

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова  
Механико–математический факультет

На правах рукописи  
УДК 517.984.55, 514.84

**Гальцев Сергей Валерьевич**  
КОМПЛЕКСНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ И АНАЛОГИ ЛИНИЙ  
СТОКСА

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико–математических наук, профессор  
Шафаревич Андрей Игоревич

Москва, 2008

# Содержание.

Введение	3
1.1 Несамосопряженные операторы	3
1.2 Актуальность темы	4
1.3 Уравнение на торе	5
1.4 Постановка задачи и формулировка результата	7
1.5 Апробация диссертации	11
1.6 Краткое содержание работы	11
1.7 Благодарность	17
Псевдоспектр	19
2.1 Определение и основные свойства	19
2.2 Псевдоспектр плотен в числовом образе	21
2.3 Псевдоспектр $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$	26
Асимптотика спектра	27
3.1 План нахождения спектра в частном случае $iV(z) = i \cos(z)$	27
3.2 Точки поворота	28
3.3 Вспомогательные утверждения	32
3.4 Линии Стокса	38
3.5 Реализуемость топологических случаев	45
3.6 Матрица монодромии и условие на спектр	51
3.7 Матрицы перехода	56
3.8 Асимптотика спектра	67
3.9 Спектральный граф	72
Литература	73

# Введение.

## 1.1. Несамосопряженные операторы

Ряд вопросов, естественно возникающих в спектральной теории дифференциальных операторов, приводит к исследованию спектра оператора

$$\mathfrak{D} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x), \quad (1)$$

где  $V(x)$  — периодичная целая аналитическая функция, действительная на действительной оси, с вещественным периодом  $T$ , а  $h > 0$  — малый параметр. В частности, (1) возникает как “эталонный” оператор в теории гидродинамической устойчивости: его спектр при определенных условиях похож на спектр оператора Орра–Зоммерфельда. Другой пример — спектральная задача для оператора  $\varepsilon\Delta + (v(x), \nabla)$  на плоском торе (здесь  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ ). Если  $v(x)$  — бездивергентное поле вида  $v(x_1, x_2) = w(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$ , спектральная задача допускает разделение переменных: собственная функция  $\varphi(x_1, x_2)$  имеет вид  $e^{imx_2}\psi(x_1)$ , причем  $\psi$  удовлетворяет спектральной задаче для оператора (1) при  $V(x_1) = mw(x_1)$  и  $\varepsilon = h^2$ .

Спектральная теория несамосопряженных операторов, сравнительно с самосопряженным случаем, разработана значительно менее полно; как структура спектра, так и свойства спектрального разложения могут в этом случае быть весьма экзотическими, что чрезвычайно затрудняет развитие общей теории (см., например, [1]). В то же время, ряд важных задач, возникающих в различных областях математики, механики и физики, приводит к изучению спектров несамосопряженных операторов. Приведем несколько популярных примеров.

1. Оператор диффузии со сносом  $\varepsilon\Delta + \partial_v$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа–Бельтрами,  $\partial_v$  — производная вдоль гладкого векторного поля  $v$  на римановом многообразии ( $\varepsilon > 0$  — коэффициент диффузии), возникающий как в механике сплошных сред и кинетической теории, так и в задачах теории случайных процессов.

2. Оператор магнитной индукции  $\widetilde{M}$ , действующий на магнитное поле  $H$  в проводящей жидкости с полем скоростей  $v$  ( $H, v$  — векторные поля в  $\mathbb{R}^3$ ):

$$\widetilde{M}H = \{v, H\} - \varepsilon\Delta H,$$

где  $\{\cdot, \cdot\}$  — коммутатор векторных полей,  $\varepsilon > 0$  — проводимость. Исследование поведения спектра этого оператора при  $\varepsilon \rightarrow 0$  связано с известной проблемой магнитного динамо (см., например, [5]).

3. Операторный пучок Оппа–Зоммерфельда  $Q$ , возникающий в теории гидродинамической устойчивости (см., например, [21]); операторы этого пучка действуют на функцию  $u(x)$  по правилу

$$Qu = i\varepsilon \left( \frac{d^2}{dx^2} - p^2 \right)^2 u + p \left( (v(x) - \omega) \left( \frac{d^2}{dx^2} - p^2 \right) - v''(x) \right) u,$$

где  $v(x)$  — гладкая функция (невозмущенный профиль скорости),  $p$  — волновое число возмущения,  $\omega$  — частота (спектральный параметр),  $\varepsilon$  — коэффициент вязкости ( $\varepsilon^{-1}$  — число Рейнольдса).

## 1.2. Актуальность темы

Отметим, что во всех приведенных примерах присутствует параметр  $\varepsilon$ , который во многих типичных ситуациях бывает малым; тем самым, естественный вопрос состоит в изучении предельного поведения спектра при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для самосопряженных задач такие пределы изучаются в теории квазиклассических асимптотик (см., например, [7, 6]); в этой теории асимптотические собственные числа и собственные функции связываются с инвариантными изотропными многообразиями соответствующих классических гамильтоновых систем (как правило, определенных в  $\mathbb{R}^{2n}$  или в кокасательном расслоении к риманову многообразию). Собственные числа вычисляются из условий квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\beta} (p, dx) = m(\beta) + l(\beta),$$

где  $\beta$  — произвольный цикл на изотропном многообразии,  $(p, x)$  — канонические координаты в фазовом пространстве,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $l$  — числовая характеристика циклов, которая определяется по-разному в различных ситуациях; в частности, если изотропное многообразие лагранжево,  $l$  равно четверти от индекса Маслова. Асимптотические собственные функции строятся при помощи (вещественного или комплексного) канонического оператора Маслова; отметим, что они не обязательно приближают настоящие собственные функции исходной задачи, а лишь удовлетворяют с нужной точностью спектральному уравнению. В то же время, самосопряженность исходного оператора гарантирует наличие в его спектре точек, близких к асимптотическим собственным числам (решениям уравнений Бора–Зоммерфельда–Маслова).

Относительно квазиклассических асимптотик спектров несамосопряженных операторов известно гораздо меньше. В частности, в работах [20, 3] построены спектральные серии оператора  $-\varepsilon\Delta + \partial_v$ , связанные с асимптотически устойчивыми положениями равновесия, предельными циклами или инвариантными торами векторного поля  $v$ . (Спектральные серии, вообще говоря, определяют точки псевдоспектра, см. [26, 19]; в то же время, асимптотическая устойчивость соответствующих инвариантных множеств указывает на то, что, вероятно, эти серии приближают точные собственные числа — в явно решаемых примерах это действительно так.) В [8, 10, 15, 11, 13]

исследовался спектр одномерного оператора Шредингера и задачи Орра–Зоммерфельда на отрезке (отметим, что ряд утверждений об условиях квантования содержался еще в работе [2]). В этих работах, основанных на технике ВКБ–асимптотики (см., например, [14, 4]) было обнаружено, что в квазиклассическом пределе спектр стягивается к некоторому графу на комплексной плоскости (так называемому спектральному графу), причем ребра этого графа задаются геометрическими условиями на линии Стокса (одна из этих линий должна проходить через конец отрезка, на котором рассматривается уравнение). В работах [18, 19, 22] исследовался так называемый псевдоспектр — множество, состоящее из чисел, приближенно удовлетворяющих спектральному уравнению; в частности, отмечалось различие между псевдоспектром и асимптотикой точного спектра.

В настоящей работе исследуется спектр и псевдоспектр одномерного оператора Шредингера на окружности с комплексным (чисто мнимым) потенциалом, заданного формулой (1). Оказывается, точки спектра в квазиклассическом пределе могут быть вычислены из условий Бора–Зоммерфельда–Маслова, отвечающих римановой поверхности уровня энергии; однако, в отличие от самосопряженного случая, достаточно требовать выполнения этих условий хотя бы на одном из базисных циклов этой поверхности, причем разные циклы дают в спектр вклад, соответствующий разным ребрам спектрального графа. Как и в [2, 8, 10, 15, 11, 13], спектральный граф связан с топологией графа Стокса; именно, ребра спектрального графа соответствуют перестройкам графа Стокса. Отметим, что, в силу периодичности задачи, таких перестроек счетное число; оказывается однако, что в действительности ребрам спектрального графа отвечает лишь несколько из них.

Для одномерного оператора Шредингера на окружности с чисто мнимым аналитическим потенциалом показано, что при  $h \rightarrow 0+0$  его  $h^N$ –псевдоспектр для любого  $N$  заполняет полуполосу на комплексной плоскости, в то время как настоящий спектр  $\text{mod } O(h^2)$  концентрируется вблизи одномерного множества (графа). Ребра этого графа соответствуют различным спектральным сериям, которые могут быть вычислены при помощи условий Бора–Зоммерфельда–Маслова на комплексной кривой (римановой поверхности); в отличие от самосопряженного случая разные циклы на одной и той же поверхности определяют разные серии (другими словами, для конструкции асимптотики достаточно требовать выполнения условий квантования только на одном цикле).

### 1.3. Уравнение на торе

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$D_{\mathbb{T}^2} = -\varepsilon^2 \Delta + (v, \nabla) \quad (2)$$

заданное на торе  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/T_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/T_2\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^2/(T_1, T_2)\mathbb{Z}$ ,  $\{T_1, T_2\} \subset (0, +\infty)$ , с координатами  $(x, y)$ . Причем векторное поле  $v$  на этом торе задано параллельным и постоянным вдоль второй координаты, то есть,  $v = (0, V(x))$ , для

некоторой аналитичной на окружности функции  $V(x)$ . В выражении  $D_{\mathbb{T}^2}$  параметр  $\varepsilon$  будем брать из множества положительных действительных чисел. Это дифференциальное выражение порождает неограниченный несамосопряженный оператор  $\mathfrak{D}_{\mathbb{T}^2}$  на  $L_2(\mathbb{T}^2)$ . Поставим вопрос об асимптотике дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}_{\mathbb{T}^2}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+0$ . То есть, нас интересует асимптотика множества значений  $\lambda$ , при которых уравнение

$$(-\varepsilon^2 \Delta + (v, \nabla)) u = \lambda u \quad (3)$$

разрешимо относительно  $u$  — функции, заданной на торе  $\mathbb{T}^2$ .

Представим решение  $u$  в виде  $u(x, y) = e^{i\frac{2\pi}{T_1}my} \psi(x)$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  и  $\psi(x)$  периодична с периодом  $T_2$  (чтобы обеспечить корректность задания  $u$  на торе). Тогда можно переписать уравнение (3)

$$-\varepsilon^2 \left( -\frac{4\pi^2}{T_1^2} m^2 e^{i\frac{2\pi}{T_1}my} \psi(x) + e^{i\frac{2\pi}{T_1}my} \psi''(x) \right) + i\frac{2\pi}{T_1} m e^{i\frac{2\pi}{T_1}my} V(x) \psi(x) = \lambda e^{i\frac{2\pi}{T_1}my} \psi(x).$$

Или, после сокращения на  $e^{i\frac{2\pi}{T_1}my}$  ( $e^{i\frac{2\pi}{T_1}my} \neq 0$  при любом  $y \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ) и деления на  $\frac{2\pi}{T_1}m$  (при  $m \neq 0$ ):

$$-\left( \frac{\varepsilon\sqrt{T_1}}{\sqrt{2\pi m}} \right)^2 \psi''(x) + iV(x)\psi(x) = \frac{\lambda T_1^2 - \varepsilon^2 4\pi^2 m^2}{2\pi T_1 m} \psi(x).$$

Обозначив  $E = \frac{\lambda T_1^2 - \varepsilon^2 4\pi^2 m^2}{2\pi T_1 m}$  и  $h = \frac{\varepsilon\sqrt{T_1}}{\sqrt{2\pi m}}$  получаем уравнение

$$-h^2 \psi''(x) + iV(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (4)$$

разрешимость которого относительно (периодичной с периодом  $T_2$ ) функции  $\psi$  дает условие на  $E$ , формирующее дискретный спектр неограниченного несамосопряженного оператора  $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}^1}$  в  $L_2(\mathbb{S}^1)$ , порожденного дифференциальным выражением

$$D_{\mathbb{S}^1} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x) \quad (5)$$

на окружности  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T_2\mathbb{Z}$ . Найдя асимптотику дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}^1}$ , мы автоматически найдем асимптотику спектра оператора  $\mathfrak{D}_{\mathbb{T}^2}$  при  $m \neq 0$ .

При  $m = 0$  получаем следующее уравнение на  $\psi$ :

$$-\varepsilon^2 \psi''(x) = \lambda \psi(x),$$

то есть, опять получаем уравнение на дискретный спектр оператора  $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}^1}$ , но в этом случае  $h = \varepsilon$ ,  $E = \lambda$ , а  $V = 0$ . Более того, это уравнение легко решить относительно  $\psi$ . Пространство его решений на  $\mathbb{R}$  — одна из трех линейных

оболочек (в зависимости от  $\text{sign } \lambda$ ):

$$\left[ \begin{array}{ll} \left\langle \cos \frac{\sqrt{\lambda}x}{\varepsilon}, \sin \frac{\sqrt{\lambda}x}{\varepsilon} \right\rangle, & \text{при } \lambda > 0, \\ \langle 1, x \rangle, & \text{при } \lambda = 0, \\ \left\langle e^{\frac{\sqrt{\lambda}x}{\varepsilon}}, e^{-\frac{\sqrt{\lambda}x}{\varepsilon}} \right\rangle, & \text{при } \lambda < 0. \end{array} \right.$$

Нетривиально пересекаться с множеством функций на  $\mathbb{T}^1$  может только первое из этих пространств (то, что отвечает  $\lambda > 0$ ). Причем происходит это тогда и только тогда, когда  $\frac{\sqrt{\lambda}}{\varepsilon} \in \frac{2\pi}{T_2}\mathbb{N}$ . Значит, случай  $m = 0$  дает вклад  $\left\{ \lambda \in (0, +\infty) \mid \sqrt{\lambda} \in \frac{2\pi\varepsilon}{T_2}\mathbb{N} \right\}$  в дискретный спектр оператора  $\mathfrak{D}_{\mathbb{T}^2}$ .

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать именно оператор  $\mathfrak{D}_{\mathbb{S}^1}$  заданный на окружности  $\mathbb{S}^1$ . Отметим, что так как функция  $V(x)$  взята нами аналитичной на окружности, то она непрерывна на ней и достигает своих минимума и максимума. Обозначим их  $\min V = \min_{x \in \mathbb{S}^1} V(x)$  и  $\max V = \max_{x \in \mathbb{S}^1} V(x)$ . Кроме того, для упрощения обозначений, при работе с оператором на окружности, его период  $T_2$  будем обозначать  $T = T_2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Уравнение  $D_{\mathbb{S}^1}\psi - E\psi = -h^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} + (iV(z) - E)\psi = 0$  — линейное однородное с целыми аналитическими коэффициентами. Поэтому все его решения  $\psi$  образуют двумерное линейное подпространство в пространстве целых аналитических функций. Таким образом, все (периодичные с периодом  $T$ ) собственные функции рассматриваемого оператора лежат в пространстве  $\mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$  периодических целых аналитических функций. Значит, можно рассматривать оператор, порожденный дифференциальным выражением  $D_{\mathbb{S}^1}$  как линейный оператор  $\mathfrak{D}$ , на векторном пространстве  $\mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$ . Итак, нас интересует вопрос, какова асимптотика собственных значений оператора  $\mathfrak{D}$ .

