Глава 2

Локальная минимальность

Предисловие

После введения многогранников—следов, их деформаций и объема рассмотрим аналог задачи Плато (как мыльная пленка затягивает некоторый контур) — построить понятие минимальности многогранников—следов и узнать особенности строения их, обусловленные минимальностью.

Наши построения двояки. Рассматривается многомерный случай с несколькими особенностями, и случай многогранников—следов размерности 2 в $\mathbb{R}^3$ с более подробным обсчетом.

2∼Введение

ПРОСТРАНСТВО ПОСТРОЕНИЙ

°Возьмем некоторую конечномерную плоскость Y в пространстве Uni, на этой плоскости возьмем некоторое положительно—определенное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и рассмотрим порожденные этим скалярным произведением меры (объемы) $\mathrm{mes}_0, \ldots \mathrm{mes}_{\dim Y}$ соответствующих размерностей $0, \ldots, \dim Y$.

КВАЗИПОВЕРХНОСТИ

°Df · Скажем, что точка x — точка *полуплоского типа* в многогранном множестве P, если $x \in P$, и найдется симплекс A такой, что A — открытое множество в P, есть симплекс B такой, что $\dim B + 1 = \dim A$ и $B \lhd A$ и $x \in B$ и $B \cup A$ — открытое в P множество.

°Df · Скажем при каком—либо ν из чисел $0, \ldots, \dim Y$, что множество A — ν*—квазиповерхность*, если

- оно включено в плоскость Y, многогранно, компактно;
- всякая неполуплоского типа в A точка x обладает множеством G, гомеоморфным $\mathbb{R}^\nu$, и таким, что $x \in G \subset A$;
- ν—мерно всякое множество, открытое в множестве A.

Еще скажем, что множество A — *квазиповерхность*, если оно — ν—квазиповерхность для некоторого ν из $0, \ldots, \dim Y$.

КЛАСС ПАР

°Df · Обозначим через F множество всех пар $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$, у которых найдется представление вида $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{b}$ — PA—смятие; $\mathfrak{c}$ — PA—контракция; M — аффиктура в PA—отображении $\mathfrak{a}$; $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ и $\operatorname{dom}\mathfrak{b} = \operatorname{im}\mathfrak{c}$ — квазиповерхности; и всякая точка x из $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$ не полуплоского типа в $\operatorname{dom}\mathfrak{c}$.
Из этого определения следует, что F — af-редуктивно содержательный класс.

°Df · Скажем, что пара $\langle \mathfrak{a}', M'\rangle$ из F *проецируема в/на* пару $\langle \mathfrak{a}'', M''\rangle$ из F, если найдется PA—контракция $\mathfrak{c}$ такая, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' \circ \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}^{\circ}(M') = M''$.

Конус

°Df · Скажем, что пара $\langle A, x\rangle$ — *локальный конус*, если $x \in A$, множество A многогранно, компактно и такое, что для всякой точки y из множества A верно, что $[x, y] \subset A$.

°Df · Если $\langle A, x\rangle$ — некоторый локальный конус, то определим его *естественный* край $\operatorname{fn}(A, x)$ по формуле
$$\operatorname{fn}(A, x) := \{z : \text{для всякой точки } w \text{ из множества } A \text{ верно, что } z \notin [x, w)\}.$$

°Df · Скажем, что тройка $\langle \mathfrak{a}, M, x\rangle$ — *коническая*, если

- $\langle \mathfrak{a}, M\rangle \in \mathsf{F}$;
- $\langle \operatorname{dom}\mathfrak{a}, x\rangle$ — локальный конус;
- $M = \operatorname{fn}(\operatorname{dom}\mathfrak{a}, x)$.

Минимальность

°Df · Скажем, что коническая тройка $\langle \mathfrak{a}, M, x\rangle$ *минимальна*, если при всякой элементарной простой аналитической деформации $\mathfrak{m}$ относительно некоторой пятерки $\langle 0, 1, \mathfrak{a}, P, \mathsf{F}\rangle$ и такой, что пара $\langle \mathfrak{m}(0, \cdot), P\rangle$ проецируема в пару $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$, верно, что найдется некоторое ϵ из $(0, 1)$ такое, что при всяком τ из $[0, \epsilon)$ верно $\operatorname{vol}\mathfrak{m}(\tau, \cdot) \geqslant \operatorname{vol}\mathfrak{m}(0, \cdot) = \operatorname{vol}\mathfrak{a}$.

°Df · Скажем, что пара $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ из F *локально—минимальна*, если для всякой точки x из множества $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$ найдется локальный конус $\langle C, x\rangle$ такой, что C — замкнутая окрестность точки x во множестве $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, $C \setminus \operatorname{fn} C \subset \operatorname{dom}\mathfrak{a} \setminus M$ и коническая тройка $\langle \mathfrak{a}|_C, \operatorname{fn}(C, x), x\rangle$ минимальна.

°Df · Скажем, что F—многогранник—след *локально—минимален*, если таков каждый его элемент.

2.1 Многомерный расчет

2.1.1 Расчет расщепления

Вдавление в симплексе

56 °*Построение*
Рассмотрим лежащий в Y некоторый ν—мерный симплекс A, при $\nu \geqslant 1$, и некоторый $(\nu - 1)$—мерный симплекс B, подчиненный симплексу A. Сопоставим такой паре $\langle A, B\rangle$ набор $\operatorname{imp}(A, B) := \langle \mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle$, где составляющие определены ниже.
Точка $\mathbf{c}$ — центр симплекса B, и точка $\tilde{\mathbf{c}}$ — такая, что $A = B * \{\tilde{\mathbf{c}}\}$.
А также полные симплициальные комплексы

- $\boldsymbol{z} := \{V : V \lhd B, V \neq B\}$;

- $\mathfrak{y} := \{\{c\}\} \sqcup \mathfrak{z} \sqcup \{Z * \{c\} : Z \in \mathfrak{z}\}$;
- $\mathfrak{x} := \{\{\tilde{c}\}\} \sqcup \mathfrak{y} \sqcup \{Y * \{\tilde{c}\} : Y \in \mathfrak{y}\}$.

°*Пример*
Рассмотрим некоторый двумерный симплекс $A = \{a\} * \{b\} * \{\tilde{c}\}$, и его подсимплекс $B = \{a\} * \{b\}$. Тогда

$$c = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b,$$
$$\mathfrak{z} = \{\{a\}, \{b\}\},$$
$$\mathfrak{y} = \{\{c\}, \{a\}, \{b\}, (a, c), (c, b)\},$$
$$\mathfrak{x} = \{\{\tilde{c}\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}, (a, c), (c, b), (\tilde{c}, c), (\tilde{c}, a), (\tilde{c}, b), \{\tilde{c}\} * (a, c), \{\tilde{c}\} * (c, a)\}.$$

Приуготовление

°Возьмем некоторый вектор g из векторного пространства над плоскостью Y. Еще в контексте пт. 56 рассмотрим некоторое симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{x}$ инъективное отображение $\mathfrak{u}$, и определим $\mathfrak{w} := \mathfrak{u}^{\circ\circ}(\mathfrak{x})$.

°Df · Определим на $[0, 1] \times {}^{\cup}(\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{w}))$ отображения $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{n}(\tau, k) := \begin{cases} \mathfrak{u}^{-1}(k), & \text{если } \tau \in [0,1] \text{ и } k \neq \mathfrak{u}(c); \\ c + \tau \cdot g, & \text{если } \tau \in [0,1] \text{ и } k = \mathfrak{u}(c), \end{cases}$$

и $\tilde{\mathfrak{n}}$

$$\tilde{\mathfrak{n}}(\tau, k) := \begin{cases} \mathfrak{u}^{-1}(k), & \text{если } \tau \in [0,1] \text{ и } k \neq \mathfrak{u}(\tilde{c}); \\ c + \tau \cdot g, & \text{если } \tau \in [0,1] \text{ и } k = \mathfrak{u}(\tilde{c}), \end{cases}$$

Еще определим на $[0, 1] \times {}^{\cup}\mathfrak{w}$ отображение $\mathfrak{m}$ как посимплексно–аффинное продолжение при каждом τ из $[0, 1]$ отображения $\mathfrak{n}(\tau, \cdot)$ на симплексы комплекса $\mathfrak{w}$ с вершинных точек тех симплексов, и отображение $\tilde{\mathfrak{m}}$ как посимплексно–аффинное продолжение при каждом τ из $[0, 1]$ отображения $\tilde{\mathfrak{n}}(\tau, \cdot)$ на симплексы комплекса $\mathfrak{w}$ с вершинных точек тех симплексов.
°*Намерение*
Изучим особенности поведения объема

$$\mathfrak{z}(\tau) = \mathrm{vol}\,\mathfrak{m}(\tau, \cdot) = \sum_{W : W \in \mathfrak{w}, \dim W = \nu} \mathrm{mes}_{\nu}(\mathfrak{m}(\tau, \cdot)^{\circ}(W))$$

при

- $g = q := \overrightarrow{c\tilde{c}}$ и $\tau \searrow 0$;
- $g \neq 0$, $g \perp B$, $q \perp B$ и $\tau \searrow 0$,

и объема

$$\tilde{\mathfrak{z}}(\tau) = \sum_{W : W \in \mathfrak{w}, \dim W = \nu} \mathrm{mes}_{\nu}(\tilde{\mathfrak{m}}(\tau, \cdot)^{\circ}(W))$$

при $g = q$ и $\tau \searrow 0$.
°Возьмем некоторый ν–мерный симплекс W из $\mathfrak{w}$ и некоторым образом пронумеруем $m_1, \ldots, m_{\nu-1}$ все вершинные точки симплекса $\mathfrak{u}^{\circ}(W)$, не совпадающие с точками c и $\tilde{c}$ (если же $\nu = 1$, то нет таких точек). Особо изучим слагаемое

$$\mathrm{mes}_{\nu}(\mathfrak{m}(\tau, \cdot)^{\circ}(W))$$

объема $\mathfrak{z}(\tau)$ при этом симплексе W, и слагаемое

$$\mathrm{mes}_{\nu}(\tilde{\mathfrak{m}}(\tau, \cdot)^{\circ}(W))$$

объема $\tilde{\mathfrak{z}}(\tau)$ при этом симплексе W.

Случай первый, $g = q$ и $\tau \searrow 0$ для $\mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W))$

°Здесь
$$\mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W)) = \frac{1}{\nu!}\cdot\sqrt{\det\mathrm{Gram}(-q+\tau\cdot q, \overrightarrow{\tilde{c}m_1},\dots,\overrightarrow{\tilde{c}m_{\nu-1}})} =$$
(по свойствам определителя)
$$= (1-\tau)\cdot\frac{1}{\nu!}\cdot\sqrt{\det\mathrm{Gram}(q, \overrightarrow{\tilde{c}m_1},\dots,\overrightarrow{\tilde{c}m_{\nu-1}})} =$$
$$= (1-\tau)\cdot\mathrm{mes}_\nu(\left(\mathfrak{u}^{-1}\right)^\circ(W)).$$
°Следовательно
$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W)) = -\,\mathrm{mes}_\nu(\left(\mathfrak{u}^{-1}\right)^\circ(W)),$$
и
$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathfrak{z}(\tau) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathrm{vol}\,\mathfrak{m}(\tau,\cdot) = -\,\mathrm{mes}_\nu(A) < 0.$$

Случай второй, $g \neq 0$, $g \perp B$, $q \perp B$ и $\tau \searrow 0$ для $\mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W))$

°Здесь
$$\mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W)) = \frac{1}{\nu!}\sqrt{\det\mathrm{Gram}(q-\tau\cdot g, \overrightarrow{cm_1}-\tau\cdot g,\dots,\overrightarrow{cm_{\nu-1}}-\tau\cdot g)}.$$
°Обозначим
$$\mathfrak{x}(W) := \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = 1;\\ \det\mathrm{Gram}(\overrightarrow{cm_1},\dots,\overrightarrow{cm_{\nu-1}}), & \text{если } \nu > 1,\end{cases}$$
и заметим, что по Утверждению 54 и по ортогональности в изучаемых векторах производная
$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W))$$
имеет вид
$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W)) = \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{-2\cdot\langle q,g\rangle\cdot\mathfrak{x}(W)}{2\cdot\sqrt{\det\mathrm{Gram}(q,\overrightarrow{cm_1},\dots,\overrightarrow{cm_{\nu-1}})}} =$$
$$= \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{-\langle q,g\rangle\cdot\mathfrak{x}(W)}{\|q\|\cdot\sqrt{\mathfrak{x}(W)}} = \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{-\langle q,g\rangle}{\|q\|}\cdot\sqrt{\mathfrak{x}(W)}.$$
°Итак,
$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathfrak{z}(\tau) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathrm{vol}\,\mathfrak{m}(\tau,\cdot) = \sum_{W: W\in\boldsymbol{w}, \dim W=\nu}\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{-\langle q,g\rangle}{\|q\|}\cdot\sqrt{\mathfrak{x}(W)}.$$

Случай третий, $g = q$ и $\tau \searrow 0$ для $\mathrm{mes}_\nu(\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)^\circ(W))$

°Здесь
$$\mathrm{mes}_\nu(\tilde{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)^\circ(W)) = \frac{1}{\nu!}\cdot\sqrt{\det\mathrm{Gram}(\tau\cdot q, \overrightarrow{cm_1},\dots,\overrightarrow{cm_{\nu-1}})} =$$
(по свойствам определителя)
$$= \tau\cdot\frac{1}{\nu!}\cdot\sqrt{\det\mathrm{Gram}(q, \overrightarrow{cm_1},\dots,\overrightarrow{cm_{\nu-1}})} =$$

$$= \tau \cdot \mathrm{mes}_\nu\big(\big(\mathfrak{u}^{-1}\big)^\circ(W)\big).$$

°Следовательно

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \mathrm{mes}_\nu(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)^\circ(W)) = \mathrm{mes}_\nu\big(\big(\mathfrak{u}^{-1}\big)^\circ(W)\big),$$

и

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \tilde{\mathfrak{z}}(\tau) = \mathrm{mes}_\nu(A).$$

2.1.2 Степени симплексов

Степени 1 и 2

57 °Th · Для всякой локально–минимальной пары $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ (обозначим $\nu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}$) и всякого симплициального комплекса $\mathfrak{a}$ если отображение $\mathfrak{a}$ локально–инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a})\backslash M$, а также симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$, точка x лежит в множестве $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, то не найдется $(\nu-1)$–мерного симплекса A в комплексе $\mathfrak{a}$ такого, что $x \in A$ и симплекс A инцидентен только одному ν–мерному симплексу комплекса $\mathfrak{a}$.

Доказательство

°Пусть $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ — некоторая локально–минимальная пара, положим $\nu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}$, выберем некоторый симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, предположим еще, что отображение $\mathfrak{a}$ локально–инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, а точка x лежит в множестве $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$.

°Допустим противное, то есть найдется $(\nu-1)$–мерный симплекс B' в комплексе $\mathfrak{a}$ такой, что $x \in B'$ и симплекс B' инцидентен только одному ν–мерному симплексу A' комплекса $\mathfrak{a}$.

°Тогда обозначим $C := \overline{A'}$, и заметим, что $\langle C, x\rangle$ — локальный конус в $\operatorname{dom} \mathfrak{a}$.

°Рассмотрим коническую тройку $\langle \mathfrak{a}|_C, \mathfrak{fn}(C,x), x\rangle$. Определим деформацию, уменьшающую объем. Для того обозначим $A := \mathfrak{a}^\circ(A')$ и $B := \mathfrak{a}^\circ(B')$, и будем без ограничения общности считать, что точка x — центральная в симплексе B'. Рассмотрим (см. Описание 56) $\mathrm{imp}(A,B) = \langle \mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle$. Здесь $\mathbf{c} = \mathfrak{a}(x)$. Еще обозначим $\mathfrak{u} := \big(\mathfrak{a}|_{\overline{A'}}\big)^{-1}$.

°Применим к обозначенным A, B, $\mathfrak{u}$ построение Первого Случая из Раздела 2.1.1. Из него следует, что есть элементарная простая аналитическая деформация $\mathfrak{m}$ относительно пятерки $\langle 0, \frac{1}{2}, \boldsymbol{w}, \mathfrak{fn}(C,x), F\rangle$ такая, что $\mathrm{vol}\, \mathfrak{m}(\tau,\cdot)$ уменьшается при близких к 0 числах τ (так как производная объема отрицательна) и $\langle \mathfrak{m}(0,\cdot), \mathfrak{fn}(C,x)\rangle = \langle \mathfrak{a}|_C, \mathfrak{fn}(C,x)\rangle$.

°Итак, допущенное привело к противоречию локальной минимальности. Q.E.D.

58 °Th · Для всякой локально–минимальной пары $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ (обозначим $\nu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}$) и всякого симплициального комплекса $\mathfrak{a}$ если отображение $\mathfrak{a}$ локально–инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, а также симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$, то для всякого $(\nu-1)$–мерного симплекса B' степени 2 в комплексе $\mathfrak{a}$, лежащего в $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, верно, что симплексы $\mathfrak{a}^\circ(A'_1)$ и $\mathfrak{a}^\circ(A'_2)$ лежат в одной ν–мерной плоскости, где A'_1 и A'_2 суть те два симплекса комплекса $\mathfrak{a}$, которые инцидентны симплексу B' и имеют размерность ν.

Доказательство

°Пусть $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ — некоторая локально–минимальная пара, положим $\nu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}$, выберем некоторый симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, предположим еще, что отображение $\mathfrak{a}$ локально–инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$.

°Допустим противное, то есть в комплексе $\mathfrak{a}$ найдутся два ν–мерных симплекса A'_1 и A'_2, инцидентных некоторому $(\nu-1)$–мерному симплексу B', и таких, что $\mathfrak{a}^\circ(A'_1)$ и $\mathfrak{a}^\circ(A'_2)$ не лежат в одной ν–мерной плоскости.

°Обозначим

- $A_1 := \mathfrak{a}^\circ(A_1')$, $\quad A_2 := \mathfrak{a}^\circ(A_2')$, $\quad B := \mathfrak{a}^\circ(B')$;
- $\operatorname{imp}(A_1, B) =: \langle c_1, \tilde{c}_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1\rangle$, $\quad \operatorname{imp}(A_2, B) =: \langle c_2, \tilde{c}_2, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z}_2\rangle$, причем $c_1 = c_2$, $\quad \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$, $\quad \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2$;
- $A_1' =: \{\tilde{c}_1'\} * B'$ и $A_2' =: \{\tilde{c}_2'\} * B'$.

Еще обозначим c' — центр симплекса B'. Заметим, что $\mathfrak{a}(c') = c_1 = c_2$ и $\mathfrak{a}(\tilde{c}_1') = \tilde{c}_1$ и $\mathfrak{a}(\tilde{c}_2') = \tilde{c}_2$. При этом можно (с помощью подходящего подразделения комплекса $\mathfrak{a}$) считать, что векторы $q_1 := \overrightarrow{c\tilde{c}_1}$ и $q_2 := \overrightarrow{c\tilde{c}_2}$ имеют одинаковую длину и перпендикулярны симплексу B.
°Еще обозначим $r := q_1 + q_2$. Заметим, что (по предположению о неплоскости в образе)

$$\langle r, q_1\rangle = \langle q_1, q_1\rangle + \langle q_2, q_1\rangle = \langle q_2, q_2\rangle + \langle q_2, q_1\rangle = \langle r, q_2\rangle =$$
$$= \|q_1\|^2 \cdot \left(1 + \frac{\langle q_2, q_1\rangle}{\|q_1\|^2}\right) = \|q_1\|^2 \cdot \left(1 + \frac{\langle q_2, q_1\rangle}{\|q_1\| \cdot \|q_2\|}\right) > 0;$$

Здесь же заметим, что $r \perp B$, ибо q_1 и q_2 ортогональны симплексу B.
°Определим полный симплициальный комплекс

$$\mathbf{b} := \boldsymbol{x}_1 \sqcup \boldsymbol{x}_2.$$

°Возьмем множество

$$L := (\operatorname{rmrg} A_1' \cup \operatorname{rmrg} A_2') \setminus B'.$$

Определим элементарную простую аналитическую деформацию $\mathfrak{m}$ относительно пятерки $\langle 0, 1, \mathbf{b}, L, F\rangle$ как объединение двух деформаций $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$, построенных по Описанию 56, где соответственно индексу 1 и 2 обозначить следует $\mathfrak{u}_1 := \left(\mathfrak{a}\big|_{\overline{A_1'}}\right)^{-1}$ и $\mathfrak{u}_2 := \left(\mathfrak{a}\big|_{\overline{A_2'}}\right)^{-1}$, и вектор $g := r$.
°Из Второго Случая Раздела 2.1.1 следует, что

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \operatorname{vol} \mathfrak{m}(\tau, \cdot) = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \big(\operatorname{vol} \mathfrak{m}_1(\tau, \cdot) + \operatorname{vol} \mathfrak{m}_2(\tau, \cdot)\big) =$$
$$= \frac{-\langle q_1, g\rangle}{\|q_1\|} \cdot \sum (\text{положительные слагаемые для } A_1') +$$
$$+ \frac{-\langle q_2, g\rangle}{\|q_2\|} \cdot \sum (\text{положительные слагаемые для } A_2') < 0.$$

°Итак, достигнуто противоречие локальной минимальности пары $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$. **Q.E.D.**

°**Заметка** · Из последних утверждений следует, что у внутренней точки локально–минимальной пары звезда не содержит $(\nu-1)$–симплекса степени 1 и всякий $(\nu-1)$–симплекс степени 2 в образе плоско устроен.
°Скажем, что два ν–симплексы из звезды *смежны*, если они инцидентны $(\nu-1)$–симплексу степени 2 из звезды, и на это отношение смежности натянем отношение эквивалентности. Классы же так эквивалентных симплексов назовем *листами*.
°Итак, образ каждого листа — плоский.
Однако могут быть $(\nu-1)$–симплексы в звезде степени 3 и более.

Степень 3

59 °**Th** · Для всякой локально–минимальной пары $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ (обозначим $\nu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}$) и всякого симплициального комплекса $\mathfrak{a}$ если отображение $\mathfrak{a}$ локально–инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, а также симплициально относительно комплекса $\mathfrak{a}$, то для всякого $(\nu-1)$–мерного симплекса B' комплекса $\mathfrak{a}$, включеного в $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, и имеющего степень в комплексе $\mathfrak{a}$ не менее трех верно, что

- для произвольных двух ν−мерных симплексов A'_1 и A'_2, инцидентных симплексу B', двугранный угол между симплексами $\mathfrak{a}^\circ(A'_1)$ и $\mathfrak{a}^\circ(A'_2)$ не менее $\frac{2\pi}{3}$;
- в тех же условиях степень симплекса B' равна трем, и тот двугранный угол равен $\frac{2\pi}{3}$.

Доказательство

°Пусть $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ — некоторая локально−минимальная пара, положим $\nu := \dim \operatorname{im} \mathfrak{a}$, выберем некоторый симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, предположим еще, что отображение $\mathfrak{a}$ локально−инъективно на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$. Выберем еще некоторый $(\nu - 1)$−мерный симплекс B' комплекса $\mathfrak{a}$, включеный в $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$, и имеющий степень в комплексе $\mathfrak{a}$ не менее трех.
°Предположим противное, то есть найдутся два ν−мерных симплекса A'_1 и A'_2 такие, что они инцидентны $(\nu-1)$−мерному симплексу B' и двугранный угол между ν−мерными симплексами $\mathfrak{a}^\circ(A'_1)$ и $\mathfrak{a}^\circ(A'_2)$ менее $\frac{2\pi}{3}$. При этом можно считать, что двугранный угол (как множество) не включает $\mathfrak{a}^\circ$−образа всякого иного ν−мерного симплекса, инцидентного симплексу B'.
°Обозначим

- $A_1 := \mathfrak{a}^\circ(A'_1), \quad A_2 := \mathfrak{a}^\circ(A'_2), \quad B := \mathfrak{a}^\circ(B')$;
- $\operatorname{imp}(A_1, B) =: \langle c_1, \tilde{c}_1, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1\rangle, \quad \operatorname{imp}(A_2, B) =: \langle c_2, \tilde{c}_2, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_2\rangle$,
  причем $c := c_1 = c_2, \quad \mathfrak{y} := \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{z} := \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2$;
- $A'_1 =: \{\tilde{c}'_1\} * B'$ и $A'_2 =: \{\tilde{c}'_2\} * B'$.

°Еще обозначим c' — центр симплекса B'. Заметим, что $\mathfrak{a}(c') = c_1 = c_2$ и $\mathfrak{a}(\tilde{c}'_1) = \tilde{c}_1$ и $\mathfrak{a}(\tilde{c}'_2) = \tilde{c}_2$.
При этом можно (с помощью подходящего подразделения комплекса $\mathfrak{a}$) считать, что векторы $q_1 := \overrightarrow{c\tilde{c}_1}$ и $q_2 := \overrightarrow{c\tilde{c}_2}$ имеют одинаковую длину и перпендикулярны симплексу B.
°Еще обозначим $\mathtt{r} := q_1 + q_2$. Здесь же заметим, что $\mathtt{r} \neq 0$ по предположению нашему, что угол между векторами q_1 и q_2 менее $120°$, а угол этот совпадает с двугранным углом между ν−мерными симплексами $\mathfrak{a}^\circ(A'_1)$ и $\mathfrak{a}^\circ(A'_2)$.
°Заметим, что пара $\langle \overline{{}^{\cup}\mathrm{st}_{\mathfrak{a}}\{B'\}}, c'\rangle$ — локальный конус. Рассмотрим отображение $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}\Big|_{\overline{{}^{\cup}\mathrm{st}_{\mathfrak{a}}\{B'\}}}$.
°Возьмем некоторую точку v вне аффинной оболочки множества $\operatorname{dom} \mathfrak{b}$. Определим отображение $\mathfrak{u}_1$ на $\overline{A_1}$ как посимплексно−аффинное продолжение с вершинных точек симплексов комплекса $\mathfrak{x}_1$ отображения

$$\begin{cases} p \longmapsto \mathfrak{b}^{-1}(p), & \text{если } p \text{ — вершинная точка некоторого} \\ & \text{симплекса из } \mathfrak{x}_1, \text{ не равная точке } c; \\ p \longmapsto v, & \text{если } p = c, \end{cases}$$

отображение $\mathfrak{u}_2$ на $\overline{A_2}$ как посимплексно−аффинное продолжение с вершинных точек симплексов комплекса $\mathfrak{x}_2$ отображения

$$\begin{cases} p \longmapsto \mathfrak{b}^{-1}(p), & \text{если } p \text{ — вершинная точка некоторого} \\ & \text{симплекса из } \mathfrak{x}_2, \text{ не равная точке } c; \\ p \longmapsto v, & \text{если } p = c, \end{cases}$$

и отображение $\mathfrak{u}_0$ на $\overline{B * \{c + \mathtt{r}\}}$ как посимплексно−аффинное продолжение с вершинных точек симплексов комплекса $\mathfrak{d} := \mathfrak{y} \sqcup \{\{c + \mathtt{r}\}\} \sqcup \{Y * \{c + \mathtt{r}\} : Y \in \mathfrak{y}\}$ отображения

$$\begin{cases} p \longmapsto \mathfrak{b}^{-1}(p), & \text{если } p \text{ — вершинная точка некоторого} \\ & \text{симплекса из } \mathfrak{y}; \\ p \longmapsto v, & \text{если } p = c + \mathtt{r}. \end{cases}$$

°Определим несколько симплициальных комплексов

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1' := \mathbf{u}_1{}^{\circ\circ}(\mathbf{x}_1);\\
&\mathbf{x}_2' := \mathbf{u}_2{}^{\circ\circ}(\mathbf{x}_2);\\
&\mathbf{d}' := \mathbf{u}_0{}^{\circ\circ}(\mathbf{d});\\
&\mathbf{y}' := \mathbf{d}' \setminus \mathrm{st}_{\mathbf{d}'}\{\{v\}\};\\
&\mathbf{u}' := \{U : U \in \mathrm{lk}_{\mathbf{a}}\{B'\}, U \neq \{\tilde{c}_1'\}, U \neq \{\tilde{c}_2'\}\};\\
&\mathbf{t}' := \{U * Y : U \in \mathbf{u}', Y \in \mathbf{y}'\};\\
&\mathbf{b}' := \mathbf{u}' \sqcup \mathbf{t}' \sqcup \mathbf{d}' \cup \mathbf{x}_1' \cup \mathbf{x}_2'.
\end{aligned}$$

°Еще определим образы вершинных точек симплексов комплекса $\mathbf{b}'$

$$\hat{\mathbf{n}}(\tau, a) := \begin{cases} \mathbf{a}(a), & \text{если } a \in \{\tilde{c}_1', \tilde{c}_2', c'\} \sqcup {}^{\cup}\mathbf{u}' \sqcup \mathrm{vert}\, B' \text{ и } \tau \in [0,1];\\ \mathbf{a}(c') + \tau \cdot r, & \text{если } a = v \text{ и } \tau \in [0,1]. \end{cases}$$

°Определим деформацию $\hat{\mathbf{m}}$ относительно пятерки

$$\langle 0, 1, \mathbf{b}', {}^{\cup}\!\left(\mathbf{b}' \setminus \mathrm{st}_{\mathbf{b}'}\{\{v\}, \{c'\}\}\right), F\rangle$$

как посимплексно аффинное продолжение при каждом τ из $[0,1]$ на симплексы комплекса $\mathbf{b}'$ отображения $\hat{\mathbf{n}}(\tau, \cdot)$.

°Заметим, что пара $\langle \hat{\mathbf{m}}(0,\cdot), {}^{\cup}\!\left(\mathbf{b}' \setminus \mathrm{st}_{\mathbf{b}'}\{\{v\}, \{c'\}\}\right)\rangle$ проецируема на пару $\langle \mathbf{a}, \mathrm{fn}(\overline{{}^{\cup}\mathrm{st}_{\mathbf{a}}\{B'\}}, c')\rangle$.

°Посчитаем изменение объема. Из определения комплекса $\mathbf{b}'$ и деформации $\hat{\mathbf{m}}$ следует, что $\mathrm{vol}\, \hat{\mathbf{m}}(\tau, \cdot)$ складывается из двух следующих частей:

$$\mathfrak{h}_1(\tau) := \mathrm{vol}\left(\hat{\mathbf{m}}(\tau,\cdot)\Big|_{\overline{{}^{\cup}(\mathbf{t}')}}\right);$$

$$\mathfrak{h}_2(\tau) := \mathrm{vol}\left(\hat{\mathbf{m}}(\tau,\cdot)\Big|_{{}^{\cup}(\mathbf{x}_1' \cup \mathbf{x}_2' \cup \mathbf{d}')}\right).$$

°Первый объем $\mathfrak{h}_1$ неизменен. Рассмотрим второй объем $\mathfrak{h}_2$ при τ из $[0,1]$

$$\mathfrak{h}_2(\tau) := \sum_{J : J \in \mathbf{y}', \dim J = v-1} \mathfrak{g}_J(\tau),$$

где при J объем $\mathfrak{g}_J(\tau)$ вычисляется по формуле

$$\mathfrak{g}_J(\tau) := \mathrm{mes}_v\left(\hat{\mathbf{m}}(\tau,\cdot)^{\circ}(J * \{c'\})\right) +$$

$$+ 2 \cdot \mathrm{mes}_v\left(\hat{\mathbf{m}}(\tau,\cdot)^{\circ}(J * \{\tilde{c}_1'\})\right).$$

°Посчитаем производную в нуле (см. Третий Случай и Второй Случай в Разделе 2.1.1)

$$\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \mathfrak{g}_J(\tau) = \mathrm{mes}_v\left(\left((\mathbf{u}_0)^{-1}\right)^{\circ}(J) * \{c\}\right) -$$

$$-\frac{2}{v} \cdot \frac{\langle q_1, r\rangle}{\|q_1\|} \cdot \mathrm{mes}_{v-1}\left(\hat{\mathbf{m}}(0,\cdot)^{\circ}(J)\right) =$$

(по ортогональности вектора r симплексу $\hat{\mathbf{m}}(0,\cdot)^{\circ}(J) \subset \mathbf{a}^{\circ}(B')$)

$$= \frac{\|r\|}{v} \cdot \mathrm{mes}_{v-1}\left(\hat{\mathbf{m}}(0,\cdot)^{\circ}(J)\right) -$$

$$-\frac{2}{\nu}\cdot\frac{\langle q_1,r\rangle}{\|q_1\|}\cdot \mathrm{mes}_{\nu-1}\Big(\hat{\mathfrak{m}}(0,\cdot)^\circ(J)\Big)=$$
$$=\left(\|r\|-2\cdot\frac{\langle q_1,r\rangle}{\|q_1\|}\right)\cdot \mathrm{mes}_{\nu-1}\Big(\hat{\mathfrak{m}}(0,\cdot)^\circ(J)\Big).$$

Таким образом, число $\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\mathfrak{g}_J(\tau)$ независимо от J имеет тот же знак, что и число $\Big(\|r\|\cdot\|q_1\|-2\cdot\langle q_1,r\rangle\Big)$.

°Оценим это последнее

$$\Big(\|r\|\cdot\|q_1\|-2\cdot\langle q_1,r\rangle\Big)=$$
$$=\|q_1\|\cdot\sqrt{\langle q_1+q_2,q_1+q_2\rangle}-2\cdot\langle q_1,q_1\rangle-2\cdot\langle q_1,q_2\rangle=$$
$$=\|q_1\|\cdot\sqrt{\langle q_1,q_1\rangle+\langle q_2,q_2\rangle+2\cdot\langle q_1,q_2\rangle}-2\cdot\langle q_1,q_1\rangle-2\cdot\langle q_1,q_2\rangle=$$
$$=\|q_1\|\cdot\sqrt{2\cdot\langle q_1,q_1\rangle+2\cdot\langle q_1,q_2\rangle}-2\cdot\langle q_1,q_1\rangle-2\cdot\langle q_1,q_2\rangle=$$
$$=\sqrt{2\cdot\langle q_1,q_1\rangle+2\cdot\langle q_1,q_2\rangle}\cdot\left(\|q_1\|-\sqrt{2\cdot\langle q_1,q_1\rangle+2\cdot\langle q_1,q_2\rangle}\right)=$$
$$=\sqrt{2\cdot\langle q_1,q_1\rangle+2\cdot\langle q_1,q_2\rangle}\cdot\|q_1\|\cdot\left(1-\sqrt{2+2\cdot\frac{\langle q_1,q_2\rangle}{\|q_1\|\cdot\|q_1\|}}\right)<$$

(заметим, что строгость неравенства следует из оценки косинуса угла и из неравенства нулю длины вектора r)

$$<\sqrt{2\cdot\langle q_1,q_1\rangle+2\cdot\langle q_1,q_2\rangle}\cdot\|q_1\|\cdot\left(1-\sqrt{2+2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}}\right)=$$
$$=\sqrt{2\cdot\langle q_1,q_1\rangle+2\cdot\langle q_1,q_2\rangle}\cdot\|q_1\|\cdot\left(1-\sqrt{2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)=0.$$

Итак, наше предположение привело к противоречию с данною в условии локальною минимальностью пары $\langle\mathfrak{a},M\rangle$.

°*Количество $\nu-$симплексов и углы между их образами*

Всякий $\nu-$симплекс, инцидентный симплексу B', однозначно изображается ортогональным симплексу B единичной длины вектором из центра симплекса B в $\nu-$полуплоскость, содержащую $\mathfrak{a}^\circ-$образ того $\nu-$симплекса, и относительная граница которой включает симплекс B.

Заметим, что из установленного неравенства на двугранные углы следует, что всякие три $\nu-$симплексы, инцидентные симплексу B', в образе порождают три изображающие их векторы, лежащие (по причине того, что попарные углы между теми векторами не менее 120°) в одной 2−плоскости. Таким образом симплексов три и углы равны 120°. Q.E.D.

2.2 Двумерный случай в трехмерном пространстве

Предисловие

В общем многомерном случае локальная структура весьма сложна. Однако в простейшем случае двумерных “поверхностей” в трехмерном пространстве многое известно (см. [12] и [13]); и как пример приложения к конкретным расчетам рассмотрим этот случай.

2.2.1 Предварение

Соответствие

°Будем считать во всем Разделе 2.2, что $\dim Y = 3$. Рассмотрим некоторую пару $\langle \mathfrak{a}, M \rangle$ из F, считая отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективным на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$. Как уже заявлено, будем считать, что $\dim \operatorname{im} \mathfrak{a} = 2$. Еще рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс α, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, и некоторую точку x такую, что $\{x\} \in \alpha$ и $x \in (\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$.
°Возьмем (лежащую в Y) двумерную сферу S с центром в точке $\mathfrak{a}(x)$ и радиуса столь малого, что для всякой точки y из $^{\cup}\mathrm{lk}_{\alpha}\{\{x\}\}$ верно, что $S \cap (\mathfrak{a}(x), \mathfrak{a}(y)) \neq \varnothing$.
°Заметим, что $\mathfrak{a}(A) := S \cap \mathfrak{a}^{\circ}(A)$ — одноточечное подмножество сферы S, если A — одномерный симплекс из комплекса α, инцидентный вершине $\{x\}$. Если же A — двумерный симплекс из комплекса α, инцидентный вершине $\{x\}$, то $\mathfrak{a}(A) := S \cap \mathfrak{a}^{\circ}(A)$ — дуга геодезической на сфере S. При этом если одномерный симплекс A инцидентен двум двумерным симплексам B_1 и B_2, то им соответствующие подмножества сферы будем также называть инцидентными, то есть $\mathfrak{a}(A) \subset \mathfrak{a}(B_1)$ и $\mathfrak{a}(A) \subset \mathfrak{a}(B_2)$. Таким образом, на сфере расположен абстрактный комплекс (такие комплексы мы будем далее звать *сетями на сфере*) $\mathbf{k}_{\mathfrak{a},x,\alpha,S}$, одноточечные элементы которого будем звать *вершинами*, а дуги геодезических — *дугами*.
°Заметим здесь, что углы (меньшие) между каждыми двумя дугами из того комплекса, инцидентные общей вершине из того комплекса, совпадают с двугранными углами между $\mathfrak{a}^{\circ}$—образами соответствующих тем дугам симплексов звезды вершины $\{x\}$.

Строение сети на сфере

°Th · Рассмотрим некоторую локально—минимальную пару $\langle \mathfrak{a}, M \rangle$ из F, считая отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективным на $(\operatorname{dom} \mathfrak{a}) \setminus M$. Еще возьмем комплекс α, точку x и сферу S как в Соответствии, и построим указанный там же комплекс $\mathbf{k}_{\mathfrak{a},x,\alpha,S}$ на сфере.
Тогда в этой сети $\mathbf{k}_{\mathfrak{a},x,\alpha,S}$ нет вершин степени 1, и между всякими двумя с общею вершиною дугами той сети угол равен или 180°, если вершина степени 2, или 120°, если вершина степени не менее 3 (и при этом степень равна 3).

Доказательство

°Как замечено в Соответствии угол между дугами равен двугранному углу между соответствующими симплексами, а эти углы в изучаемых двух случаях по Утверждению 58 и 59 равны соответственно 180° и 120°. Отсутствие вершин степени 1 следует из Утверждения 57. Q.E.D.

2.2.2 Описание десяти типов сетей на сфере

Сведения

°Итак, для описания ограничений на локальную структуру в локально—минимальных парах следует изучить возможные сети на сфере с условием, что в ней нет вершин степени 1, и в вершинах степени 2 углы между дугами 180°, а в вершинах степени не менее 3 — 120° и степень 3. Можно считать, что вершин степени 2 нет, то есть заменить исходную сеть сетью без вершин степени 2, но с изометричным телом.
Как известно из работы [12], всего на сфере с точностью до изометрии есть 10 типов сетей с таким свойством.

Числа и преобразования

°Зададим в плоскости Y ортонормальные координаты $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$. Определим числа

$$\alpha = \sqrt{\frac{5 + 2\cdot\sqrt{5}}{15}};\ \ \beta = \sqrt{\frac{5 - 2\cdot\sqrt{5}}{15}}$$

и

$$\epsilon = 2\sqrt{97}\cos(\frac{1}{3}\arccos(-\frac{881}{\sqrt{97^3}}));\ \ \gamma = \frac{1}{3}\sqrt{\epsilon - 8};\ \ \delta = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{17-\epsilon}(\epsilon - 11)}{\epsilon - 5}.$$

°Еще определим отражения ivr_1 и ivr_3 относительно плоскости $\mathfrak{x}_1 = 0$ и $\mathfrak{x}_3 = 0$ соответственно как отображение точки x с коодинатами $\mathfrak{x}_1(x) = \kappa$, $\mathfrak{x}_2(x) = \lambda$, $\mathfrak{x}_3(x) = \mu$ в точку $x' = \mathrm{ivr}_1(x)$ и $x'' = \mathrm{ivr}_3(x)$ с коодинатами $\mathfrak{x}_1(x') = -\kappa$, $\mathfrak{x}_2(x') = \lambda$, $\mathfrak{x}_3(x') = \mu$ и $\mathfrak{x}_1(x'') = \kappa$, $\mathfrak{x}_2(x') = \lambda$, $\mathfrak{x}_3(x') = -\mu$.
Еще определим поворот vrt_ϕ в “положительном направлении” на угол ϕ из $[0, 2\pi)$ относительно оси $\mathfrak{x}_3$ как отображение точки x с коодинатами $\mathfrak{x}_1(x) = \kappa$, $\mathfrak{x}_2(x) = \lambda$, $\mathfrak{x}_3(x) = \mu$ в точку $y = \mathrm{vrt}_\phi(x)$ с коодинатами $\mathfrak{x}_1(y) = \kappa'$, $\mathfrak{x}_2(y) = \lambda'$, $\mathfrak{x}_3(y) = \mu'$, где

$$\begin{pmatrix} \kappa' \\ \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

°Перечислим значения косинусов и синусов используемых нами значений угла ϕ:

$$\begin{array}{rll}
\phi = \frac{2\pi}{2} = 180^\circ: & \cos\phi = -1, & \sin\phi = 0; \\
\phi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ: & \cos\phi = -\frac{1}{2}, & \sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\
\phi = \frac{2\pi}{4} = 90^\circ: & \cos\phi = 0, & \sin\phi = 1; \\
\phi = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ: & \cos\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, & \sin\phi = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}; \\
\phi = \frac{2\pi}{10} = 36^\circ: & \cos\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, & \sin\phi = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.
\end{array}$$

°Перечислим все эти 10 типов путем координатного описания некоторого представителя из каждого типа на сфере единичного радиуса с центром в начале координат. Будем обозначать $\mathfrak{z}(D_1, D_2)$ единственную наименьшей длины дугу на нашей сфере инцидентную не противолежащим различным вершинам D_1 и D_2 на сфере нашей.

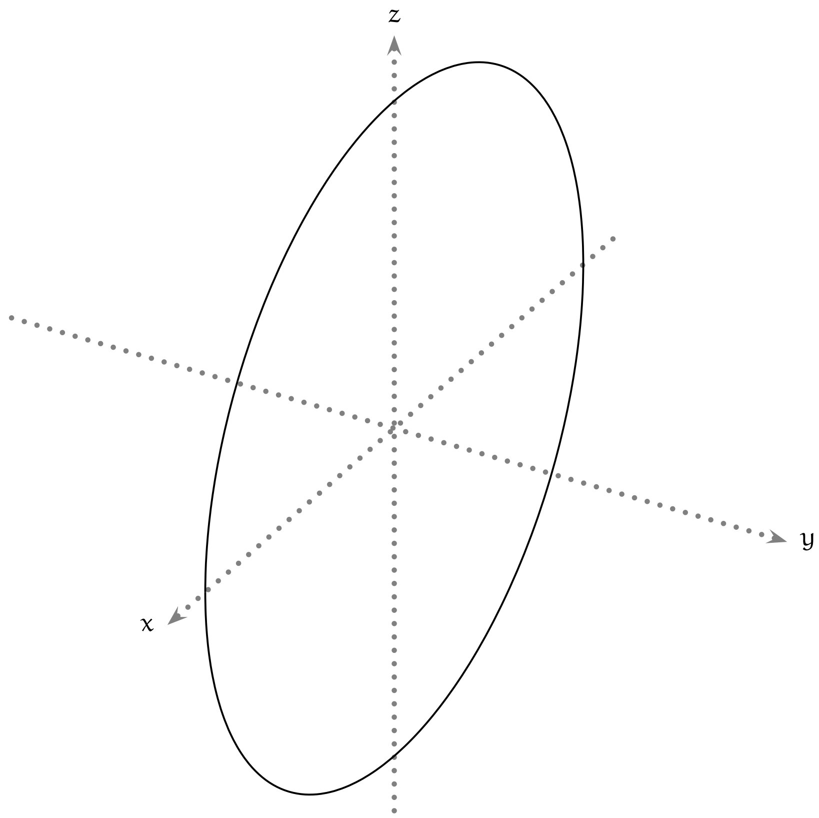
Тип I$^+$

°*Состав сети*

- одна дуга — большая окружность, состоящая из всех точек $\mathfrak{p}$ таких, что

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1(\mathfrak{p})^2 + \mathfrak{x}_3(\mathfrak{p})^2 = 1 \\ \mathfrak{x}_2(\mathfrak{p}) = 0. \end{cases}$$

°*Иллюстрация*



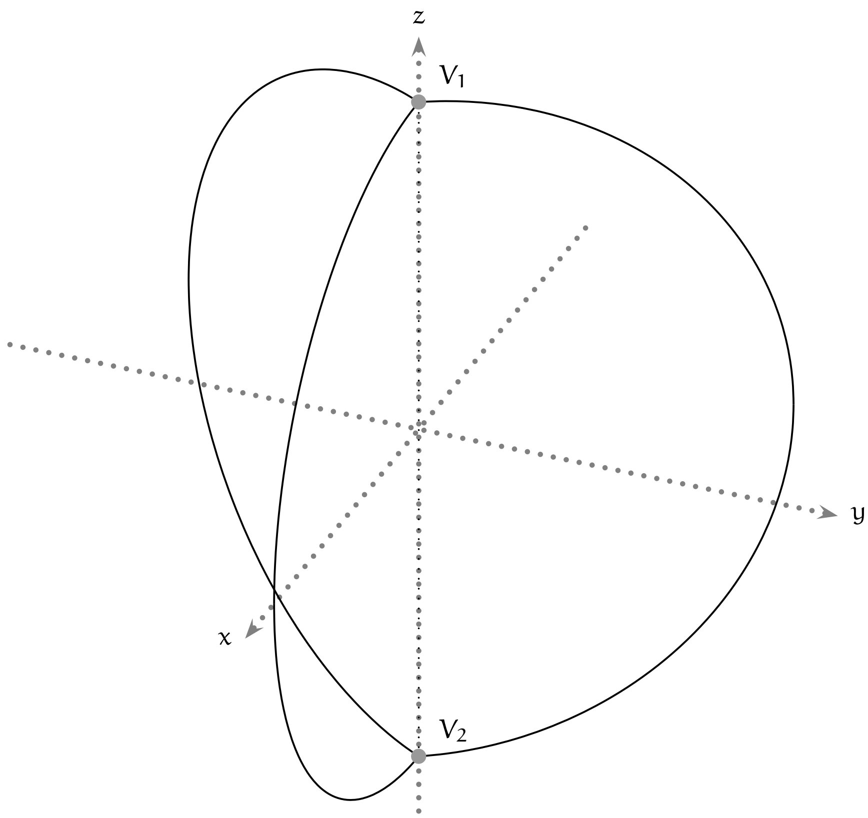
Тип II$^+$

°*Состав сети*

- две вершины $V_1 = \{\langle 0, 0, 1\rangle\}$ и $V_2 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_1)$;
- три дуги A_1, $(\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(A_1)$, $(\mathrm{vrt}_{240^\circ})^\circ(A_1)$,

  где
$$A_1 = \{p : \mathfrak{x}_1(p)^2 + \mathfrak{x}_3(p)^2 = 1, \mathfrak{x}_2(p) = 0, \mathfrak{x}_1(p) > 0\}.$$

°*Иллюстрация*

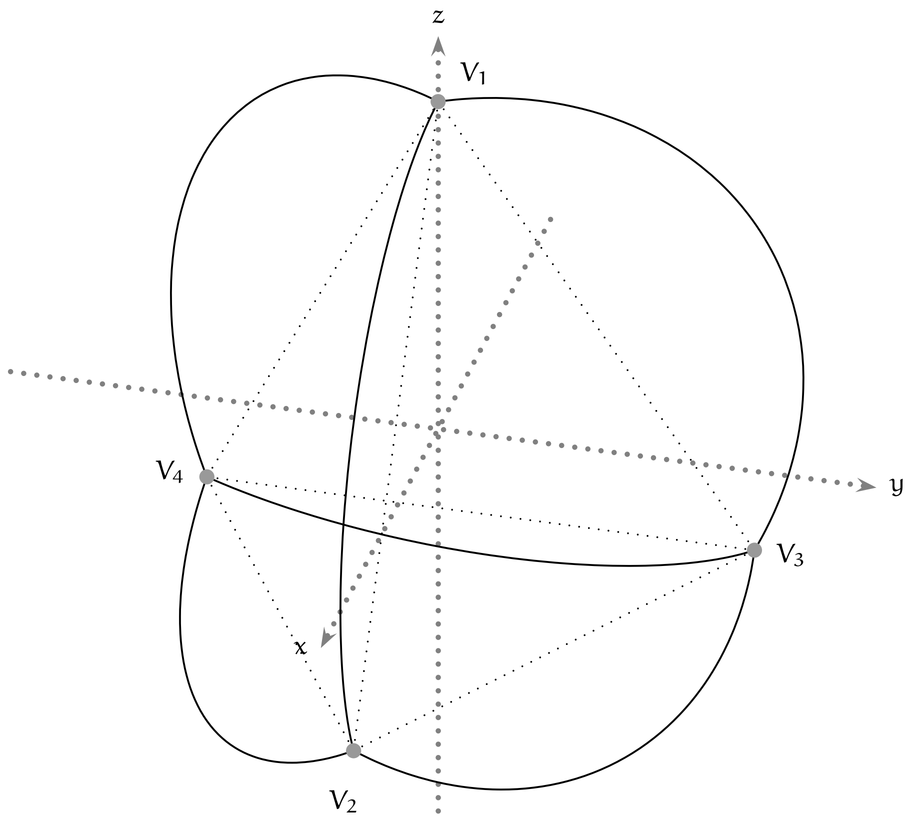


Тип III$^+$

°*Состав сети*

- четыре вершины
  $V_1 = \{\langle 0, 0, 1\rangle\},\ V_2 = \{\langle \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\rangle\},$
  $V_3 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_2),\ V_4 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_3);$
- шесть дуг
  $A_1 = \mathfrak{z}(V_1, V_2),\ A_2 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(A_1),\ A_3 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(A_2),$
  $A_4 = \mathfrak{z}(V_2, V_3),\ A_5 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(A_4),\ A_6 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(A_5).$

°*Иллюстрация*

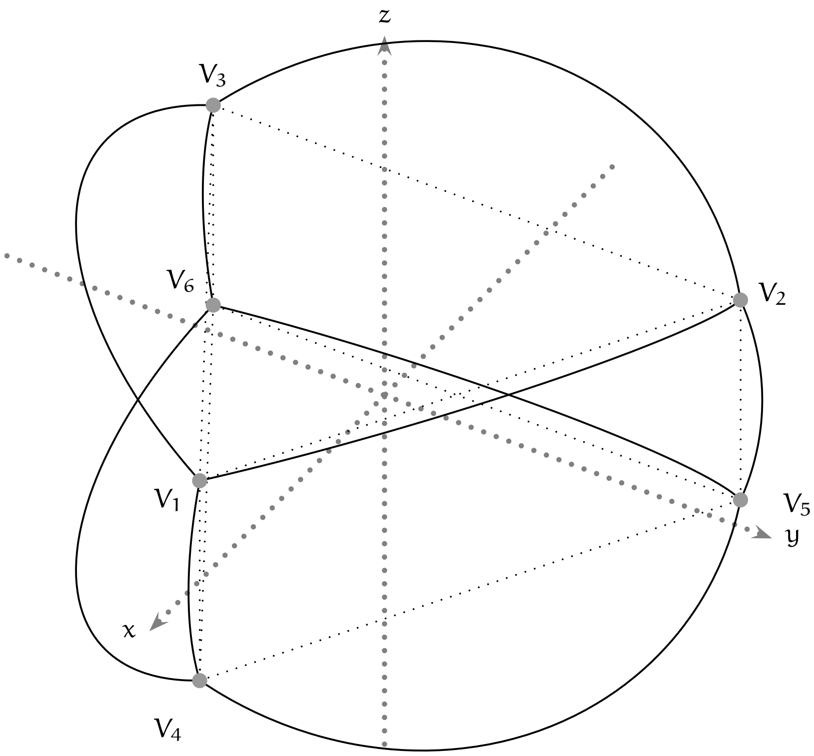


Тип I$^-$

°*Состав сети*

- шесть вершин
  $V_1 = \{\langle \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{1}{3} \rangle\}$,
  $V_2 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_1)$, $V_3 = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_2)$,
  $V_4 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_1)$, $V_5 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_2)$, $V_6 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_3)$;
- набор $\mathbf{q} \cup \mathbf{q}' \cup \mathbf{q}''$ девяти дуг,
  где $\mathbf{q} := \{A_1, A_4, A_7\}$, $\mathbf{q}' := (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q}'' := (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}')$,
  и $A_1 = \mathfrak{z}(V_1, V_2)$, $A_4 = \mathfrak{z}(V_1, V_4)$, $A_7 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(A_1)$.

°*Иллюстрация*

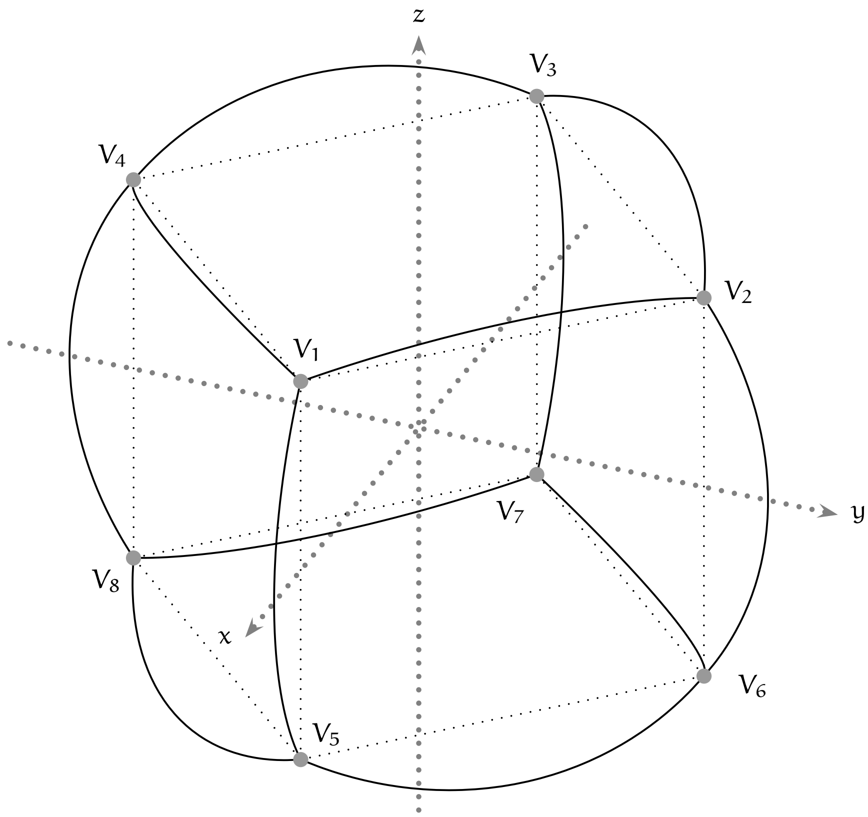


Тип II^{-}

°*Состав сети*

- восемь вершин
  $V_1 = \{\langle \sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle\}$,
  $V_2 = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_1),\ V_3 = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_2),\ V_4 = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_3)$,
  $V_5 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_1),\ V_6 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_2),\ V_7 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_3),\ V_8 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_4)$;
- набор $\mathbf{q} \cup \mathbf{q}' \cup \mathbf{q}'' \cup \mathbf{q}'''$ двенадцати дуг,
  где $\mathbf{q} := \{A_1, A_5, A_9\},\ \mathbf{q}' := (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}),\ \mathbf{q}'' := (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}'),\ \mathbf{q}''' := (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}'')$,
  и $A_1 = \mathfrak{z}(V_1, V_2),\ A_5 = \mathfrak{z}(V_1, V_5),\ A_9 = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(A_1)$.

°*Иллюстрация*

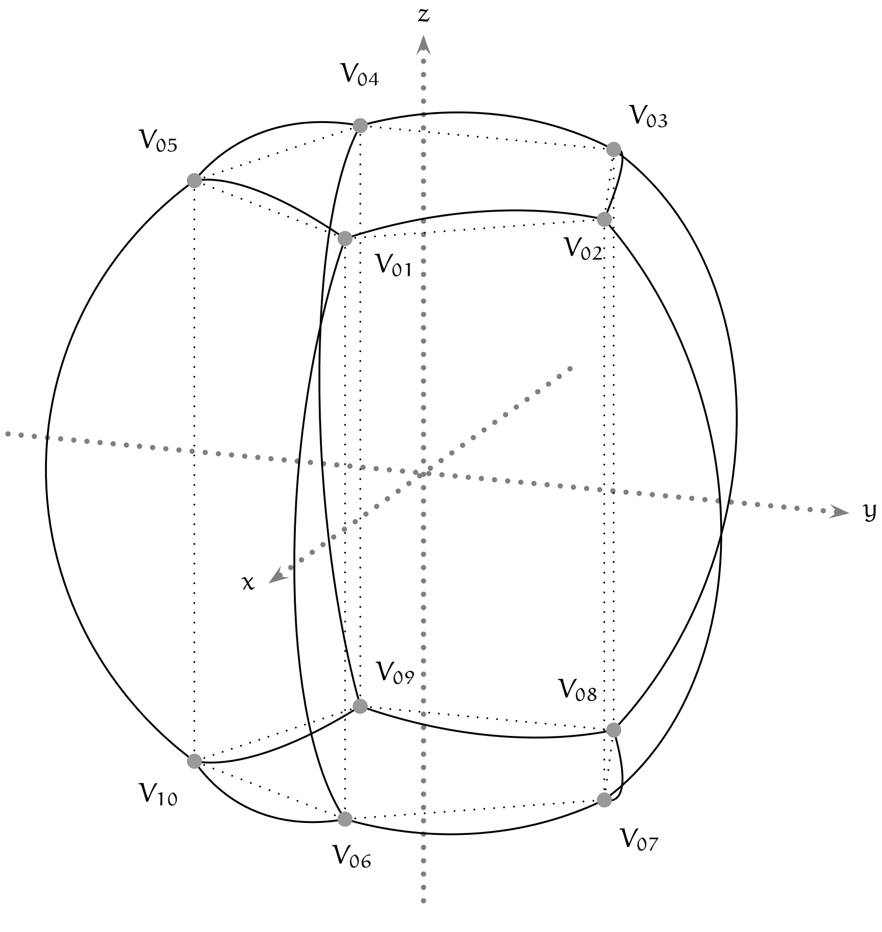


Тип III$^-$

°*Состав сети*

- десять вершин
  $V_{01} = \{\langle\sqrt{1-\alpha^2}, 0, \alpha\rangle\}$,
  $V_{02} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{01})$, $V_{03} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{02})$, $V_{04} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{03})$, $V_{05} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{04})$,
  $V_{06} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{01})$,
  $V_{07} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{02})$, $V_{08} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{03})$, $V_{09} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{04})$, $V_{10} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{05})$;
- набор $\mathbf{q} \cup \mathbf{q}' \cup \mathbf{q}'' \cup \mathbf{q}''' \cup \mathbf{q}''''$ пятнадцати дуг,
  где $\mathbf{q} := \{A_{01}, A_{06}, A_{11}\}$,
  $\mathbf{q}' := (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q}'' := (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}')$, $\mathbf{q}''' := (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}'')$, $\mathbf{q}'''' := (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}''')$,
  и $A_{01} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{02})$, $A_{06} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{06})$, $A_{11} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(A_1)$.

°*Иллюстрация*



Тип IV$^-$

°*Состав сети*

- четырнадцать вершин

  $V_{01} = \{\langle 0, 0, 1\rangle\}$, $V_{02} = \{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\rangle\}$, $V_{05} = \{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right\rangle\}$, $V_{10} = \{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right\rangle\}$,

  $V_{03} = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_{02})$, $V_{04} = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_{03})$, $V_{06} = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_{10})$,

  $V_{07} = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_{05})$, $V_{08} = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_{06})$, $V_{09} = (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^\circ(V_{07})$,

  $V_{11} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{02})$, $V_{12} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{03})$, $V_{13} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{04})$, $V_{14} = \mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{01})$;

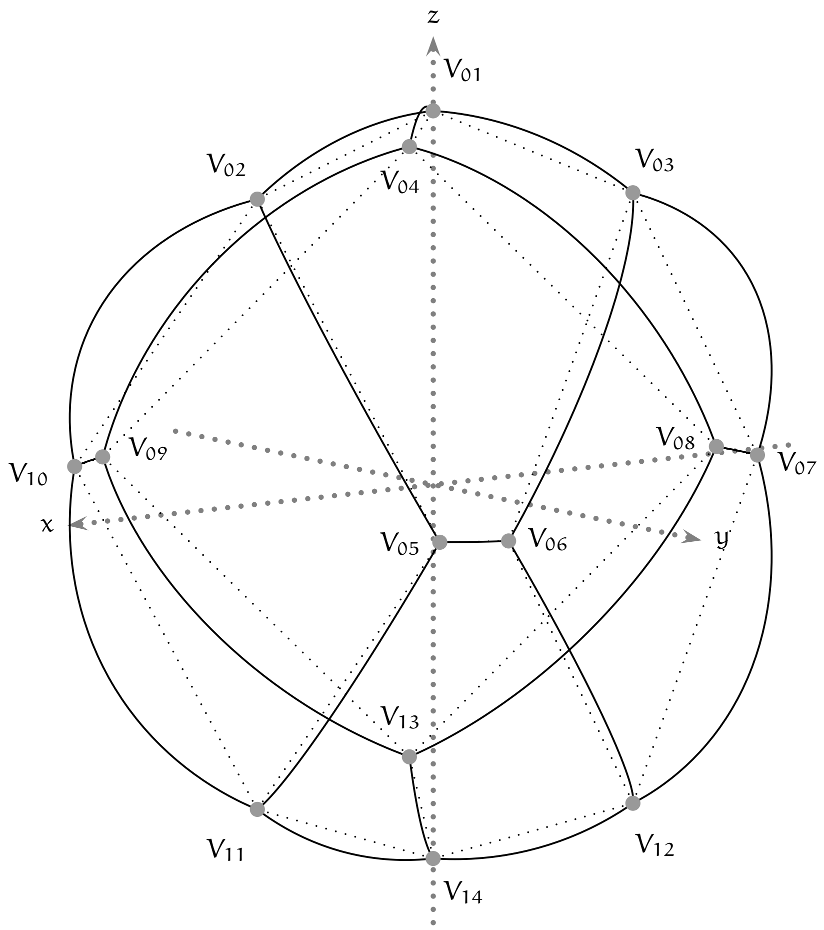
- набор $\mathbf{q} \cup \mathbf{q}' \cup \mathbf{q}''$ двадцати одной дуги,

  где $\mathbf{q} := \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{w}' \cup \{A_{10}\}$, $\mathbf{q}' := (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q}'' := (\mathrm{vrt}_{120^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}')$,

  $\boldsymbol{w} := \{A_{01}, A_{04}, A_{05}\}$, $\boldsymbol{w}' := \mathrm{ivr}_3{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{w})$,

  и $A_{01} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{02})$, $A_{04} = \mathfrak{z}(V_{02}, V_{10})$, $A_{05} = \mathfrak{z}(V_{02}, V_{05})$, $A_{10} = \mathfrak{z}(V_{05}, V_{06})$.