#### 1.4. Постановка задачи и формулировка результата

В первой части работы найден псевдоспектр оператора (1). Пусть задано пространство функций, снабженное скалярным произведением:

$$\Phi = (\{\varphi(x)\}, (\cdot, \cdot)).$$

Обозначим через  $\|\cdot\|$  норму на этом пространстве, порожденную этим скалярным произведением. Кроме того, пусть задан линейный (неограниченный) оператор

$$A = A(x, \varepsilon): \Phi_0 \rightarrow \Phi, \quad \overline{\Phi_0} = \Phi,$$

зависящий от параметра  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Точка  $\lambda$  принадлежит  $\varepsilon$ -псевдоспектру оператора  $A$ , зависящего от параметра  $\varepsilon$ , тогда и только тогда, когда найдется функция  $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$ , принадлежащая единичной сфере пространства  $\Phi_0$  (то есть,

$\|\varphi(\cdot, \varepsilon)\| = 1$ ) для любого фиксированного  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ , и обладающая свойством

$$\|A(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) - \lambda\varphi(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 + 0.$$

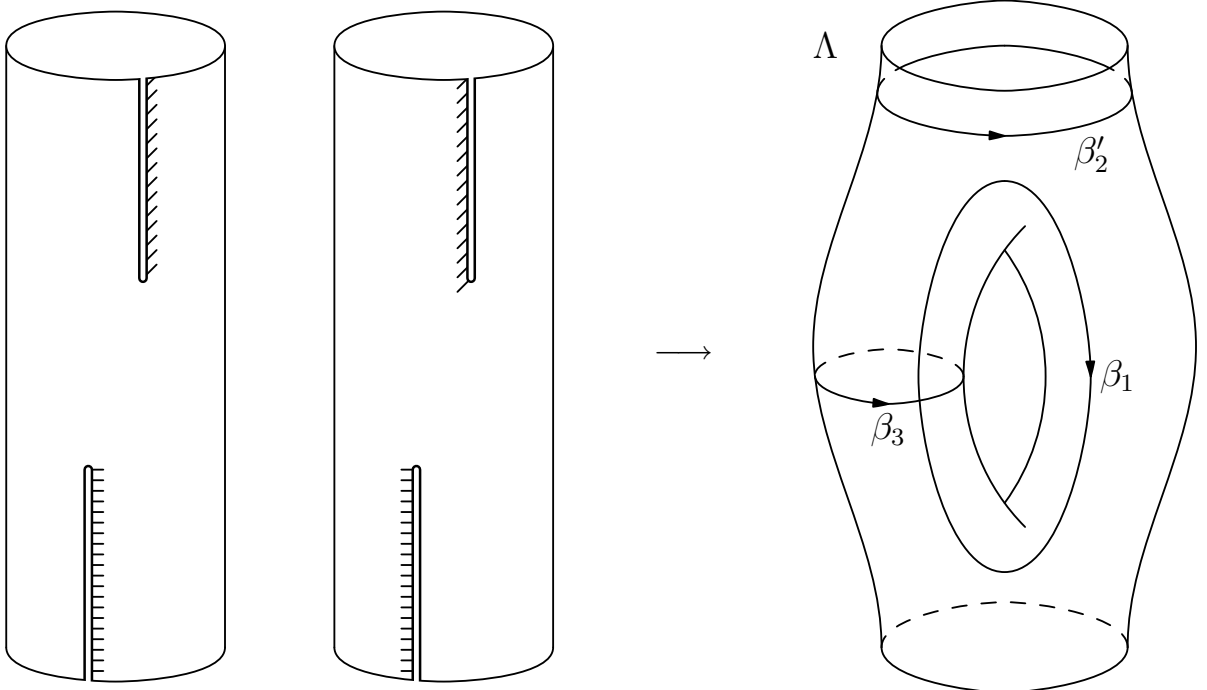
$\varepsilon$ -псевдоспектр оператора  $A$  будем обозначать  $\text{PSP}_\varepsilon(A)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что  $\varepsilon$ -псевдоспектр зависит не от значения  $\varepsilon$ , а от того, как параметр  $\varepsilon$  входит в оператор  $A(x, \varepsilon)$ .

Основной результат первой части настоящей работы теперь можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА 1. В случае непостоянной  $V(x)$  для любого  $N$  из натурального ряда  $h^N$ -псевдоспектр оператора  $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$ , заданного на окружности, равен полуполосе  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .

Целью второй части настоящей работы является описание асимптотики при  $h \rightarrow 0$  спектра оператора (1), в частном случае  $V(x) = \cos x$ . Оказывается, эта асимптотика выражается через интегралы от голоморфной формы по циклам на римановой поверхности  $\Lambda$ , задаваемой в  $\mathbb{C}^2/T\mathbb{Z}$  уравнением  $p^2 + i \cos x = E$  ( $p \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ ). Эта (некомпактная) поверхность при  $E \neq \pm i$  гомеоморфна тору с двумя дырками и получается склейкой двух экземпляров цилиндра  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , разрезанного по лучам, соединяющим нули функции  $i \cos(x) - E$  с бесконечностями  $\pm i\infty$ :



Обозначим  $\beta_1, \beta_2 = \beta_1 + \beta'_2$  и  $\beta_3$  — базисные циклы на  $\Lambda$ , как показано на рисунке.

Основной результат второй части работы — следующая теорема:



ТЕОРЕМА 4. Пусть  $E$  — таково, что на поверхности  $\Lambda$  существует цикл  $\beta \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , для которого

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\beta} p dz \in \mathbb{Z} + \frac{\mu(\beta)}{2}.$$

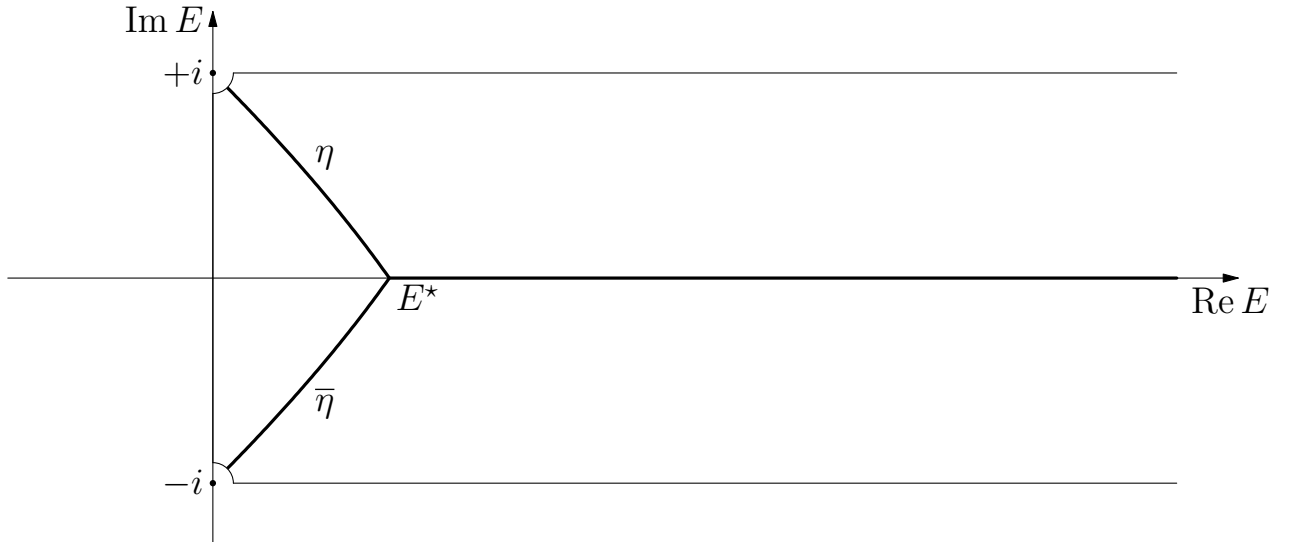
Тогда существует собственное число  $\lambda$  оператора  $\mathfrak{D}$ , для которого  $\lambda - E = O(h^2)$ . Здесь  $\mu(\beta_1) = \mu(\beta_2) = 1$ ,  $\mu(\beta_3) = 0$ .

Условия в теореме 4 похожи на условия квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова лагранжевых многообразий в  $\mathbb{R}^{2n}$  (см., например, [7, 6]), описывающие спектр оператора вида  $H(x, -ih\frac{\partial}{\partial x})$ . Отметим однако, что в теории квазиклассического квантования требуется выполнение условий квантования для всех циклов на лагранжевом многообразии, тогда как в нашем случае достаточно выполнения условия квантования хотя бы для одного из циклов  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$ .

Условия в теореме 4 можно записать в виде совокупности трех уравнений при  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi h} \int_{\beta_1} p dz = m_1 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\pi h} \int_{\beta_2} p dz = m_2 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\pi h} \int_{\beta_3} p dz = m_3. \end{cases}$$

Тем самым выделяется три серии собственных чисел — каждая соответствует решениям одного из трех уравнений этой совокупности. Оказывается, при  $h \rightarrow 0$  собственные значения концентрируются в  $O(h^2)$ -окрестности графа на комплексной плоскости.

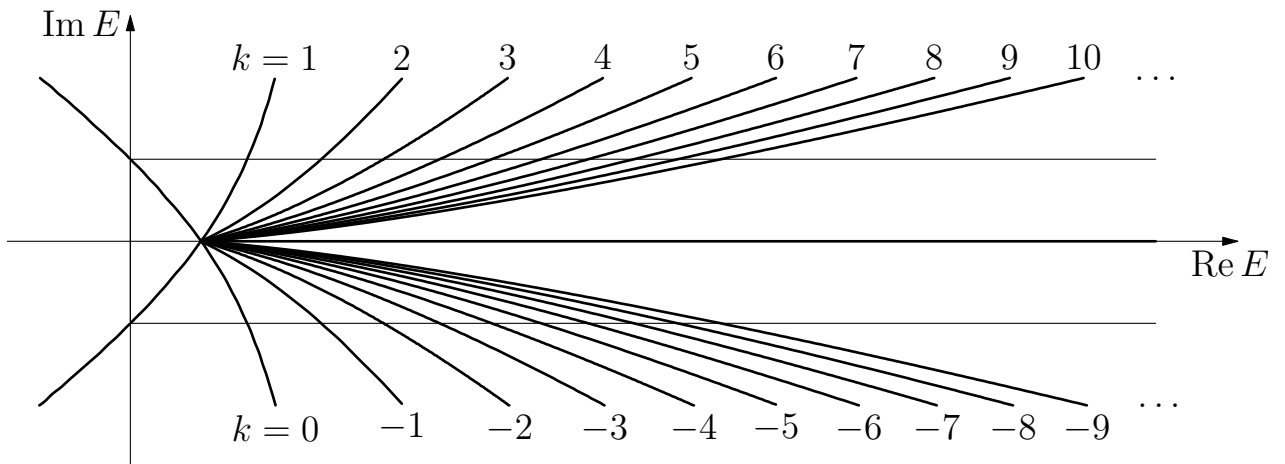


Ребра этого графа удовлетворяют уравнениям  $\frac{1}{2\pi h} \operatorname{Im} \int_{\beta_j} p dz = 0$  (однако не все точки, удовлетворяющие этим уравнениям лежат на ребрах этого графа — ребра являются частями кривых, задаваемых этими уравнениями). Назовем этот граф предельным спектральным графом оператора  $\mathfrak{D}$ . Вне окрестностей

точек  $\pm i$  предельный спектральный граф выглядит как показано на рисунке на стр. 9.

Предельный спектральный граф связан с графом Стокса уравнения  $(\mathfrak{D} - E)\varphi = 0$ . Напомним, что граф Стокса определяется следующим образом. Обозначим через  $z_{\pm}(E)$  решения уравнения  $i \cos x = E$  на цилиндре; они называются точками поворота. Для каждой из этих точек рассмотрим три (при  $E \neq \pm i$ ) выходящие из нее кривые, заданные уравнением  $\operatorname{Re} \int_{z_{\pm}}^z \sqrt{i \cos w - E} dw = 0$ . Эти линии называются линиями Стокса, их объединение образует граф Стокса. Оказывается, предельный спектральный граф оператора (1) обладает следующим свойством: если  $E$  принадлежит спектральному графу, соответствующий граф Стокса содержит конечную линию Стокса. Другими словами, в этом случае, линия Стокса, выходящая из одной точки поворота, попадает в другую.

Существование конечной линии Стокса — необходимое условие, однако оно не является достаточным. Дело в том, что есть топологическая конфигурация графа Стокса, имеющая конечную линию Стокса, но не вносящая вклад в спектр. Кривых в  $E$ -плоскости, на которых реализуются графы Стокса, содержащие конечную линию Стокса, счетное число. На следующей картинке показано семейство таких кривых, занумерованных числом  $k$  — на  $k$ -ой кривой реализуется граф Стокса, в котором точки  $z_-$  и  $z_+ - 2\pi k$  соединены конечной линией Стокса. Кроме того, на луче, выходящем из точки пересечения этого семейства кривых, и идущем в  $+\infty$ , реализуется граф Стокса, в котором точки  $z_+$  и  $z_+ + 2\pi$  соединены конечной линией Стокса. Здесь также показаны границы числового образа оператора  $\mathfrak{D}$ , который является полуполосой  $[0, +\infty) + i(-1, 1)$ .



План доказательства теоремы следующий. Для того, чтобы найти спектр оператора (1), воспользуемся ВКБ-приближением. Для этого, прежде всего выясним, как может выглядеть граф Стокса. Этот граф зависит от параметра  $E$  и при изменении  $E$  может перестраиваться. Другими словами, в зависимости от  $E$  возможны топологически различные случаи реализаций графа Стокса. После того как все возможные случаи будут найдены, в каждом из

них вычислим матрицу монодромии (сдвига аргумента на период) оператора (1). Эта матрица позволит найти при каких  $E$  у исследуемого оператора есть периодичное решение; точнее из условия на матрицу монодромии мы получим условие на спектр оператора (1).

При сравнении теоремы 1 с теоремой 4 видим насколько сильно отличается спектр от псевдоспектра.

### 1.5. Апробация диссертации

- Работа обсуждалась на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика А. Т. Фоменко (2006 г.).
- Результаты, полученные в диссертации, докладывались на «XXVII конференции молодых ученых» (11–22 апреля 2005, Москва).
- А также, на международной конференции «Days on Diffraction» (30 мая – 2 июня 2006, Санкт–Петербург).
- В ходе выполнения работы, получаемые результаты обсуждались на семинаре «Несамосопряженные операторы» под руководством профессора А. Г. Костюченко и профессора А. А. Шкаликова (2005 г.).
- А также, на семинаре «Теория рассеяния» под руководством профессора Р. А. Минлоса (2005, 2008 гг.).

### 1.6. Краткое содержание работы

**Введение.** Во введении приводится обзор ранее полученных результатов, связанных с темой диссертации. Вводится оператор

$$\mathfrak{D} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x), \quad (1)$$

заданный на окружности ( $V(x)$  — периодичная действительная аналитическая функция) и зависящий от малого параметра  $h$ . Дается описание задач, приводящих к исследованию спектра оператора такого вида. Формулируются основные определения и результаты работы.

**Глава 1.** В первой главе находится псевдоспектр рассматриваемой задачи, показывается, что псевдоспектр заполняет полуполосу.

В разделе 2.1 приводится определение псевдоспектра и доказываются его основные, с точки зрения дальнейшего рассмотрения, свойства.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть задано пространство функций, снабженное скалярным произведением:

$$\Phi = (\{\varphi(x)\}, (\cdot, \cdot)) .$$

Кроме того, пусть задан линейный (неограниченный) оператор

$$A = A(x, \varepsilon): \Phi_0 \rightarrow \Phi, \quad \overline{\Phi_0} = \Phi,$$

зависящий от параметра  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ . Точка  $\lambda$  принадлежит  $\varepsilon$ -псевдоспектру оператора  $A = A(x, \varepsilon)$  тогда и только тогда, когда найдется функция  $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$ , принадлежащая единичной сфере пространства  $\Phi_0$  (то есть,  $\|\varphi(\cdot, \varepsilon)\| = 1$ ) для любого фиксированного  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ , и обладающая свойством

$$\|A(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) - \lambda\varphi(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 + 0. \quad (6)$$

$\varepsilon$ -псевдоспектр оператора  $A$  будем обозначать  $\text{PSP}_\varepsilon(A)$ .

**ЛЕММА 1.**  $\varepsilon$ -псевдоспектр замкнут.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Числовым образом оператора  $A$  называется множество

$$\{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Phi_0, \|\psi\| = 1\}.$$

**ЛЕММА 2.**  $\varepsilon$ -псевдоспектр оператора  $A$  содержится в замыкании его числового образа.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Пусть  $\varepsilon(h)$  — непрерывная обратимая функция параметра  $h$  и  $\varepsilon(0 + 0) = 0 + 0$ . Тогда  $\varepsilon(h)$ -псевдоспектр оператора  $\mathfrak{D}$  содержится в полуполосе  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .

В разделе 2.2 конструктивно доказывается, что псевдоспектр рассматриваемого оператора плотен в его числовом образе. Обозначим  $A_V = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{S}^1 : V(x) = a, V'(x) \neq 0\}$ .  $A_V$  — плотное подмножество  $(\min V, \max V)$ .

**ЛЕММА 3.** Для любого  $E \in (0, +\infty) + iA_V$  при любом натуральном  $N$  существует функция  $\psi_N$  с нормой  $\|\psi_N\| = 1$ , удовлетворяющая равенству (6), в котором  $\varepsilon = h^N$ .

В разделе 2.3, на основе результатов разделов 2.1 и 2.2 доказывается

**ТЕОРЕМА 1.** В случае непостоянной  $V(x)$  для любого  $N$  из натурального ряда  $h^N$ -псевдоспектр оператора  $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$ , заданного на окружности, равен полуполосе  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .

**Глава 2.** Во второй главе проводится исследование спектра рассматриваемой задачи в частном случае  $V(x) = \cos x$ . Показывается связь между найденным спектром и геометрическими характеристиками римановой поверхности постоянной энергии задачи. А именно, показывается, что точки спектра выделяются условиями на интегралы формы  $p dz$  по циклам указанной римановой поверхности. Эти условия подобны условиям Бора–Зоммерфельда–Маслова для самосопряженного случая, но имеются и существенные отличия от самосопряженного случая.

В разделе 3.1 приводится план нахождения спектра. С помощью ВКБ-приближения построим асимптотику оператора монодромии. Условие “след равен определитель плюс один” на этот оператор выделяет точки спектра. Доказывается

ЛЕММА 4. При любом  $h > 0$  собственные значения оператора  $\mathfrak{D}$  с потенциалом  $iV(z) = i \cos z$  симметричны относительно оси  $\text{Re}$ .

В разделе 3.2 находятся точки поворота, необходимые для построения ВКБ-приближения, и доказываются некоторые их свойства как функций спектрального параметра  $E$ .

ЛЕММА 5. В случае  $V(z) = \cos z$  на периоде (на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ ) этих точек две (они совпадают при  $E = \pm i$ ). Это точки  $z_{\pm} = \pm \arccos(-iE)$ .

ЛЕММА 6. Точки поворота  $z_{\pm}(E)$  являются непрерывными функциями параметра  $E$ .

ЛЕММА 7. Функция

$$\xi(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{i \cos z - E} dz$$

непрерывно дифференцируема по параметру  $E \in \mathbb{C} \setminus (U(i) \cup U(-i))$ , где в качестве  $U(\pm i)$  берутся произвольные окрестности точек  $\pm i$ .

В разделе 3.3 доказываются вспомогательные утверждения, которые будут использованы в дальнейшем.

ЛЕММА 8. Для любого  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{z_-(E)}^{z_+(E)+a} \sqrt{i \cos z - E} dz = \overline{\int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})-a-2\pi} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz}.$$

ЛЕММА 9. При  $E \in \mathbb{C} \setminus i(-1, 1)$

$$I(E) = \text{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0,$$

тогда и только тогда, когда  $E$  — действительное положительное число.

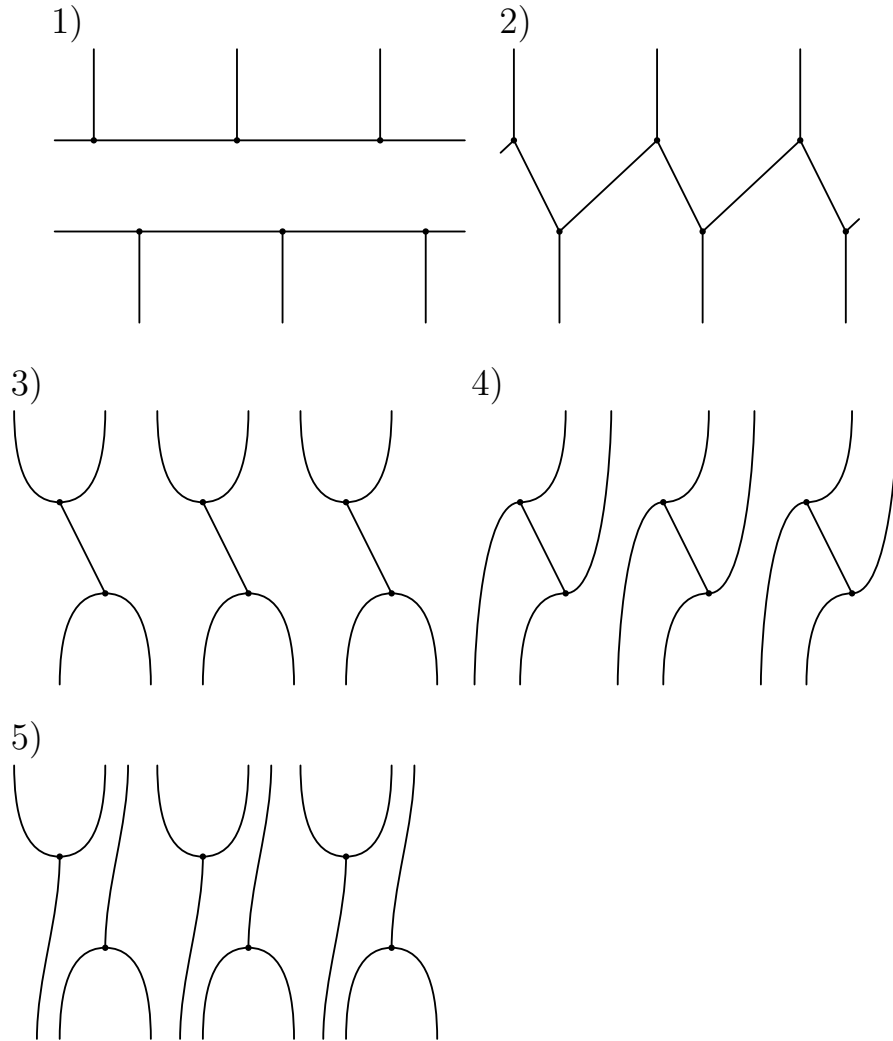
ЛЕММА 10. Уравнение

$$J(E) = \text{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = 0$$

на параметр  $E \in (0, +\infty)$  имеет ровно одно решение  $E = E^*$ . Причем  $E^* \in (0, \text{sh} \frac{\pi}{2})$ .

В разделе 3.4 дается определение линий Стокса, необходимых для построения ВКБ-асимптотики, указываются их известные свойства и доказываются

ЛЕММА 11. В случае  $iV(z) = i \cos z$  имеется пять топологически различных случаев взаимного расположения линий Стокса.



На основе вспомогательных утверждений доказываются

ЛЕММА 12. Если точки  $z_+$  и  $z_+ + 2\pi$  соединены в графе Стокса (то есть, соединены криволинейной ломаной из линий Стокса), то

$$I(E) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0.$$

ЛЕММА 13. Если точки  $z_+$  и  $z_-$  соединены в графе Стокса, то

$$J(E) = \operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = \xi(z_-, z_+) = 0.$$

Если соединены точки  $z_+ - 2\pi k$  и  $z_-$ , то

$$\xi(z_-, z_+ - 2\pi k) = 0.$$

В частности, при  $k = -1$  имеем:  $J(\bar{E}) = 0$ .

ЛЕММА 14. *Случай 1 топологической конфигурации графа Стокса может реализоваться, только если  $E \in (0, +\infty)$ . Случай 2 топологической конфигурации графа Стокса может реализоваться только при  $E = E^*$ .*

ЛЕММА 15. *Случаи 3 и 4 топологической конфигурации графа Стокса могут реализоваться только на аналитических кривых в  $E$ -плоскости, на каждой из которых выполняется условие*

$$\operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)-2\pi k} \sqrt{i \cos z - E} dz = 0,$$

для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ . Все эти кривые (обозначим их  $\eta_k$ ) проходят через точку  $E^*$  и пересекают луч  $(0, +\infty)$  только в этой точке. Кривые  $\eta_k$  и  $\eta_{-k+1}$  симметричны друг другу относительно оси  $\operatorname{Re} E$ :  $\eta_{-k+1} = \overline{\eta_k}$ . Кривая  $\eta_0$  проходит через точку  $i$ .

В разделе 3.5 изучается реализуемость топологических случаев.

ЛЕММА 16. *В окрестности точки  $E^*$  топологический случай 4 реализуется только при  $k = 0$  и  $k = -1$ .*

ЛЕММА 17. *Внутри полуплоскости  $i(-1, 1) + (0, +\infty)$  смена топологического вида графа Стокса на кривых  $\eta_k$  и на луче  $(0, +\infty)$  может происходить только в точке  $E^*$ .*

ЛЕММА 18. *Случай 4 реализуется на интервале кривой  $\eta$  ( $\overline{\eta}$ ), лежащем между точкой  $E^*$  и точкой  $i$  (соответственно  $-i$ ). Вне замыкания указанных интервалов на кривых  $\eta$  и  $\overline{\eta}$  реализуется топологический случай 3.*

ЛЕММА 19. *Топологический случай 1) графа Стокса реализуется на открытом луче  $(E^*, +\infty)$ . Случай 4) — на интервале кривой  $\eta$ , соединяющем точки  $i$  и  $E^*$  (при этом в графе Стокса конечной линией Стокса соединены точки  $z_-$  и  $z_+$ ) и на интервале кривой  $\overline{\eta}$ , соединяющем точки  $-i$  и  $E^*$  (при этом в графе Стокса конечной линией Стокса соединены точки  $z_-$  и  $z_+ - 2\pi$ ). Случай 2) реализуется в точке  $E^*$ . В остальных точках полуплоскости  $[0, +\infty) + i[-1, 1]$ , кроме точек  $\pm i$ , реализуются случаи 3) и 5).*

В разделе 3.6 показывается, что условие принадлежности точки  $E$  спектру изучаемой задачи задается условием  $\operatorname{tr} M = \det M + 1$  на матрицу монодромии  $M$ .

В разделе 3.7 строится асимптотика спектра оператора  $\mathfrak{D}$  (в частном случае  $V(x) = \cos x$ ), для каждого из пяти топологических случаев взаимного расположения линий Стокса.

ТЕОРЕМА 2. *В асимптотику спектра оператора  $\mathfrak{D}$  вклад вносят только топологические случаи 1, 2 и 4. В случае 1 принадлежность точки  $E$*

спектру определяется условием

$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_0^T \sqrt{iV(x) - E} dx \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h), \quad (22)$$

причем все такие точки лежат на оси  $\operatorname{Re} E$  точно. В случае 2 принадлежность точки  $E$  определяется тем, удовлетворяет ли  $E$  или  $\bar{E}$  условию

$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E} dz \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h). \quad (23)$$

В окрестностях точек, удовлетворяющих асимптотикам (22) и (23) (возможно, кроме точки  $E^*$ ), лежит ровно по одной точке спектра (при достаточно малых  $h$ ).

В разделе 3.8 полученные результаты объединяются в

**ТЕОРЕМА 3.** *Вне произвольных окрестностей точек  $\pm i$  асимптотика дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}$  при  $iV(z) = i \cos z$  сосредоточена на трех кривых: луче  $(E^*, +\infty)$ , отрезке кривой  $\eta$ , соединяющем точку  $i$  и точку  $E^*$ , и отрезке кривой  $\bar{\eta}$ , соединяющем точку  $-i$  и точку  $E^*$ . На луче  $(E^*, +\infty)$  асимптотика дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}$  выделяется условием*

$$\operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx \in h(2\pi\mathbb{Z} + O(h)),$$

на отрезке кривой  $\eta$  условием

$$\operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E} dz \in h \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h) \right),$$

а на отрезке сопряженной кривой  $\bar{\eta}$  имеем сопряженное условие

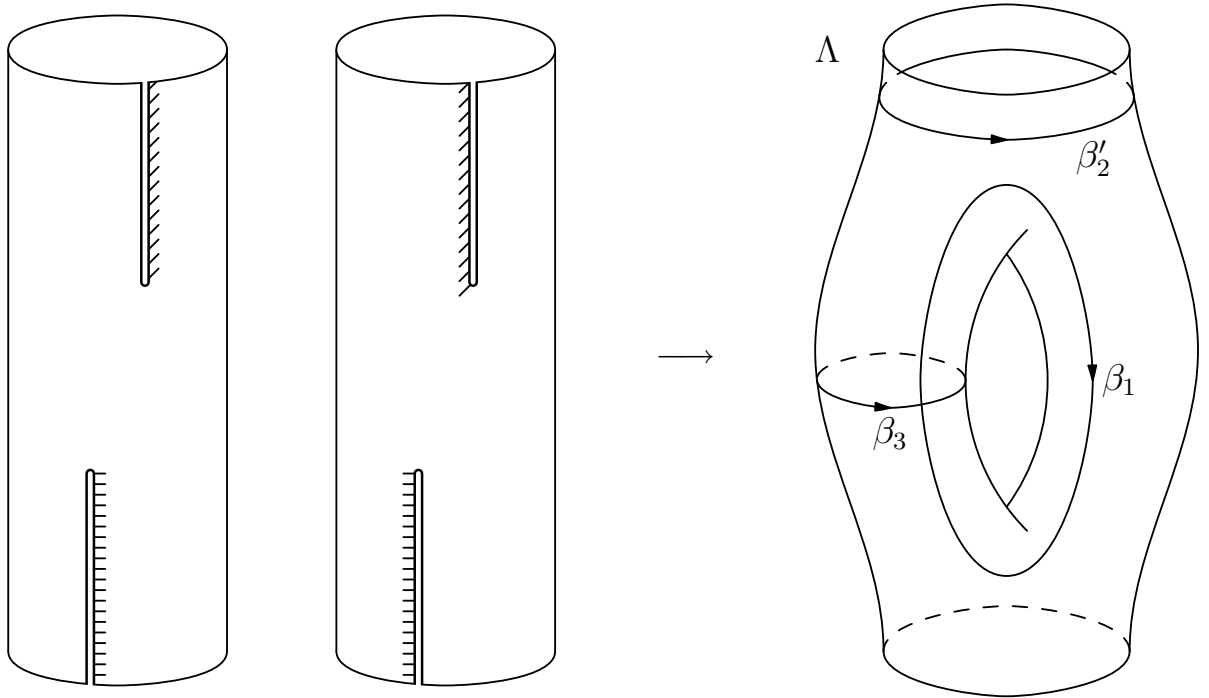
$$\operatorname{Im} \int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz \in h \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h) \right).$$

Рассмотрим поверхность  $p^2 + i \cos z = E$  в кокасательном к цилиндру  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$  пространстве  $\{(p, z) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/T\mathbb{Z})\}$ . Это — риманова поверхность функции  $p(z) = i\sqrt{i \cos z - E}$ . Она получается склейкой вдоль разреза («перехлестом») двух экземпляров цилиндра  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , разрезанного по лучам, соединяющим точки  $z_-$  и  $z_+$  с бесконечностями  $-i\infty$  и  $+i\infty$ . Эта риманова поверхность — тор с двумя дырками, на ней имеются три базисных цикла:

- (1)  $\beta_1$  — цикл, идущий из точки  $z_-$  в точку  $z_+$  по левому экземпляру цилиндра и возвращающийся в точку  $z_-$  по правому;
- (2)  $\beta'_2$  — цикл, обходящий дырку  $+i\infty$  в направлении возрастания  $\operatorname{Re} z$ ;



- (3)  $\beta_3$  — цикл, обходящий один из экземпляров цилиндра в направлении возрастания  $\operatorname{Re} z$  и не пересекающий разреза.