°*Иллюстрация*



Тип V^-

°*Состав сети*

- шестнадцать вершин

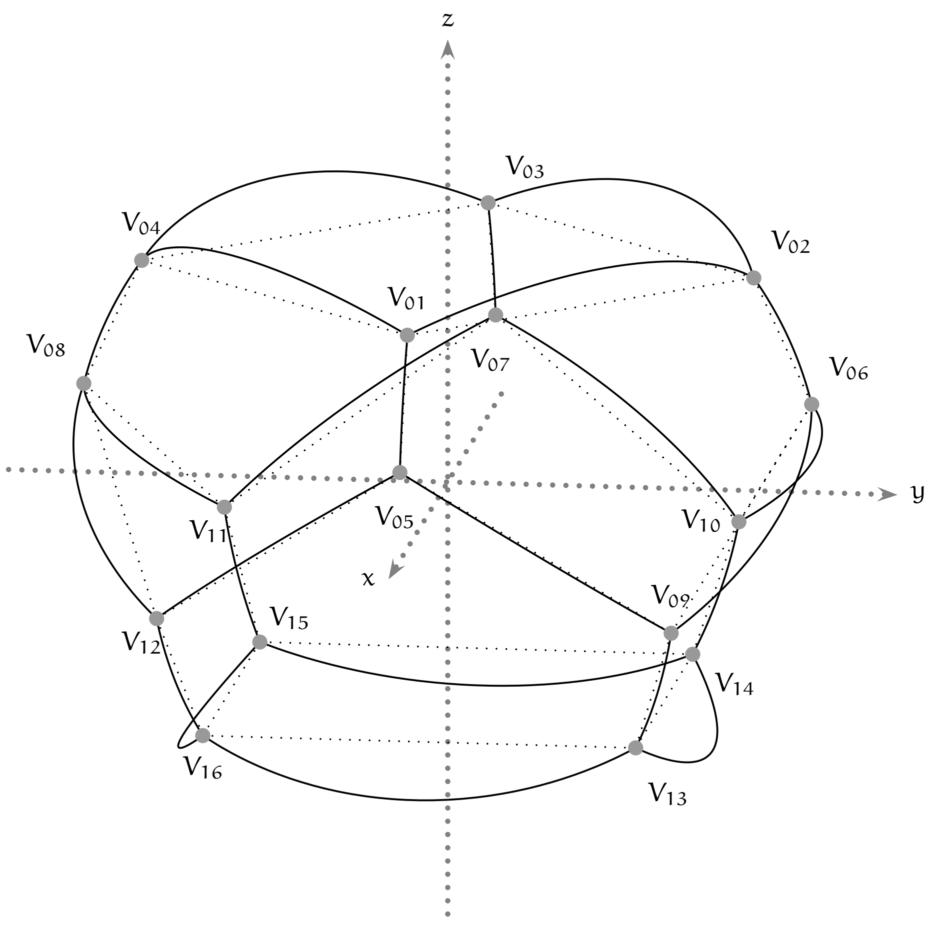
  $V_{01} = \{\langle \sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle\}$, $V_{02} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{01})$, $V_{03} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{02})$, $V_{04} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{03})$,

  $V_{05} = \{\langle \sqrt{\frac{\sqrt{8}}{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle\}$, $V_{06} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{05})$, $V_{07} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{06})$, $V_{08} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{07})$,

  $V_{09} = (\mathrm{vrt}_{45^\circ})^\circ(\mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{05}))$, $V_{10} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{09})$, $V_{11} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{10})$, $V_{12} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{11})$,
  $V_{13} = (\mathrm{vrt}_{45^\circ})^\circ(\mathrm{ivr}_3{}^\circ(V_{01}))$, $V_{14} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{13})$, $V_{15} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{14})$, $V_{16} = (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^\circ(V_{15})$,

- набор $\boldsymbol{e} \cup \boldsymbol{e}'$ двадцати четырех дуг,
  где $\boldsymbol{e} := \mathbf{q} \cup (\mathrm{vrt}_{90^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}) \cup (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}) \cup (\mathrm{vrt}_{270^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q})$, $\boldsymbol{e}' := (\mathrm{vrt}_{45^\circ} \circ \mathrm{ivr}_3)^{\circ\circ}(\boldsymbol{e})$, $\mathbf{q} := \{A_{01}, A_{05}, A_{09}\}$,
  и $A_{01} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{02})$, $A_{05} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{05})$, $A_{09} = \mathfrak{z}(V_{05}, V_{09})$.

°*Иллюстрация*

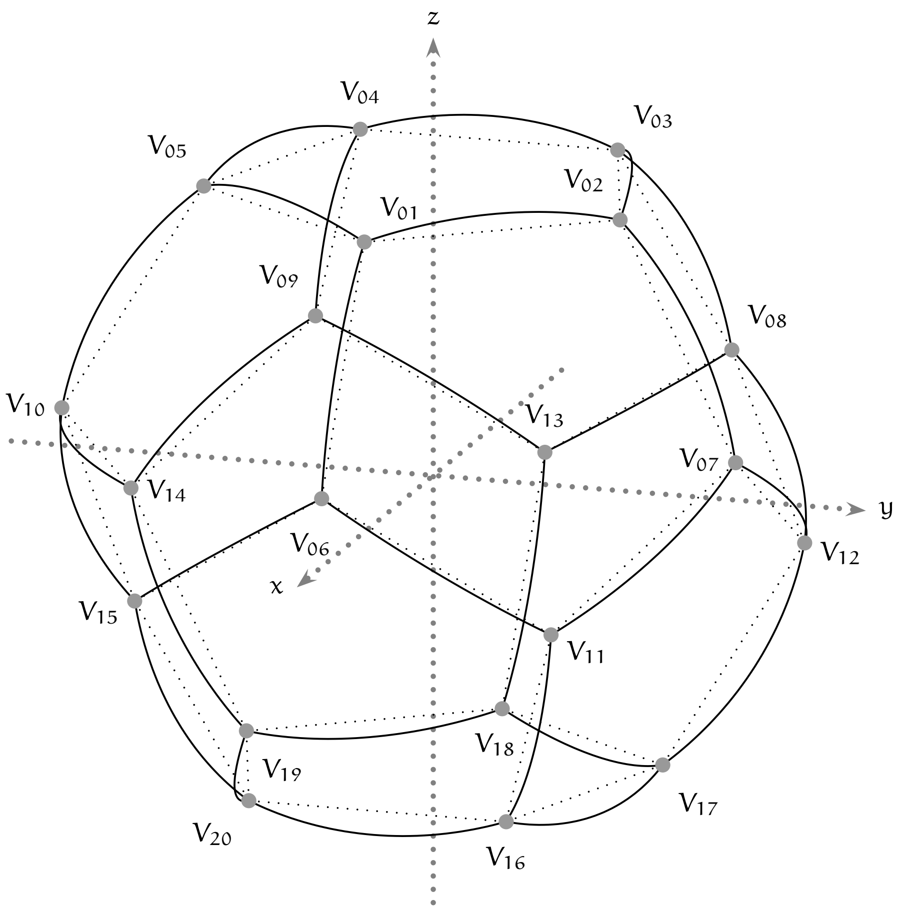


Тип VI^{-}

°*Состав сети*

- двадцать вершин
  $V_{01} = \{\langle\sqrt{1-\alpha^2}, 0, \alpha\rangle\}$, $V_{02} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{01})$, $V_{03} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{02})$, $V_{04} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{03})$,
  $V_{05} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{04})$, $V_{06} = \{\langle\sqrt{1-\beta^2}, 0, \beta\rangle\}$, $V_{07} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{06})$, $V_{08} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{07})$,
  $V_{09} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{08})$, $V_{10} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{09})$, $V_{11} = (\mathrm{vrt}_{36^\circ} \circ \mathrm{ivr}_3)^\circ(V_{06})$, $V_{12} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{11})$,
  $V_{13} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{12})$, $V_{14} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{13})$, $V_{15} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{14})$, $V_{16} = (\mathrm{vrt}_{36^\circ} \circ \mathrm{ivr}_3)^\circ(V_{01})$,
  $V_{17} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{16})$, $V_{18} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{17})$, $V_{19} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{18})$, $V_{20} = (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^\circ(V_{19})$;
- набор $\boldsymbol{e} \cup \boldsymbol{e}'$ тридцати дуг,
  где $\boldsymbol{e}' := (\mathrm{vrt}_{36^\circ} \circ \mathrm{ivr}_3)^{\circ\circ}(\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} := \mathbf{q} \cup (\mathrm{vrt}_{72^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}) \cup (\mathrm{vrt}_{144^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}) \cup (\mathrm{vrt}_{216^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q}) \cup (\mathrm{vrt}_{288^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q})$,
  $\mathbf{q} := \{A_{01}, A_{06}, A_{11}\}$, и $A_{01} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{02})$, $A_{06} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{06})$, $A_{11} = \mathfrak{z}(V_{06}, V_{11})$.

°*Иллюстрация*

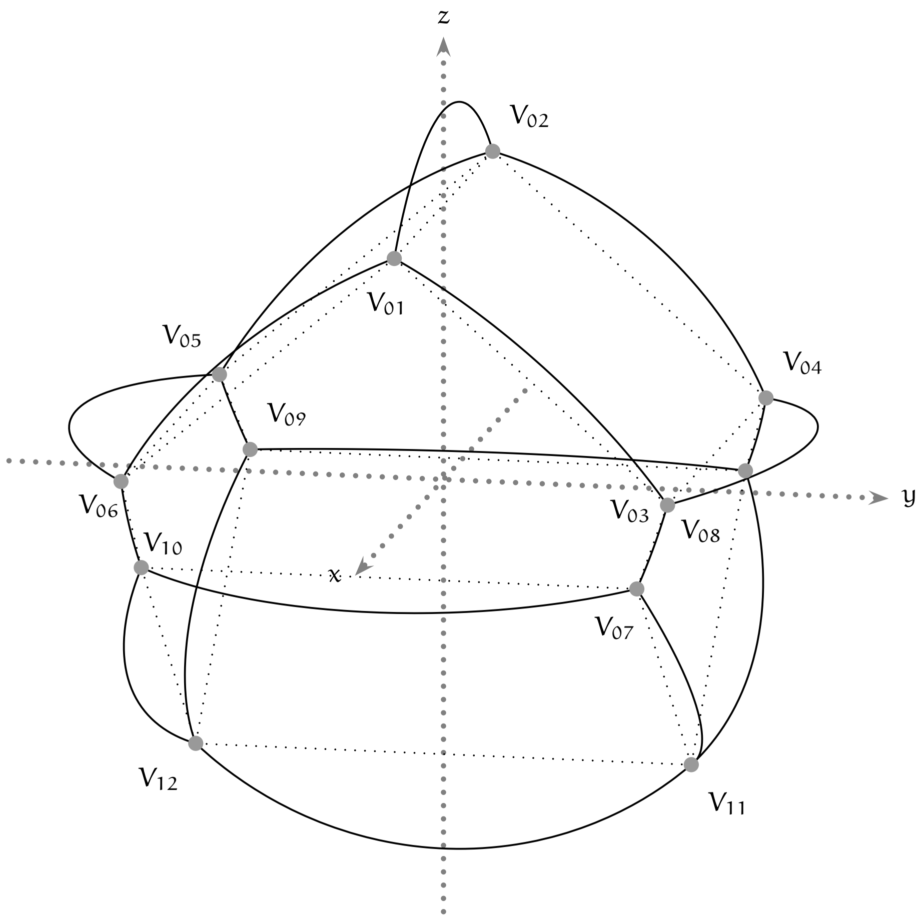


Тип VII$^-$

°*Состав сети*

- двенадцать вершин
  $V_{01} = \{\langle\gamma, 0, \sqrt{1-\gamma^2}\rangle\}$, $V_{02} = (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^\circ(V_{01})$, $V_{03} = \{\langle\gamma, \sqrt{1-\gamma^2-\delta^2}, \delta\rangle\}$, $V_{04} = (\mathrm{ivr}_1)^\circ(V_{03})$,
  $V_{05} = (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^\circ(V_{03})$, $V_{06} = (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^\circ(V_{04})$,
  $V_{07} = (\mathrm{vrt}_{45^\circ} \circ \mathrm{ivr}_3)^\circ(V_{06})$, $V_{08} = (\mathrm{ivr}_1)^\circ(V_{07})$, $V_{09} = (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^\circ(V_{07})$, $V_{10} = (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^\circ(V_{08})$,
  $V_{11} = (\mathrm{vrt}_{45^\circ} \circ \mathrm{ivr}_3)^\circ(V_{01})$, $V_{12} = (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^\circ(V_{11})$;
- набор $\boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{w}'$ восемнадцати дуг,
  где $\boldsymbol{w} := \mathbf{q} \cup \mathbf{q}' \cup \{A_{01}\}$, $\boldsymbol{w}' := (\mathrm{vrt}_{90^\circ} \circ \mathrm{ivr}_3)^{\circ\circ}(\boldsymbol{w})$, $\mathbf{q} := \{A_{02}, A_{03}, A_{04}, A_{08}\}$, $\mathbf{q}' := (\mathrm{vrt}_{180^\circ})^{\circ\circ}(\mathbf{q})$,
  $A_{01} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{02})$, $A_{02} = \mathfrak{z}(V_{01}, V_{03})$, $A_{03} = \mathfrak{z}(V_{03}, V_{04})$, $A_{04} = (\mathrm{ivr}_1)^\circ(A_{02})$, $A_{08} = \mathfrak{z}(V_{03}, V_{07})$.

°*Иллюстрация*



2.2.3 Деформации с уменьшением объема

Приуготовление

°Рассмотрим некоторую локально–минимальную пару $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$ из F такую, что отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективно на $(\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \setminus M$; выберем комплекс $\mathfrak{a}$, точку x и сферу S как в описании Соответствия, и построим указанный там же комплекс $\mathbf{k}_{\mathfrak{a},x,\mathfrak{a},S}$ на сфере.
°Предположим, что тело сети нашей гомеоморфно телу сети одного из названных типов. Тогда найдется инъективное аффинное отображение $\mathfrak{i}$ из Y в Y такое, что $\mathfrak{i}$ сохраняет углы и осуществляет гомеоморфизм тела сети нашей на тело сети того типа (в частности, $\mathfrak{i}$–образная сеть лежит на сфере радиуса 1).
°Обозначим

- B — замкнутый шар, относительною границею которого является сфера S,
- $\mathfrak{h} := \mathrm{st}_{\mathfrak{a}}\{\{x\}\}$, $H := \overline{{}^{\cup}\mathfrak{h}}$, $Q := \left((\mathfrak{a}|_H)^{-1}\right)^{\circ}(B)$,
- каждому симплексу A из $\mathfrak{h}$ сопоставим множество $\boldsymbol{e}_A := \{E : \{x\} \lhd E, E \subset A \cap Q, (\operatorname{vert} E) \cap A = \varnothing\}$, $\boldsymbol{w} := \{\{x\}\} \cup \{W : \exists A(W$ — максимальный по включению симплекс из $\boldsymbol{e}_A)\}$,
- $C := \overline{{}^{\cup}\boldsymbol{w}}$, $N := \mathrm{fn}(C, x)$.

°С помощью отображения $\mathfrak{i}$ образуем следующие вещи:

- $\mathfrak{f} := \mathrm{id}_{(\mathfrak{i}\circ\mathfrak{a})^{\circ}(C)}$,
- $P := (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{a})^{\circ}(N)$,
- $z := (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{a})(x)$.

При этом из минимальности исходной конической тройки $\langle \mathfrak{a}|_C, N, x\rangle$ следует (так как сохраняются углы) минимальность соответствующей типовой (с совпадающим множеством всех вершинных точек и с совпадающим отношением парности на них) конической тройки $\langle \mathfrak{f}, P, z\rangle$.
°Итак, далее рассмотрим каждый из типов I$^-$, II$^-$, III$^-$, IV$^-$, V$^-$, VI$^-$, VII$^-$ и построим каждому из них деформацию, уменьшающую объем, чем будет достигнуто противоречие условию локальной минимальности пары $\langle \mathfrak{a}, M\rangle$.

Тип I$^-$

°Приведем пример деформации, уменьшающей объем. Для того определим вершины дополнительно к описанным в Разделе 2.2.2:Тип I$^-$:

$$\begin{aligned} p_1 &:= \tfrac{1}{100} \cdot \langle 1, 0, 0\rangle, & V_7 &:= \{p_1\},\\ p_2 &:= \tfrac{1}{100} \cdot \langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\rangle, & V_8 &:= \{p_2\},\\ p_3 &:= \tfrac{1}{100} \cdot \langle -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\rangle, & V_9 &:= \{p_3\}. \end{aligned}$$

°Определим также комплекс $\mathbf{k}$ для деформации как множество всех симплексов, подчиненных хотя бы одному из двумерных симплексов симплициального комплекса

$$\{S_4\} \cup \mathbf{q} \cup \mathbf{q}' \cup \mathbf{q}'',$$

где
$\mathbf{q}'' := \mathrm{vrt}_{120^\circ}{}^{\circ\circ}(\mathbf{q}')$, $\mathbf{q}' := \mathrm{vrt}_{120^\circ}{}^{\circ\circ}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} := \{S_3\} \cup \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{w}'$,
$\boldsymbol{w}' := \mathrm{ivr}_3{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{w} := \{S_1, S_2\}$,
$S_1 := V_1 * V_7 * V_8$, $S_2 := V_1 * V_2 * V_8$, $S_3 := V_7 * V_1 * V_4$, $S_4 := V_7 * V_8 * V_9$.

°Зададим деформацию $\mathfrak{m}$ на множестве $[0,1] \times {}^{\cup}\mathbf{k}$:

$$(\mathfrak{m}(\tau,\cdot))^{\circ}(V_\iota) := V_\iota, \quad \iota = 1,\dots,6;$$
$$\mathfrak{m}(\tau, p_\iota) := 100 \cdot \tau \cdot p_\iota, \quad \iota = 1,2,3,$$

а на каждом симплексе из комплекса $\mathbf{k}$ отображение $\mathfrak{m}$ есть аффинное продолжение с вершин его.
°Запишем формулу объема $\mathfrak{v}$ при этой деформации:

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(\tau) \;&=\; \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}+\tau\right)\cdot\sqrt{\tfrac{4}{9}+\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}-\tau\right)^2}+\\ &+\tfrac{3\sqrt{3}\tau^2}{4}+\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}-\tau\right), \qquad \tau\longrightarrow 0, \tau\geqslant 0.\end{aligned}$$

°Легко видеть, что первая производная этого объема в точке $\tau = 0$ нулевая, а вторая: $\frac{3\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{2} < 0$. Тем самым объем уменьшается в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. Что противоречит локальной минимальности.

Тип II$^-$

°Приведем пример деформации, уменьшающей объем. Для того определим вершины дополнительно к описанным в Разделе 2.2.2:Тип II$^-$:

$$\begin{aligned} p_1 &:= \tfrac{1}{100}\cdot\langle 1,0,0\rangle, & V_1^+ &:= \{p_1\},\\ p_2 &:= \tfrac{1}{100}\cdot\langle 0,1,0\rangle, & V_2^+ &:= \{p_2\},\\ p_3 &:= \tfrac{1}{100}\cdot\langle -1,0,0\rangle, & V_3^+ &:= \{p_3\},\\ p_4 &:= \tfrac{1}{100}\cdot\langle 0,-1,0\rangle, & V_4^+ &:= \{p_4\}.\end{aligned}$$

°Определим также комплекс $\mathbf{k}$ для деформации как множество всех симплексов, подчиненных хотя бы одному из двумерных симплексов симплициального комплекса

$$\{S_1, S_2\} \cup \mathbf{q} \cup \mathbf{q}' \cup \mathbf{q}'' \cup \mathbf{q}''',$$

где
$\mathbf{q}''' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\mathbf{q}'')$, $\mathbf{q}'' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\mathbf{q}')$,
$\mathbf{q}' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} := \{S_3\} \cup \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{w}'$,
$\boldsymbol{w}' := \mathrm{ivr}_3{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{w} := \{S_4, S_5\}$,
$S_1 := V_1^+ * V_2^+ * V_3^+$, $S_2 := V_1^+ * V_4^+ * V_3^+$, $S_3 := V_1 * V_5 * V_1^+$, $S_4 := V_1 * V_1^+ * V_2^+$, $S_5 := V_1 * V_2 * V_2^+$.
°Зададим деформацию $\mathfrak{m}$ на множестве $[0,1] \times {}^{\cup}\mathbf{k}$:

$$(\mathfrak{m}(\tau,\cdot))^{\circ}(V_\iota) := V_\iota, \quad \iota = 1,\dots,8;$$
$$\mathfrak{m}(\tau, p_\iota) := 100 \cdot \tau \cdot p_\iota, \quad \iota = 1,2,3,4,$$

а на каждом симплексе из комплекса $\mathbf{k}$ отображение $\mathfrak{m}$ есть аффинное продолжение с вершин его.
°Запишем формулу объема $\mathfrak{v}$ при этой деформации:

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(\tau) \;&=\; \tfrac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}+\tau\right)\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}+\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}-\tau\right)^2}+\\ &+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}-\tau\right)+2\tau^2, \qquad \tau\longrightarrow 0, \tau\geqslant 0.\end{aligned}$$

°Легко видеть, что первая производная этого объема в точке $\tau = 0$ нулевая, а вторая: $4 - 3\sqrt{2} < 0$. Тем самым объем уменьшается в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. Что противоречит локальной минимальности.

Тип III$^-$

°Приведем пример деформации, уменьшающей объем. Для того определим вершины дополнительно к описанным в Разделе 2.2.2:Тип III$^-$:

$$\begin{aligned}
\{100\cdot p_1\} &:= V_{01}, \quad V_{11} := \{p_1\},\\
\{100\cdot p_2\} &:= V_{02}, \quad V_{12} := \{p_2\},\\
\{100\cdot p_3\} &:= V_{05}, \quad V_{13} := \{p_3\},\\
\{100\cdot p_4\} &:= V_{06}, \quad V_{14} := \{p_4\},\\
\{100\cdot p_5\} &:= V_{07}, \quad V_{15} := \{p_5\},\\
\{100\cdot p_6\} &:= V_{10}, \quad V_{16} := \{p_6\}.
\end{aligned}$$

°Определим также комплекс $\mathbf{k}$ для деформации как множество всех симплексов, подчиненных хотя бы одному из двумерных симплексов симплициального комплекса

$$\mathbf{q}\cup\boldsymbol{w}\cup\boldsymbol{w}'\cup\boldsymbol{e},$$

где
$\mathbf{q} := \{S_1, S_2\}$, $\boldsymbol{w}' := \mathrm{ivr}_3{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{w} := \{S_3, S_4, S_5\}$
$\boldsymbol{e} = \mathbf{r}\cup\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}' = \mathrm{ivr}_2{}^{\circ\circ}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} := \mathbf{t}\cup\boldsymbol{y}\cup\boldsymbol{y}'$, $\mathbf{t} := \{S_9, S_a, S_b, S_c, S_d, S_e\}$, $\boldsymbol{y}' := \mathrm{ivr}_3{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} := \{S_f, S_g, S_h\}$
$S_1 := V_{01} * V_{06} * V_{14}$, $S_2 := V_{01} * V_{11} * V_{14}$, $S_3 := V_{03} * V_{04} * V_{13}$, $S_4 := V_{03} * V_{12} * V_{13}$,
$S_5 := V_{11} * V_{12} * V_{13}$, $S_9 := V_{11} * V_{12} * V_{15}$, $S_a := V_{11} * V_{14} * V_{15}$, $S_b := V_{02} * V_{07} * V_{15}$,
$S_c := V_{02} * V_{12} * V_{15}$, $S_d := V_{03} * V_{08} * V_{15}$, $S_e := V_{03} * V_{12} * V_{15}$, $S_f := V_{01} * V_{02} * V_{12}$,
$S_g := V_{01} * V_{11} * V_{12}$, $S_h := V_{02} * V_{03} * V_{12}$.
°Зададим деформацию $\mathfrak{m}$ на множестве $[0,1]\times{}^{\cup}\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{m}(\tau,\cdot))^{\circ}(V_\iota) &:= V_\iota, \quad \iota = 01,\ldots,10;\\
\mathfrak{m}(\tau,p_\iota) &:= 100\cdot\tau\cdot p_\iota, \quad \iota = 1,2,3,4,5,6,
\end{aligned}$$

а на каждом симплексе из комплекса $\mathbf{k}$ отображение $\mathfrak{m}$ есть аффинное продолжение с вершин его.
°Запишем формулу объема $\mathfrak{v}$ при этой деформации:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}(\tau) \;=\;& \tfrac{11}{3}+\tfrac{1}{\sqrt5}-\tfrac{4}{3}\cdot\tau+\tfrac{3\cdot\sqrt2\cdot(5+\sqrt5)^{3/2}-6\cdot\sqrt5-70}{30}\cdot\tau^2+\\
&+\tfrac{2\sqrt2}{3}\cdot\left(\tfrac{\sqrt5-1}{2}+\tau\right)\cdot\sqrt{\left(\tfrac{\sqrt5+1}{4}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt5+1}{4}-\tau\right)^2}+\\
&+\tfrac{2\cdot(5+\sqrt5)}{15}\cdot(1+\tau)\cdot\sqrt{\tfrac{5+\sqrt5}{8}+\left(\tfrac{\sqrt5-1}{4}-\tau\right)^2}, \qquad \tau\longrightarrow 0, \tau\geqslant 0.
\end{aligned}$$

°Легко видеть, что первая производная этого объема в точке $\tau = 0$ нулевая, а вторая: $\frac{4}{5}\cdot\sqrt{25+10\sqrt5}-\frac{27+5\sqrt5}{6}<0$. Тем самым объем уменьшается в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. Что противоречит локальной минимальности.

Тип IV$^-$

°Приведем пример деформации, уменьшающей объем. Для того определим вершины дополнительно к описанным в Разделе 2.2.2:Тип IV$^-$:

$$\begin{aligned}
p_1 &:= \tfrac{1}{100}\cdot\langle 0,0,1\rangle, & V_{15} &:= \{p_1\},\\
p_2 &:= \tfrac{1}{100}\cdot\langle 0,0,-1\rangle, & V_{16} &:= \{p_2\},\\
\{p_3\} &:= \tfrac{1}{100}\cdot\tfrac{2}{5}(2\sqrt6+3)\cdot(V_{05}+V_{06}), & V_{17} &:= \{p_3\},\\
\{p_4\} &:= \tfrac{1}{100}\cdot\tfrac{2}{5}(2\sqrt6+3)\cdot(V_{07}+V_{08}), & V_{18} &:= \{p_4\},\\
\{p_5\} &:= \tfrac{1}{100}\cdot\tfrac{2}{5}(2\sqrt6+3)\cdot(V_{09}+V_{10}), & V_{19} &:= \{p_5\}.
\end{aligned}$$

°Определим также комплекс $\mathbf{k}$ для деформации как множество всех симплексов, подчиненных хотя бы одному из двумерных симплексов симплициального комплекса

$$\mathbf{q}\cup\mathbf{q}'\cup\mathbf{q}'',$$

где
$\boldsymbol{q}'' := \mathrm{vrt}_{120^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{q}')$, $\boldsymbol{q}' := \mathrm{vrt}_{120^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{q} := \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{e} \cup \boldsymbol{e}'$,
$\boldsymbol{w} := \{S_4, S_5\}$, $\boldsymbol{e}' := \mathrm{ivr}_3{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} := \{S_1, S_2, S_2', S_3, S_3'\}$,
$S_1 := V_{01} * V_{02} * V_{15}$, $S_2' := \mathrm{ivr}_2{}^{\circ}(S_2)$, $S_2 := V_{02} * V_{15} * V_{05}$,
$S_3 := V_{15} * V_{17} * V_{05}$, $S_3' := V_{15} * V_{17} * V_{06}$ (площади S_3 и S_3' равны),
$S_4 := V_{15} * V_{17} * V_{16}$, $S_5 := V_{05} * V_{06} * V_{17}$.
°Зададим деформацию $\mathfrak{m}$ на множестве $[0,1] \times {}^{\cup}\mathbf{k}$:

$$(\mathfrak{m}(\tau,\cdot))^{\circ}(V_\iota) := V_\iota, \quad \iota = 01,\ldots,14;$$
$$\mathfrak{m}(\tau, p_\iota) := 100\cdot\tau\cdot p_\iota, \quad \iota = 1,2,3,4,5,$$

а на каждом симплексе из комплекса $\mathbf{k}$ отображение $\mathfrak{m}$ есть аффинное продолжение с вершин его.
°Запишем формулу объема $\mathfrak{v}$ при этой деформации:

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(\tau) \;=\;& 6(\sqrt{2}+\sqrt{3})\tau^2 - 2\sqrt{3}\tau + \tfrac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{4} + \\ &+2\sqrt{6}\tau\sqrt{(12\sqrt{6}+30)\tau^2-(9+4\sqrt{6})\tau+2+} \\ &\overline{+2\sqrt{8-4\sqrt{6}\tau+6\tau^2}}, \qquad \tau \longrightarrow 0, \tau \geqslant 0.\end{aligned}$$

°Легко видеть, что первая производная этого объема в точке $\tau = 0$ нулевая, а вторая: $-6\sqrt{3}-\frac{21}{2}\sqrt{2} < 0$. Тем самым объем уменьшается в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. Что противоречит локальной минимальности.

Тип V^-

°Приведем пример деформации, уменьшающей объем. Для того определим вершины дополнительно к описанным в Разделе 2.2.2:Тип V^-:

$$\begin{aligned}
\{100\cdot p_{01}\} &:= V_{05}, & V_{25} &:= \{p_{01}\},\\
\{100\cdot p_{02}\} &:= V_{06}, & V_{26} &:= \{p_{02}\},\\
\{100\cdot p_{03}\} &:= V_{07}, & V_{27} &:= \{p_{03}\},\\
\{100\cdot p_{04}\} &:= V_{08}, & V_{28} &:= \{p_{04}\},\\
\{100\cdot p_{05}\} &:= V_{09}, & V_{29} &:= \{p_{05}\},\\
\{100\cdot p_{06}\} &:= V_{10}, & V_{30} &:= \{p_{06}\},\\
\{100\cdot p_{07}\} &:= V_{11}, & V_{31} &:= \{p_{07}\},\\
\{100\cdot p_{08}\} &:= V_{12}, & V_{32} &:= \{p_{08}\},\\
\{100\cdot p_{09}\} &:= V_{13}, & V_{33} &:= \{p_{09}\},\\
\{100\cdot p_{10}\} &:= V_{14}, & V_{34} &:= \{p_{10}\},\\
\{100\cdot p_{11}\} &:= V_{15}, & V_{35} &:= \{p_{11}\},\\
\{100\cdot p_{12}\} &:= V_{16}, & V_{36} &:= \{p_{12}\}.
\end{aligned}$$

°Определим также комплекс $\mathbf{k}$ для деформации как множество всех симплексов, подчиненных хотя бы одному из двумерных симплексов симплициального комплекса

$$\boldsymbol{q} \cup \boldsymbol{w},$$

где
$\boldsymbol{q} := \{S_1, S_2\}$, $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{e} \cup \boldsymbol{e}' \cup \boldsymbol{e}'' \cup \boldsymbol{e}'''$,
$\boldsymbol{e}''' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e}'')$, $\boldsymbol{e}'' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e}')$, $\boldsymbol{e}' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{r} \cup \boldsymbol{t} \cup \boldsymbol{y} \cup \boldsymbol{u}$,
$\boldsymbol{r} := \{S, S', S_3\}$, $\boldsymbol{t} := \{S_5, S_6\}$, $\boldsymbol{y} := \{S_7, S_8\}$, $\boldsymbol{u} := \{S_9, S_a, S_b, S_c, S_d, \mathrm{ivr}_2{}^{\circ}(S_d), S_e, \mathrm{ivr}_2{}^{\circ}(S_e)\}$,
$S' := \mathrm{ivr}_2{}^{\circ}(S)$, $S := V_{25} * V_{29} * V_{33}$,
$S_1 := V_{33} * V_{34} * V_{35}$, $S_2 := V_{33} * V_{36} * V_{35}$, $S_3 := V_{25} * V_{36} * V_{33}$, $S_5 := V_{09} * V_{29} * V_{33}$,
$S_6 := V_{09} * V_{13} * V_{33}$, $S_7 := V_{16} * V_{36} * V_{33}$, $S_8 := V_{16} * V_{13} * V_{33}$, $S_9 := V_{01} * V_{05} * V_{25}$,
$S_a := V_{01} * V_{02} * V_{26}$, $S_b := V_{01} * V_{25} * V_{26}$, $S_c := V_{25} * V_{26} * V_{29}$, $S_d := V_{05} * V_{25} * V_{29}$,
$S_e := V_{05} * V_{09} * V_{29}$.

°Зададим деформацию $\mathfrak{m}$ на множестве $[0,1]\times{}^{\cup}\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{m}(\tau,\cdot))^{\circ}(V_\iota) &:= V_\iota, \quad \iota = 01,\dots,16;\\ \mathfrak{m}(\tau,p_\iota) &:= 100\cdot\tau\cdot p_\iota, \quad \iota = 01,\dots,12,\end{aligned}$$

а на каждом симплексе из комплекса $\mathbf{k}$ отображение $\mathfrak{m}$ есть аффинное продолжение с вершин его.
°Запишем формулу объема $\mathfrak{v}$ при этой деформации:

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(\tau) \;=\; & \tfrac{4}{3}\cdot(1+2^{1/4}\cdot\tau)\cdot\sqrt{2+(2-2\cdot2^{1/4}-2\cdot\sqrt{2})\cdot\tau+(3-\sqrt{2})\cdot\tau^2}+\\ &+\tfrac{2}{3}\cdot\Big(2\cdot\sqrt{20+8\cdot2^{1/4}-6\cdot\sqrt{2}-12\cdot2^{3/4}}+\\ &+2\cdot\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}-2\cdot2^{3/4}}+2\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{2}-10}-\\ &-4\cdot2^{1/4}-3\cdot\sqrt{2}-2^{3/4}+4\Big)\cdot\tau^2+\tfrac{2}{3}\cdot(2-\sqrt{2}-2^{3/4})\cdot\tau+\\ &+\tfrac{4}{3}\cdot(-2+2\cdot2^{1/4}-2\cdot\sqrt{2}+2^{3/4}), \qquad \tau\longrightarrow 0, \tau\geqslant 0.\end{aligned}$$

°Легко видеть, что первая производная этого объема в точке $\tau=0$ нулевая, а вторая:

$$\begin{aligned}2-\frac{28}{3}\cdot2^{1/4}+\frac{2}{3}\cdot2^{3/4}-3\sqrt{2}+\frac{8}{3}\sqrt{8\cdot\sqrt{2}-10}+\frac{8}{3}\sqrt{3+2\sqrt{2}-2\cdot2^{3/4}}+\\ +\frac{8}{3}\sqrt{-6\sqrt{2}-12\cdot2^{3/4}+20+8\cdot2^{1/4}}<0.\end{aligned}$$

Тем самым объем уменьшается в некоторой окрестности точки $\tau=0$. Что противоречит локальной минимальности.

Тип VI$^-$

°Приведем пример деформации, уменьшающей объем. Для того определим вершины дополнительно к описанным в Разделе 2.2.2:Тип VI$^-$:

$$\begin{aligned}\{100\cdot p_{01}\} &:= V_{06}, & V_{26} &:= \{p_{01}\},\\ \{100\cdot p_{02}\} &:= V_{07}, & V_{27} &:= \{p_{02}\},\\ \{100\cdot p_{03}\} &:= V_{08}, & V_{28} &:= \{p_{03}\},\\ \{100\cdot p_{04}\} &:= V_{09}, & V_{29} &:= \{p_{04}\},\\ \{100\cdot p_{05}\} &:= V_{10}, & V_{30} &:= \{p_{05}\},\\ \{100\cdot p_{06}\} &:= V_{11}, & V_{31} &:= \{p_{06}\},\\ \{100\cdot p_{07}\} &:= V_{12}, & V_{32} &:= \{p_{07}\},\\ \{100\cdot p_{08}\} &:= V_{13}, & V_{33} &:= \{p_{08}\},\\ \{100\cdot p_{09}\} &:= V_{14}, & V_{34} &:= \{p_{09}\},\\ \{100\cdot p_{10}\} &:= V_{15}, & V_{35} &:= \{p_{10}\},\\ \{100\cdot p_{11}\} &:= V_{16}, & V_{36} &:= \{p_{11}\},\\ \{100\cdot p_{12}\} &:= V_{17}, & V_{37} &:= \{p_{12}\},\\ \{100\cdot p_{13}\} &:= V_{18}, & V_{38} &:= \{p_{13}\},\\ \{100\cdot p_{14}\} &:= V_{19}, & V_{39} &:= \{p_{14}\},\\ \{100\cdot p_{15}\} &:= V_{20}, & V_{40} &:= \{p_{15}\}.\end{aligned}$$

°Определим также комплекс $\mathbf{k}$ для деформации как множество всех симплексов, подчиненных хотя бы одному из двумерных симплексов симплициального комплекса

$$\mathbf{q}\cup\boldsymbol{w},$$

где

$\mathbf{q} := \{S_1, S_2, S_3\}$, $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{e} \cup \boldsymbol{e}' \cup \boldsymbol{e}'' \cup \boldsymbol{e}''' \cup \boldsymbol{e}''''$,
$\boldsymbol{e}'''' := \mathrm{vrt}_{72^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e}''')$, $\boldsymbol{e}''' := \mathrm{vrt}_{72^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e}'')$, $\boldsymbol{e}'' := \mathrm{vrt}_{72^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e}')$, $\boldsymbol{e}' := \mathrm{vrt}_{72^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} := \mathbf{r} \cup \mathbf{t} \cup \mathbf{y} \cup \mathbf{u}$,
$\mathbf{r} := \{S, S', S_4\}$, $\mathbf{t} := \{S_5, S_6\}$, $\mathbf{y} := \{S_7, S_8\}$, $\mathbf{u} := \{S_9, S_a, S_b, S_c, S_d, S_e, S_f, S_g\}$,
$S' := \mathrm{ivr}_2{}^\circ(S)$, $S := V_{26} * V_{31} * V_{36}$,
$S_1 := V_{38} * V_{36} * V_{37}$, $S_2 := V_{38} * V_{36} * V_{40}$, $S_3 := V_{38} * V_{39} * V_{40}$, $S_4 := V_{26} * V_{36} * V_{40}$,
$S_5 := V_{11} * V_{31} * V_{36}$, $S_6 := V_{11} * V_{16} * V_{36}$, $S_7 := V_{20} * V_{40} * V_{36}$, $S_8 := V_{20} * V_{16} * V_{36}$,
$S_9 := V_{26} * V_{27} * V_{31}$, $S_a := V_{01} * V_{06} * V_{26}$, $S_b := V_{01} * V_{02} * V_{27}$, $S_c := V_{01} * V_{26} * V_{27}$,
$S_d := V_{06} * V_{26} * V_{31}$, $S_e := V_{06} * V_{11} * V_{31}$, $S_f := \mathrm{ivr}_2{}^\circ(S_d)$, $S_g := \mathrm{ivr}_2{}^\circ(S_e)$.
°Зададим деформацию $\mathfrak{m}$ на множестве $[0,1] \times {}^{\cup}\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{m}(\tau,\cdot))^\circ(V_\iota) := V_\iota, \quad \iota = 01,\dots,20;\\ &\mathfrak{m}(\tau,p_\iota) := 100\cdot\tau\cdot p_\iota, \quad \iota = 01,\dots,15,\end{aligned}$$

а на каждом симплексе из комплекса $\mathbf{k}$ отображение $\mathfrak{m}$ есть аффинное продолжение с вершин его.
°Запишем формулу объема $\mathfrak{v}$ при этой деформации:

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(\tau) \;=\; &\left(\tfrac{17}{3}\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}-\tfrac{20}{3}\right)\tau^2+\tfrac{25}{3}-\tfrac{5}{3}\tau+\\ &+\tfrac{5\sqrt{2}}{24}(2\tau+\sqrt{5}-1)\sqrt{(4\tau-1-\sqrt{5})^2+(1+\sqrt{5})^2}.\end{aligned}$$

°Легко видеть, что первая производная этого объема в точке $\tau = 0$ нулевая, а вторая:

$$\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{5-\sqrt{5}}(17\sqrt{5}-5)-\frac{5}{6}(17+\sqrt{5}) < 0.$$

Тем самым объем уменьшается в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. Что противоречит локальной минимальности.

Тип VII$^-$

°Приведем пример деформации, уменьшающей объем. Для того определим вершины дополнительно к описанным в Разделе 2.2.2:Тип VII$^-$:

$$\begin{aligned}
&p_1 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle\rho,0,0\rangle, && V_{21} := \{p_1\},\\
&p_2 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle-\rho,0,0\rangle, && V_{22} := \{p_2\},\\
&p_3 := \langle 0,0,0\rangle, && V_{23} := \{p_3\},\\
&p_4 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle 1,1,0\rangle, && V_{24} := \{p_4\},\\
&p_5 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle -1,1,0\rangle, && V_{25} := \{p_5\},\\
&p_6 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle -1,-1,0\rangle, && V_{26} := \{p_6\},\\
&p_7 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle 1,-1,0\rangle, && V_{27} := \{p_7\},\\
&p_8 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle 0,\rho,0\rangle, && V_{28} := \{p_8\},\\
&p_9 := \tfrac{1}{100}\cdot\langle 0,-\rho,0\rangle, && V_{29} := \{p_9\}.
\end{aligned}$$

где числа
$\nu_1 := 2\sqrt{97}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{881}{97^{3/2}}\right)\right)$;
$\nu_2 := 17 - \nu_1$;
и число $\rho = 1 - \sqrt{\frac{3}{\nu_2}}$.
°Определим также комплекс $\mathbf{k}$ для деформации как множество всех симплексов, подчиненных хотя бы одному из двумерных симплексов симплициального комплекса

$$\mathbf{q} \cup \boldsymbol{z} \cup \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{w}',$$

где

$\mathbf{q} := \boldsymbol{e} \cup \boldsymbol{e}' \cup \boldsymbol{e}'' \cup \boldsymbol{e}'''$, $\boldsymbol{z} := \{T \cup T' \cup T'' \cup T'''\}$,
$\boldsymbol{e}''' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e}'')$, $\boldsymbol{e}'' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e}')$, $\boldsymbol{e}' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} := \{S_1, S, S'\}$,
$\boldsymbol{w}' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ\circ}(\mathrm{ivr}_3{}^{\circ\circ}(\boldsymbol{w}))$, $\boldsymbol{w} := \mathbf{r} \cup \mathbf{t}$, $\mathbf{r} := \{S_2, U, U'\}$, $\mathbf{t} := \mathbf{y} \cup \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}' := \mathrm{ivr}_2{}^{\circ\circ}(\mathbf{y}))$, $\mathbf{y} := \mathbf{u} \cup \mathbf{u}' \cup \mathbf{i}$,
$\mathbf{u}' := \mathrm{ivr}_1{}^{\circ\circ}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} := \{S_3, S_4\}$, $\mathbf{i} := \{S_5, S_6\}$,
$S' := \mathrm{ivr}_2{}^{\circ}(S)$, $S := V_{23} * V_{21} * V_{24}$,
$T''' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ}(T'')$, $T'' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ}(T')$, $T' := \mathrm{vrt}_{90^\circ}{}^{\circ}(T)$, $T := V_{03} * V_{07} * V_{24}$,
$U' := \mathrm{ivr}_1{}^{\circ}(U))$, $U := V_{01} * V_{21} * V_{23}$,
$S_1 := V_{27} * V_{24} * V_{21}$, $S_2 := V_{01} * V_{02} * V_{23}$, $S_3 := V_{01} * V_{03} * V_{24}$,
$S_4 := V_{01} * V_{24} * V_{21}$, $S_5 := V_{03} * V_{24} * V_{25}$, $S_6 := V_{03} * V_{04} * V_{25}$.
°Зададим деформацию $\mathfrak{m}$ на множестве $[0, 1] \times {}^{\cup}\mathbf{k}$:

$$(\mathfrak{m}(\tau, \cdot))^{\circ}(V_\iota) := V_\iota, \quad \iota = 01, \ldots, 12;$$
$$\mathfrak{m}(\tau, p_\iota) := 100 \cdot \tau \cdot p_\iota, \quad \iota = 1, \ldots, 9,$$

а на каждом симплексе из комплекса $\mathbf{k}$ отображение $\mathfrak{m}$ есть аффинное продолжение с вершин его.
°Определим следующие числа:
$\nu_3 := \nu_1 - 8$;
$\nu_4 := \nu_1 - 5$;
$\nu_5 := \nu_2 \cdot \nu_3$;
$\nu_6 := \frac{\nu_5}{\nu_4^2}$;
$\nu_7 := \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\nu_6}$;
$\nu_8 := \nu_2 - 12\nu_6$.
°Запишем формулу объема $\mathfrak{v}$ при этой деформации:

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(\tau) \;=\; & \tfrac{2}{3}(\sqrt{\nu_2} - \sqrt{3})\tau + \tfrac{2}{9}\sqrt{\nu_5} + \tfrac{4}{3}\tau\sqrt{\nu_8 + 9(\tau - \nu_7)^2} + 4\tau^2 + \\ & + \tfrac{4}{3}\sqrt{(\tau(\sqrt{\nu_8} - \sqrt{\nu_2}) + \nu_7\sqrt{\nu_2})^2 + 2(\tfrac{\sqrt{\nu_3}}{3} - \tau)^2\sqrt{\nu_2}(\sqrt{\nu_2} - \sqrt{\nu_8})} + \\ & + \tfrac{2}{3}\sqrt{2\nu_8(2 * \tau - \sqrt{\nu_3}/3 - \nu_7)^2 + (\tfrac{\nu_3}{3} - 3\nu_7^2 + 2\tau(3\nu_7 - \sqrt{\nu_3}))^2} + \\ & + \tfrac{4\sqrt{6}}{3\sqrt{\nu_2}}\tau\sqrt{\tfrac{3}{2}((\sqrt{\nu_2} - \sqrt{3})\tau - \tfrac{\sqrt{\nu_5}}{3})^2 - \tfrac{\nu_5}{6} + 2\nu_2} + \\ & + 2\sqrt{\nu_3}\sqrt{\tfrac{4\nu_8}{81} + \tfrac{4(\tau - \nu_7)^2}{9}}.\end{aligned}$$

°Легко видеть, что первая производная этого объема в точке $\tau = 0$ нулевая, а вторая:

$$\approx -0.7855744657\ldots < 0.$$

Тем самым объем уменьшается в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. Что противоречит локальной минимальности.

Результат

°Th · Пусть $\langle \mathfrak{a}, M \rangle$ — локально–минимальная пара из F такая, что отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективно на $(\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}) \setminus M$; еще выберем комплекс $\mathfrak{a}$, точку x и сферу S как в описании Соответствия, и построен указанный там же комплекс $\mathbf{k}_{\mathfrak{a},x,\mathfrak{a},S}$ на сфере. Тогда из рассмотренных типов I^-–VII^- следует, что тело этой сети $\mathbf{k}_{\mathfrak{a},x,\mathfrak{a},S}$ не гомеоморфно телу сетей типов I^-, II^-, III^-, IV^-, V^-, VI^-, VII^- из Описаний Типа I^-–Типа VII^-.
При этом также найдется локальный конус $\langle C, x \rangle$ такой, что C — замкнутая окрестность точки x в $\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$, отображение $\mathfrak{a}$ инъективно на C, и $\mathfrak{a}$–образ K множества $\mathrm{int}_{(\mathrm{dom}\,\mathfrak{a})\setminus M} C$ имеет один из следующих трех видов:

тип I^+: множество K лежит в некоторой плоскости;

тип II^+**:** найдется симплициальный комплекс $\mathbf{k}$ такой, что тело комплекса $\mathbf{k}$ есть K, в $\mathbf{k}$ всего три двумерных симплекса, всего один одномерный симплекс, нет нульмерных симплексов, причем двумерные симплексы инцидентны одномерному, двугранный угол между каждыми двумя двумерными симплексами составляет $120°$, и точка $\mathbf{a}(x)$ лежит в одномерном симплексе;

тип III^+**:** найдется симплициальный комплекс $\mathbf{k}$ такой, что тело комплекса $\mathbf{k}$ есть K, в $\mathbf{k}$ всего шесть двумерных симплексов, четыре одномерных и один нульмерный, причем каждый двумерный симплекс инцидентен двум и только двум одномерным, каждый одномерный симплекс инцидентен трем и только трем двумерным, нульмерный же симплекс инцидентен всем четырем одномерным симплексам, двугранный угол между каждыми двумя двумерными симплексами, инцидентными некоторому одномерному симплексу, составляет $120°$, и нульмерный симплекс есть $\{\mathbf{a}(x)\}$.

Глава 3

Многоугольники–следы и их границы

Предисловие

При изучении сетей–следов на плоскости с ними связывают некоторые объекты, которые в некотором смысле обобщают многоугольники так, что возможны самоналожения. Подобные объекты изучались ранее (см. [17]), однако не в кусочно–аффинной категории и не в виде "следов" как классов отображений. Потому предлагается развить понятие многоугольника–следа в рамках многогранников–следов. Изучается связь многоугольника–следа и его границы.

3∼Введение

Элементы

°Все построения проведем в некоторой двумерной плоскости Y с некоторым евклидовым скалярным произведением и ориентациею на ней.

°Df · *Одномерные основные отображения*

- Назовем PA–контракцию $\mathfrak{a}$ *окружностною*, если $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ гомеоморфны окружности и лежат в плоскости Y.
- Назовем PA–смятие $\mathfrak{a}$ *окружностным*, если $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ гомеоморфно окружности, а $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ лежат в плоскости Y.
- Назовем PA–отображение $\mathfrak{a}$ *окружностным*, если найдутся окружностное смятие $\mathfrak{b}$ и окружностная контракция $\mathfrak{c}$ такие, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$.

°Df · *Двумерные основные отображения*

- Назовем PA–контракцию $\mathfrak{a}$ *круговою*, если
  - $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ и $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ гомеоморфны двумерному замкнутому диску и лежат в плоскости Y;
  - в каждой точке из $\operatorname{rint}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, в которой отображение $\mathfrak{a}$ локально инъективно, отображение $\mathfrak{a}$ сохраняет ориентацию плоскости Y;
  - $\mathfrak{a}^{\circ}(\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}) \subset \operatorname{rmrg}\operatorname{im}\mathfrak{a}$.
- Назовем PA–смятие $\mathfrak{a}$ *круговым*, если

 – $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ гомеоморфно двумерному замкнутому диску;
 – $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ лежат в плоскости Y;
 – отображение $\mathfrak{a}$ регулярно;
 – отображение $\mathfrak{a}$ сохраняет ориентацию плоскости Y в каждой точке множества $\operatorname{rint}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$.

- Назовем PA–отображение $\mathfrak{a}$ *круговым*, если найдутся круговое смятие $\mathfrak{b}$ и круговая контракция $\mathfrak{c}$ такие, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$.

°Df · Назовем *классом отмеченных окружностных отображений* множество всех пар вида $\langle \mathfrak{a}, \varnothing \rangle$, где $\mathfrak{a}$ — окружностное отображение.
Заметим, что $\varnothing$ — аффиктура в окружностном отображении. Еще заметим, что этот класс по определению своему редуктивно содержателен.

°Df · Назовем *классом отмеченных круговых отображений* множество всех пар вида $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle$, где $\mathfrak{a}$ — круговое отображение.
Заметим, что $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ — аффиктура в круговом отображении $\mathfrak{a}$.
°Еще заметим, что этот класс редуктивно содержателен. Действительно, возьмем разложение $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}$ в композицию круговой контракции $\mathfrak{c}$ и кругового смятия $\mathfrak{b}$, и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$, относительно которого отображение $\mathfrak{c}$ симплициально.
°Тогда из определения круговой контракции следует $\mathfrak{c}^{\circ}(\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{c}) \subset \operatorname{rmrg}\operatorname{im}\mathfrak{c} = \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{b}$.
°Чтобы показать обратное включение, возьмем точку x из $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{b}$. Тогда есть двумерный симплекс K в комплексе $\mathfrak{c}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$, у которого одно ребро E лежит на $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{b}$, причем $x \in \overline{\mathsf{E}}$.
°Рассмотрим некоторый симплекс $\tilde{\mathsf{K}}$ из комплекса $\mathfrak{k}$ такой, что $\mathfrak{c}^{\circ}(\tilde{\mathsf{K}}) = \mathsf{K}$. У него есть ребро $\tilde{\mathsf{E}}$, переходящее в E. Возможны два варианта: или ребро $\tilde{\mathsf{E}}$ лежит на $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{c}$ или нет.
°Если лежит, то у точки x есть на $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{c}$ прообразная точка $\tilde{x}$.
°Если же нет, то ребру $\tilde{\mathsf{E}}$ инцидентен двумерный симплекс K', не равный симплексу $\tilde{\mathsf{K}}$. Тогда по Утверждению 26 $\mathfrak{c}^{\circ}(\mathsf{K}') \cap \mathfrak{c}^{\circ}(\tilde{\mathsf{K}}) = \varnothing$, из чего следует, что $\mathfrak{c}^{\circ}(\mathsf{K}') = \mathsf{E}$. И таким же образом перебрав некоторое конечное число двумерных симплексов, дойдем до такого, что у него есть ребро в $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{c}$.
°И у точки x есть на $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{c}$ прообразная точка $\tilde{x}$. И $\mathfrak{c}^{\circ}(\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{c}) = \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{b}$.

°Df · Для кругового отображения $\mathfrak{a}$ определим F–границу $\operatorname{mrg}\mathfrak{a}$ его по формуле

$$\operatorname{mrg}\mathfrak{a} := \mathfrak{a}|_{\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}}.$$

Для отмеченного кругового отображения $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle$ определим F–границу $\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle)$ его по формуле

$$\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle) := \langle \mathfrak{a}|_{\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}}, \varnothing \rangle.$$

°Ясно, что для всякого отмеченного кругового отображения $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle$ его F–граница $\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ есть отмеченное окружностное отображение.

Следы

°Df · Определим *ломаные–следы* как классы эквивалентных пар из класса отмеченных окружностных отображений и определим *многоугольники–следы* как классы эквивалентных пар из класса отмеченных круговых отображений.
Канонический представитель ломаной– или многоугольника–следа — пара из него такая, что отображение в ней — смятие.

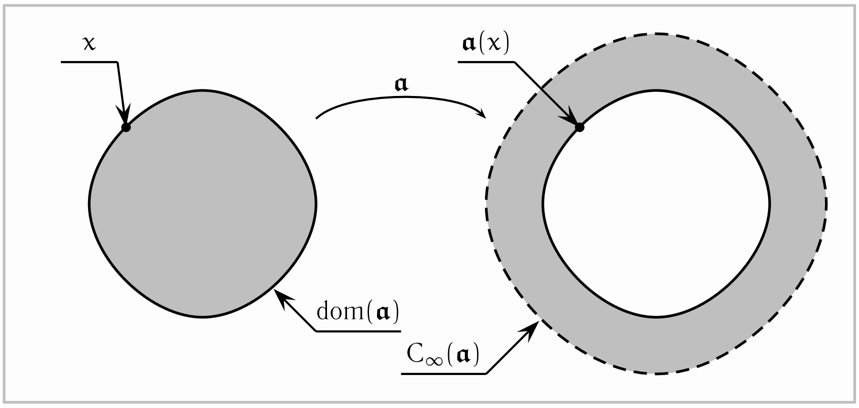
°Df · Для многоугольника–следа A определим его *границу* $\mathcal{M}\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ как класс отмеченных окружностных отображений эквивалентных отмеченному окружностному отображению $\operatorname{mrg}(\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle)$, для некоторого представителя $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a} \rangle$ многоугольника–следа A.

3.1 Простые необходимые условия

Внешность

°Df · Если $\mathbf{a}$ — некоторое PA—отображение из Y в Y, то обозначим через $C_\infty(\mathbf{a})$ единственную неограниченную связную компоненту множества $Y \setminus \operatorname{im} \mathbf{a}$.

60 °Th · Если A — многоугольник—след, $\langle \mathbf{a}, \operatorname{rmrg} \operatorname{dom} \mathbf{a} \rangle$ — некоторый канонический представитель его, точка x лежит на границе множества $\operatorname{dom} \mathbf{a}$, точка же $\mathbf{a}(x)$ лежит на границе множества $C_\infty(\mathbf{a})$, то найдется окрестность U точки x во множестве $\operatorname{dom} \mathbf{a}$ такая, что $\mathbf{a}|_U$ — инъективна.



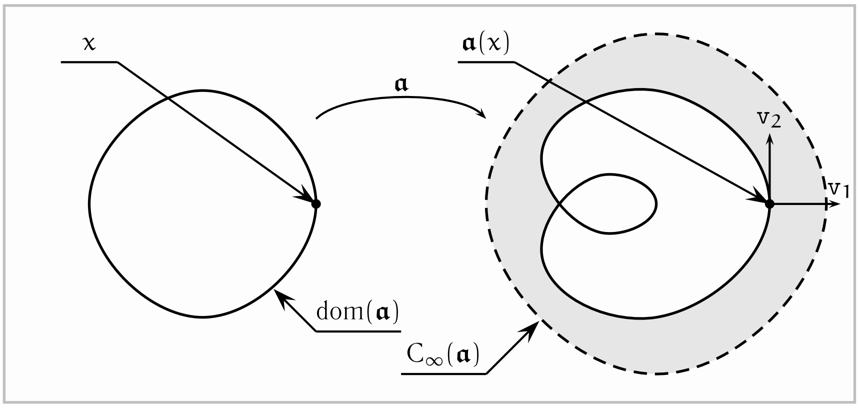
Диаг. 1. образ к локальной инъективности

Доказательство

°Рассмотрим комплекс $\mathbf{a}$, относительно которого отображение $\mathbf{a}$ симплициально.
°Если точка x не принадлежит множеству $\operatorname{vert}^\circ \mathbf{a}$, то найдется двумерный симплекс D в $\mathbf{a}$ такой, что точка x лежит на границе множества D и множество $\{x\}$ не есть вершина в D. Множество $\operatorname{int}_{\operatorname{dom} \mathbf{a}} \overline{D}$ образует окрестность точки x в $\operatorname{dom} \mathbf{a}$ и при этом $\mathbf{a}|_{\overline{D}}$ — инъективна.
°Если же $x \in \operatorname{vert}^\circ \mathbf{a}$, то обозначим через $D_1, \ldots, D_\nu$ все треугольники из комплекса $\mathbf{a}$, инцидентные симплексу $\{x\}$ и пронумерованные по часовой стрелке вокруг точки x.
°Допустим, что найдутся неравные точки q_1 и q_2 в $\bigcup\limits_{\iota=1,\ldots,\nu} \overline{D_\iota}$, причем $\mathbf{a}(q_1) = \mathbf{a}(q_2)$.
°Тогда соединим точки q_1 и q_2 простою ломаною линиею L, лежащею в $\bigcup\limits_{\iota=1,\ldots,\nu} \overline{D_\iota}$, и обходящею точку x по часовой стрелке от q_1 до q_2, а в случае невозможности переменим нумерацию $q_1 \mapsto q_2, q_2 \mapsto q_1$.
°Рассмотрим образ $\mathbf{a}^\circ(W)$, где $W = \bigcup\limits_{y : y \in L} [x, y]$. Треугольники $\mathbf{a}^\circ(D_1), \ldots, \mathbf{a}^\circ(D_\nu)$ обходят точку $\mathbf{a}(x)$ по часовой стрелке, следовательно, образ этот содержит в себе окрестность в Y точки $\mathbf{a}(x)$, что противоречит условию $\mathbf{a}(x) \in \operatorname{rmrg} C_\infty(\mathbf{a})$. Q.E.D.

°Df · Рассмотрим некоторое окружностное смятие $\mathbf{a}$. Определим тогда нижеследующие объекты:

- $dC_\infty(\mathbf{a}) := \{x : x \in \operatorname{dom} \mathbf{a}, \mathbf{a}(x) \in \operatorname{rmrg} C_\infty(\mathbf{a})\}$ — множество точек с внешнеграничным образом;
- $\operatorname{linj}(\mathbf{a}) := \{x : x \in dC_\infty(\mathbf{a}), \exists U (U$ — окрестность точки x в $\operatorname{dom} \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}|_U$ — инъективна$)\} \subset dC_\infty(\mathbf{a})$;
- для каждой точки x из множества $\operatorname{linj}(\mathbf{a})$ определим *базис ориентации* $\operatorname{bas}_x(\mathbf{a}) := \langle v_1, v_2 \rangle$, где v_2 — вектор единичной длины направленный по $\mathbf{a}$—переносу ориентации положительного обхода множества $\operatorname{dom} \mathbf{a}$ в точке x, то есть орт суммы ортов двух ориентированных указанным способом ребер, одно из которых — входящее в точку $\mathbf{a}(x)$, а второе — выходящее из точки $\mathbf{a}(x)$ ломаной линии $\operatorname{im} \mathbf{a}$; а v_1 — вектор единичной длины ортогональный вектору v_2 и, если его приложить к точке $\mathbf{a}(x)$ направленный (в бесконечной близости к началу своему) в $C_\infty(\mathbf{a})$; см. рис. 3.2;



Диаг. 2. образ к базису

- еще определим для каждой точки x из множества $\mathrm{linj}(\mathfrak{a})$ число

$$\mathrm{bsign}_{\mathfrak{a}}\, x := \begin{cases} +1, & \mathrm{bas}_x\, \mathfrak{a} \text{ — положителен;} \\ -1, & \mathrm{bas}_x\, \mathfrak{a} \text{ — отрицателен.} \end{cases}$$

61 °Th · Пусть $\mathfrak{a}$ — круговое смятие. Тогда

1. $\mathrm{linj}(\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}}) = \mathrm{d}C_\infty(\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}})$;
2. для произвольных точек x и y из $\mathrm{linj}(\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}})$ верно, что

$$\mathrm{bsign}_{\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}}}\, x = \mathrm{bsign}_{\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}}}\, y.$$

Доказательство

°Совпадение множеств $\mathrm{linj}(\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}}) = \mathrm{d}C_\infty(\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}})$ следует из Утверждения 60. По тому же Утверждению и из регулярности функции $\mathfrak{a}$ ясно, что ориентации базисов совпадают. Q.E.D.