С учетом этого, интегралы в теореме 3 можно переписать в виде интегралов по путям от функции  $p = p(z, E)$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \int_{\beta_1} p dz \in h(\pi + 2\pi\mathbb{Z} + O(h)) \\ \int_{\beta_2} p dz \in h(\pi + 2\pi\mathbb{Z} + O(h)), \quad \text{где } \beta_2 = \beta_1 + \beta'_2 \\ \int_{\beta_3} p dz \in h(2\pi\mathbb{Z} + O(h)). \end{array} \right.$$

В таком виде полученные условия обычно называются условиями квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова.

В заключительной секции 3.9 приводится рисунок спектрального графа (предельного множества для спектра при  $h \rightarrow 0+0$ ) для случая  $V(x) = \cos x$ . Это одномерное подмножество числового образа, в то время, как псевдоспектр заполняет всю полуполосу числового образа.

## 1.7. Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико–математических наук, профессору А. И. Шафаревичу — за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико–математического факультета МГУ за творческую атмосферу

и доброжелательное отношение. Автор также благодарен руководителям и участникам семинаров механико–математического факультета, на которых докладывались результаты диссертации, за множество полезных замечаний.

# Псевдоспектр.

## 2.1. Определение и основные свойства

Кроме спектра, интерес представляет также псевдоспектр оператора  $\mathfrak{D}$ . Он будет, как мы покажем в дальнейшем, гораздо шире самого спектра.

Пусть задано пространство функций, снабженное скалярным произведением:

$$\Phi = (\{\varphi(x)\}, (\cdot, \cdot)) .$$

Обозначим через  $\|\cdot\|$  норму на этом пространстве, порожденную этим скалярным произведением. Кроме того, пусть задан линейный (неограниченный) оператор

$$A = A(x, \varepsilon): \Phi_0 \rightarrow \Phi, \quad \overline{\Phi_0} = \Phi,$$

зависящий от параметра  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Точка  $\lambda$  принадлежит  $\varepsilon$ -псевдоспектру оператора  $A$ , зависящего от параметра  $\varepsilon$ , тогда и только тогда, когда найдется функция  $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$ , принадлежащая единичной сфере пространства  $\Phi_0$  (то есть,  $\|\varphi(\cdot, \varepsilon)\| = 1$ ) для любого фиксированного  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ , и обладающая свойством

$$\|A(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) - \lambda\varphi(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 + 0. \quad (6)$$

$\varepsilon$ -псевдоспектр оператора  $A$  будем обозначать  $\text{PSP}_\varepsilon(A)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Отметим, что  $\varepsilon$ -псевдоспектр зависит не от значения  $\varepsilon$ , а от того, как параметр  $\varepsilon$  входит в оператор  $A(x, \varepsilon)$ .

**ЛЕММА 1.**  $\varepsilon$ -псевдоспектр замкнут.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольную точку из замыкания псевдоспектра:  $\lambda_0 \in \overline{\text{PSP}_\varepsilon(A)}$ . Тогда по определению замыкания имеем

$$(\forall \delta > 0)(\exists \lambda_\delta \in \text{PSP}_\varepsilon(A)) : |\lambda_0 - \lambda_\delta| < \delta.$$

Это верно в том числе для  $\delta = \varepsilon$ . Кроме того, по определению  $\varepsilon$ -псевдоспектра

$$(\forall \delta > 0)\exists \varphi_\delta(x, \varepsilon) \in \{\varphi_\delta(\cdot, \varepsilon) \in \Phi_0 \mid \|\varphi_\delta(\cdot, \varepsilon)\| = 1\} : \|A\varphi_\delta - \lambda_\delta\varphi_\delta\| = O(\varepsilon).$$

Беря  $\delta = \varepsilon$  и объединяя написанное выше (а также обозначая диагональную последовательность  $\varphi^*(\cdot, \varepsilon) = \varphi_\delta(\cdot, \varepsilon)|_{\delta=\varepsilon}$ ), получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \|A\varphi^*(\cdot, \varepsilon) - \lambda_0\varphi^*(\cdot, \varepsilon)\| &= \|A\varphi^* - \lambda_\varepsilon\varphi^* + (\lambda_\varepsilon - \lambda_0)\varphi^*\| \leq \\ &\leq \|A\varphi^* - \lambda_\varepsilon\varphi^*\| + |\lambda_\varepsilon - \lambda_0| \cdot \|\varphi^*\| < O(\varepsilon) + \varepsilon \cdot 1 = O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Значит  $\|A\varphi^* - \lambda_0\varphi^*\| = O(\varepsilon)$ , следовательно  $\lambda_0$  — точка  $\varepsilon$ -псевдоспектра. Другими словами,  $\overline{\text{PSP}_\varepsilon(A)} \subseteq \text{PSP}_\varepsilon(A)$ , значит  $\varepsilon$ -псевдоспектр замкнут.  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Числовым образом оператора  $A$  называется множество

$$\text{Img } A = \{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Phi_0, \|\psi\| = 1\}.$$

ЛЕММА 2.  $\varepsilon$ -псевдоспектр оператора  $A$  содержится в замыкании его числового образа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть  $E$  — точка  $\varepsilon$ -псевдоспектра, тогда найдется функция  $\psi$ ,  $\|\psi\| = 1$ , удовлетворяющая равенству  $A\psi = E\psi + O(\varepsilon)$ . Умножим скалярно это равенство на  $\psi$ :

$$(A\psi, \psi) = (E\psi, \psi) + (O(\varepsilon), \psi).$$

С учетом того, что  $(\psi, \psi) = \|\psi\| = 1$  и  $(O(\varepsilon), \psi) = O(\varepsilon)$  получаем

$$(A\psi, \psi) = E + O(\varepsilon).$$

Другими словами,  $E \in \{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Psi_0, \|\psi\| = 1\} + O(\varepsilon)$ . Устремляя  $\varepsilon$  к нулю получаем требуемое:  $E \in \overline{\{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Psi_0, \|\psi\| = 1\}}$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть  $\varepsilon(h)$  — непрерывная обратимая функция параметра  $h$  и  $\varepsilon(0+0) = 0+0$ . Тогда  $\varepsilon(h)$ -псевдоспектр оператора  $\mathfrak{D}$  содержится в полуполосе  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае  $\Phi = L_2(\mathbb{S}^1)$ ,  $\Phi_0 = W_2^2(\mathbb{S}^1)$ ,  $A(x, \varepsilon) = D_{\mathbb{S}^1} = -h(\varepsilon)^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$ . Скалярное произведение на пространстве  $L_2(\mathbb{S}^1)$  задается формулой

$$(u, v) = \int_{\mathbb{S}^1} u \bar{v} dx.$$

Распишем выражение  $(D_{\mathbb{S}^1}\psi, \psi)$ :

$$(D_{\mathbb{S}^1}\psi, \psi) = (-h^2\psi'' + iV\psi, \psi) = -h^2(\psi'', \psi) + i(V\psi, \psi).$$

Учитывая, что  $(\psi'', \psi) = -(\psi', \psi')$  (так как  $\psi$  периодична), получаем

$$(D_{\mathbb{S}^1}\psi, \psi) = h^2(\psi', \psi') + i(V\psi, \psi).$$

В правой части первое слагаемое действительное и неотрицательное, а второе чисто мнимое и для него легко сделать оценку (из теоремы о среднем, так как функция  $\psi(x)\overline{\psi(x)} = |\psi(x)|^2 \geq 0$  не меняет знак)

$$\begin{aligned} (V\psi, \psi) &= \int_{\mathbb{S}^1} V(x)\psi(x)\overline{\psi(x)} dx = V(x)|_{x=x_0 \in \mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \psi(x)\overline{\psi(x)} dx \in \\ &\in \left[ \min_{x \in \mathbb{S}^1} V(x), \max_{x \in \mathbb{S}^1} V(x) \right] \cdot \|\psi\| = [\min V, \max V]. \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что

$$\{(D_{\mathbb{S}^1}\psi, \psi) \mid \psi \in W_2^2(\mathbb{S}^1), \|\psi\| = 1\} \subseteq [0, +\infty) + i[\min V, \max V],$$

следовательно

$$\begin{aligned} \text{PSP}_{h^N} \left( -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x) \right) &\in \overline{[0, +\infty) + i[\min V, \max V]} \\ &= [0, +\infty) + i[\min V, \max V]. \end{aligned}$$

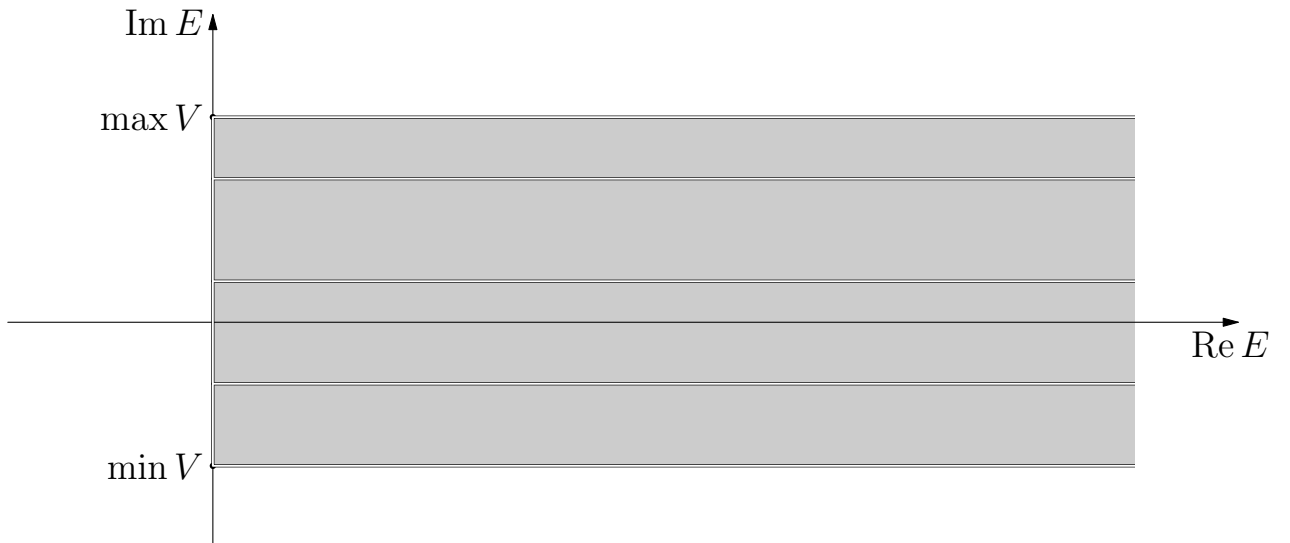
□

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Для аналитической  $V(x) \not\equiv \text{const}$  числовой образ оператора  $\mathfrak{D}$  это полуполоса  $[0, +\infty) + i(\min V, \max V)$ . Действительно, в оценке для интеграла  $(V\psi, \psi)$  равенство  $\min V$  реализуется только при  $V|_{\text{supp } \psi} = \min V$ . Так как  $\psi$  непрерывна и не равна нулю в некоторой точке, то это означает постоянство  $V$  на некотором интервале. В этом случае аналитическая  $V$  должна быть константой. То есть, в оценке для интеграла  $(V\psi, \psi)$  значение  $\min V$  не реализуется при  $V \not\equiv \text{const}$ . Аналогично для  $\max V$ . При этом можно сколь угодно близко приблизиться к  $\min V$  (аналогично к  $\max V$ ), беря в качестве  $\psi$  функции, сосредоточенные в окрестности точки  $\text{argmin } V$  (соответственно в окрестности точки  $\text{argmax } V$ ).

## 2.2. Псевдоспектр плотен в числовом образе

Утверждение этого раздела было доказано А. И. Шафаревичем. Аналогичные результаты были получены в [18] и развиты в [22].

Обозначим  $A_V = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{S}^1 : V(x) = a, V'(x) \neq 0\}$ . Очевидно вложение  $A_V \subseteq (\min V, \max V)$ , кроме того множество  $(\min V, \max V) \setminus A_V$  конечно. Если бы оно было бесконечно, у аналитической функции  $V'$  на компакте  $\mathbb{S}^1$  было бы бесконечное число нулей. Тогда  $V' \equiv 0$ ,  $V = \text{const}$  и  $[\min V, \max V] = \{\cdot\}$ , но одноточечное множество не может содержать бесконечное подмножество, таким образом  $A_V$  — это интервал  $(\min V, \max V)$ , из которого выкинуто конечное число точек (или  $A_V = \emptyset$  для  $V = \text{const}$ ). Случай постоянного  $V$  тривиален и мы его уже рассмотрели. В дальнейшем, будем считать что  $V \not\equiv \text{const}$ .



Для любого натурального  $N$  мы покажем, что  $h^N$ -псевдоспектр содержит множество  $(0, +\infty) + iA_V$  — набор конечного числа полуполос, замыканием которого (в случае непостоянного  $V$ ) является полуполоса  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .

**ЛЕММА 3 (Шафаревич).** *Для любого  $E \in (0, +\infty) + iA_V$  при любом натуральном  $N$  существует функция  $\psi_N$  с нормой  $\|\psi_N\| = 1$ , удовлетворяющая равенству (6), в котором  $\varepsilon = h^N$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем произвольные  $E \in (0, +\infty) + iA_V$  и  $N \in \mathbb{N}$ . Функцию  $\psi_N$  построим в следующем виде

$$\psi_N(x) = e^{\frac{iS(x)}{h}} \sum_{\ell=0}^{N-2} h^\ell \chi_\ell(x). \quad (7)$$

Мы не будем писать индекс  $N$  у функций  $S$  и  $\chi_\ell$  для того чтобы не загромождать запись, кроме того, отметим, что под  $h^0$  подразумевается единица. При подстановке представления (7) в уравнение (6) получаем следующее условие:

$$\begin{aligned} ((S')^2 + iV(x) - E) e^{\frac{iS(x)}{h}} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^\ell \chi_\ell(x) - 2iS' e^{\frac{iS(x)}{h}} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^{\ell+1} \chi'_\ell(x) - \\ - iS'' e^{\frac{iS(x)}{h}} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^{\ell+1} \chi_\ell(x) - e^{\frac{iS(x)}{h}} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^{\ell+2} \chi''_\ell(x) = O(h^N). \end{aligned}$$

Это условие можно расписать по (явным) степеням  $h$ , тогда получим систему (здесь для сокращения записи обозначено  $Q_S = ((S')^2 + iV(x) - E)$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} ((S')^2 + iV(x) - E) = Q_S \\ e^{\frac{iS(x)}{h}} \chi_0 Q_S = O(h^N) \\ e^{\frac{iS(x)}{h}} \chi_1 Q_S - (2iS' \chi'_0 - iS'' \chi_0) e^{\frac{iS(x)}{h}} = O(h^{N-1}) \\ e^{\frac{iS(x)}{h}} \chi_{\ell+1} Q_S - (2iS' \chi'_\ell - iS'' \chi_\ell + \chi''_{\ell-1}) e^{\frac{iS(x)}{h}} = O(h^{N-\ell-1}) \\ \dots \\ - (2iS' \chi'_{N-2} - iS'' \chi_{N-2} + \chi''_{N-3}) e^{\frac{iS(x)}{h}} = O(h) \\ \chi''_{N-2} e^{\frac{iS(x)}{h}} = O(1) \end{array} \right. \quad (8)$$

Для удовлетворения системы (8) достаточно (нам необходимо лишь показать существование решения, а не найти их все) того, чтобы

$$\left\{ \begin{array}{l} ((S')^2 + iV(x) - E) e^{\frac{iS(x)}{h}} = O(h^N) \\ \chi_\ell(x) e^{\frac{iS(x)}{h}} = O(1) \\ (-2iS' \chi'_0 - iS'' \chi_0) e^{\frac{iS(x)}{h}} = O(h^{N-1}) \\ (-2iS' \chi'_\ell - iS'' \chi_\ell) e^{\frac{iS(x)}{h}} = \chi''_{\ell-1} e^{\frac{iS(x)}{h}} + O(h^{N-\ell-1}) \\ \ell \in \{1, \dots, N-1\}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Для упрощения дополнительно сузим класс функций среди которых ищем  $\psi_N$ , а именно, будем искать их среди функций асимптотически (при  $h \rightarrow 0+0$ ) сосредоточенных в одной точке, то есть, функций для которых

$$\psi_N(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0+0} 0, \quad \text{при } x \neq x_0,$$

при некотором  $x_0 \in \mathbb{S}^1$ . Тогда  $e^{\frac{iS(x)}{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0+0} 0$  при  $x \neq x_0$  быстрее любой степени  $h^k$ , то есть:

$$\text{Im } S(\mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\}) \subseteq \mathbb{R}_+, \quad \text{Im } S(x_0) = 0.$$

Тогда  $\text{Im}(S'(x_0)) = 0$  и для выполнения первого условия системы (9) возьмем  $x_0$  и  $S$  такие, что

$$\begin{cases} \text{Re } E = (S'(x_0))^2 \\ \text{Im } E = V(x_0). \end{cases}$$

Это означает, что мы по заданной  $E$  фиксируем точку  $x_0 \in \mathbb{S}^1$  в которой  $V$  достигает значения  $\text{Im } E$  (и при этом, что понадобится нам в дальнейшем,  $V'(x_0) \neq 0$ ). Такая точка  $x_0$  на окружности существует в силу определения множества  $A_V$  и того что  $\text{Im } E \in A_V$ . Кроме того, мы также получили одно условие на функцию  $S$ .

Займемся построением функции  $S$  в виде степенного ряда в точке  $x_0$ :

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} S^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

Так как искомая функция  $\psi_N(x)$  определена условием (6) с точностью до ненулевого мультипликативного множителя, то  $S(x_0)$  можно естественным образом выбирать произвольно из  $\mathbb{C}$  при условии что  $e^{\frac{iS(x_0)}{h}} \neq 0$ . Для определенности возьмем  $S(x_0) = 0$ . Для того, чтобы норма  $\psi_N$  была единична, в конце процедуры построения, просто поделим  $\psi_N$  на ее норму. Условие на  $S'(x_0)$  уже есть:  $S'(x_0) = \pm \sqrt{\text{Re } E}$ .

Функцию  $V(x)$  представим в виде степенного ряда в точке  $x_0$  (это можно сделать, так как  $V(x)$  является аналитичной):

$$V(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} V^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!},$$

причем, как мы уже выяснили,  $\text{Im } E = V(x_0)$ . Тогда условие  $(S'(x))^2 + iV(x) - E \equiv 0$  можно записать в виде (бесконечной) системы на  $S^k(x_0)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{cases} S^{(0)}(x_0) & = 0 \\ S^{(1)}(x_0) & = \pm \sqrt{\text{Re } E} \\ iV^{k-1}(x_0) + \sum_{\substack{j, m \in \mathbb{N} \\ j+m=k+1}} \frac{S^{(j)}(x_0)S^{(m)}(x_0)}{(j-1)!(m-1)!} & = 0 \\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} & \end{cases}$$

Хоть эта система и бесконечна, нас интересует лишь конечная ее часть. Действительно, для того чтобы удовлетворить первое уравнение системы (9), не требуется точного  $(S')^2 + iV - E \equiv 0$ , а достаточно чтобы  $\text{Re}(iS'(x_0)) = 0$  (это уже выполняется по второму уравнению полученной системы),  $\text{Re}(iS''(x_0)) < 0$  (это требование придется добавить к системе) и

$$(S')^2 + iV - E = O((x - x_0)^{2N}).$$

Покажем это:

$$\begin{aligned} e^{\frac{iS(x)}{h}} O((x - x_0)^{2N}) &= e^{\text{Re} \frac{iS(x)}{h}} e^{i \text{Im}(\dots)} O((x - x_0)^{2N}) = \\ &= e^{\text{Re}(iS''(x_0)) \frac{(x-x_0)^2}{h} + O((x-x_0)^3)} O((x - x_0)^{2N}), \end{aligned} \quad (10)$$

так как  $e^{O((x-x_0)^3)} = O((x - x_0)^\infty)$ , а в некоторой окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$  имеем

$$\begin{aligned} \text{sign} \left( \text{Re}(iS''(x)) \frac{(x - x_0)^2}{h} + O((x - x_0)^3) \right) &= \\ &= \text{sign} \left( \text{Re}(iS''(x)) \frac{(x - x_0)^2}{h} \right) = -1, \end{aligned}$$

то в этой окрестности  $U(x_0)$ :

$$\begin{aligned} e^{\frac{iS(x)}{h}} O((x - x_0)^{2N}) &= e^{\text{Re}(iS''(x_0)) \frac{(x-x_0)^2}{h}} O((x - x_0)^{2N}) = \\ &= e^{\text{Re}(iS''(x_0)) \left(\frac{x-x_0}{\sqrt{h}}\right)^2} O \left( h^N \left( \frac{x - x_0}{\sqrt{h}} \right)^{2N} \right) = \\ &= o \left( \left( \frac{\sqrt{h}}{(x - x_0)^2} \right)^\infty \right) O \left( h^N \left( \frac{x - x_0}{\sqrt{h}} \right)^{2N} \right) = \\ &= O \left( \left( \frac{\sqrt{h}}{(x - x_0)^2} \right)^{2N} \right) O(h^N) O \left( \left( \frac{x - x_0}{\sqrt{h}} \right)^{2N} \right) = O(1) O(h^N) = O(h^N). \end{aligned}$$

А вне окрестности  $U(x_0)$ :

$$\begin{aligned} e^{\frac{iS(x)}{h}} O((x - x_0)^{2N}) &= e^{\text{Re}(iS''(x_0)) \frac{(x-x_0)^2}{h} + \frac{1}{h} O((x-x_0)^3)} O((x - x_0)^{2N}) = \\ &= O(h^\infty) O((x - x_0)^{2N}) = O(h^\infty) = O(h^N). \end{aligned}$$

Таким образом  $e^{\frac{iS(x)}{h}} O((x - x_0)^{2N}) = O(h^N)$ , значит, для выполнения первого равенства системы (9), нам нужно  $(S')^2 + iV - E = O((x - x_0)^{2N})$  и, таким образом, нас интересует лишь следующая конечная часть выписанной ранее



системы на  $S^{(k)}(x_0)$  (с небольшой добавкой в виде неравенства):

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(iS''(x_0)) & < 0 \\ S^{(0)}(x_0) & = 0 \\ S^{(1)}(x_0) & = \pm\sqrt{\operatorname{Re} E} \\ iV^{k-1}(x_0) + \sum_{\substack{j,m \in \mathbb{N} \\ j+m=k+1}} \frac{S^{(j)}(x_0)S^{(m)}(x_0)}{(j-1)!(m-1)!} & = 0 \\ k \in \mathbb{N} \cap [2, 2N-1] & \end{cases} \quad (11)$$

Последнее уравнение этой системы можно переписать:

$$\frac{2}{(k-1)!} S^{(1)}(x_0)S^{(k)}(x_0) = -iV^{(k-1)}(x_0) - \sum_{\substack{j,m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ j+m=k+1}} \frac{S^{(j)}(x_0)S^{(m)}(x_0)}{(j-1)!(m-1)!},$$

значит (так как  $S^{(1)}(x_0) = \pm\sqrt{\operatorname{Re} E} \neq 0$ ) из этой системы однозначно (при фиксированном знаке  $S'(x_0)$ ) находятся все  $S^{(k)}$ , таким образом находится  $S$ . Остается только выполнить добавочное требование  $\operatorname{Re}(iS''(x_0)) < 0$ . Из последнего уравнения системы при  $k=2$ :  $S''(x_0) = -i\frac{V'(x_0)}{2S'(x_0)}$ , значит добавочное требование можно удовлетворить подходящим выбором (произвольного до этого момента) знака  $S'(x_0)$ , если только  $V'(x_0) \neq 0$ . Именно для этого и требовалось вводить множество  $A_V$  и выбирать  $x_0$  с оглядкой на  $V'(x_0) \neq 0$ . Итак, мы определились со знаком  $S'(x_0)$ :

$$S'(x_0) = -\operatorname{sign}(V'(x_0))\sqrt{\operatorname{Re} E}.$$

Таким образом, найдя из системы (11)  $S^{(k)}$  при  $k < 2N$  и полагая  $S^{(k)}(x_0) = 0$  при  $k \geq 2N$ , мы однозначно построили  $S$  в виде многочлена по  $(x-x_0)$ . При этом мы удовлетворили и первое и второе уравнение системы (9).

Теперь займемся построением  $\chi_\ell(x)$ . Для того, чтобы выполнялись третье и четвертое уравнение системы (9), достаточно (по построению  $S$ ) выполнения

$$\begin{cases} -2iS'\chi'_0 - iS''\chi_0 & = 0 \\ -2iS'\chi'_\ell - iS''\chi_\ell & = \chi''_{\ell-1} \\ \ell \in \{1, \dots, N-1\} & \end{cases}$$

в некоторой окрестности  $U'(x_0)$  точки  $x_0$ . Так как, по построению,  $S'(x_0) \neq 0$ , то окрестность  $U'(x_0)$  можно выбрать таким образом, что на ней  $S'$  отделена от нуля. Тогда находим  $\chi_0$ :

$$2S'\chi'_0 + S''\chi_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_0 = \operatorname{const} (S')^{-\frac{1}{2}}.$$

Мультипликативную константу в формуле для  $\chi_0$  можно выбирать произвольно среди ненулевых чисел. Для определенности положим ее равной единице:

$$\chi_0 = (S')^{-\frac{1}{2}}.$$

Затем, из уравнения

$$2S'\chi_1' + S''\chi_1 = i\chi_0'' = i\frac{3S'' - 2S'S'''}{4(S')^{\frac{5}{2}}},$$

находим  $\chi_1$ , и так далее.

Так как  $S'$  отделена от нуля на  $U'(x_0)$ , функция  $\frac{-S''\chi_\ell + i\chi_{\ell-1}''}{2S'}$  липшицева. А значит решение уравнения

$$\chi_\ell' = \frac{-S''\chi_\ell + i\chi_{\ell-1}''}{2S'}$$

в окрестности  $U'(x_0)$  существует.

Построенная таким образом  $\psi_N$  обладает лишь одним недостатком — она не периодична. Но это легко устранить. Домножим ее на гладкую срезающую функцию, равную единице в некоторой окрестности точки  $x_0$  и нулю вне другой окрестности этой точки. Теперь можно просто переопределить  $\psi_N$  так, чтобы она была периодична — просто возьмем вместо нее сумму (эта сумма в каждой точке  $x$  конечна)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_N(x + kT)$ . Осталось только поделить  $\psi_N$  на ее ненулевую (так как  $\psi_N$  непрерывна и  $\psi_N \not\equiv 0$ ) норму в  $L_2(\mathbb{S}^1)$  и мы завершим доказательство.  $\square$

### 2.3. Псевдоспектр $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$

**ТЕОРЕМА 1.** *В случае непостоянной  $V(x)$  для любого  $N$  из натурального ряда  $h^N$ -псевдоспектр оператора  $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)$ , заданного на окружности, равен полуполосе  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как уже отмечалось, замыкание фигурирующего в лемме 3 множества  $(0, +\infty) + iA_V$  — это полуполоса  $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$  (в случае непостоянного  $V$ ). Значит, для доказательства достаточно объединить результаты утверждений (1), (3) и следствия (1).  $\square$

# Асимптотика спектра.

## 3.1. План нахождения спектра в частном случае $iV(z) = i \cos(z)$

Для того чтобы найти спектр оператора (5), воспользуемся ВКБ-приближением. Для этого, прежде всего, выясним как может выглядеть граф Стокса для интересующего нас потенциала  $iV(z) = i \cos z$ . Этот граф зависит от параметра  $E$  и при изменении  $E$  может перестраиваться. Другими словами, в зависимости от  $E$  возможны топологически различные случаи реализаций графа Стокса. После того как все возможные случаи будут найдены, в каждом из них вычислим матрицу монодромии (сдвига аргумента на период) оператора (5). Эта матрица позволит найти при каких  $E$  у исследуемого оператора есть периодичное решение; точнее из условия на матрицу монодромии мы получим условие на спектр оператора (5). С учетом известной связи между спектрами операторов (2) и (5), мы получим искомую асимптотику спектра оператора (2).

Отметим следующее свойство дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}$  в рассматриваемом частном случае.

**ЛЕММА 4.** *При любом  $h > 0$  собственные значения оператора  $\mathfrak{D}$  с потенциалом  $iV(z) = i \cos z$  симметричны относительно оси  $\text{Re}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, пусть  $E \in \mathbb{C}$  — собственное значение оператора  $\mathfrak{D}$  с потенциалом  $iV(z) = i \cos z$ . Значит, существует функция  $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$ , такая что

$$-h^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + i\psi(z) \cos z = E\psi(z).$$

Тогда

$$\overline{-h^2 \frac{d^2 \psi(\bar{z})}{d\bar{z}^2} + i\psi(\bar{z}) \cos \bar{z}} = \overline{E\psi(\bar{z})},$$

то есть,

$$-h^2 \frac{d^2}{dz^2} \overline{\psi(\bar{z})} - i \overline{\psi(\bar{z})} \overline{\cos \bar{z}} = \overline{E} \overline{\psi(\bar{z})}.$$

Так как  $\overline{\cos \bar{z}} = \cos z$  и  $-\cos z = \cos(z + \pi)$ , то имеем

$$-h^2 \frac{d^2}{dz^2} \overline{\psi(\bar{z} + \pi)} + i \overline{\psi(\bar{z} + \pi)} \cos z = \overline{E} \overline{\psi(\bar{z} + \pi)}.$$

Таким образом, функция  $\overline{\psi(\bar{z} + \pi)} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$  является собственной для оператора  $\mathfrak{D}$  (с потенциалом  $iV(z) = i \cos z$ ) с собственным значением  $\overline{E}$ .  $\square$

### 3.2. Точки поворота

Точки поворота, то есть, точки, являющиеся решением уравнения  $iV(z) = E$  относительно  $z$ , периодичны с периодом  $T$ .