Импликации

62 °Заметка · Пусть X — топологическое пространство; $M \subset X$; $\mathfrak{a}$ — непрерывное отображение из M в X; $\mathfrak{a}|_{\mathrm{int}_X M}$ — открытое отображение. Тогда $(\mathfrak{a}^{-1})^\circ(\mathrm{fin}_X \operatorname{im} \mathfrak{a}) \subset \mathrm{fin}_X M$, где $\mathrm{fin}_X(\cdot)$ — топологическая граница в топологии на X. Действительно, если бы была точка x такая, что $\mathfrak{a}(x) \in \mathrm{fin}_X \operatorname{im} \mathfrak{a}$ и $x \in \mathrm{int}_X M$, то $\mathfrak{a}(x) \in \mathfrak{a}^\circ(\mathrm{int}_X M) =: N$. Заметим, что $N \subset \operatorname{im} \mathfrak{a}$, а по открытости отображения $\mathfrak{a}|_{\mathrm{int}_X M}$ заключим, что множество N открыто. Откуда следует, что $N \subset \mathrm{int}_X \operatorname{im} \mathfrak{a}$. Таким образом, $\mathfrak{a}(x) \in \mathrm{int}_X \operatorname{im} \mathfrak{a}$, то есть $\mathfrak{a}(x) \notin \mathrm{fin}_X \operatorname{im} \mathfrak{a}$. Противоречие.

63 °Th · Если X — хаусдорфово топологическое пространство, в котором всякое открытое связное множество линейно связно; множество $M \subset X$,— компактно; отображение $\mathfrak{a}$ непрерывное из M в X; $\mathfrak{a}|_{\mathrm{int}_X M}$ — открытое отображение. Тогда если C_1 — связная компонента в $X \setminus \operatorname{im} \mathfrak{a}$, C_2 — связная компонента в $X \setminus \mathfrak{a}^\circ(\mathrm{fin}_X M)$, $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, то $C_1 = C_2$.

Доказательство

°Возьмем некоторую точку $y_0 \in C_1 \cap C_2$.

°Рассмотрим точку $y_1 \in C_1$. Соединим ее с точкою y_0 непрерывною кривою $\mathfrak{b}$, определенною на отрезке $[0, 1]$, и такою, что $\mathfrak{b}(0) = y_0$, $\mathfrak{b}(1) = y_1$, $\operatorname{im} \mathfrak{b} \subset C_1$. Докажем, что $\operatorname{im} \mathfrak{b} \subset C_2$.

°Определим непустое из условия множество $\Gamma := \{\sigma : \mathfrak{b}^\circ([0, \sigma]) \subset C_2\}$, и $\tau := \sup \Gamma$. Заметим, что или $\tau \in \Gamma$ или $\tau \notin \Gamma$.

°Если $\tau \in \Gamma$, то Γ замкнуто и $\mathfrak{b}^\circ([0,\tau]) \subset C_2$. Допустим, что $\tau < 1$. Рассмотрим последовательность чисел $\mathfrak{c}_\kappa$ при $\kappa \in \mathbb{N}^+$, таких, что $\mathfrak{c}_\kappa \in (\tau, \min\{1, \tau + \frac{1}{\kappa}\}]$, $\mathfrak{b}(\mathfrak{c}_\kappa) \notin C_2$, $\kappa \in \mathbb{N}^+$.
Из непрерывности отображения $\mathfrak{b}$ следует, что $\mathfrak{b}(\tau) = \lim\limits_{\kappa\to\infty} \mathfrak{b}(\mathfrak{c}_\kappa)$. Заметив, что $X \setminus C_2$ замкнуто, видим, что $\mathfrak{b}(\tau) \in X \setminus C_2$. Противоречие. И $\tau = 1$, то есть $y_1 = \mathfrak{b}(1) = \mathfrak{b}(\tau) \in C_2$.
°Если же $\tau \notin \Gamma$, то $\mathfrak{b}(\tau) \in X \setminus C_2$. Рассмотрим два возможных варианта: или $\mathfrak{b}(\tau) \in C_2'$ — иной компоненте в $X \setminus \mathfrak{a}^\circ(\operatorname{fin}_X M)$ или $\mathfrak{b}(\tau) \in \mathfrak{a}^\circ(\operatorname{fin}_X M)$.

- Второе невозможно, ибо если бы было так, то $\mathfrak{b}(\tau) \notin C_1$, что противоречит определениям.
- Первое же невозможно, ибо если бы было так, то $X \setminus C_2' \supset C_2$, что влечет включение $X \setminus C_2' \supset \overline{C_2}$. Но, с другой стороны, по непрерывности отображения $\mathfrak{b}$ и замкнутости множества $[0,\tau]$, верно, что $\mathfrak{b}(\tau) \in \overline{C_2}$, то есть $\overline{C_2} \cap C_2' \neq \varnothing$. Противоречие.

°Рассмотрим точку $y_1 \in C_2$. Соединим точки y_0 и y_1 непрерывною кривою $\mathfrak{b}$, определенною на отрезке $[0,1]$, и такою, что $\mathfrak{b}(0) = y_0$, $\mathfrak{b}(1) = y_1$, $\operatorname{im}\mathfrak{b} \subset C_2$. Докажем, что $\operatorname{im}\mathfrak{b} \subset C_1$.
°Определим непустое из условия множество $\Gamma := \{\sigma : \mathfrak{b}^\circ([0,\sigma]) \subset C_1\}$, и $\tau := \sup\Gamma$. Заметим, что или $\tau \in \Gamma$ или $\tau \notin \Gamma$.
°Если $\tau \in \Gamma$, то Γ замкнуто и $\mathfrak{b}^\circ([0,\tau]) \subset C_1$. Допустим, что $\tau < 1$. Рассмотрим последовательность чисел $\mathfrak{c}_\kappa$ при $\kappa \in \mathbb{N}^+$, таких, что $\mathfrak{c}_\kappa \in (\tau, \min\{1, \tau + \frac{1}{\kappa}\}]$, $\mathfrak{b}(\mathfrak{c}_\kappa) \notin C_1$, $\kappa \in \mathbb{N}^+$.
Из непрерывности отображения $\mathfrak{b}$ следует, что $\mathfrak{b}(\tau) = \lim\limits_{\kappa\to\infty} \mathfrak{b}(\mathfrak{c}_\kappa)$. Заметив, что $X \setminus C_1$ замкнуто, видим, что $\mathfrak{b}(\tau) \in X \setminus C_1$. Противоречие. И $\tau = 1$, то есть $y_1 = \mathfrak{b}(1) = \mathfrak{b}(\tau) \in C_2$.
°Если же $\tau \notin \Gamma$, то $\mathfrak{b}(\tau) \in X \setminus C_1$. Рассмотрим два возможных варианта: или $\mathfrak{b}(\tau) \in C_1'$ — иной компоненте в $X \setminus \operatorname{im}\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}(\tau) \in \operatorname{im}\mathfrak{a}$.

- Первое невозможно, ибо если бы было так, то $X \setminus C_1' \supset C_1$, что влечет включение $X \setminus C_1' \supset \overline{C_1}$. Но, с другой стороны, по непрерывности отображения $\mathfrak{b}$ и замкнутости множества $[0,\tau]$, верно, что $\overline{C_1} \cap C_1' \neq \varnothing$. Противоречие.
- Во втором же случае заметим, что $\mathfrak{b}(\tau) \in \operatorname{im}\mathfrak{a}$ и по свойству отображения $\mathfrak{b}$ к точке $\mathfrak{b}(\tau)$ сколь угодно близко найдется точка из C_2, то есть $\mathfrak{b}(\tau) \in \operatorname{fin}_X \operatorname{im}\mathfrak{a}$. По Замечанию 62 верно, что $(\mathfrak{a}^{-1})^\circ(\{\mathfrak{b}(\tau)\})$ $\operatorname{fin}_X M$. То есть $\mathfrak{b}(\tau) \in \mathfrak{a}^\circ(\operatorname{fin}_X M)$, и $\mathfrak{b}(\tau) \notin C_2$. Противоречие.

Q.E.D.

°Th · Пусть $\mathfrak{a}$ — круговое смятие. Тогда по Утверждению 63 $C_\infty(\mathfrak{a}) = C_\infty(\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}})$.

64 °Th · Для кругового смятия $\mathfrak{a}$ верно, что $Y \setminus C_\infty(\mathfrak{a}) = Y \setminus C_\infty(\mathfrak{a}|_{\mathrm{rmrg\,dom}\,\mathfrak{a}})$ — гомеоморфно двумерному диску D^2.

Доказательство

°Рассмотрим точку $x \in Y \setminus C_\infty(\mathfrak{a})$, точка эта или внутренняя или граничная.
°Если она внутренняя, то у нее есть окрестность в $Y \setminus C_\infty(\mathfrak{a})$, гомеоморфная $\mathbb{R}^2$.
°Если же она граничная, то она является образом некоторой точки y, граничной в $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$.
°Заметим, что граница множества $C_\infty(\mathfrak{a})$ — ломаная. Рассмотрим столь малую круговую окрестность B с центром в точке x, что попадающие в нее части границы множества $C_\infty(\mathfrak{a})$ суть прямые отрезки, каждый с краевою точкою x.
°Этих отрезков более одного, ибо в противном случае вблизи точки x не будет $\mathfrak{a}$–образа открытого множества, внутреннего в $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$.
°Если этих отрезков два, то точка x обладает окрестностью в $Y \setminus C_\infty(\mathfrak{a})$ гомеоморфною $\mathbb{R}^2_+$.
°Более же двух их не может быть, из связности $\operatorname{im}\mathfrak{a}$ и по Утверждению 60.
°Связность $Y \setminus C_\infty(\mathfrak{a})$ следует из связности $\operatorname{im}\mathfrak{a}$. Односвязность следует из связности $C_\infty(\mathfrak{a})$. Q.E.D.

65 °*Условие*

Таким образом необходимые условия продолжимости ломаной–следа $\mathbb{A}$ до многоугольника–следа суть

- найдется $\langle\mathfrak{a}, \varnothing\rangle \in \mathbb{A}$ такой, что $\forall x, y (x, y \in dC_\infty(\mathfrak{a}) \longrightarrow \operatorname{bsign}_{\mathfrak{a}} x = \operatorname{bsign}_{\mathfrak{a}} y)$;

- множество $Y \setminus C_\infty(\mathtt{A})$ гомеоморфно диску D^2.

Еще одно условие будем считать выполненным при требовании свойств 65 — $\mathrm{bsign}_{\mathfrak{a}}\, x = +1$.

3.2 Общее положение

Определение

°Df · Скажем, что окружностное смятие $\mathfrak{a}$ находится в *общем положении*, если

1. $\{a : \exists b(b \neq a, \mathfrak{a}(a) = \mathfrak{a}(b))\}$ конечно;
2. у каждой точки из $\mathrm{im}\,\mathfrak{a}$ не более двух $\mathfrak{a}$–прообразов;
3. в каждой точке a, у которой два $\mathfrak{a}$–прообраза, найдется ее окрестность U в плоскости Y такая, что $\mathfrak{a}$–прообраз ее состоит из двух связных компонент A и B, на каждой из которых отображение $\mathfrak{a}$ инъективно, и при всяком достаточно малом непрерывном деформировании обоих отображений $\mathfrak{a}|_A$ и $\mathfrak{a}|_B$ их образы пересекаются.

Скажем, что ломаная–след находится в *общем положении*, если отображение некоторого ее канонического представителя находится в общем положении.

°Df · Скажем, что круговое смятие $\mathfrak{a}$ находится в *общем положении*, если его F–граница $\mathrm{mrg}\,\mathfrak{a}$ находится в общем положении, а также верно, что $\mathfrak{a}$–образ каждой точки из $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$, в которой отображение $\mathfrak{a}$ не локально инъективно, имеет только один $\mathfrak{a}$–прообраз на $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$.
Скажем, что многоугольник–след находится в *общем положении*, если отображение некоторого его канонического представителя находится в общем положении.

Графы и простые необходимые условия

°Df · Определим *ориентированный граф* $\mathrm{Gr}(\mathtt{A})$ ломаной–следа $\mathtt{A}$ в общем положении как совокупность всех одноточечных множеств (называемых *вершинами*) вида $\{a\}$, где точка a имеет два $\mathfrak{a}$–прообраза, для некоторого канонического представителя $\langle \mathfrak{a}, \varnothing \rangle$ ломаной–следа $\mathtt{A}$, объединенную с совокупностью всех связных компонент (называемых *дугами*) множества $\mathrm{im}\,\mathfrak{a}$ за вычетом всех точек, имеющих два $\mathfrak{a}$–прообраза, причем на дугах этих рассматривается ориентация от ориентации положительного обхода множества $\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$. При этом инцидентность вершины V дуге A понимается как $V \subset \overline{A}$.

°Df · Выберем также у каждой ломаной–следа $\mathtt{A}$ какой-нибудь ориентированный дуальный граф $\mathrm{duGr}(\mathtt{A})$. То есть образуем совокупность $\mathbf{k}$ всех связных компонент дополнения до Y тела графа $\mathrm{Gr}(\mathtt{A})$ и

- выберем в каждой компоненте K из $\mathbf{k}$ по точке p_K (при этом множества $\{p_K\}$ суть *вершины* дуального графа),
- для всяких двух связных компонент K и L, обладающих общим одномерным фрагментом F границы, выберем некоторую простую ломаную M (при этом эта ломаная без двух ее крайних точек есть *дуга* дуального графа) так, что крайние точки ее суть две точки p_K и p_L, и лежит она в объединении тех множеств K и L и их общего фрагмента границы, и пересекает этот фрагмент единожды в точке x,
- на ломаной той выберем ориентацию такую, что если выбрать точку y на ломаной M и точку z на том фрагменте (так же ломаной) так, что $[x, y] \subset M$, $[x, z] \subset F$, пара $\langle x, y \rangle$ — из выбираемой ориентации, а пара $\langle x, z \rangle$ — из ориентации фрагмента F, порожденной ориентацией той дуги графа $\mathrm{Gr}(\mathtt{A})$, в которую он включен, и пара $\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle$ — положительно ориентирована.

Еще, заметив, что в дуальном графе есть ровно одна вершина, соответствующая неограниченной связной компоненте $C_\infty(\mathrm{A})$ дополнения в плоскости Y множеству $\operatorname{im}\mathfrak{a}$, определим *конечную часть* $\operatorname{fdGr}(\mathrm{A})$ *дуального графа* как дуальный граф за вычетом той самой вершины и дуг, ей инцидентных.

°Th · Пусть A — ломаная–след в общем положении. Тогда для A выполнены условия 65 в том и только том случае, в котором $\operatorname{fdGr}(\mathrm{A})$ — связен и все ребра графа $\operatorname{duGr}(\mathrm{A})$ инцидентные бесконечной вершине ориентированы одновременно или к ней или от нее.

Доказательство

°Одинаковая ориентированность соответствует Утверждению 61. Связность же соответствует Утверждению 64. Q.E.D.

3.3 Ветвления

Степень точки у отображения

66 °Df · Рассмотрим некоторое круговое смятие $\mathfrak{a}$, точку x из $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$, и некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$, и у которого точка x — вершинная (такой всегда найдется по Замечанию 4 и Утверждению 15). Рассмотрим все вершинные точки w комплекса $\mathbf{k}$ такие, что ребро (x, w) (у него вершинные точки суть x и w) — элемент комплекса $\mathbf{k}$, и пронумеруем $\mathfrak{v}_0, \dots, \mathfrak{v}_\nu$ все те точки так, чтобы $\measuredangle\big(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota)\big) > 0$ при всех $\iota = 1, \dots, \nu$.

Тогда определим число $\deg'_{\mathbf{k},\mathfrak{a}}(x)$ по формуле

$$\deg'_{\mathbf{k},\mathfrak{a}}(x) := \left\lfloor \frac{\sum\limits_{\iota=1,\dots,\nu} \measuredangle(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota))}{2\pi} \right\rfloor.$$

°Th · Пусть $\mathfrak{a}$ — круговое смятие в общем положении; x — точка из $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$; $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ — симплициальные комплексы, относительно которых отображение $\mathfrak{a}$ симплициально, а точка x — вершинная каждому из них.

Тогда $\deg'_{\mathbf{k}',\mathfrak{a}}(x) = \deg'_{\mathbf{k}'',\mathfrak{a}}(x)$.

Доказательство

°Достаточно рассмотреть случай $\mathbf{k}'' \lll \mathbf{k}'$, как видно из Замечания 4.

°В таком случае рассмотрим последовательности $\mathfrak{v}'_0, \dots, \mathfrak{v}'_\mu$ и $\mathfrak{v}''_0, \dots, \mathfrak{v}''_\nu$ вершинных точек из Определения 66 относительно комплексов $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ соответственно.

°Заметим, что при каждом $\iota = 1, \dots, \mu$ верно следующее равенство:

$$\measuredangle(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}'_{\iota-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}'_\iota)) =$$

$$= \sum_{\alpha:\{\mathfrak{v}''_{\alpha-1}\}*\{\mathfrak{v}''_\alpha\}*\{x\}\subset\{\mathfrak{v}'_{\iota-1}\}*\{\mathfrak{v}'_\iota\}*\{x\}} \measuredangle(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}''_{\alpha-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}''_\alpha)).$$

Из этого следует заявленное равенство. Q.E.D.

°Df · Определим для кругового смятия $\mathfrak{a}$ в общем положении и точки x на множестве $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ *степень* $\deg_{\mathfrak{a}} x$ *точки* x *относительно отображения* $\mathfrak{a}$ как число $\deg'_{\mathbf{k},\mathfrak{a}}(x)$ для некоторого комплекса $\mathbf{k}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$ и которому точка x — вершинная.

Степень точки у многоугольника–следа

°Th · Рассмотрим круговое смятие $\mathfrak{a}$ и круговое инъективное отображение $\mathfrak{b}$ такое, что $\operatorname{dom}\mathfrak{a} = \operatorname{im}\mathfrak{b}$. Также возьмем некоторую точку x на множестве $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{b}$. Тогда $\deg_{\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}} x = \deg_{\mathfrak{a}} \mathfrak{b}(x)$.

Доказательство

°Возьмем некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{k}$ такой, что $\{x\} \in \mathbf{k}$ и отображение $\mathfrak{b}$ симплициально относительно комплекса $\mathbf{k}$, а отображение $\mathfrak{a}$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{b}^{\circ\circ}(\mathbf{k})$.
°Тогда проведем нумерацию соответствующих вершинных в комплексе $\mathbf{k}$ точек $\mathfrak{v}_0, \ldots, \mathfrak{v}_\nu$ как в Определении 66.
°Рассмотрим сумму для $\deg'$:

$$\deg'_{\mathbf{k},\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}}(x) = \left\lfloor \frac{\sum\limits_{\iota=1,\ldots,\nu} \measuredangle((\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b})(x)(\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b})(\mathfrak{v}_{\iota-1}), (\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b})(x)(\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b})(\mathfrak{v}_\iota))}{2\pi} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \frac{\sum\limits_{\iota=1,\ldots,\nu} \measuredangle(\mathfrak{a}(\mathfrak{b}(x))\mathfrak{a}(\mathfrak{b}(\mathfrak{v}_{\iota-1})), \mathfrak{a}(\mathfrak{b}(x))\mathfrak{a}(\mathfrak{b}(\mathfrak{v}_\iota)))}{2\pi} \right\rfloor =$$

(так как отображение $\mathfrak{b}$ инъективно)

$$= \deg'_{\mathfrak{b}^{\circ\circ}(\mathbf{k}),\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}(x)).$$

Q.E.D.

°Df · Рассмотрим многоугольник—след A в общем положении и точку x, лежащую на теле графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$, но не в вершине его. Тогда степенью $\deg_{\mathrm{A}} x$ точки x относительно многоугольника—следа A назовем число $\deg_{\mathfrak{a}} y$, где $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}\rangle$ — некоторый канонический представитель многоугольника—следа A и точка y — единственный $\mathfrak{a}$—прообраз точки x на множестве $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$.

°Df · Рассмотрим многоугольник—след A в общем положении и точку x, лежащую на теле графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$, но не в вершине его. Тогда назовем точку x *точкою степени* $\deg_{\mathrm{A}} x$ *относительно многоугольника—следа* A, а если $\deg_{\mathrm{A}} x > 0$, то назовем ее *точкою ветвления относительно многоугольника—следа* A.

Расщепление ветвления

°Возьмем некоторый полный симплициальный комплекс $\mathbf{a}$ и некоторое круговое смятие $\mathfrak{a}$ в общем положении, симплициальное относительно комплекса $\mathbf{a}$. Рассмотрим некоторую точку x такую, что $\deg_{\mathfrak{a}} x =: \nu > 1$. Возьмем некоторое целое число β такое, что $0 < \beta < \nu$.
°Заметим, что $\{x\}$ — непременно вершина в комплексе $\mathbf{a}$.
°Рассмотрим семейство всех подразделений $\mathbf{b}$ комплекса $\mathbf{a}$ таких, что

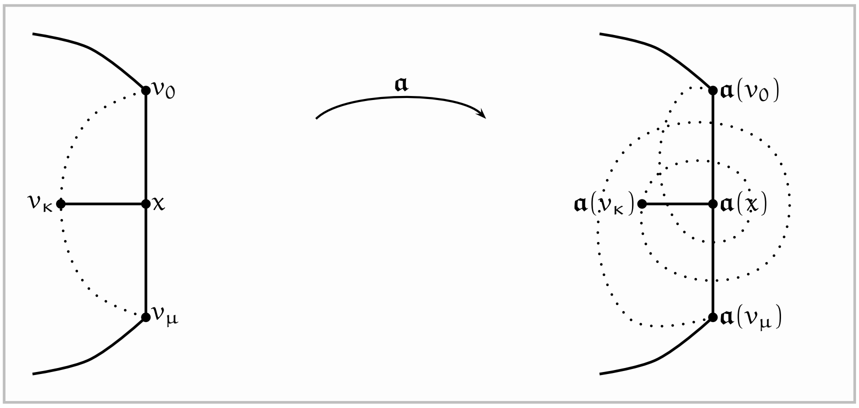
- $\mathbf{b}$ — симплициальный комплекс;
- для всякого симплекса A комплекса $\mathbf{a}$, инцидентного вершине $\{x\}$, и всякого симплекса B комплекса $\mathbf{b}$, включенного в симплекс A, верно, что симплекс B инцидентен вершине $\{x\}$.

°Ясно, что среди таких подразделений найдется такое особое подразделение $\mathbf{b}$ комплекса $\mathbf{a}$, что если в этом комплексе $\mathbf{b}$ рассмотреть все его симплексы B, инцидентные вершине $\{x\}$ и не совпадающие с нею, и так пронумеровать $\mathfrak{v}_0, \ldots, \mathfrak{v}_\mu$ все вершинные точки этих симплексов, не совпадающие с точкою x, чтобы ориентированный угол $\measuredangle(x\mathfrak{v}_{\iota-1}, x\mathfrak{v}_\iota) > 0$, то найдется $\kappa \in \mathbb{N}^+$ такое, что

$$\beta = \left\lfloor \frac{\sum\limits_{\iota=1,\ldots,\kappa} \measuredangle(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota))}{2\pi} \right\rfloor;$$

$$\nu - \beta = \left\lfloor \frac{\sum\limits_{\iota=\kappa+1,\ldots,\mu} \measuredangle(\mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1}), \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota))}{2\pi} \right\rfloor.$$

См. рис. $\boxed{3.3}$.



Диаг. 3. к расщеплению

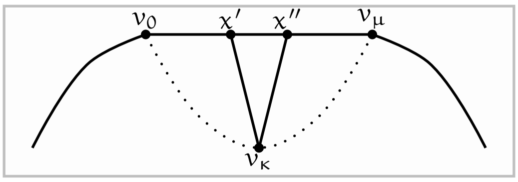
°Построим симплициальный комплекс $\mathbf{k}$. Для этого обозначим $\mathbf{c} := \mathbf{b} \setminus \mathrm{St}_{\mathbf{b}}\{x\}$ — также полный симплициальный комплекс. Затем возьмем две разные точки x', x'', достаточно близкие к точке x, такие, что отрезок $[x', x'']$ не параллелен ребру $(x, \mathfrak{v}_\kappa)$, и множество

$$\begin{aligned}\mathbf{d} \;:=\; & \{\{x'\},\{x''\}\} \cup \{\{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = 0,\dots,\mu\}\cup \\ & \cup\{\{x'\} * \{x''\}\} \cup \{\{\mathfrak{v}_{\iota-1}\} * \{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = 1,\dots,\mu\}\cup \\ & \cup\{\{x'\} * \{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = 0,\dots,\kappa\} \cup \{\{x''\} * \{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = \kappa,\dots,\mu\}\cup \\ & \cup\{\{x'\} * \{x''\} * \{\mathfrak{v}_\kappa\}\}\cup \\ & \cup\{\{x'\} * \{\mathfrak{v}_{\iota-1}\} * \{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = 1,\dots,\kappa\}\cup \\ & \cup\{\{x''\} * \{\mathfrak{v}_{\iota-1}\} * \{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = \kappa+1,\dots,\mu\}\end{aligned}$$

(см. рис. 3.4) было бы полным симплициальным комплексом и в пересечении с комплексом $\mathbf{c}$ давало множество $\{\{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = 0,\dots,\mu\} \cup \{\{\mathfrak{v}_{\iota-1}\} * \{\mathfrak{v}_\iota\} : \iota = 1,\dots,\mu\}$. Далее определим $\mathbf{k} := \mathbf{c} \cup \mathbf{d}$, определим также отображение $\mathfrak{w}'$ на множестве $^\cup\mathbf{c}$ как $\mathfrak{w}' := \mathrm{id}_{(^\cup\mathbf{c})}$, еще определим отображение $\mathfrak{w}''$ на множестве $^\cup\mathrm{vert}^\circ(\mathbf{d})$ по формуле:

$$\mathfrak{w}''(q) = \begin{cases} \mathfrak{v}_\iota, & \text{если } q = \mathfrak{v}_\iota; \\ x, & \text{если } q \in \{x', x''\}, \end{cases}$$

определим отображение $\mathfrak{w}'''$ как посимплексно аффинное продолжение отображения $\mathfrak{w}''$ на комплексе $\mathbf{d}$, и определим отображение $\mathfrak{w} := \mathfrak{w}' \cup \mathfrak{w}'''$. Ясно (см. Утверждение 31), что построенное отображение $\mathfrak{w}$ — контракция.



Диаг. 4. к расщеплению

°Построим деформацию $\mathfrak{m}$. Возьмем некоторую точку y на ребре $(x, \mathfrak{v}_0)$ так, чтобы $\mathfrak{a}(y)$ была на расстоянии меньше ϵ от точки $\mathfrak{a}(x)$. Определим отображение $\mathfrak{m}'$ на множестве $[0,1] \times {}^\cup\mathbf{c}$ как

$$\mathfrak{m}'(\tau, s) := s, \text{ при } \tau \in [0,1] \text{ и } s \in {}^\cup\mathbf{c}.$$

Определим отображение $\mathfrak{m}'''$ на множестве $[0,1] \times {}^\cup\mathrm{vert}^\circ(\mathbf{d})$ как

$$\mathfrak{m}'''(\tau, s) := \begin{cases} \mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota), & \text{если } s = \mathfrak{v}_\iota; \\ \mathfrak{a}(x), & \text{если } s = x''; \\ (1-\tau)\mathfrak{a}(x) + \tau\mathfrak{a}(y), & \text{если } s = x', \end{cases}$$

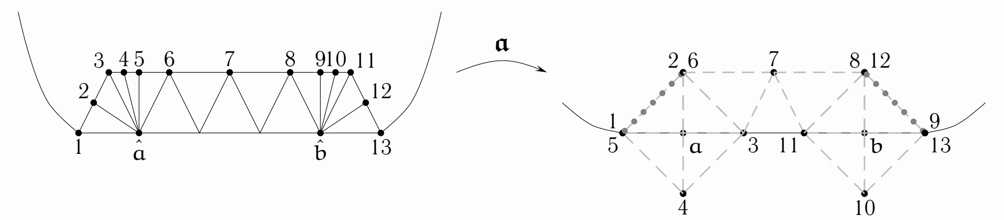
и при каждом $\tau \in [0,1]$ посимплексно аффинно на комплексе $\mathfrak{d}$ продолжим его до отображения $\mathfrak{m}''$. Отображение $\mathfrak{m}$ определим как $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}' \cup \mathfrak{m}''$.
°Заметим, что

- $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$ симплициально посимплексно относительно комплекса $\mathfrak{k}$;
- $\mathfrak{m}(0,\cdot) = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{w}$, для PA–контракции $\mathfrak{w}$, причем отображение $\mathfrak{w}$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{k}$ и отображение $\mathfrak{a}$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{c}^{\circ\circ}(\mathfrak{k})$;
- $\mathfrak{g} := \mathrm{Gr}(\mathrm{mrg}(\mathfrak{m}(\tau,\cdot)))$ не зависит от $\tau \in [0,1]$;
- для всякого $\tau \in (0,1]$ отображение $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$ есть круговое смятие;
- $\mathfrak{m}(\cdot,y)$ — постоянно при всяком y из ${}^{\cup}\mathfrak{k}$ вне ${}^{\cup}\mathrm{St}_{\mathfrak{k}}\{\{x'\},\{x''\}\}$;
- $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$ обладает двумя и только двумя ветвлениями x' и x'', $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$–образы которых лежат на той же дуге графа $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$, являются на ней соседними и в пределе при $\tau \searrow 0$ стремятся к точке $\mathfrak{a}(x)$, причем степени их суть β и $\nu - \beta$;
- $\mathrm{dist}(\mathfrak{m}(0,\cdot),\mathfrak{m}(\tau,\cdot)) < \epsilon$ при всяком $\tau \in [0,1]$.

°Итак, вышеописанная конструкция определяет произвольно малое деформационное преобразование: замену при сохранении граничного графа одного ветвления на два других (с заданным распределением их степеней β и $\nu - \beta$) на той же дуге граничного графа с сохранением суммарной степени их. Назовем такое преобразование *расщеплением*.

Слияние ветвлений

°Рассмотрим некоторый многоугольник–след $\textsc{a}$ в общем положении, и некоторую дугу A графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{Mrg}\,\textsc{a})$, а также некоторые две точки a и b на дуге A положительной степени и такие, что на дуге A нет точек положительной степени между точек a и b.
°При этом будем считать, что вся дуга A есть интервал прямой (если это не так, то можно отобразить некоторым инъективным круговым PA–отображением многоугольник–след $\textsc{a}$ так, чтобы у отображенного многоугольника–следа соответствующая дуге A дуга была интервалом прямой).
°Далее опишем близкосвязанную деформацию, “сливающую два ветвления в одно”. Построения проведем с представителями многогранников–следов.
°Возьмем некоторый канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}\rangle$ многоугольника–следа $\textsc{a}$ такой, что $A =: (\mathrm{mrg}\,\mathfrak{a})^{\circ}(\hat{A})$ (множество $\hat{A}$ однозначно определяется) и $\hat{A}$ — интервал прямой. При этом существуют однозначно определенные точки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ такие, что $\hat{a} \in \hat{A}$, $\hat{b} \in \hat{A}$, $\mathfrak{a}(\hat{a}) = a$, $\mathfrak{a}(\hat{b}) = b$. См. рис. 3.5.