ЛЕММА 5. В случае  $V(z) = \cos z$  на периоде (на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ ) этих точек две (они совпадают при  $E = \pm i$ ). Это точки  $z_{\pm} = \pm \arccos(-iE)$ , равные

$\operatorname{Re} E \neq 0$  :

$$z_{\pm}(E) = \pm \arccos \left[ \frac{\operatorname{sign} \operatorname{Im} E}{\sqrt{2}} \sqrt{|E|^2 + 1 - \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}} \right] + \\ + i \ln \frac{\pm \sqrt{2} \operatorname{Re} E + \sqrt{1 - |E|^2 + 2(\operatorname{Re} E)^2} + \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}{\sqrt{1 - |E|^2 + \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}};$$

$\operatorname{Re} E = 0, |\operatorname{Im} E| > 1$  :

$$z_{\pm}(E) = \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sign} \operatorname{Im} E) + i \ln \left[ |\operatorname{Im} E| \pm \sqrt{(\operatorname{Im} E)^2 - 1} \right];$$

$\operatorname{Re} E = 0, |\operatorname{Im} E| = 1$  :

$$z_{\pm}(E) = \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sign} \operatorname{Im} E);$$

$\operatorname{Re} E = 0, |\operatorname{Im} E| < 1$  :

$$z_{\pm}(E) = \pm \arccos \operatorname{Im} E.$$

(12)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть  $i \cos z = E$ . Так как

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-\operatorname{Im} z + i \operatorname{Re} z} + e^{\operatorname{Im} z - i \operatorname{Re} z}}{2} = \\ &= \frac{e^{-\operatorname{Im} z} (\cos \operatorname{Re} z + i \sin \operatorname{Re} z) + e^{\operatorname{Im} z} (\cos \operatorname{Re} z - i \sin \operatorname{Re} z)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (e^{-\operatorname{Im} z} + e^{\operatorname{Im} z}) \cos \operatorname{Re} z + i \frac{1}{2} (e^{-\operatorname{Im} z} - e^{\operatorname{Im} z}) \sin \operatorname{Re} z = \\ &= \cos \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z - i \sin \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z, \end{aligned}$$

получаем систему

$$\begin{cases} \cos \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} E \\ \sin \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} E. \end{cases} \quad (13)$$

Так как  $\operatorname{sign} \operatorname{ch}(\mathbb{R}) = \{1\}$ , то из первого уравнения системы (13) для знака  $\cos \operatorname{Re} z$  имеем:  $\operatorname{sign} \cos \operatorname{Re} z = \operatorname{sign} \operatorname{Im} E$ . Так как  $(\operatorname{sign} \operatorname{sh} - \operatorname{sign})(\mathbb{R}) = \{0\}$ , то из второго уравнения системы (13) следует, что  $\operatorname{sign} \sin \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{sign} \operatorname{Im} z = \operatorname{sign} \operatorname{Re} E$ . Значит, при  $\operatorname{Re} E \neq 0$  имеем  $\sin \operatorname{Re} z \neq 0$ . Рассмотрим второе уравнение системы (13)

$$\sin \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} E$$

и сделаем в нем замену переменной  $t = e^{\operatorname{Im} z} > 0$ , получим

$$\sin \operatorname{Re} z \left( t - \frac{1}{t} \right) = 2 \operatorname{Re} E.$$

Это уравнение — квадратное по  $t$  при  $\sin \operatorname{Re} z \neq 0$  (а, значит, при  $\operatorname{Re} E \neq 0$ ):

$$\sin(\operatorname{Re} z)t^2 - 2(\operatorname{Re} E)t - \sin \operatorname{Re} z = 0.$$

При  $\operatorname{Re} E \neq 0$  его решениями являются

$$t = \frac{\operatorname{Re} E}{\sin \operatorname{Re} z} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} E)^2}{(\sin \operatorname{Re} z)^2} + 1}.$$

Так как  $t > 0$ , то решение при нижнем знаке нам не подходит. Таким образом при  $\operatorname{Re} E \neq 0$  получаем, что

$$\operatorname{Im} z = \ln \left( \frac{\operatorname{Re} E}{\sin \operatorname{Re} z} + \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} E)^2}{(\sin \operatorname{Re} z)^2} + 1} \right).$$

Тогда из первого уравнения системы (13):

$$\cos \operatorname{Re} z \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} E)^2}{(\sin \operatorname{Re} z)^2} + 1} = \operatorname{Im} E, \quad \iff$$

$$(\cos \operatorname{Re} z)^4 - (|E|^2 + 1)(\cos \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} E)^2 = 0.$$

Произведя замену  $s = (\cos \operatorname{Re} z)^2 \in [0, 1]$  приходим к квадратичному уравнению

$$s^2 - (|E|^2 + 1)s + (\operatorname{Im} E)^2 = 0,$$

решениями которого являются

$$s_{\pm} = \frac{|E|^2 + 1 \pm \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}{2} \geq 0.$$

Но

$$\begin{aligned} s_+ &= \frac{|E|^2 + 1 + \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}{2} \geq \\ &\geq \frac{|E|^2 + 1 + \sqrt{(|E|^2 - 1)^2}}{2} = \frac{|E|^2 + 1 + ||E|^2 - 1|}{2} \geq \\ &\geq 1, \\ s_- &= \frac{|E|^2 + 1 - \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}{2} \leq \\ &\leq \frac{|E|^2 + 1 - \sqrt{(|E|^2 - 1)^2}}{2} = \frac{|E|^2 + 1 - ||E|^2 - 1|}{2} \leq \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

причем равенства достигаются только если и  $\operatorname{Re} E = 0$  и  $|E| \leq 1$ . В рассматриваемом случае как раз  $\operatorname{Re} E \neq 0$ . Значит, в качестве решения, нам подходит только  $s_-$ .

Таким образом,

$$(\cos \operatorname{Re} z)^2 = s_- = \frac{|E|^2 + 1 - \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}{2},$$

кроме того, как мы отмечали,  $\operatorname{sign} \cos \operatorname{Re} z = \operatorname{sign} \operatorname{Im} E$ , значит

$$\cos \operatorname{Re} z = \frac{\operatorname{sign} \operatorname{Im} E}{\sqrt{2}} \sqrt{|E|^2 + 1 - \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}},$$

соответственно

$$\operatorname{Re} z = \pm \arccos \left[ \frac{\operatorname{sign} \operatorname{Im} E}{\sqrt{2}} \sqrt{|E|^2 + 1 - \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}} \right].$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z &= \ln \left( \frac{\operatorname{Re} E}{\sin \operatorname{Re} z} + \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} E)^2}{(\sin \operatorname{Re} z)^2} + 1} \right) = \\ &= \ln \frac{\pm \sqrt{2} \operatorname{Re} E + \sqrt{1 - |E|^2 + 2(\operatorname{Re} E)^2 + \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}}{\sqrt{1 - |E|^2 + \sqrt{(|E|^2 + 1)^2 - 4(\operatorname{Im} E)^2}}}, \end{aligned}$$

получаем формулы (12) при  $\operatorname{Re} E \neq 0$ .

Теперь рассмотрим случай  $\operatorname{Re} E = 0$ . Система (13) упрощается до

$$\begin{cases} \cos \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} E \\ \sin \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \cos \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} E \\ \left[ \begin{array}{l} \sin \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z = 0, \end{array} \right. \iff \\ \left[ \begin{array}{l} \sin \operatorname{Re} z = 0 \\ \cos \operatorname{Re} z = \operatorname{sign} \operatorname{Im} E \\ \operatorname{ch} \operatorname{Im} z = |\operatorname{Im} E| \\ |\operatorname{Im} E| \geq 1 \end{array} \right. \iff \\ \left[ \begin{array}{l} \operatorname{Im} z = 0 \\ \cos \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} E \\ \operatorname{Im} E \in [-1, 1], \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} |\operatorname{Im} E| \geq 1 \\ \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sign} \operatorname{Im} E) \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{arccch} |\operatorname{Im} E| = \pm \ln \left[ |\operatorname{Im} E| + \sqrt{|\operatorname{Im} E|^2 - 1} \right] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} |\operatorname{Im} E| \leq 1 \\ \operatorname{Re} z = \pm \arccos \operatorname{Im} E \\ \operatorname{Im} z = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Таким образом получаем формулы (12) при  $\operatorname{Re} E = 0$ .

Корректность этих формул обеспечивается тем, что при их выводе мы использовали только эквивалентные переходы. В частности, в формулах (12) все подкоренные выражения неотрицательны, знаменатель не обращается в ноль и под знаками  $\ln$  стоят положительные величины.  $\square$

**ЛЕММА 6.** *Точки поворота  $z_{\pm}(E)$  являются непрерывными функциями параметра  $E$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Множество решений уравнения  $i \cos z = E$  может быть задано как множество точек  $-i \operatorname{Arch}(-iE) = -i \operatorname{Ln}(-iE \pm \sqrt{-E^2 - 1})$ . При этом аргумент  $\operatorname{Ln}$  не обращается в ноль или бесконечность при любом  $E \in \mathbb{C}$ , следовательно решения уравнения  $i \cos z = E$  аналитичны на всей комплексной плоскости, значит они непрерывны.  $\square$

Введем обозначение  $\xi(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{i \cos z - E} dz$ . В дальнейшем нам придется подставлять точки поворота в качестве пределов в этот интеграл. Поэтому мы будем считать, что  $z_1$  и  $z_2$  зависят от параметра  $E$ . Легко проверяется следующее утверждение.

**ЛЕММА 7.** *Функция  $\xi(z_1, z_2)$  непрерывно дифференцируема по параметру  $E \in \mathbb{C} \setminus (U(i) \cup U(-i))$ , где  $U(\pm i)$  — произвольные окрестности точек  $\pm i$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Формально дифференцируя имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial E} = \int_{z_1(E)}^{z_2(E)} \frac{-1}{\sqrt{i \cos z - E}} dz + z_2'(E) \sqrt{i \cos z_2(E) - E} - z_1'(E) \sqrt{i \cos z_1(E) - E}.$$

Проблемы могут возникнуть только если интеграл, являющийся первым слагаемым, является несобственным и не сходится равномерно по  $E$ . Несобственным он является тогда и только тогда, когда путь интегрирования содержит точку поворота. В окрестности точки поворота  $z_0$  подкоренную функцию можно разложить в ряд Тейлора

$$i \cos z - E = 0 + i \sin z_0 \cdot (z - z_0) + \dots$$

Если  $\sin z_0$  не равен нулю, получаем сходящийся интеграл, если  $\sin z_0$  отделен от нуля равномерно по  $E$ , получаем равномерно сходящийся интеграл. Так

как

$$\sin z_0 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 z_0} = \pm \sqrt{1 + E^2},$$

то  $\sin z_0$  равен нулю только в точках  $E = \pm i$  и отделен от нуля вне объединения окрестностей этих точек. Другими словами, при  $E \in \mathbb{C} \setminus (U(i) \cup U(-i))$  можно дифференцировать  $\xi(z_1, z_2)$  по  $E$  под знаком интеграла и производная  $\frac{\partial \xi}{\partial E}$  непрерывна.  $\square$

### 3.3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе мы будем рассматривать интеграл

$$\operatorname{Re} \int_{\zeta} \sqrt{i \cos z - E} dz \quad (14)$$

по некоторым путям  $\zeta$ . Для того, чтобы этот интеграл был корректно определен, необходимо, чтобы путь  $\zeta$  однозначно поднимался на риманову поверхность подынтегральной функции. То есть, путь  $\zeta$  не должен содержать точки ветвления подынтегральной функции внутри себя (он может содержать их только в качестве своих концов). Точки ветвления функции  $\sqrt{i \cos z - E}$  — это точки, в которых  $i \cos z - E = 0$ , то есть, точки  $z_{\pm} + 2\pi\mathbb{Z}$ . Мы можем считать, что все рассматриваемые в этом параграфе пути целиком (кроме, возможно, конечных точек) содержатся в полосе (в одном из интервалов при  $z_{\pm} \in \mathbb{R}$ )

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Im} z_{\pm}(E)|\} \setminus (\{z_{\pm}\} + 2\pi\mathbb{Z}).$$

Это обеспечит корректность и однозначность всех интегралов вида (14).

ЛЕММА 8. Для любого  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{z_{-}(E)}^{z_{+}(E)+a} \sqrt{i \cos z - E} dz = \overline{\int_{z_{-}(\overline{E})}^{z_{+}(\overline{E})-a-2\pi} \sqrt{i \cos z - \overline{E}} dz}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что из формул (12) следует, что

$$\operatorname{Re} z_{\pm}(\overline{E}) = \pm\pi - \operatorname{Re} z_{\pm}(E) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z_{\pm}(\overline{E}) = \operatorname{Im} z_{\pm}(E),$$

значит  $z_{\pm}(\overline{E}) = \pm\pi - \overline{z_{\pm}(E)}$ .



$$\begin{aligned}
& \int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})-a-2\pi} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz = \int_{-\pi-z_-(E)}^{\pi-z_+(E)-a-2\pi} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz \stackrel{w_1=z+\pi}{=} \\
& = \int_{-z_-(E)}^{-z_+(E)-a} \sqrt{i \cos(w_1 - \pi) - \bar{E}} dw_1 = \int_{-z_-(E)}^{-z_+(E)-a} \sqrt{-i \cos w_1 - \bar{E}} dw_1 = \\
& = \int_{-z_-(E)}^{-z_+(E)-a} \sqrt{-i \cos \bar{w}_1 - \bar{E}} d\bar{w}_1 = \int_{-z_-(E)}^{-z_+(E)-a} \sqrt{i \cos \bar{w}_1 - E} d\bar{w}_1 \stackrel{w_2=\bar{w}_1}{=} \\
& = \int_{-z_-(E)}^{-z_+(E)-a} \sqrt{i \cos w_2 - E} dw_2 = - \int_{-z_-(E)}^{-z_+(E)-a} \sqrt{i \cos w_2 - E} dw_2 \stackrel{w_3=-w_2}{=} \\
& = \int_{z_-(E)}^{z_+(E)+a} \sqrt{i \cos w_3 - E} dw_3 = \int_{z_-(E)}^{z_+(E)+a} \sqrt{i \cos w_3 - E} dw_3 .
\end{aligned}$$

□

В следующих двух утверждениях мы будем иметь дело с интегралами вида (14) только в отношении равенства этих интегралов нулю. Этот факт не зависит от выбора ветви корня в этих интегралах. Значит, мы можем выбирать удобную нам ветвь корня для каждого из этих интегралов. При этом необходимо следить только за тем, чтобы образ пути интегрирования под действием подкоренной функции  $i \cos z - E$  отображался этой ветвью непрерывно (другими словами, образ этого пути не должен пересекаться с разрезом).

ЛЕММА 9. При  $E \in \mathbb{C} \setminus i(-1, 1)$

$$I(E) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0 ,$$

тогда и только тогда, когда  $E$  — действительное положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом интеграле можно считать, что путь интегрирования — отрезок  $[0, 2\pi]$ . При  $E \notin i(-1, 1)$ , этот путь не содержит точек  $z_{\pm} + 2\pi\mathbb{Z}$  внутри себя.