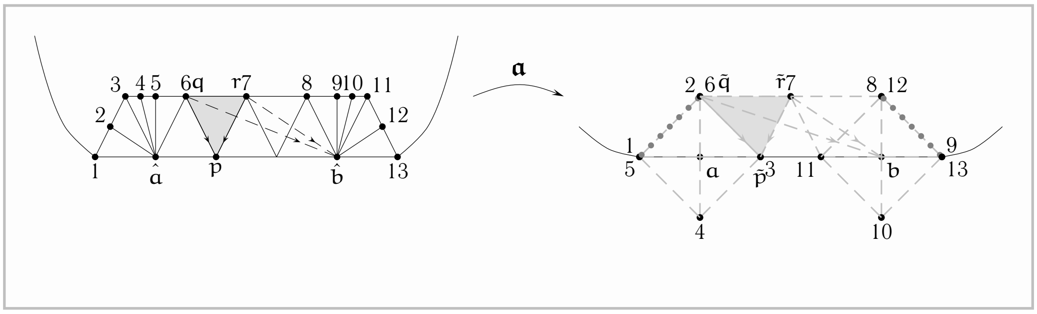
Диаг. 5. слияние: 1

°Еще возьмем некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$ такой, что

- отображение $\mathfrak{a}$ симплициально относительно комплекса $\mathfrak{k}$;

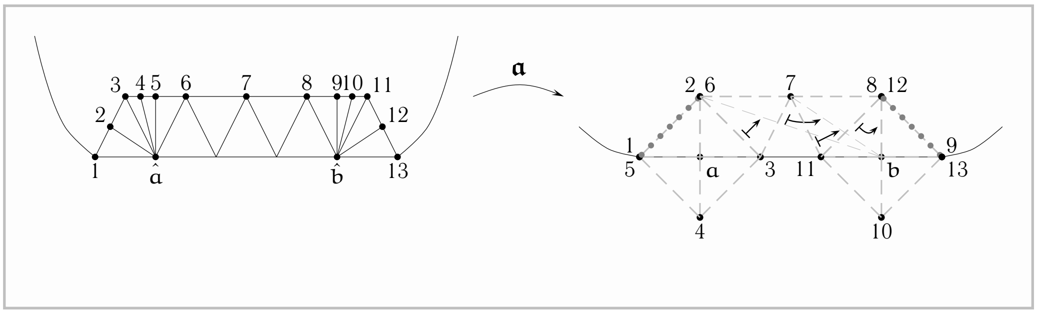
- всякий двумерный симплекс вида $\{p\} * \{q\} * \{r\}$ из $\mathbf{k}$ таков, что если $p \in (\hat{a}, \hat{b})$ и
$$(p, q) \cap (\hat{a}, \hat{b}) = \varnothing = (p, r) \cap (\hat{a}, \hat{b}),$$
то точки p и $\hat{b}$ лежат по одну сторону от прямой через точки q и r;
- и столь мелкий, что точки $\mathbf{a}(p)$ и $\mathbf{a}(\hat{b}) = b$ лежат по одну сторону относительно прямой через точки $\mathbf{a}(q)$ и $\mathbf{a}(r)$.

См. рис. 3.6.



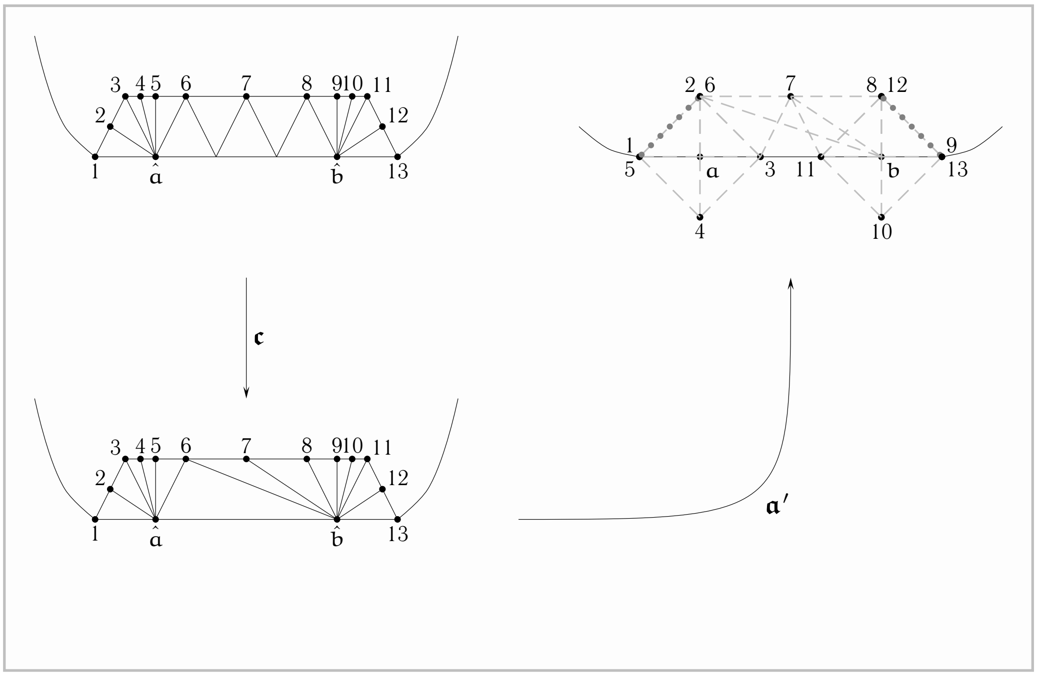
Диаг. 6. слияние: 2

67 °Произведем близкосвязанную деформацию $\mathbf{m}$ относительно $[0,1]$ и комплекса $\mathbf{k}$ такую, что $\mathbf{m}(0,\cdot) = \mathbf{a}$, и $\mathbf{m}(\cdot, v)$ постоянна при всякой вершинной точке v комплекса $\mathbf{k}$, не лежащей на $(\hat{a}, \hat{b})$, и $\mathbf{m}(\tau, v) = (1-\tau)\cdot \mathbf{a}(v) + \tau \cdot \mathbf{a}(\hat{b}) = (1-\tau)\cdot \mathbf{a}(v) + \tau \cdot b$ при всякой вершинной точке v комплекса $\mathbf{k}$, лежащей на $(\hat{a}, \hat{b})$. См. рис. 3.7.



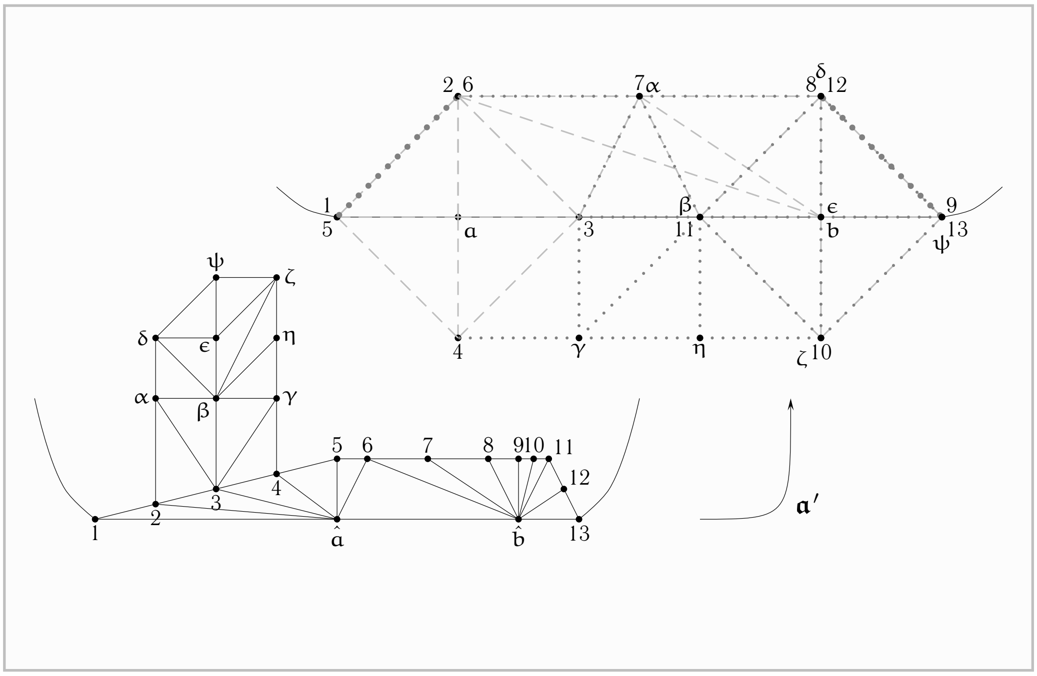
Диаг. 7. слияние: 3

68 °Аналогично перейдем к новому каноническому представителю, то есть образуем новый комплекс
$$\mathbf{k}' := (\mathbf{k} \setminus \{K : K \in \mathbf{k}, \overline{K} \cap (\hat{a}, \hat{b}) \neq \varnothing\}) \cup$$
$$\cup \{(\hat{a}, \hat{b})\} \cup \{(c, \hat{b}) : \exists d (d \in (\hat{a}, \hat{b}), (c, d) \in \mathbf{k})\} \cup$$
$$\cup \{\{c\} * \{c\} * \{\hat{b}\} : \exists e (e \in (\hat{a}, \hat{b}), \{c\} * \{c\} * \{e\} \in \mathbf{k}, c \neq d)\}$$
и новое отображение $\mathbf{a}'$ такое, что $\mathbf{m}(1,\cdot) = \mathbf{a}' \circ \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — посимплексно–аффинное продолжение отображения, действующего на множестве всех вершинных точек комплекса $\mathbf{k}$ по формуле
$$v \longmapsto \begin{cases} v, & \text{если } v \notin (\hat{a}, \hat{b}) \\ \hat{b}, & \text{если } v \in (\hat{a}, \hat{b}), \end{cases}$$
и $\mathbf{a}'$ — посимплексно–аффинное продолжение отображения, действующего на множестве всех вершинных точек комплекса $\mathbf{k}'$ по формуле $v \longmapsto \mathbf{a}(v)$. Заметим, что отображение $\mathbf{a}'$ — редукт отображения $\mathbf{m}(1,\cdot)$. См. рис. 3.8.



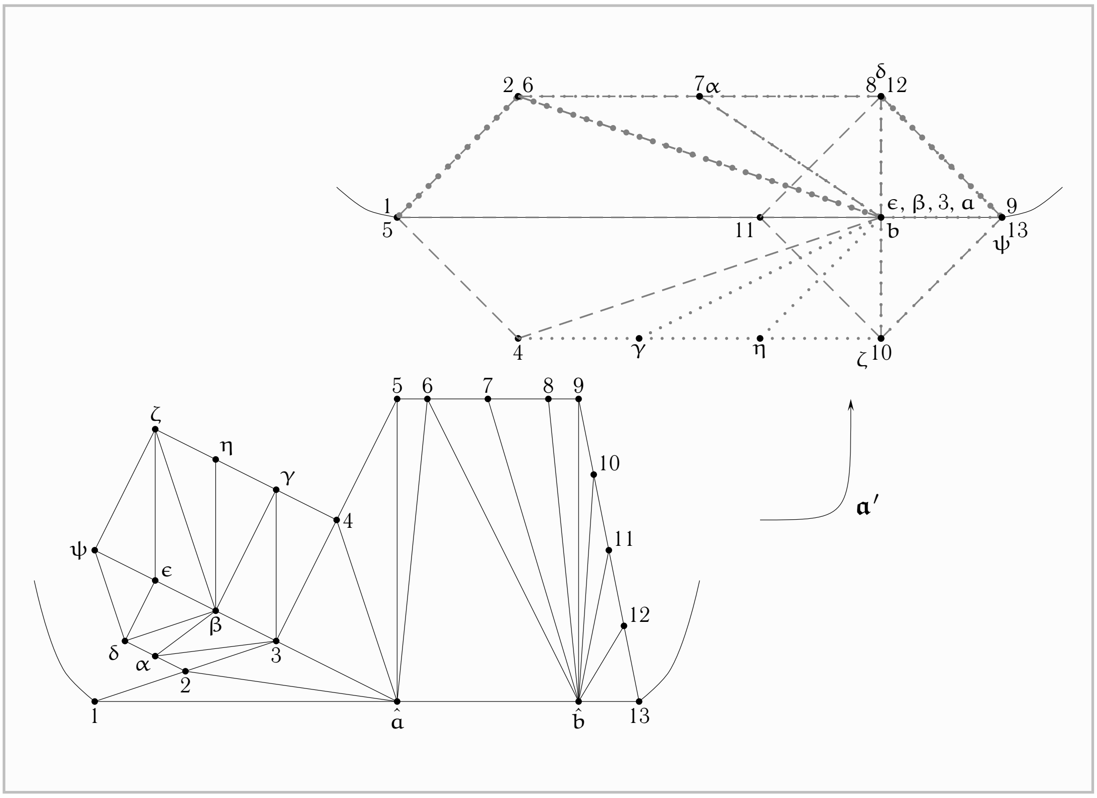
Диаг. 8. слияние: 4

°Образуем множество $\mathfrak{n}$ всех симплексов K комплекса $\mathfrak{k}'$ таких, что $\overline{\mathfrak{a}'^{\circ}(K)} \cap (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \neq \varnothing$. Скажем, что два симплекса из $\mathfrak{n}$ *смежны*, если их замыкания пересекаются. Натянем на это отношение смежности отношение эквивалентности $\sim$. Обозначим через $\mathfrak{n}'$ множество всех симплексов из $\mathfrak{n}$ таких, что у каждого из них найдется $\sim$–эквивалентный симплекс N из $\mathfrak{n}$ такой, что $N \rhd \{\hat{\mathfrak{a}}\}$, $\mathfrak{a}'^{\circ}(N) \cap (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \neq \varnothing$, $N \not\rhd \{\hat{\mathfrak{b}}\}$.
°Деформируем аналогично пт. 67 и перейдем к новому каноническому представителю как в пт. 68. См. рис. $\boxed{3.9}$.



Диаг. 9. слияние: 5

°Аналогично пт. 67 деформационно сместим точку $\mathfrak{a}$ в точку $\mathfrak{b}$ и перейдем к новому каноническому представителю как в пт. 68. При этом степень новообразованной точки есть сумма степеней исходных двух, так как обходящие (подлинкованные) ребра из комплекса $\mathfrak{k}$ не изменны. См. рис. $\boxed{3.10}$. В этом Описании видно, что все деформации можно проводить в произвольно малой окрестности образа участка дуги между двух соседних ветвлений.



Диаг. 10. слияние: 6

3.4 Петельные ломаные—следы

Петля

69 °Df · Пусть $\mathfrak{a}$ — окружностное отображение. Тогда отображение $\mathfrak{b}$, включенное в $\mathfrak{a}$, назовем *параметрическою петлею* в $\mathfrak{a}$, если или $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, при условии, что $\mathfrak{a}$ инъективно; или, если $\mathfrak{a}$ не инъективно, то $\operatorname{dom}\mathfrak{b}$ гомеоморфно невырожденному отрезку в $\mathbb{R}$, отображение $\mathfrak{b}$ инъективно на множестве $\operatorname{reg}\operatorname{dom}\mathfrak{b}$ и склеивает концы множества $\operatorname{dom}\mathfrak{b}$, а также $\operatorname{im}\mathfrak{a}\cap\operatorname{int}_Y(Y\setminus C_\infty(\mathfrak{b})) = \varnothing$. При этом множество $Y\setminus C_\infty(\mathfrak{b})$ назовем *областью, ограниченною параметрическою петлею* $\mathfrak{b}$. Точку же $\mathfrak{b}(x)$, где x — одна из двух нерегулярных точек множества $\operatorname{dom}\mathfrak{b}$, назовем *основанием* параметрической петли $\mathfrak{b}$.

°Df · Скажем, что множество L — *петля* в ломаной—следе A, если найдется канонический представитель $\langle\mathfrak{a},\varnothing\rangle$ ломаной—следа A и параметрическая петля $\mathfrak{b}$ в нем, для которых $\operatorname{im}\mathfrak{b} = L$. При этом назовем отображение $\mathfrak{b}$ *параметризацией* петли L. Основание же параметрической петли $\mathfrak{b}$ назовем основанием петли L.

°Df · Если для A выполнены условия 65, то для параметрической петли $\mathfrak{b}$ в некотором каноническом представителе $\langle\mathfrak{a},\varnothing\rangle$ ломаной—следа A и для петли L в ломаной—следе A, где $\operatorname{im}\mathfrak{b} = L$, определим знак $\operatorname{lsign}'_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}$ параметрической петли $\mathfrak{b}$ по следующей формуле (взяв ориентацию на $\operatorname{dom}\mathfrak{b}$ от ориентации положительного обхода $\operatorname{dom}\mathfrak{a}$):

$$\operatorname{lsign}'_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} := \begin{cases} -1, & \text{если параметризация } \mathfrak{b} \text{ (см. Определение 69) обходит область, ею ограниченную,} \\ & \text{против часовой стрелки (в положительном направлении);} \\ +1, & \text{если параметризация } \mathfrak{b} \text{ обходит область, ею ограниченную,} \\ & \text{по часовой стрелке (в отрицательном направлении);} \end{cases}$$

и определим знак $\operatorname{lsign}_{\mathrm{A}} \mathrm{L}$ петли L в ломаной–следе A как $\operatorname{lsign}_{\mathrm{A}} \mathrm{L} := \operatorname{lsign}'_{\mathfrak{a}} \mathfrak{b}$.

Петельные следы

°Df · Для двух ломаных–следов A и B в общем положении, с выполненными условиями 65 и петли L в A скажем, что

A *происходит из* B *порождением петли* L и запишем $\mathrm{A} = \mathrm{B} \oplus \mathrm{L}$,

или

B *происходит из* A *вырождением петли* L и запишем $\mathrm{B} = \mathrm{A} \ominus \mathrm{L}$,

если найдутся такие канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \varnothing \rangle$ ломаной–следа A, канонический представитель $\langle \mathfrak{b}, \varnothing \rangle$ ломаной–следа B, параметрическая петля $\mathfrak{c}$ в A и кусочно аффинное отображение $\mathfrak{d}$, из множества $\operatorname{dom} \mathfrak{a} \setminus \operatorname{reg} \operatorname{dom} \mathfrak{c}$ на $\operatorname{dom} \mathfrak{b}$, инъективное на $\operatorname{dom} \mathfrak{a} \setminus \operatorname{dom} \mathfrak{c}$, что $\mathfrak{b} \circ \mathfrak{d} = \mathfrak{a}|_{\operatorname{dom} \mathfrak{a} \setminus \operatorname{reg} \operatorname{dom} \mathfrak{c}}$.

°Df · Скажем, что ломаная–след A *простая*, если у нее есть инъективный канонический представитель, сохраняющий положительный обход области им ограниченной.
Скажем, что ломаная–след A в общем положении с выполненными условиями 65 *петельная*, если найдется набор $\mathfrak{m}_0, \ldots, \mathfrak{m}_\nu$ ломаных–следов в общем положении с условиями 65 и набор петель $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\nu$ в соответственно $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\nu$ такие, что $\mathfrak{m}_\nu = \mathrm{A}$, $\mathfrak{m}_0$ — простая ломаная–след, $\mathfrak{m}_\iota = \mathfrak{m}_{\iota-1} \oplus \mathfrak{l}_\iota$, при $\iota = 1, \ldots, \nu$.

°Df · Скажем, что многоугольник–след *петельный*, если его граница петельная.

Построение

°Возьмем некоторую петельную ломаную–след A. Рассмотрим некоторую последовательность также петельных ломаных–следов $\mathfrak{m}_0, \ldots, \mathfrak{m}_\nu$, и последовательность петель $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\nu$ с основаниями $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_\nu$ в них так, что $\mathfrak{m}_\iota = \mathfrak{m}_{\iota-1} \oplus \mathfrak{l}_\iota$, для $\iota = 1, \ldots, \nu$.
°Построим последовательность ломаных–следов $\mathfrak{c}_0, \ldots, \mathfrak{c}_\mu = \mathrm{A}$. Положим $\mathfrak{c}_0 := \mathfrak{m}_0$, и если построена $\mathfrak{c}_\iota$, то определим $\mathfrak{c}_{\iota+1}$ как ломаную–след $\mathfrak{c}_\iota$ с порожденными всеми петлями из набора $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\nu$, основания которых лежат на объединении всех дуг графа $\operatorname{Gr}(\mathfrak{c}_\iota)$.
°Определим для каждого $\iota = 0, \ldots, \mu$ множество Arc_ι как совокупность всех одноэлементных множеств $\{A\}$, где A — дуга графа $\operatorname{Gr}(\mathfrak{c}_\iota)$.
°Определим последовательно деревья:

- $\mathfrak{d}_0 := \operatorname{Arc}_0$, содержит единственный элемент;
- если дерево $\mathfrak{d}_\iota$ построено, то определим дерево $\mathfrak{d}_{\iota+1}$ по формуле

$$\mathfrak{d}_{\iota+1} := \mathfrak{d}_\iota \sqcup (\operatorname{Arc}_{\iota+1} \setminus \operatorname{Arc}_\iota) \sqcup$$
$$\sqcup \{\{A, B\} : \{A\} \in \operatorname{Arc}_{\iota+1} \setminus \operatorname{Arc}_\iota, \{B\} \in \operatorname{Arc}_{\iota+1}, (B \subset A \text{ или}$$
$$\text{дуга петли с основанием на } A)\}$$

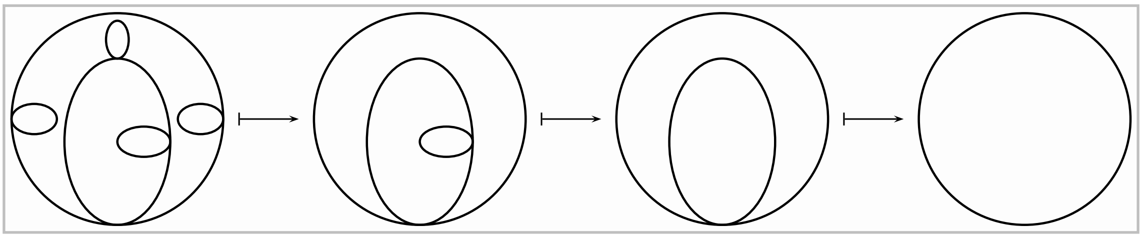
Определим $\operatorname{Arb}(\mathrm{A}) := \bigcup\limits_{\iota : \iota \in \mathbb{N}} \mathfrak{d}_\iota$.
°Произведем раскраску вершин графа $\operatorname{Arb}(\mathrm{A})$:

$$\operatorname{Fast}_{\mathrm{A}}(\mathbf{k}) := \min\{\iota : \mathbf{k} \text{ — вершина в } \mathfrak{d}_\iota\};$$

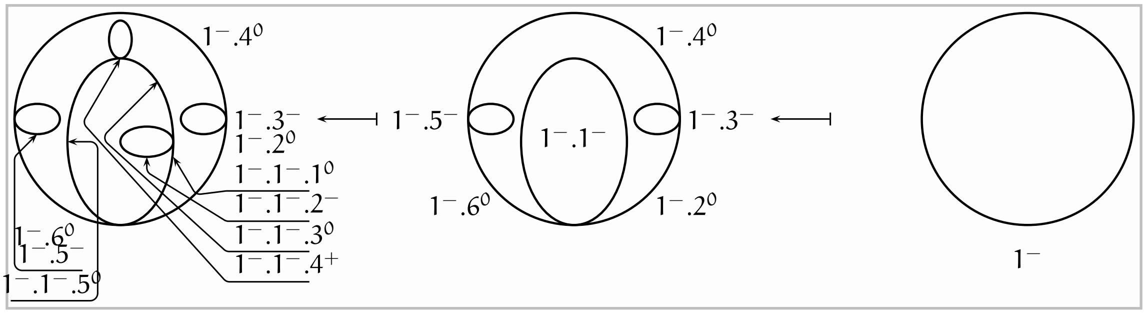
$$\operatorname{Laqs}_{\mathrm{A}}(\mathbf{k}) := \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{k} = \{L\}, L \text{ — дуга петли знака } -1; \\ 0, & \text{если } \mathbf{k} = \{L\}, L \text{ — дуга не петли;} \\ +1, & \text{если } \mathbf{k} = \{L\}, L \text{ — дуга петли знака } +1; \end{cases}$$

$$\mathrm{Secu}_{A}(\mathbf{k}) := \begin{cases} \{M\}, & \text{если } M \text{ — дуга } (M \neq S) \text{ или лежащая или имеющая свой корень на } S\text{, на которой она непосредственно последует дуге } L\text{, где } \mathbf{k} = \{L\}; \\ \varnothing, & \text{если } \mathbf{k} = \{L\}\text{, и дуге } L \text{ на } S \text{ нет последующей,} \end{cases}$$

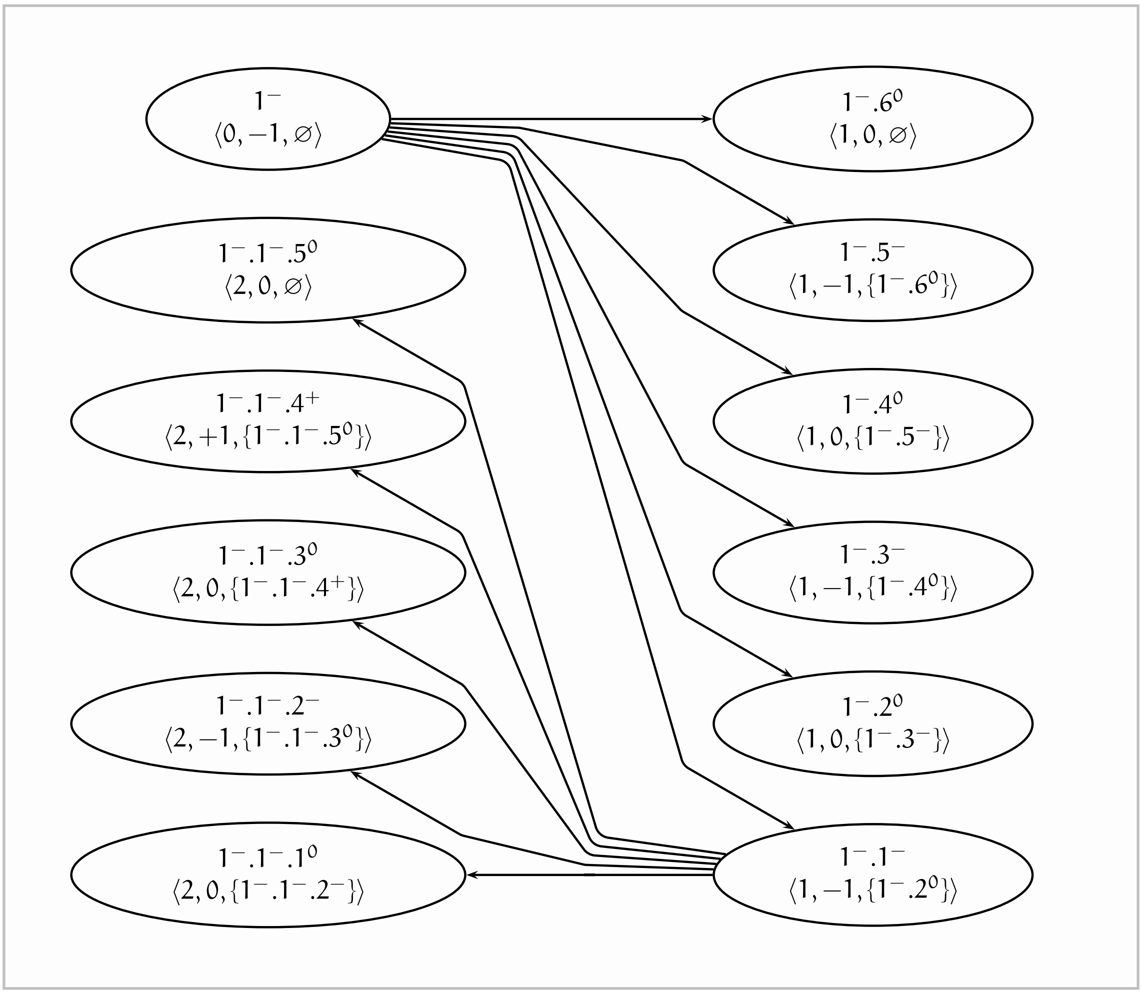
где S — дуга, на которой лежит или имеет свой корень дуга L.
См. пример рисс. 3.11, 3.12, 3.13.



Диаг. 11. удаление петель



Диаг. 12. наращение петель



Диаг. 13. дерево построения

°Рассмотрим две петельные ломаные-следы L' и L'' такие, что

- если в них выродить все петли максимального в соответственно каждой из них уровня (то есть $\mathrm{Fast}_{\mathrm{L}'}(\mathfrak{l}) = \max \operatorname{im} \mathrm{Fast}_{\mathrm{L}'}$ и также для L''), то от обеих ломаных—следов образуется одна и та же ломаная—след L;
- у этих двух ломаных—следов L' и L'' раскрашенные деревья построения изомофны некоторым изоморфизмом, неподвижным на их общем поддереве построения ломаной—следа L.

Тогда те две ломаные—следы различаются только в конкретном расположении сопоставленных друг другу дуг максимального уровня, с одинаковыми знаками и последовательным расположением. Таким образом ясно, что найдется инъективное круговое отображение $\mathfrak{h}$ такое, что $\operatorname{dom} \mathfrak{h} \supset \mathrm{i}\tilde{\mathrm{m}}\,\mathrm{L}'$ и $\mathfrak{h}^\circ$ неподвижно на дугах ломаной—следа L и $\mathfrak{h}^\circ(\mathrm{i}\tilde{\mathrm{m}}\,\mathrm{L}') = \mathrm{i}\tilde{\mathrm{m}}\,\mathrm{L}''$.

3.5 Весовые функции

Построение и простота

°Df · Рассмотрим ломаную—след A. Тогда функцию $\mathfrak{a}$, действующую на множестве $\mathrm{Arc}(\mathrm{A})$ всех дуг графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{A})$ и принимающую произвольные целочисленные значения, назовем весовою.

°Df · Рассмотрим две ломаные—следы A и B, где A происходит из B порождением петли L знака $\sigma \in \{-1, +1\}$ с основанием x на дуге A графа $\mathrm{Gr}(\mathrm{B})$, причем если B проста, то дуга A подразделена точкою x на одну дугу A' в графе $\mathrm{Gr}(\mathsf{A})$,

если же B не проста, то дуга A подразделена точкою x на две дуги A' и A'' в графе $\mathrm{Gr}(\mathsf{A})$.

Рассмотрим еще весовые функции $\mathfrak{a}$ на A и $\mathfrak{b}$ на B. Тогда скажем, что эти весовые функции *согласованы*, если в случае простоты ломаной—следа B

$$\mathfrak{b}(A) = \mathfrak{a}(A') + (\mathfrak{a}(L) + \sigma);$$

или в случае непростоты ломаной—следа B

$$\mathfrak{b}(K) = \begin{cases} \mathfrak{a}(K), & \text{если } K \text{ — дуга в } \mathrm{Gr}(\mathsf{A}) \text{ и в } \mathrm{Gr}(\mathsf{B}); \\ \mathfrak{a}(A') + (\mathfrak{a}(L) + \sigma) + \mathfrak{a}(A''), & \text{если } K = A. \end{cases}$$

70 °Df · Рассмотрим петельную ломаную—след A и некоторую весовую функцию $\mathfrak{a}$ на ней. Тогда скажем, что эта весовая функция $\mathfrak{a}$ *простая*, если найдется последовательность $\mathfrak{b}_0, \ldots \mathfrak{b}_\nu$ ломаных—следов и весовых функций $\mathfrak{c}_0, \ldots, \mathfrak{c}_\nu$ на тех ломаных—следах со свойствами

1. $\mathfrak{b}_\nu = \mathsf{A}$;
2. $\mathfrak{b}_0$ — простая;
3. $\mathfrak{b}_\kappa$ происходит из $\mathfrak{b}_{\kappa-1}$ порождением петли, $\kappa = 1, \ldots, \nu$;
4. $\mathfrak{c}_\kappa$ и $\mathfrak{c}_{\kappa-1}$ согласованы, $\kappa = 1, \ldots, \nu$;
5. $\mathfrak{c}_0 \equiv 0$;
6. $\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{a}$;
7. $\mathfrak{c}_\kappa(A) \geqslant 0$ при $A \in \operatorname{dom} \mathfrak{c}_\kappa$ и $\kappa = 0, \ldots, \nu$;
8. $\mathfrak{c}_\kappa(A) > 0$, если A — петля знака -1 в $\mathfrak{b}_\kappa$ при $\kappa = 1, \ldots, \nu$.