Отметим, что в силу равенства  $\cos x = \cos(2\pi - x)$ :

$$I(E) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx.$$

При  $\operatorname{Re} E \leq 0$  и  $E \notin i(-1, 1)$ :  $\operatorname{Re}(i \cos x - E) = -\operatorname{Re} E \geq 0$  для любого  $x \in (0, \pi)$ , значит  $\arg \sqrt{i \cos x - E} \in [-\pi/4, \pi/4]$  или  $\arg \sqrt{i \cos x - E} \in [3\pi/4, 5\pi/4]$ , в зависимости от выбора ветви корня. С учетом того, что на интервале  $(0, \pi)$  нулей подынтегрального выражения нет, получаем что знак  $\operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E}$  постоянен и отличен от нуля на всем интервале интегрирования, значит  $I(E) \neq 0$ . Таким образом  $I(E) = 0$  при  $E \notin i(-1, 1)$  означает, что  $\operatorname{Re} E > 0$ .

Рассмотрим  $E$  с положительной действительной частью. Тогда действительная часть  $\operatorname{Re}(i \cos x - E) = -\operatorname{Re} E < 0$  для любого  $x \in (0, \pi)$ . То есть, образ пути интегрирования под действием функции  $i \cos x - E$  не переходит через луч  $[0, +\infty)$ . Значит можно зафиксировать ветвь корня с разрезом вдоль этого луча. Выберем такую ветвь:

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Покажем, что при любом фиксированном значении  $\operatorname{Re} E$ , подынтегральная функция в  $I(E)$  строго монотонно убывает по  $\operatorname{Im} E$  для любого  $x \in (0, \pi)$ . Действительно,

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - \operatorname{Re} E - i \operatorname{Im} E}}{\partial \operatorname{Im} E} = \operatorname{Re} \frac{-i}{2\sqrt{i \cos x - E}} = \operatorname{Im} \frac{1}{2\sqrt{i \cos x - E}} < 0,$$

по выбору ветви корня. Интегрирование в  $I(E)$  ведется по множеству положительной меры, значит и сам интеграл  $I(E)$  строго монотонно убывает по  $\operatorname{Im} E$  при любом фиксированном  $\operatorname{Re} E$ . Следовательно, при любом фиксированном  $\operatorname{Re} E > 0$  уравнение  $I(E) = 0$  имеет не более одного решения по  $\operatorname{Im} E$ .

Остается показать, что  $I((0, +\infty)) = \{0\}$ , тогда из уже доказанного будет следовать, что  $I((\mathbb{C} \setminus i(-1, 1)) \setminus (0, +\infty)) \not\equiv 0$ , и утверждение будет доказано полностью.

Рассмотрим  $E \in (0, +\infty)$ . При таком  $E$  подынтегральная функция в  $I(E)$  меняет знак при симметрии относительно  $\pi/2$ . Действительно,

$$\arg \sqrt{i \cos x - E} \in (0, \pi),$$

по выбору ветви корня, кроме того

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \arg(i \cos x - E) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при} \quad \cos x > 0 \\ \frac{1}{2} \arg(i \cos x - E) = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \cos x = 0 \\ \frac{1}{2} \arg(i \cos x - E) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \text{при} \quad \cos x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sign} \cos \left( \frac{1}{2} \arg(i \cos x - E) \right) = \operatorname{sign}(\cos x),$$

следовательно, по формуле косинуса половинного угла:

$$\cos \left( \frac{1}{2} \arg(i \cos x - E) \right) = \operatorname{sign}(\cos x) \sqrt{\frac{1 - \frac{E}{\sqrt{\cos^2 x + E^2}}}{2}}.$$

Значит

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E} &= \operatorname{Re} \left[ \sqrt{|i \cos x - E|} \cdot e^{i \arg \sqrt{i \cos x - E}} \right] = \\ &= \sqrt[4]{\cos^2 x + E^2} \cos \left( \frac{1}{2} \arg(i \cos x - E) \right) = \\ &= \sqrt[4]{\cos^2 x + E^2} \operatorname{sign}(\cos x) \sqrt{\frac{1 - \frac{E}{\sqrt{\cos^2 x + E^2}}}{2}}, \end{aligned}$$

и для подынтегральной функции в интеграле  $I(E)$  получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sqrt{i \cos(\pi - x) - E} &= \\ &= \sqrt[4]{\cos^2(\pi - x) + E^2} \operatorname{sign}(\cos(\pi - x)) \sqrt{\frac{1 - \frac{E}{\sqrt{\cos^2(\pi - x) + E^2}}}{2}} = \\ &= -\sqrt[4]{\cos^2 x + E^2} \operatorname{sign}(\cos x) \sqrt{\frac{1 - \frac{E}{\sqrt{\cos^2 x + E^2}}}{2}} = -\operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I(E) &= \int_0^{\pi} \operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{Re} \sqrt{i \cos(\pi - y) - E} dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} \sqrt{i \cos x - E} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{Re} \sqrt{i \cos y - E} dy = \\ &= 0, \end{aligned}$$

и утверждение полностью доказано. □

ЛЕММА 10. Уравнение

$$J(E) = \operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = 0$$

на параметр  $E \in (0, +\infty)$  имеет ровно одно решение  $E = E^*$ . Причем  $E^* \in (0, \operatorname{sh} \frac{\pi}{2})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При  $E \in (0, +\infty)$  из формул (12) следует, что

$$z_{\pm} = \pm \left( \frac{\pi}{2} + i \ln \left( \sqrt{1 + E^2} + E \right) \right).$$

Отметим, что при  $E \in (0, +\infty)$  имеем оценку  $\arg z_+ \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Исследуемый интеграл  $J(E)$  можно переписать в виде интеграла по действительной переменной  $r \in \mathbb{R}$  (здесь учтена четность подынтегральной функции по  $z$  и произведена замена  $z = z_+ \cdot r$ ):

$$\begin{aligned} J(E) &= \operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = 2 \operatorname{Re} \int_0^1 z_+ \sqrt{i \cos(z_+ r) - E} dr. \end{aligned}$$

Рассмотрим производную подынтегрального выражения по параметру  $E$ :

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \left[ z_+ \sqrt{i \cos(z_+ r) - E} \right]}{\partial E} = - \operatorname{Re} \frac{z_+}{2 \sqrt{i \cos(z_+ r) - E}}.$$

Обозначим  $a(E) = \sqrt{1 + E^2} + E$  и  $b(r) = i \cos(z_+ r) - E$ . Отметим, что  $a(E) > 0$  при  $E \in (0, +\infty)$ . Так как

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad e^{\pm iz_+ r} = a^{\mp r} e^{\pm i \frac{\pi}{2} r},$$

то получаем

$$b(r) = \frac{a^r - a^{-r}}{2} \sin \frac{\pi r}{2} - E + i \frac{a^r + a^{-r}}{2} \cos \frac{\pi r}{2}.$$

Отсюда видно, что при  $E \in (0, +\infty)$ ,  $a(E) = (\sqrt{1 + E^2} + E) > 1$  и  $r \in (0, 1)$ :

$$\operatorname{Im} b(r) = \operatorname{ch}(r \ln a) \cos \frac{\pi r}{2} > 0,$$

$$\operatorname{Re} b(r) = \operatorname{sh}(r \ln a) \sin \frac{\pi r}{2} - E \leq \operatorname{sh}(r \cdot \ln a) - E < \operatorname{sh}(1 \cdot \ln a) - E = 0.$$

То есть,  $b(r)$  лежит во внутренней части второго квадранта, а  $\arg b(r) \in (\pi/2, \pi)$ . Значит  $b(r)$  не пересекает  $[0, +\infty)$  при  $r \in (0, 1)$ , что позволяет нам выбрать

ветвь корня, как и в предыдущем утверждении, с разрезом вдоль  $[0, +\infty)$ . Как и раньше, зафиксируем эту ветвь:

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \arg \frac{z_+}{2\sqrt{i \cos(z_+ r) - E}} &= \arg z_+ - \arg \sqrt{b(r)} = \arg z_+ - \frac{1}{2} \arg b(r) \in \\ &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \Rightarrow \\ \operatorname{Re} \frac{z_+}{2\sqrt{i \cos(z_+ r) - E}} &> 0. \end{aligned}$$

Значит, производная подынтегрального выражения в  $J(E)$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \left[ z_+ \sqrt{i \cos(z_+ r) - E} \right]}{\partial E} = -\operatorname{Re} \frac{z_+}{2\sqrt{i \cos(z_+ r) - E}} < 0,$$

для любого  $E \in (0, +\infty)$  и любого  $r \in (0, 1)$ . Таким образом, подынтегральное выражение строго монотонно убывает по  $E$  на  $(0, +\infty)$  для любого  $r \in (0, 1)$ . А значит (так как интегрирование ведется по множеству положительной меры) и сам интеграл  $J(E)$  монотонно убывает по  $E$  на  $(0, +\infty)$ . Отсюда следует, что уравнение  $J(E) = 0$  на параметр  $E \in (0, +\infty)$  может иметь не более одного решения.

Оценим  $J(0)$  (здесь учтено, что  $z_+(0) = \pi/2$ ):

$$J(0) = 2 \operatorname{Re} \int_0^{z_+(0)} \sqrt{i \cos z} dz = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\pi/2} \sqrt{i \cos z} dz > 0,$$

так как подынтегральная функция  $\sqrt{i \cos z} \in (1+i) \cdot (0, +\infty)$  на интервале  $z \in (0, \pi/2)$  (по выбору ветви корня), а значит  $\operatorname{Re} \sqrt{i \cos z} > 0$  на всем (имеющем положительную меру) интервале интегрирования.

При  $E = \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$  имеем  $z_+ = \frac{\pi}{2} + i \ln(\sqrt{1 + E^2} + E) = \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{2}$ , и  $\arg z_+ = \pi/4$ . Кроме того, как уже было показано,  $\arg \eta(r) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Значит (с учетом выбора ветви корня):

$$\arg \left( z_+ \sqrt{i \cos(z_+ r) - E} \right) \Big|_{E=\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} = \arg z_+ + \frac{1}{2} \arg \eta(r) \in \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

То есть,

$$\operatorname{Re} \left( z_+ \sqrt{i \cos(z_+ r) - E} \right) \Big|_{E=\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} < 0$$

при любом  $r \in (0, 1)$ , следовательно и весь интеграл  $J(\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}) < 0$ .

Таким образом,  $J(0) > 0$ ,  $J(\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}) < 0$ . Так как  $J(E)$  непрерывно по  $E$ , то отсюда следует, что существует точка  $E^* \in (0, \operatorname{sh} \frac{\pi}{2})$  при котором рассматриваемый интеграл равен нулю:  $J(E^*) = 0$ . Кроме того, по уже доказанному эта точка единственная.  $\square$

### 3.4. Линии Стокса

В зависимости от значения  $E$ , взаимное расположение линий Стокса, то есть, линий  $\gamma$ , выходящих из точек поворота  $z_{\pm}$  и удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} \xi(z_{\pm}, z)|_{\gamma} = 0, \quad \text{где} \quad \xi(z_{\pm}, z) = \int_{z_{\pm}}^z \sqrt{iV(w) - E} dw,$$

меняется. Выясним возможное взаимное расположение линий Стокса (то есть возможные виды графа Стокса) для  $V(z) = \cos z$  при различных  $E$  на основе следующих свойств линий Стокса в случае целой функции  $V(z)$  (см. [4]):

- 1<sup>Sc</sup>) линия Стокса начинается в точке поворота и заканчивается либо в точке поворота, либо в бесконечности;
- 2<sup>Sc</sup>) линия Стокса не может содержать точку поворота внутри себя;
- 3<sup>Sc</sup>) линия Стокса не может пересекать себя или другую линию Стокса;
- 4<sup>Sc</sup>) из точки поворота кратности  $d$  выходят  $d + 2$  линии Стокса;
- 5<sup>Sc</sup>) граф линий Стокса (на плоскости  $\mathbb{C}$ ) не может содержать топологическую окружность;
- 6<sup>Sc</sup>) линии Стокса разбивают плоскость  $\mathbb{C}$  на области типа полуплоскости и полосы (то есть, на области, имеющие в качестве границы одну топологическую прямую или дизъюнктное объединение двух топологических прямых).

Случай кратных точек поворота ( $E = \pm i$ ) рассматривать не будем.

Отметим, что так как  $V(z)$  периодична с периодом  $T$ , то и граф линий Стокса периодичен с тем же периодом. Кроме того, так как косинус четен ( $\cos(-z) = \cos z$ ), то в случае  $V(z) = \cos z$  граф линий Стокса симметричен относительно нуля. Также отметим, что бесконечностей на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$  две —  $\pm iT\infty$  (при  $T \in \mathbb{R}: \pm i\infty$ ).

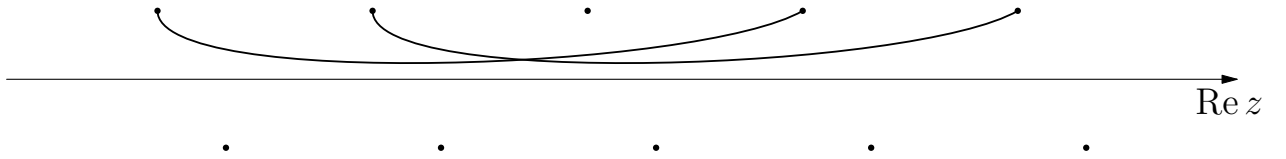
В дальнейшем, для построения спектра, мы будем выписывать матрицы монодромии, которые строятся по-разному для топологически различных графов Стокса, и одинаково (по модулю конкретных значений констант) для топологически одинаковых графов Стокса. Поэтому топологически эквивалентные графы Стокса мы будем относить к одному случаю.

**ЛЕММА 11.** *В случае  $iV(z) = i \cos z$  имеется пять топологически различных случаев взаимного расположения линий Стокса.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для удобства дальнейших построений будем рассматривать период  $[-T/2, T/2]$ , симметричный относительно нуля. На периоде имеются две однократных точки поворота (при  $E \neq \pm i$ ) и из каждой из них

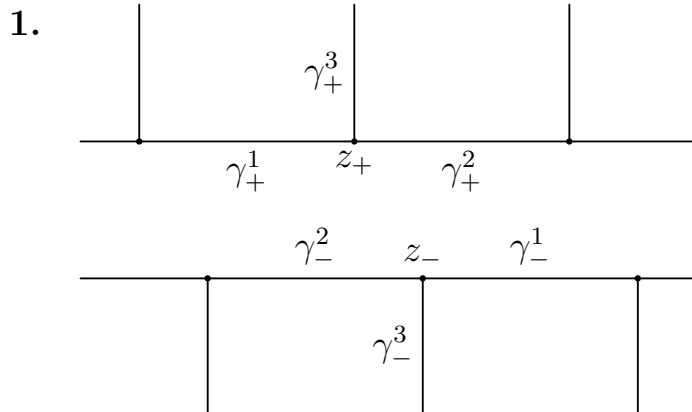
выходит по три линии Стокса. Причем точки поворота, вместе с выходящими из них линиями Стокса, симметричны относительно нуля. Обозначим линии Стокса, выходящие из точки  $z_+$ , через  $\gamma_+^\ell$ ,  $\ell \in \{1, 2, 3\}$ , а симметричные им относительно нуля линии Стокса, выходящие из точки  $z_-$ , через  $\gamma_-^\ell$  соответственно, так чтобы  $\gamma_-^\ell = -\gamma_+^\ell$  (как множества).

Предположим, что какая-нибудь из линий  $\gamma_+^\ell$  (без ограничения общности это  $\gamma_+^1$ ) заканчивается в точке поворота. Это не может быть точка  $z_+$ , иначе граф линий Стокса содержит топологическую окружность — линию  $\gamma_+^1$ , которая и начинается и заканчивается в одной точке. Это не может быть точка  $z_+ + kT$  при  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , так как тогда линии Стокса  $\gamma_+^1$  и  $\gamma_+^1 + T$  пересекаются — противоречие с  $3^{\text{Sc}}$ .