Независимость

°Th · Пусть A — петельная ломаная—след и B — петельная ломаная—след, происходящая из ломаной—следа A порождением петли L знака $\sigma \in \{-1, +1\}$. Тогда если $\mathfrak{b}$ — простая весовая функция на B и $\mathfrak{a}$ — согласованная с весовою функцией $\mathfrak{b}$, то $\mathfrak{a}$ проста.

Доказательство

°Возьмем существующую по Определению 70 последовательность порождения петель

$$\langle \mathfrak{c}_0, \mathfrak{d}_0 \rangle \xmapsto{\mathfrak{l}_1} \langle \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \rangle \xmapsto{\mathfrak{l}_2} \ldots \xmapsto{\mathfrak{l}_\nu} \langle \mathfrak{c}_\nu, \mathfrak{d}_\nu \rangle,$$

где $\mathfrak{c}_0$ — простая ломаная—след, $\mathfrak{d}_0 \equiv 0$ — весовая функция на $\mathfrak{c}_0$, верно, что $\mathfrak{c}_\nu = \mathsf{B}$ и $\mathfrak{d}_\nu = \mathfrak{b}$, еще ломаная—след $\mathfrak{c}_\iota$ происходит из ломаной—следа $\mathfrak{c}_{\iota-1}$ порождением петли $\mathfrak{l}_\iota$, причем $\mathfrak{d}_\iota$ — весовая функция на $\mathfrak{c}_\iota$ согласованная с весовою функцией $\mathfrak{d}_{\iota-1}$ на $\mathfrak{c}_{\iota-1}$ при $\iota = 1, \ldots, \nu$, также выполнены свойства (7) и (8) Определения 70.
°Заметим, что петля L совпадает с одною и только одною петлею из $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_\nu$, обозначим номер петли этой через μ. То есть на μ-том шаге происходит порождение петли L:

$$\langle \mathfrak{c}_{\mu-1}, \mathfrak{d}_{\mu-1} \rangle \xmapsto{L} \langle \mathfrak{c}_\mu, \mathfrak{d}_\mu \rangle.$$

Петля L имеет корень x.

Еще заметим, что петля L является петлею в ломаной–следе $\mathfrak{c}_\iota$ при $\iota = \mu, \dots, \nu$.
°Определим новую последовательность ломаных–следов и весовых функций на них.

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{c}'_\iota & := & \mathfrak{c}_\iota, & \iota = 0, \dots, \mu-1; \\ \mathfrak{c}'_\iota & := & \text{ломаная–след, происходящая из} & \iota = \mu, \dots, \nu. \\ & & \text{ломаной–следа } \mathfrak{c}_\iota \text{ вырождением} & \\ & & \text{петли } L, & \end{array}$$

°Весовую функцию $\mathfrak{d}'_\iota$ определим по следующим двум формулам:

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{d}'_\iota & := & \mathfrak{d}_\iota, & \iota = 0, \dots, \mu-1; \\ \mathfrak{d}'_\iota & := & \text{весовая функция, согла-} & \iota = \mu, \dots, \nu. \\ & & \text{сованная с весовою функ-} & \\ & & \text{циею } \mathfrak{d}_\iota & \end{array}$$

°Итак, мы обрели новую последовательность построения:

$$\langle \mathfrak{c}'_0, \mathfrak{d}'_0 \rangle \xmapsto{\mathfrak{l}_1} \dots \xmapsto{\mathfrak{l}_{\mu-1}} \langle \mathfrak{c}'_{\mu-1}, \mathfrak{d}'_{\mu-1} \rangle = \langle \mathfrak{c}'_\mu, \mathfrak{d}'_\mu \rangle \xmapsto{\mathfrak{l}_{\mu+1}} \dots \xmapsto{\mathfrak{l}_\nu} \langle \mathfrak{c}_\nu, \mathfrak{d}_\nu \rangle,$$

°Установим, как могут соотноситься дуги в старых и новых петельных ломаных из двух последовательностей. Рассмотрим переход $(\iota - 1) \longmapsto \iota$, где $\iota > \mu$. В ломаной–следе $\mathfrak{c}'_{\iota-1}$ есть дуга A, на которой лежит корень $\mathfrak{y}$ петли $\mathfrak{l}_\iota$, еще есть дуга B, на которой лежит корень $\mathfrak{x}$ петли L. Возможны три случая:

I. несовпадение дуг $A \neq B$;

II. совпадение дуг $A = B$, причем точка $\mathfrak{x}$ предшествует на дуге $C := A = B$ точке $\mathfrak{y}$;

III. совпадение дуг $A = B$, причем точка $\mathfrak{y}$ предшествует на дуге C точке $\mathfrak{x}$.

°Далее, в ломаной–следе $\mathfrak{c}_{\iota-1}$ в случае I всё независимо, следовательно, все свойства сохранятся. Рассмотрим далее только случай II (в случае же III всё аналогично), здесь в ломаной–следе $\mathfrak{c}_{\iota-1}$ дуге C соответствуют последовательные дуги $C', L, \tilde{C}'''$, где дуги C' и $\tilde{C}'''$ образованы подразделением дуги C точкою $\mathfrak{x}$. Еще в ломаной–следе $\mathfrak{c}'_\iota$ дуге C соответствуют последовательные дуги $\tilde{C}', \mathfrak{l}_\iota, C'''$, где дуги $\tilde{C}'$ и C''' образованы подразделением дуги C точкою $\mathfrak{y}$. Наконец, в ломаной–следе $\mathfrak{c}_\iota$ дуге C соответствуют последовательные дуги $C', L, C'', \mathfrak{l}_\iota, C'''$, где дуга C'' высечена из дуги C точками $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$. То есть дуге $\tilde{C}'$ соответствуют последовательные дуги C', L, C'', где дуги C' и C'' образованы подразделением дуги $\tilde{C}'$ точкою $\mathfrak{x}$, и дуге $\tilde{C}'''$ соответствуют последовательные дуги $C'', \mathfrak{l}_\iota, C'''$, где дуги C'' и C''' образованы подразделением дуги $\tilde{C}'''$ точкою $\mathfrak{y}$.
°Установим согласованность весовых функций $\mathfrak{d}'_{\iota-1}$ и $\mathfrak{d}'_\iota$. Заметим, что

$$\mathfrak{d}'_{\iota-1}(C) = \mathfrak{d}_{\iota-1}(C') + (\mathfrak{d}_{\iota-1}(L) + \sigma) + \mathfrak{d}_{\iota-1}(\tilde{C}''').$$

Еще заметим, что

$$\begin{aligned} &\mathfrak{d}'_\iota(\tilde{C}') = \mathfrak{d}_\iota(C') + (\mathfrak{d}_\iota(L) + \sigma) + \mathfrak{d}_\iota(C''), \\ &\mathfrak{d}'_\iota(C''') = \mathfrak{d}_\iota(C'''), \\ &\mathfrak{d}'_\iota(\mathfrak{l}_\iota) = \mathfrak{d}_\iota(\mathfrak{l}_\iota). \end{aligned}$$

°Следовательно, обозначив через τ знак петли $\mathfrak{l}_\iota$,

$$\mathfrak{d}'_{\iota-1}(C) = \mathfrak{d}_{\iota-1}(C') + (\mathfrak{d}_{\iota-1}(L) + \sigma) + \mathfrak{d}_{\iota-1}(\tilde{C}''') =$$

$$= \mathfrak{d}_\iota(C') + (\mathfrak{d}_\iota(L) + \sigma) + \Big(\mathfrak{d}_\iota(C'') + (\mathfrak{d}_\iota(\mathfrak{l}_\iota) + \tau) + \mathfrak{d}_\iota(C''')\Big) =$$

$$= \Big(\mathfrak{d}_\iota(C') + (\mathfrak{d}_\iota(L) + \sigma) + \mathfrak{d}_\iota(C'')\Big) + (\mathfrak{d}_\iota(\mathfrak{l}_\iota) + \tau) + \mathfrak{d}_\iota(C''') =$$

$$= \mathfrak{d}'_\iota(\tilde{C}') + (\mathfrak{d}_\iota(\mathfrak{l}_\iota) + \tau) + \mathfrak{d}_\iota(C''') =$$
$$= \mathfrak{d}'_\iota(\tilde{C}') + (\mathfrak{d}'_\iota(\mathfrak{l}_\iota) + \tau) + \mathfrak{d}'_\iota(C''').$$

°Заметим, что неотрицательность следует из того, что в сумме $\mathfrak{d}'_\iota(\tilde{C}') = \mathfrak{d}_\iota(C') + (\mathfrak{d}_\iota(L) + \sigma) + \mathfrak{d}_\iota(C'')$ все три слагаемые неотрицательны по свойствам старой последовательности весовых функций.
°Рассмотрим в новой последовательности петлю $\mathfrak{l}_\iota$ знака $\upsilon = -1$. Тогда петля эта построена и в старой последовательности, следовательно, на ней старая весовая функция положительна, новая же весовая функция совпадает со старою на каждой петле (из построения). **Q.E.D.**

Распространение веса и установление простоты ломаной–следа

°Рассмотрим петельную ломаную–след A и ее размеченное древо построения $\langle \mathrm{Arb}(\mathrm{A}), \mathrm{Fast}_\mathrm{A}, \mathrm{Laqs}_\mathrm{A}, \mathrm{Secu}_\mathrm{A}\rangle$. Еще рассмотрим некоторую весовую функцию $\mathfrak{p}$ на этой ломаной–следе. Определим $\nu := \max \operatorname{im} \mathrm{Fast}_\mathrm{A}$.
°Определим раскраску $\mathfrak{t}$ листов дерева $\mathrm{Arb}(\mathrm{A})$ по соответствию

$$\mathfrak{t}(\{V\}) := \mathfrak{p}(V), \quad V \text{ — дуга в графе } \mathrm{Gr}(\mathrm{A}).$$

°Распространим эту раскраску на все вершины дерева $\mathrm{Arb}(\mathrm{A})$. Определим $\mathfrak{t}'_\nu := \mathfrak{t}$. Далее индукциею по $\iota = \nu, \ldots, 1$ на каждой вершине $\boldsymbol{v}$ из $\operatorname{dom} \mathfrak{t} \cup \{\boldsymbol{v} : \mathrm{Fast}(\boldsymbol{v}) \geqslant \iota - 1\}$ определим

$$\mathfrak{t}'_{\iota-1}(\boldsymbol{v}) := \begin{cases} \mathfrak{t}'_\iota(\boldsymbol{v}), & \text{если } \boldsymbol{v} \in \operatorname{dom} \mathfrak{t}'_\iota; \\ \sum\limits_{\boldsymbol{v}' : \boldsymbol{v}' \in y} \Big(\mathfrak{t}'_\iota(\boldsymbol{v}') + \mathrm{Laqs}_\mathrm{A}(\boldsymbol{v}')\Big), & \text{если } \mathrm{Fast}_\mathrm{A}(\boldsymbol{v}) = \iota - 1 \\ & \text{и } \boldsymbol{v} \notin \operatorname{dom} \mathfrak{t}, \end{cases}$$

где множество $y := \{\boldsymbol{v}' : \mathrm{Fast}(\boldsymbol{v}') = \iota, \boldsymbol{v} \cup \boldsymbol{v}' \in \mathrm{Arb}(\mathrm{A})\}$.
°Определим последовательность построения:

$$\mathfrak{c}_0 \xmapsto{\mathfrak{l}_1} \mathfrak{c}_1 \xmapsto{\mathfrak{l}_2} \ldots \xmapsto{\mathfrak{l}_\nu} \mathfrak{c}_\nu,$$

где $\mathfrak{c}_0$ — простая ломаная–след, $\mathfrak{c}_\nu = \mathrm{A}$, еще ломаная–след $\mathfrak{c}_\iota$ происходит из ломаной–следа $\mathfrak{c}_{\iota-1}$ порождением петли $\mathfrak{l}_\iota$, причем $\mathrm{Fast}_\mathrm{A}(\{\mathfrak{l}_{\iota-1}\}) \leqslant \mathrm{Fast}_\mathrm{A}(\{\mathfrak{l}_\iota\})$ при $\iota = 1, \ldots, \nu$.
°Заметим, что размеченные древа построения $\langle \mathrm{Arb}(\mathfrak{c}_\kappa), \mathrm{Fast}_{\mathfrak{c}_\kappa}, \mathrm{Laqs}_{\mathfrak{c}_\kappa}, \mathrm{Secu}_{\mathfrak{c}_\kappa}\rangle$ обладают следующими свойствами:

$$\mathrm{Arb}(\mathfrak{c}_{\kappa-1}) \subset \mathrm{Arb}(\mathfrak{c}_\kappa) \subset \mathrm{Arb}(\mathrm{A}), \quad \kappa = 1, \ldots, \nu;$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Fast}_{\mathfrak{c}_\kappa} &= \Big(\mathrm{Fast}_\mathrm{A}\Big)\Big|_{\mathfrak{g}_\kappa}, \\ \mathrm{Laqs}_{\mathfrak{c}_\kappa} &= \Big(\mathrm{Laqs}_\mathrm{A}\Big)\Big|_{\mathfrak{g}_\kappa}, \\ \mathrm{Secu}_{\mathfrak{c}_\kappa} &= \Big(\mathrm{Secu}_\mathrm{A}\Big)\Big|_{\mathfrak{g}_\kappa}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{g}_\kappa$ — множество всех вершин древа $\mathrm{Arb}(\mathfrak{c}_\kappa)$, $\kappa = 0, \ldots, \nu$.
°Заметим, что если на ломаных–следах $\mathfrak{c}_\iota$ обратною индукциею по $\iota = \nu, \ldots, 0$ определить весовые функции $\mathfrak{d}_\iota$ по правилу попарной согласованности весовых функций $\mathfrak{d}_\iota$ и $\mathfrak{d}_{\iota-1}$ при $\iota = \nu, \ldots, 1$, то $\mathfrak{t}'_0(\{V\}) = \mathfrak{d}_\iota(V)$ при всякой дуге V графа $\mathrm{Gr}(\mathfrak{c}_\iota)$, где $\iota = \nu, \ldots, 0$.
°В этом построении очевидно, что весовая функция $\mathfrak{p}$ проста, если и только если соответствующая ей раскраска $\mathfrak{t}'_0$ обладает свойствами

- $\mathfrak{t}'_0(\mathfrak{r}) = 0$, где $\mathfrak{r}$ — корень древа построения;
- $\min\{\mathfrak{t}'_0(\boldsymbol{v}), \mathfrak{t}'_0(\boldsymbol{v}) + \mathrm{Laqs}_\mathrm{A}(\boldsymbol{v})\} \geqslant 0$, на всякой некорневой вершине $\boldsymbol{v}$ древа построения.

3.6 Стяжение и натяжение петель

3.6.1 Ветвление отрицательной петли

Пособие к отрицательной петле

71 °Th · Для всякого полного симплициального комплекса $\mathfrak{a}$ и всякого ребра A из того комплекса верно, что если тело S комплекса $\mathfrak{a}$ гомеоморфно замкнутому двумерному диску и лежит в двумерной плоскости, ребро A лежит на относительной границе множества S, всякая вершинная точка комплекса $\mathfrak{a}$ лежит на относительной границе множества S, то найдется двумерный симплекс B из комплекса $\mathfrak{a}$ и найдутся два ребра из этого симплекса, не равные ребру A и лежащие на относительной границе множества S.

Доказательство

°Рассмотрим некоторый полный симплициальный комплекс $\mathfrak{a}$ и некоторое его ребро A такие, что тело S комплекса $\mathfrak{a}$ гомеоморфно замкнутому двумерному диску, ребро A лежит на относительной границе множества S, всякая вершинная точка комплекса $\mathfrak{a}$ лежит на относительной границе множества S.

°Если в комплексе $\mathfrak{a}$ всего один двумерный симплекс, то он и два его ребра, не равные ребру A, суть искомые.

°Возьмем некоторое натуральное число ν такое, что $\nu \geqslant 1$, и допустим, что для всякого полного симплициального комплекса $\tilde{\mathfrak{a}}$, в котором не более чем ν двумерных симплексов, и всякого ребра $\tilde{A}$ из того комплекса верно, что если тело $\tilde{S}$ комплекса $\tilde{\mathfrak{a}}$ гомеоморфно замкнутому двумерному диску, ребро $\tilde{A}$ лежит на относительной границе множества $\tilde{S}$, всякая вершинная точка комплекса $\tilde{\mathfrak{a}}$ лежит на относительной границе множества $\tilde{S}$, то найдется двумерный симплекс $\tilde{B}$ из комплекса $\tilde{\mathfrak{a}}$ и найдутся два ребра из этого симплекса, не равные ребру $\tilde{A}$ и лежащие на относительной границе множества $\tilde{S}$.

°Если в рассматриваемом комплексе $\mathfrak{a}$ есть $(\nu + 1)$ двумерный симплекс, то выберем одно из двух неравных ребру A ребер того комплекса, лежащих на относительной границе множества S и имеющих только одну общую вершину с ребром A, и ребро это назовем C. Еще назовем D единственное не равное ребрам A и C ребро комплекса $\mathfrak{a}$, лежащее на относительной границе множества S и имеющее только одну общую вершину с ребром C.

°Заметим, что в комплексе $\mathfrak{a}$ или найдется или не найдется двумерный симплекс, инцидентный ребрам C и D. Если найдется, то всё доказано. Далее предполагается, что не найдется. В этом случае существует ребро A' из комплекса $\mathfrak{a}$, инцидентное общей вершине ребер C и D и лежащее в $\operatorname{rint} S$.

°Заметим, что множество $(\operatorname{rint} S) \setminus A'$ состоит из двух связных компонент, каждая их которых гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^2$.

°Обозначим Z ту из этих двух компонент, замыкание которой не содержит ребра A. Образуем новый комплекс

$$\mathfrak{a}' := \{P : \exists Q (Q \in \mathfrak{a}, Q \subset Z, P \lhd Q)\}.$$

°Еще заметим, что в комплексе $\mathfrak{a}'$ не более чем ν двумерных симплексов, и каждая вершинная точка этого комплекса лежит на $\operatorname{rmrg} S$. Таким образом, каждая вершинная точка комплекса $\mathfrak{a}'$ лежит на относительной границе его тела. По индуктивному предположению, найдется двумерный симплекс B комплекса $\mathfrak{a}'$ и два ребра этого симплекса, не равные ребру A' и лежащие на относительной границе тела комплекса $\mathfrak{a}'$. Итак, $B \in \mathfrak{a}$ и те два его ребра лежат по построению на относительной границе тела комплекса $\mathfrak{a}$. Q.E.D.

72 °Th · Пусть $\mathfrak{a}$ — полный симплициальный комплекс такой, что $^{\cup}\mathfrak{a}$ гомеоморфно двумерному диску и лежит в плоскости Y, в множестве $\operatorname{rint}(^{\cup}\mathfrak{a})$ есть некоторая вершинная точка комплекса $\mathfrak{a}$, в комплексе $\mathfrak{a}$ нет двумерного симплекса, у которого есть вершинная точка в $\operatorname{rint}(^{\cup}\mathfrak{a})$ и есть его ребро, включенное в $\operatorname{rmrg}(^{\cup}\mathfrak{a})$; а также A — некоторое ребро комплекса $\mathfrak{a}$, лежащее на $\operatorname{rmrg}(^{\cup}\mathfrak{a})$.

Тогда найдутся три разные вершинные точки q_1, q_2, q_3 комплекса $\mathfrak{a}$ такие, что

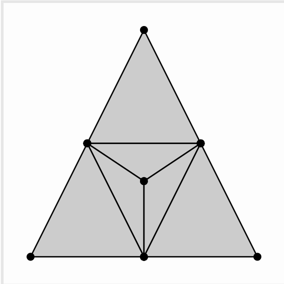
$$\{q_1\} * \{q_2\} * \{q_3\} \in \mathfrak{a}, \quad (q_1, q_2), (q_2, q_3) \subset \operatorname{rmrg}(^{\cup}\mathfrak{a}),$$

и ребра (q_1, q_2), (q_2, q_3) не равны ребру A.

Доказательство

°Обозначим $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) := \operatorname{card}\{Q : Q \in \mathfrak{a}, \dim Q = 2\}$.

°В начале заметим, что указанное в условии сочетание возможно только при $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \geqslant 6$. А при $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 6$ возможно единственное с точностью до изоморфизма сочетание, см. рис. $\boxed{3.14}$. И в нем заявленное верно.



Диаг. 14. случай $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 6$

°Допустим, что при $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \leqslant \nu$ заявленное верно.

°Предположим, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \nu + 1$. Тогда найдется некоторое ребро E комплекса $\mathfrak{a}$ такое, что обе его вершинные точки лежат в $\operatorname{rmrg} {}^{\cup}\mathfrak{a}$, а само ребро лежит на $\operatorname{rint} {}^{\cup}\mathfrak{a}$.

°Заметим, что множество $({}^{\cup}\mathfrak{a}) \setminus \overline{E}$ состоит из двух связных компонент W_1, W_2.

°Обозначим $\mathfrak{a}_1 := \{Q : Q \in \mathfrak{a}, Q \subset W_1\} \cup \{Q : Q \lhd E\}$, $\mathfrak{a}_2 := \{Q : Q \in \mathfrak{a}, Q \subset W_2\} \cup \{Q : Q \lhd E\}$.

°Заметим, что только одному из этих комплексов не принадлежит ребро A. Тогда в этом комплексе может быть лежащая в относительной внутренности его тела вершинная точка или не быть такой точки. Если есть такая точка, то по предположению индукции с выбранным ребром A найдется искомый двумерный симплекс. Если же нет такой точки, то по Утверждению 71 найдется искомый двумерный симплекс. Q.E.D.

Отрицательная петля

73 °Th · Пусть $\mathfrak{a}$ — полный симплициальный комплекс, $\mathfrak{a}$ — круговое смятие в общем положении, симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{l}$ — параметрическая петля знака (-1) у отображения $\operatorname{mrg} \mathfrak{a}$, $\tilde{L} := \operatorname{dom} \mathfrak{l}$, $L := \operatorname{im} \mathfrak{l}$, D — область, ограниченная параметрическою петлею $\mathfrak{l}$. Тогда

- если A — ребро комплекса $\mathfrak{a}$, лежащее на $\tilde{L}$, B — двумерный симплекс комплекса $\mathfrak{a}$, инцидентный ребру A, то $\mathfrak{a}^{\circ}(B) \subset D$;
- если A' — ребро комплекса $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$, $A' \subset L$, то найдется двумерный симплекс B' комплекса $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$ такой, что $B' \rhd A'$, $B' \subset D$.

Доказательство

°Выберем некоторый двумерный симплекс $B = \{a\} * \{b\} * \{c\}$ комплекса $\mathfrak{a}$ такой, что $A = (a, b) \subset \tilde{L}$.

°Тогда так как отображение $\mathfrak{a}$ сохраняет ориентацию, если пара $\langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle$ — правая (левая), то соответствующая пара $\langle \overrightarrow{\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(b)}, \overrightarrow{\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(c)} \rangle$ — такая же.

°Так как петля отрицательна, $\mathfrak{a}(c) \in \operatorname{rint} D$ и $\mathfrak{a}^{\circ}(B) \subset \operatorname{rint} D$, то есть первое показано.

°Второе же следует из первого, так как у ребра A' есть $\mathfrak{a}^{\circ}$–прообраз из комплекса $\mathfrak{a}$ на $\tilde{L}$. Q.E.D.

°*Выбор вещей*

Пусть $\mathfrak{a}$ — полный симплициальный комплекс, $\mathfrak{a}$ — круговое смятие в общем положении, симплициальное относительно комплекса $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{l}$ — параметрическая петля знака (-1) у отображения $\operatorname{mrg} \mathfrak{a}$, $\tilde{L} := \operatorname{dom} \mathfrak{l}$, $L := \operatorname{im} \mathfrak{l}$, D — область, ограниченная параметрическою петлею $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}$ — основание петли $\mathfrak{l}$

(то есть отображение $\operatorname{mrg}\mathfrak{a}$ не инъективно), $\mathfrak{b} := \{Q : Q \in \mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{a}), Q \subset \operatorname{rmrg} D\}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) := \operatorname{card}\{Q : Q \in \mathfrak{b}, \dim Q = 2\}$.

°Заметим, что по Утверждению 73 число $\mathfrak{z}(\mathfrak{b})$ положительно. Далее рассмотрим два варианта возможных значений его — 1 (начальный) и > 1 (индуктивное продолжение).

°*Первый случай*

Тогда если $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) = 1$, то по Утверждению 73 каждому ребру комплекса $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{a})$, лежащему на L, есть ему инцидентный двумерный симплекс из $\mathfrak{b}$. Следовательно, таких ребер всего три.

°Еще заметим, что на $\tilde{L}$ также всего три ребра комплекса $\mathfrak{a}$.

°Обозначим по образованной от обыкновенной ориентации на $\operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}$ ориентации на ломаной $\tilde{L}$ все вершинные точки $\tilde{r}_1$, a, b, $\tilde{r}_2$ указанных трех ребер комплекса $\mathfrak{a}$. Причем $\mathfrak{a}(\tilde{r}_1) = \mathfrak{a}(\tilde{r}_2) = r$.

°Заметим, что существуют двумерные симплексы A_1, A_2, A_3 комплекса $\mathfrak{a}$ такие, что

$$A_1 \rhd (\tilde{r}_1, a), \quad A_2 \rhd (a, b), \quad A_1 \rhd (b, \tilde{r}_2), \quad \mathfrak{a}^{\circ}(A_1) = \mathfrak{a}^{\circ}(A_1) = \mathfrak{a}^{\circ}(A_1), —$$

тот единственный двумерный симплекс из $\mathfrak{b}$.

°Из непростоты (неинъективности) следует, что $A_1 \neq A_2$ или $A_2 \neq A_3$. Будем считать, что $A_1 \neq A_2$.

°Тогда вершине $\{a\}$ инцидентны два двумерных симплекса комплекса $\mathfrak{a}$. Если бы $\mathfrak{a}$ было локально–инъективно на $\tilde{L}$, то бы $\mathfrak{a}^{\circ}(A_1) \neq \mathfrak{a}^{\circ}(A_2)$, что противоречит предположенному о числе $\mathfrak{z}(\mathfrak{b})$.

74 °Итак, отображение $\mathfrak{a}$ не локально–инъективно на $\tilde{L}$, то есть относительно отображения $\mathfrak{a}$ есть на $\tilde{L}$ точка положительной степени, не равная точкам $\tilde{r}_1$, $\tilde{r}_2$.

75 °Th · Предположим теперь, что для всякого полного симплициального комплекса $\mathfrak{a}_1$, кругового смятия $\mathfrak{a}_1$ в общем положении, симплициального относительно комплекса $\mathfrak{a}_1$, параметрической петли $\mathfrak{l}_1$ знака (-1) у отображения $\operatorname{mrg}\mathfrak{a}_1$, $\tilde{L}_1 := \operatorname{dom}\mathfrak{l}_1$, $L_1 := \operatorname{im}\mathfrak{l}_1$, области D_1, ограниченной параметрическою петлею $\mathfrak{l}_1$, основания r_1 петли $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{b}_1 := \{Q : Q \in \mathfrak{a}_1{}^{\circ\circ}(\mathfrak{a}_1), Q \subset \operatorname{rmrg} D_1\}$, числа ν из $\mathbb{N}^+$ если $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}_1) := \operatorname{card}\{Q : Q \in \mathfrak{b}_1, \dim Q = 2\} = \nu$, то найдется точка x в $\tilde{L}_1$, в которой отображение $\mathfrak{a}_1$ не локально–инъективно, а также $\mathfrak{a}_1(x) \neq r_1$.

Тогда если $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) = 1 + \nu$, то найдется точка x в $\tilde{L}$, в которой отображение $\mathfrak{a}$ не локально–инъективно, а также $\mathfrak{a}(x) \neq r$.

Доказательство

°Заметим, что комплекс $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$ может быть в одном из следующих положений:

1. есть двумерный симплекс $\{u\}*\{v\}*\{w\}$ в комплексе $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$ такой, что $(u, v) \subset \operatorname{rmrg} D$, $w \in \operatorname{rint} D$;
2. в $\operatorname{rint} D$ есть некоторая вершинная точка комплекса $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$, но нет двумерного симплекса $\{u\} * \{v\} * \{w\}$ в комплексе $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$ такого, что $(u, v) \subset \operatorname{rmrg} D$, $w \in \operatorname{rint} D$;
3. в $\operatorname{rint} D$ нет вершинных точек комплекса $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$.

°В первом из указанных случаев выберем некоторый двумерный симплекс $\{u\} * \{v\} * \{w\}$ в комплексе $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$ такой, что $(u, v) \subset \operatorname{rmrg} D$, $w \in \operatorname{rint} D$.

°Во втором случае по Утверждению 72 найдется (и его выберем) двумерный симплекс $\{u\} * \{v\} * \{w\}$ в комплексе $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$ такой, что $(u, v), (v, w) \subset \operatorname{rmrg} D$, $w \neq r$.

°В третьем случае по Утверждению 71 найдется (и его выберем) двумерный симплекс $\{u\} * \{v\} * \{w\}$ в комплексе $\mathfrak{a}^{\circ\circ}(\mathfrak{b})$ такой, что $(u, v), (v, w) \subset \operatorname{rmrg} D$, $w \neq r$.

°Заметим, что у выбранного двумерного симплекса есть единственный прообразный симплекс $\tilde{Q}$ такой, что $\mathfrak{a}^{\circ}(\tilde{Q}) = \{u\} * \{v\} * \{w\}$, $\tilde{Q} \in \mathfrak{a}$, $\tilde{L} \cap \operatorname{rmrg}\tilde{Q}$ содержит некоторое ребро.

°Образуем новый комплекс $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a} \setminus \{S : S = \tilde{Q}$ или $(S \lhd \tilde{Q}$ и $S \subset \tilde{L})\}$, $\mathfrak{a}_1 := \{S : \exists T(S \lhd T \in \mathfrak{a}')\}$. Образуем новое отображение $\mathfrak{a}_1 := \mathfrak{a}|_{\cup\mathfrak{a}_1}$. Обозначим $\tilde{L}_1 := \overline{(\tilde{L} \setminus \operatorname{rmrg}\tilde{Q}) \cup (\operatorname{rmrg}\tilde{Q} \setminus \tilde{L})}$. Образуем новую параметрическую петлю

$$\mathfrak{l}_1(k) := \mathfrak{a}\big|_{\tilde{L}_1} = \mathfrak{a}_1\big|_{\tilde{L}_1}$$

°Заметим, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}_1) = (1 + \nu) - 1 = \nu$.

°И если бы не было в $\tilde{L}$ неконцевой точки не локальной инъективности отображения $\mathfrak{a}$, то в $\tilde{L}_1$ такой точки отображения $\mathfrak{a}_1$ также не было бы, что противоречит предположенному. Q.E.D.

76 °Th · Пусть A — многоугольник—след в общем положении, и L — петля знака -1 в этом многоугольнике—следе. Тогда на L есть точка ветвления относительно A.

Доказательство

°Выбрав некоторый канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}\rangle$ многоугольника—следа A и некоторый симплициальный комплекс $\mathfrak{k}$ такой, что отображение $\mathfrak{a}$ симплициально относительно его, по индукции с основанием в пт. 74 и шагом в Утверждении 75 получим искомое. Q.E.D.

3.6.2 Стяжение петли

Стяжение петли знака $(+1)$

°Рассмотрим некоторый петельный многоугольник—след A и некоторую петлю L знака $+1$ в границе $\mathrm{Mrg}\,\mathrm{A}$ (обозначим через D область, ограниченную множеством L).

°Проведем деформационное слияние ветвлений на петле L (см. Слияние в Разделе 3.3), и получим новый многоугольник—след, который также поименуем A, также оставим имена петли и области.

°Некоторым инъективным круговым отображением $\mathfrak{b}$, определенным на множестве $\mathrm{conv}\,\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathrm{A}$ с образом в Y и отображающим множество L в границу некоторого выпуклого многоугольника, отобразим многоугольник—след A в новый многоугольник—след B, чьи отображения имеют вид $\mathfrak{b}\circ\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — отображение многоугольника—следа A; имена же петли и области сохраним.

°Возьмем некоторый канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}\rangle$ этого многоугольника—следа B и некоторый комплекс $\mathfrak{a}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$. Обозначим $\tilde{L} := \big((\mathrm{mrg}\,\mathfrak{a})^{-1}\big)^{\circ}($ и $r := \mathrm{rdx}(L)$.

°Ясно, что или $\deg_{\mathfrak{a}} x = 0$ для всех точек x из L, или $\deg_{\mathfrak{a}} x > 0$ для некоторой точки x из L.

°Если первый вариант, то подразделим комплекс $\mathfrak{a}$ в комплекс $\mathfrak{b}$ так, чтобы для всякого двумерного симплекса T из комплекса $\mathfrak{b}$, у которого одна и только одна вершинная точка v на $\tilde{L}$, если обозначить $T = \{v\} * E$, то точки r и v лежат по одну сторону прямой через E.

°Произведем близкосвязанное деформационное стяжение, положив при $\tau \in [0,1]$,

$$\hat{\mathfrak{m}}(\tau, w) := \begin{cases} \mathfrak{a}(w), & w \text{ — вершинная точка из } \mathfrak{b}, \text{ и } w \notin \tilde{L}; \\ \tau \cdot r + (1-\tau)\cdot \mathfrak{a}(w), & w \text{ — вершинная точка из } \mathfrak{b}, \text{ и } w \in \tilde{L}. \end{cases}$$

Затем аффинно на каждом симплексе из $\mathfrak{b}$ продолжим при каждом τ из $[0,1]$ построенное отображение $\hat{\mathfrak{m}}(\tau,\cdot)$ до отображения $\mathfrak{m}(\tau,\cdot)$. Ясно, что $\mathfrak{m}(0,\cdot) = \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{m}(1,\cdot)^{\circ}(\tilde{L}) = \{r\}$. Перейдем от отображения $\mathfrak{m}(1,\cdot)$ к некоторому его редукту (круговому отображению) $\mathfrak{b}$.

°Таким образом, стянута деформационно петля L, а остальная часть граничного графа не изменена, и степени точек на той части не изменены. Еще заметим, что (по свойству положения образов симплексов и основания петли) $\deg_{\mathfrak{b}} r = 1$ и есть сумма $\mathrm{lsign}_{\mathrm{A}}\, L$ и всех степеней точек на петле L.

°Рассмотрим второй вариант. Произведем предварительное деформирование. То есть измельчим комплекс $\mathfrak{a}$ в комплекс $\mathfrak{b}$ так, чтобы возможна была следующая деформация. Близкосвязанно деформируем так, что сохранится граничный граф и степени всех точек, и при всем том для всякого двумерного симплекса T из комплекса $\mathfrak{b}$, у которого одна и только одна вершинная точка v на $\tilde{L}$, если обозначить $T = \{v\} * E$, то точки r и v лежат по одну сторону прямой через E. См. рис. 3.15.

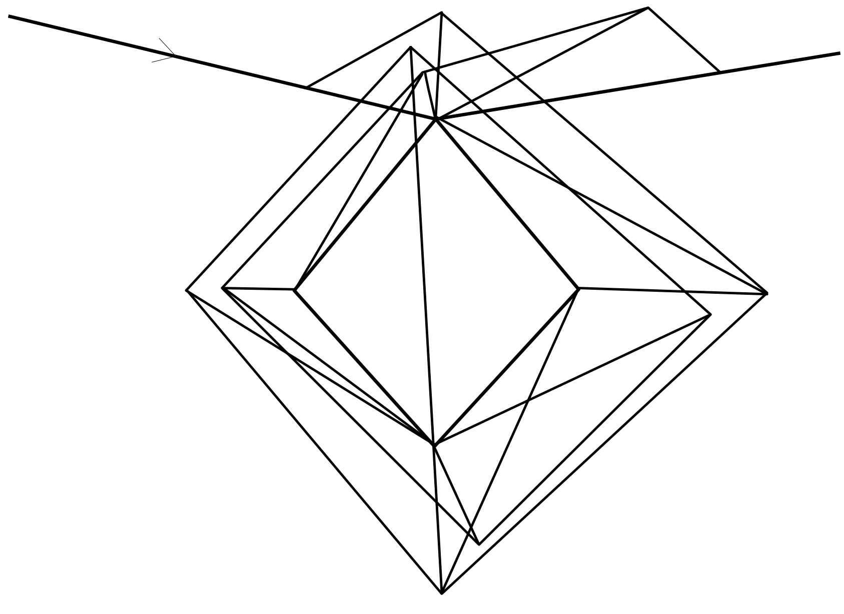


Рис. 15. к стяжению $(+1)$—петли с ветвлением

°Далее же как и в первом варианте, определим $\hat{\mathfrak{m}}$ и $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{b}$. Из построения следует, что $\deg_{\mathfrak{b}} \mathfrak{r}$ есть сумма $\operatorname{lsign}_{\mathrm{A}} L$ и всех степеней точек на петле L.

Стяжение петли знака (-1)

°Рассмотрим некоторый петельный многоугольник—след A и некоторую петлю L знака -1 в границе $\operatorname{Mrg}\mathrm{A}$ (обозначим через D область, ограниченную множеством L).
°Проведем деформационное слияние ветвлений на петле L (см. Слияние в Разделе 3.3), и получим новый многоугольник—след, который также поименуем A, также оставим имена петли и области.
°Некоторым инъективным круговым отображением $\mathfrak{b}$, определенным на множестве $\operatorname{conv}\widetilde{\mathrm{im}}\,\mathrm{A}$ с образом в Y и отображающим множество L в границу некоторого выпуклого многоугольника, отобразим многоугольник—след A в новый многоугольник—след B, чьи отображения имеют вид $\mathfrak{b}\circ\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — отображение многоугольника—следа A; имена же петли и области сохраним.
°Возьмем некоторый канонический представитель $\langle\mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}\rangle$ этого многоугольника—следа B и некоторый комплекс $\mathfrak{a}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$. Обозначим $\tilde{L} := \big((\operatorname{mrg}\mathfrak{a})^{-1}\big)^{\circ}$ (и $\mathfrak{r} := \operatorname{rdx}(L)$.
°Из Утверждения 76 следует, что $\deg_{\mathfrak{a}} x > 0$ для некоторой точки x из L.
°Произведем предварительное деформирование. То есть измельчим комплекс $\mathfrak{a}$ в комплекс $\mathfrak{b}$ так, чтобы возможна была следующая деформация. Близкосвязанно деформируем так, что сохранится граничный граф и степени всех точек, и при всем том для всякого двумерного симплекса T из комплекса $\mathfrak{b}$, у которого одна и только одна вершинная точка v на $\tilde{L}$, если обозначить $T = \{v\} * E$, то точки $\mathfrak{r}$ и v лежат по одну сторону прямой через E. См. рис. $\boxed{3.16}$.

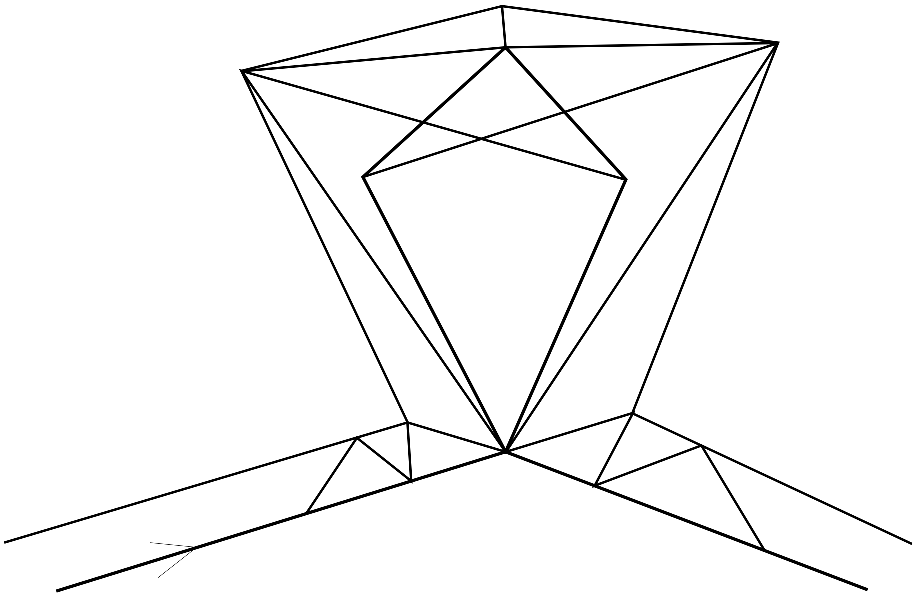


Рис. 16. к стяжению (-1)—петли

°Произведем близкосвязанное деформационное стяжение, положив при $\tau \in [0, 1]$,

$$\hat{\mathfrak{m}}(\tau, w) := \begin{cases} \mathfrak{a}(w), & w \text{ — вершинная точка из } \mathfrak{b}, \text{ и } w \notin \tilde{L}; \\ \tau \cdot r + (1-\tau)\cdot \mathfrak{a}(w), & w \text{ — вершинная точка из } \mathfrak{b}, \text{ и } w \in \tilde{L}. \end{cases}$$

Затем аффинно на каждом симплексе из $\mathfrak{b}$ продолжим при каждом τ из $[0, 1]$ построенное отображение $\hat{\mathfrak{m}}(\tau, \cdot)$ до отображения $\mathfrak{m}(\tau, \cdot)$. Ясно, что $\mathfrak{m}(0, \cdot) = \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{m}(1, \cdot)^{\circ}(\tilde{L}) = \{r\}$. Перейдем от отображения $\mathfrak{m}(1, \cdot)$ к некоторому его редукту (круговому отображению) $\mathfrak{b}$.
°Таким образом, стянута деформационно петля L, а остальная часть граничного графа не изменена, и степени точек на той части не изменены. Еще заметим, что $\deg_{\mathfrak{b}} r$ есть сумма $\mathrm{lsign}_{\mathrm{A}} L$ и всех степеней точек на петле L.

3.6.3 Натяжение петли

Натяжение петли знака (-1)

°Рассмотрим некоторый петельный многоугольник—след A, точку $x \in \tilde{\mathrm{im}}\,\mathrm{Mrg}\,\mathrm{A}$, число $\sigma = -1$.
°Возьмем некоторый канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}\rangle$ этого многоугольника—следа A и некоторый комплекс $\mathfrak{a}$, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$. Обозначим $\hat{x}$ единственную точку на $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$ такую, что $\mathfrak{a}(\hat{x}) = x$.
°Обозначим точки x^+, x^- так, что $(x^-, \hat{x}), (\hat{x}, x^+) \in \mathfrak{a}$, $(x^-, \hat{x}), (\hat{x}, x^+) \subset \mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$ и точки x^-, $\hat{x}$, x^+ следуют по “обходу против часовой стрелки” кривой $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$.
°Дополним комплекс $\mathfrak{a}$ до некоторого полного симплициального комплекса $\mathfrak{b}$ так, что

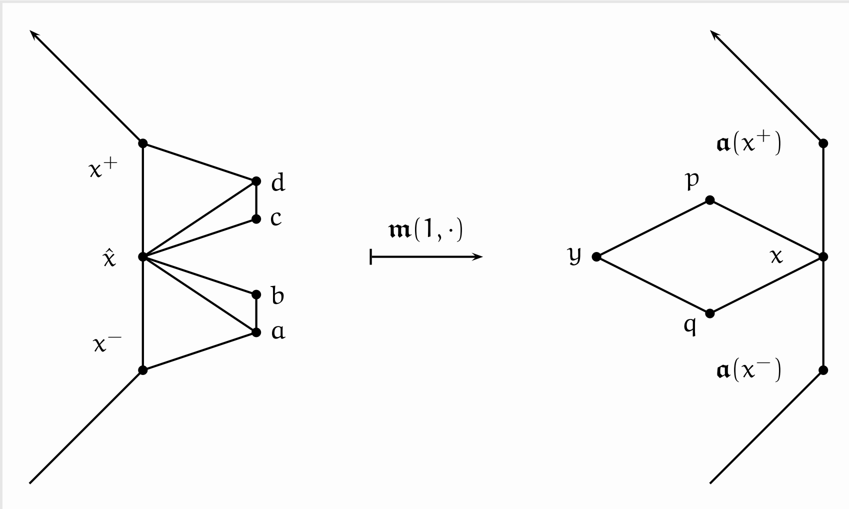
$$\begin{aligned} \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{a} = \{&\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},\\ &\{\hat{x}\} * \{a\}, \{\hat{x}\} * \{d\},\\ &\{x^-\} * \{a\}, \{a\} * \{b\}, \{b\} * \{\hat{x}\}, \{\hat{x}\} * \{c\}, \{c\} * \{d\}, \{d\} * \{x^+\},\\ &\{x^-\}*\{\hat{x}\}*\{a\}, \{a\}*\{\hat{x}\}*\{b\}, \{c\}*\{\hat{x}\}*\{d\}, \{x^+\}*\{\hat{x}\}*\{d\}\}, \end{aligned}$$

где точки a, b, c, d выбраны так, что в $\mathrm{st}_{\mathfrak{b}}\{\{\hat{x}\}\}$ ребра $\{\hat{x}\} * \{a\}$, $\{\hat{x}\} * \{b\}$, $\{\hat{x}\} * \{c\}$, $\{\hat{x}\} * \{d\}$ следуют в положительном обходе (“против часовой стрелки”) вокруг точки $\hat{x}$.
°Затем, определив круговую контракцию $\mathfrak{c}$ как посимплексно—аффинное продолжение на симплексах комплекса $\mathfrak{b}$ отображения

$$v \longmapsto \begin{cases} v, & \text{если } v \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}); \\ \hat{x}, & \text{если } v \in \{a, b, c, d\}, \end{cases}$$

определим новый представитель $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}$ нашего многоугольника−следа.

°Выберем достаточно близко к точке x три точки p, q, y так, что ребра $\{x\} * \{\mathfrak{a}(x^+)\}$, $\{x\} * \{p\}$, $\{x\} * \{y\}$, $\{x\} * \{q\}$, $\{x\} * \{\mathfrak{a}(x^-)\}$ следуют в положительном обходе (“против часовой стрелки”) вокруг точки x. См. рис. 3.17



Диаг. 17. к натяжению (-1)−петли

°И определим на вершинных точках комплекса $\mathfrak{b}$ и числах τ из $[0, 1]$ отображение $\mathfrak{m}'$

$$\mathfrak{m}'(\tau, \nu) := \begin{cases} \mathfrak{a}(\nu), & \text{если } \nu \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathfrak{a}), \nu \neq \hat{x}; \\ x, & \text{если } \nu \in \{a, d\}; \\ (1-\tau)\cdot x + \tau \cdot y, & \text{если } \nu = \hat{x}; \\ (1-\tau)\cdot x + \tau \cdot p, & \text{если } \nu = b; \\ (1-\tau)\cdot x + \tau \cdot q, & \text{если } \nu = c. \end{cases}$$

При каждом τ из $[0, 1]$ посимплексно−аффинно продолжим на симплексы комплекса $\mathfrak{b}$ отображение $\mathfrak{m}'(\tau, \cdot)$ до отображения $\mathfrak{m}(\tau, \cdot)$.

°Таким образом, построена близкосвязанная деформация, сохраняющая граничный граф кроме точки x и порождающая с корнем в этой точке петлю знака -1. Из построения следует, что $\deg_{\mathfrak{m}(1,\cdot)} \hat{x} = \deg_{\mathrm{A}} \hat{x} + 1 = \deg_{\mathrm{A}} \hat{x} - \sigma$.

Натяжение петли знака $(+1)$

°Рассмотрим некоторый петельный многоугольник−след A, точку $x \in \widetilde{\mathrm{im}}\,\mathrm{Mrg}\,\mathrm{A}$, число $\sigma = +1$, причем $\deg_{\mathrm{A}} x > 0$.

°Возьмем некоторый канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a} \rangle$ этого многоугольника−следа A и некоторый комплекс a, относительно которого симплициально отображение $\mathfrak{a}$. Обозначим $\hat{x}$ единственную точку на $\mathrm{rmrg}\,\mathrm{dom}\,\mathfrak{a}$ такую, что $\mathfrak{a}(\hat{x}) = x$.

°Подразделим комплекс a до некоторого полного симплициального комплекса b так, что если перенумеровать $\mathfrak{v}_0, \ldots, \mathfrak{v}_\omega$ все точки из ${}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathrm{st}_b\{\{\hat{x}\}\}) \setminus \{\hat{x}\}$ так, что $\measuredangle(\overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1})}, \overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota})}) > 0$ при $\iota = 1, \ldots, \omega$, то найдутся две вершинные точки $\mathfrak{v}_\alpha$ и $\mathfrak{v}_\beta$ такие, что (см. верх рис. 3.18)

- $\alpha > \beta$;

- верно $\tilde{\phi} < \tau < \tilde{\upsilon}$ и $\psi < \tilde{\chi}$, для чисел

$$\begin{aligned}
\tau &:= \sum_{\iota=1,\dots,\beta} \measuredangle(\overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1})}, \overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota)}),\\
\upsilon &:= \sum_{\iota=1,\dots,\alpha} \measuredangle(\overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1})}, \overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota)}), \quad \tilde{\upsilon} := 2\pi\left(\tfrac{\upsilon}{2\pi} - \left\lfloor \tfrac{\upsilon}{2\pi} \right\rfloor\right),\\
\phi &:= \sum_{\iota=1,\dots,\omega} \measuredangle(\overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1})}, \overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota)}), \quad \tilde{\phi} := 2\pi\left(\tfrac{\phi}{2\pi} - \left\lfloor \tfrac{\phi}{2\pi} \right\rfloor\right),\\
\chi &:= \sum_{\iota=\beta+1,\dots,\omega} \measuredangle(\overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1})}, \overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota)}), \quad \tilde{\chi} := 2\pi\left(\tfrac{\chi}{2\pi} - \left\lfloor \tfrac{\chi}{2\pi} \right\rfloor\right),\\
\psi &:= \sum_{\iota=\alpha+1,\dots,\omega} \measuredangle(\overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_{\iota-1})}, \overrightarrow{x\mathfrak{a}(\mathfrak{v}_\iota)}).
\end{aligned}$$

°Выберем достаточно близко к точке $\hat{x}$ на ребре $(\hat{x}, \mathfrak{v}_0)$ некоторую точку a и на ребре $(\hat{x}, a)$ некоторую точку b и на ребре $(\hat{x}, \mathfrak{v}_\omega)$ некоторую точку d и на ребре $(\hat{x}, d)$ некоторую точку c. Определим новый полный симплициальный комплекс $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} := (\mathbf{b} \setminus \mathrm{st}_{\mathbf{b}}\{\{\hat{x}\}\}) \cup \mathbf{d},$$

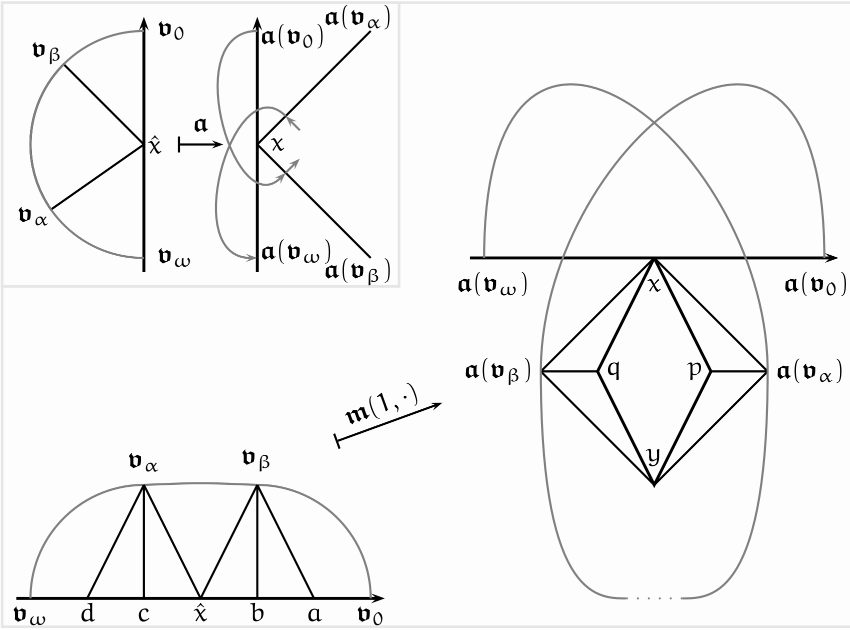
где $\mathbf{d}$ — совокупность всех подсимплексов каждого из симплексов совокупности $\{\{a\}*\{\mathfrak{v}_0\}*\{\mathfrak{v}_1\}, \dots, \{a\}*\{\mathfrak{v}_{\beta-1}\}*\{\mathfrak{v}_\beta\}\} \cup \{\{a\}*\{\mathfrak{v}_\beta\}*\{b\}, \{b\}*\{\mathfrak{v}_\beta\}*\{\hat{x}\}\} \cup \{\{\hat{x}\}*\{\mathfrak{v}_\beta\}*\{\mathfrak{v}_{\beta+1}\}, \dots, \{\hat{x}\}*\{\mathfrak{v}_{\alpha-1}\}*\{\mathfrak{v}_\alpha\}\} \cup \{\{\hat{x}\}*\{\mathfrak{v}_\alpha\}*\{c\}, \{c\}*\{\mathfrak{v}_\alpha\}*\{d\}\} \cup \{\{d\}*\{\mathfrak{v}_\alpha\}*\{\mathfrak{v}_{\alpha+1}\}, \dots, \{d\}*\{\mathfrak{v}_{\omega-1}\}*\{\mathfrak{v}_\omega\}\}$.
°Затем, определив круговую контракцию $\mathfrak{c}$ как посимплексно–аффинное продолжение на симплексах комплекса $\mathbf{c}$ отображения

$$\nu \longmapsto \begin{cases} \nu, & \text{если } \nu \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{c}), \quad \nu \neq a, b, c, d;\\ \hat{x}, & \text{если } \nu \in \{a, b, c, d\}, \end{cases}$$

определим новый представитель $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} \circ \mathfrak{c}$ нашего многоугольника–следа.
°Выберем достаточно близко к точке x три точки p, q, y так, что ребра $\{x\} * \{\mathfrak{a}(x^+)\}$, $\{x\} * \{p\}$, $\{x\} * \{y\}$, $\{x\} * \{q\}$, $\{x\} * \{\mathfrak{a}(x^-)\}$ следуют в отрицательном обходе (“по часовой стрелке”) вокруг точки x.
°И определим на вершинных точках комплекса $\mathbf{c}$ и числах τ из $[0, 1]$ отображение $\mathfrak{m}'$

$$\mathfrak{m}'(\tau, \nu) := \begin{cases} \mathfrak{a}(\nu), & \text{если } \nu \in {}^{\cup}\mathrm{vert}^{\circ}(\mathbf{b}), \nu \neq \hat{x};\\ x, & \text{если } \nu \in \{a, d\};\\ (1-\tau)\cdot x + \tau \cdot y, & \text{если } \nu = \hat{x};\\ (1-\tau)\cdot x + \tau \cdot p, & \text{если } \nu = c;\\ (1-\tau)\cdot x + \tau \cdot q, & \text{если } \nu = b. \end{cases}$$

При каждом τ из $[0, 1]$ посимплексно–аффинно продолжим на симплексы комплекса $\mathbf{b}$ отображение $\mathfrak{m}'(\tau, \cdot)$ до отображения $\mathfrak{m}(\tau, \cdot)$.
°Таким образом, построена близкосвязанная деформация, сохраняющая граничный граф кроме точки x и порождающая с корнем в этой точке петлю знака $+1$. Из построения следует, что $\deg_{\mathfrak{m}(1,\cdot)} \hat{x} = \deg_{\mathrm{A}} \hat{x} - 1 = \deg_{\mathrm{A}} \hat{x} - \sigma$.



Диаг. 18. к натяжению $(+1)$–петли

3.6.4 Натуральная весовая функция и существование

Степенная весовая функция

°Df · Рассмотрим некоторый многоугольник–след A в общем положении, его некоторый канонический представитель $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}\rangle$ и некоторую дугу A графа $\operatorname{Gr}(\operatorname{Mrg}\mathrm{A})$. Тогда определим число

$$\operatorname{pend}'_{\mathfrak{a}}(A) := \sum_{x : x \in ((\operatorname{mrg}\mathfrak{a})^{-1})^{\circ}(A)} \deg_{\mathfrak{a}} x.$$

°Df · Ясно, что не зависит от представителя $\langle \mathfrak{a}, \operatorname{rmrg}\operatorname{dom}\mathfrak{a}\rangle$ многоугольника–следа A следующее число:

$$\operatorname{pend}_{\mathrm{A}}(A) := \operatorname{pend}'_{\mathfrak{a}}(A).$$

Эту функцию назовем *степенною весовою функциею* того многоугольника–следа A.

Существование

°Th · Если A — петельная ломаная–след и $\mathfrak{p}$ — правильная весовая функция на A. То найдется петельный многоугольник–след B с границею A и $\operatorname{pend}_{\mathrm{B}} = \mathfrak{p}$.

Доказательство

°Рассмотрим для ломаной–следа A и весовой функции $\mathfrak{p}$ некоторую последовательность построения

$$\langle \mathfrak{f}_0, \mathfrak{q}_0\rangle \xmapsto{\mathfrak{l}_1} \ldots \xmapsto{\mathfrak{l}_\mu} \langle \mathfrak{f}_\mu, \mathfrak{q}_\mu\rangle = \langle \mathrm{A}, \mathfrak{p}\rangle.$$

°Заметим, что для $\langle \mathfrak{f}_0, \mathfrak{q}_0\rangle$ есть многоугольник–след $\mathfrak{y}_0$ такой, что $\operatorname{Mrg}\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{f}_0$ и $\operatorname{pend}_{\mathfrak{y}_0} = \mathfrak{q}_0$.
°Если уже построен многоугольник–след $\mathfrak{y}_\iota$ такой, что $\operatorname{Mrg}\mathfrak{y}_\iota = \mathfrak{f}_\iota$ и $\operatorname{pend}_{\mathfrak{y}_\iota} = \mathfrak{q}_\iota$ и $\iota < \mu$, то по описанию в Разделе 3.6.3 построим деформационно многоугольник–след Z такой, что $\operatorname{Mrg}\mathrm{Z} = \mathfrak{f}_\iota \oplus Q$, где Q — некоторая петля в $\operatorname{Mrg}\mathrm{Z}$ знака $\operatorname{lsign}_{\mathfrak{f}_{\iota+1}}(\mathfrak{l}_{\iota+1})$ и с основанием $\operatorname{rdx}\mathfrak{l}_{\iota+1}$ и $\operatorname{pend}_{\mathrm{Z}} Q = \mathfrak{q}_{\iota+1}(\mathfrak{l}_{\iota+1})$ и $\operatorname{pend}_{\mathrm{Z}} A = \mathfrak{q}_{\iota+1}(A)$ при дугах A из графа $\operatorname{Gr}(\mathfrak{f}_{\iota+1}) \setminus \{\mathfrak{l}_{\iota+1}\}$.
°Заметим, что найдется некоторый неподвижный на $\tilde{\operatorname{im}}\operatorname{Mrg}\mathfrak{y}_\iota$ круговой гомеоморфизм $\mathfrak{h}$ такой, что $\operatorname{dom}\mathfrak{h} \supset \tilde{\operatorname{im}}\mathrm{Z}$ и $\mathfrak{h}^{\circ}(\tilde{\operatorname{im}}\operatorname{Mrg}\mathrm{Z}) = \tilde{\operatorname{im}}\mathfrak{f}_{\iota+1}$. Таким образом, если скомпонировать отображение $\mathfrak{h}$ и деформационное построение петли Q, то будет деформационное построение петли $\mathfrak{l}_{\iota+1}$, и индуктивно за конечное число шагов будет построен искомый многоугольник–след B. Q.E.D.

Литература

[1] Рурк К., Сандерсон Б. *Введение в кусочно линейную топологию.*— М.: Мир, 1974.

[2] Рохлин В. А., Фукс Д. Б. *Начальный курс топологии. Геометрические главы.* Издательство “Наука”, Москва, 1977.

[3] Шефер Х. *Топологические векторные пространства.*— .....

[4] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато.*— Успехи матем. наук, **47**, № 2, С. 53–115, 1992.

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей.*— Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[6] Фоменко А. Т. *Топологические вариационные задачи.*— Издательство МГУ, 1984.

[7] Reifenberg E. R. *Solution of the Plateau Problem for* m*–dimensional surfaces of varying topological type.*— Acta Mathematica, 1960, V. 104, P. 1—92.

[8] Federer H., Fleming W. H. *Normal and integral currents.*— Ann. Math., 1960, **72**, P. 458—520.

[9] Almgren F. J. *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of topological type and singularity structure.*— Ann. Math., Ser. 2, 1968, **87**, № 2, P. 321—391.

[10] Фоменко А. Т. *Вариационные методы в топологии.*— М.: Наука, 1982.

[11] Дао Чонг Тхи, *Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато.*— Известия АН СССР, 1980, 44, **5**, С. 1031—1065.

[12] Heppes A. *Isogonal spherischen Netze* // Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math., **7**, P. 41–48, 1964.

[13] Taylor Jean E. *The Structure of Singularities in Soap-bubble-like and Soap-film-like Minimal Surfaces* // Annals of Mathematics, 103(1976), P. 489–539.

[14] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Погруженные многоугольники и их диагональные триангуляции*, 2004, в печати.

[15] Du D. Z. and Hwang F. K. *A proof of Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner ratio.*— Algorithmica, **7**, P. 121–135, 1992.

[16] Gilbert E. N. and Pollak H. O. *Steiner minimal trees.*— SIAM J. Appl. Math., **16**, **1**, P. 1–29, 1968.

[17] Abdulaev R. *Polymersions of a Disk with Critical Points on the Boundary* // Georgian Mathematical Journal, V. 8(2001), № 1, P. 1–11.

[18] Гусев Н. С. *Кусочно аффинные погружения многоугольников и их границы.*— Материалы VIII Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” (2–6 февраля 2004 г.), М.: Издательство механико–математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004, С. 390–392.

[19] Гусев Н. С. *Каноническое разложение кусочно-аффинных отображений и многогранники-следы* // Вестник МГУ, Сер.1, Математика, Механика (краткое сообщение).— 2005.— № 5 — С. 72–77.

[20] Гусев Н. С. *Применение канонического представления кусочно-аффинных отображений к объему их при деформациях с изменением геометрии* // Труды XXVII Конференции молодых ученых механико-математического ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова. М. Изд-во МГУ.— 2005 — С. 41–44.

[21] Гусев Н. С. Фундаментальная математика ...