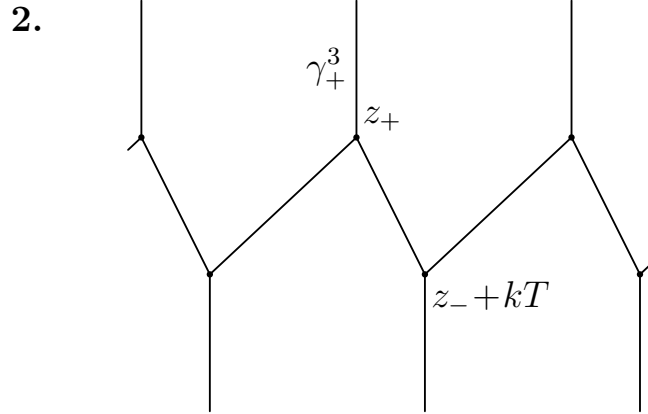


Аналогично, это не может быть точка  $z_+ - kT$  при  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Таким образом,  $\gamma_+^1$  может заканчиваться только в одной из точек  $z_+ \pm T$ ,  $z_- + T\mathbb{Z}$ .

**3.4.1. Случай 1.** Если  $\gamma_+^1$  заканчивается в точке  $z_+ - T$ , то линия Стокса  $\gamma_+^1 + T$  начинается в точке  $z_+ + T$  и заканчивается в точке  $z_+$ . Другими словами, одна из оставшихся линий Стокса (без ограничения общности это  $\gamma_+^2$ ), ведет из точки  $z_+$  в точку  $z_+ + T$ . А симметричные линии Стокса  $\gamma_-^1$  и  $\gamma_-^2$  ведут из  $z_-$  в  $z_- + T$  и в  $z_- - T$  соответственно. Таким образом получается, что в этом случае точки  $z_+ + T\mathbb{Z}$  соединены последовательно между собой линиями  $\gamma_+^1 + T\mathbb{Z} = \gamma_+^2 - T + T\mathbb{Z}$ , а точки  $z_- + T\mathbb{Z}$  — линиями  $\gamma_-^1 + T\mathbb{Z}$ . Оставшаяся линия  $\gamma_+^3$ , в этой ситуации, не может заканчиваться в точке поворота, иначе (возможно вместе с  $\gamma_+^3 + T$ ) она содержится в топологической окружности, составленной из линий Стокса — чего не может быть по  $5^{\text{Sc}}$ . Тогда  $\gamma_+^3$  заканчивается в одной из бесконечностей  $\pm i\infty$ , причем это определенная бесконечность — та, что в  $(\mathbb{C}/T\mathbb{Z}) \setminus \gamma_+^1$  находится в другой компоненте связности, нежели точка  $z_-$  (и вся  $\gamma_-^1$ ).  $\gamma_+^3$  не может заканчиваться в другой бесконечности, иначе она пересечет одну из кривых  $\gamma_-^1 + T\mathbb{Z}$ .



**3.4.2. Случай 2.** Пусть теперь  $\gamma_+^1$  заканчивается в одной из точек  $z_- + T\mathbb{Z}$  (обозначим ее  $z_- + kT$ ). Пусть  $\gamma_+^2$  или  $\gamma_+^3$  (без ограничения общности,  $\gamma_+^2$ ) заканчивается в одной из точек поворота. Если это одна из точек  $z_+ + T\mathbb{Z}$  — этот случай мы уже рассмотрели (переобозначим  $\gamma_+^2$  как  $\gamma_+^1$ ). Это не может быть точка  $z_- + kT$ , так как тогда  $\gamma_+^1$  и  $\gamma_+^2$  составляют топологическую окружность (они заканчиваются в одной и той же точке). Это не может быть одна из точек  $z_- - T - T\mathbb{N}$  или одна из точек  $z_- + T + T\mathbb{N}$ , так как тогда  $\gamma_+^2$  пересекается с  $\gamma_+^1 - T$  или с  $\gamma_+^1 + T$ . То есть,  $\gamma_+^2$  должна заканчиваться в одной из двух точек  $z_- + (k \pm 1)T$ . Тогда множество линий Стокса  $\{\gamma_-^1 + T\mathbb{Z}\} \cup \{\gamma_-^2 + T\mathbb{Z}\} = \{\gamma_+^1 + T\mathbb{Z}\} \cup \{\gamma_+^2 + T\mathbb{Z}\}$  объединяет все точки поворота. Значит линия Стокса  $\gamma_+^3$  не может заканчиваться в одной из точек поворота по 5<sup>Sc</sup>), то есть,  $\gamma_+^3$  заканчивается в одной бесконечностей (в какой именно неважно — топологически это один и тот же случай). Тогда по симметрии относительно нуля  $\gamma_-^3$  заканчивается в противоположной бесконечности. Вне зависимости от значения  $k$  получаем топологически один и тот же случай.

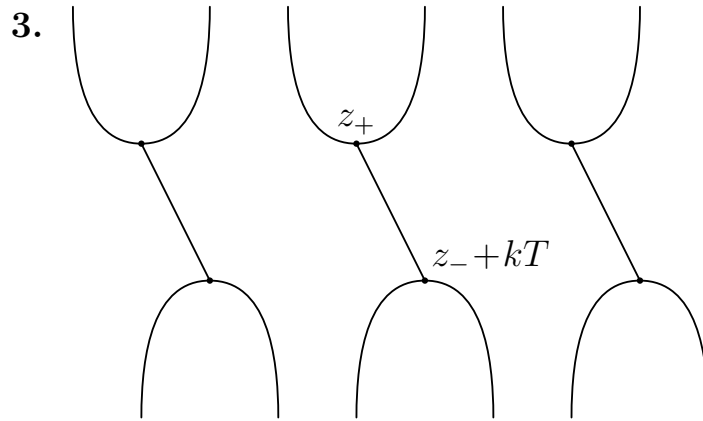


**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Эта схема реализуется только в одной точке (ниже мы докажем, что это происходит в точке  $E = E^*$ ), поэтому существует только один вариант этой схемы — когда конечные линии Стокса связывают точки поворота, находящиеся на одном периоде. То есть,  $k$  можно выбрать всего из двух вариантов — точка  $z_+$  соединена с левой или с правой из соседних с ней (удовлетворяющих условию  $|\operatorname{Re}(z_+ - z_- + kT)| < T$ ) двух точек  $z_- + kT$ . Причем в обоих возможных случаях, получаем один и тот же граф Стокса, который окажется симметричным относительно прямых  $z_{\pm} + kT + \operatorname{Im} z$ .

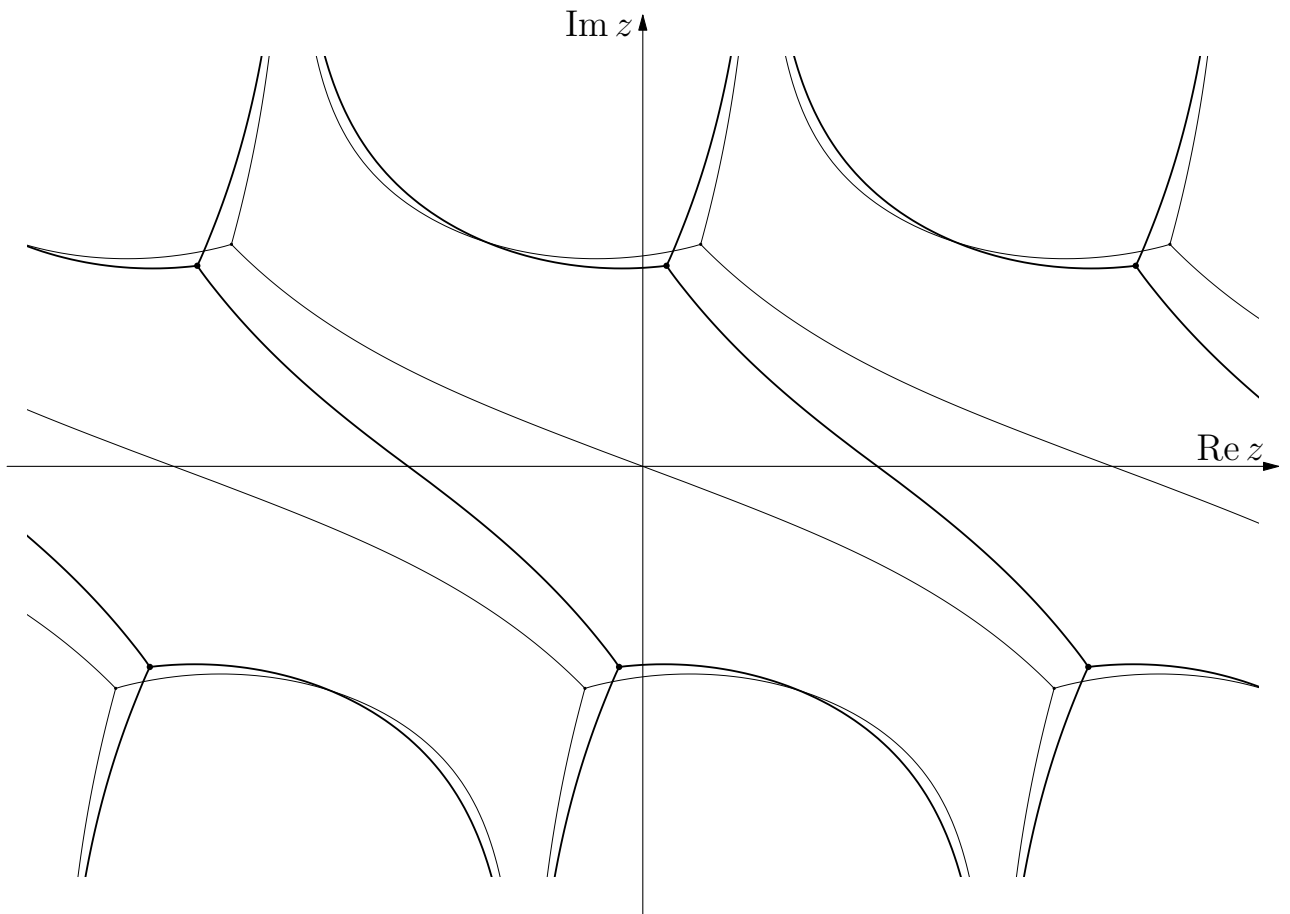
**3.4.3. Случай 3.** Пусть, как и в предыдущем случае,  $\gamma_+^1$  заканчивается в одной из точек  $z_- + T\mathbb{Z}$ , но теперь  $\gamma_+^2$  и  $\gamma_+^3$  должны заканчиваться в бесконечности (иначе получаем предыдущий случай). Они могут либо обе заканчиваться в  $+i\infty$ , либо обе в  $-i\infty$ , либо одна из них в  $+i\infty$ , а другая в  $-i\infty$ . Однако случаи, когда  $\gamma_+^2$  и  $\gamma_+^3$  обе заканчиваются в одной бесконечности, на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$  топологически эквивалентны. Этот случай выглядит так (как и выше, граф линий Стокса при разных значениях  $k$  получается



ТОПОЛОГИЧЕСКИ ОДИН И ТОТ ЖЕ):



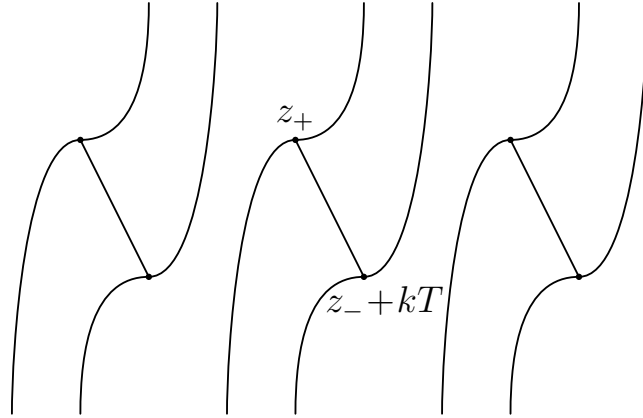
ЗАМЕЧАНИЕ 4. Эта схема расположения линий Стокса реализуется для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . В дальнейшем мы укажем кривые в  $E$ -плоскости, на которых это происходит.



**3.4.4. Случай 4.** Если, как и в предыдущем случае,  $\gamma_+^1$  заканчивается в одной из точек  $z_- + T\mathbb{Z}$ , а  $\gamma_+^2$  и  $\gamma_+^3$  заканчиваются в разных бесконечностях, то получаем топологически новый случай. (Опять, от значения  $k$  граф линий

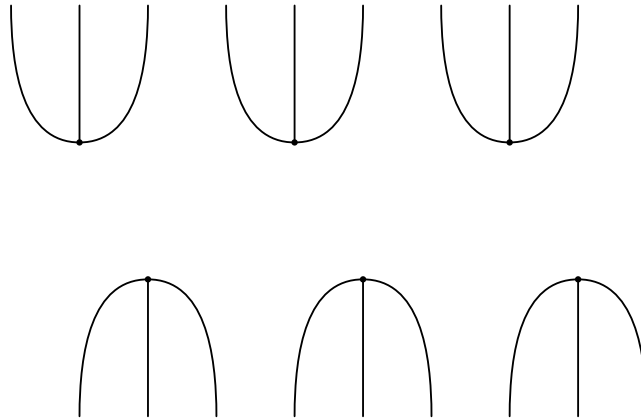
Стокса топологически не зависит.)

4.



**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Такая схема расположения линий Стокса реализуется только если  $z_+$  и  $z_- + kT$  (точки связанные конечной линией Стокса) находятся на одном периоде. То есть, в этом случае,  $k$  принимает всего два возможных значения, а не все из  $\mathbb{Z}$  (причем при этих значениях  $k$ , графы линий Стокса получаются друг из друга симметрией относительно оси  $\operatorname{Re} z$ ). Однако для того, чтобы доказать, что такая картина расположения линий Стокса возможна только при двух значениях  $k$ , не достаточно свойств  $1^{\text{Sc}}-6^{\text{Sc}}$ , на которые мы сейчас опираемся.

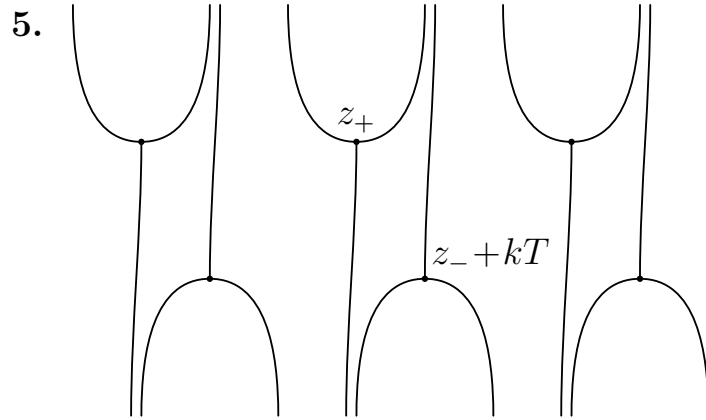
**3.4.5. Случай 5.** Выше рассмотрены все возможные случаи, когда хотя бы одна из линий  $\gamma_+^\ell$  заканчивается в точке поворота. Остается рассмотреть случай, когда все линии Стокса, выходящие из точки  $z_+$  заканчиваются в бесконечности. Если все три линии  $\gamma_+^\ell$  заканчиваются в одной бесконечности, то получаем, что одна из областей, на которые граф линий Стокса разбивает плоскость  $\mathbb{C}$ , имеет границу, состоящую из бесконечного числа связных компонент — противоречие с  $6^{\text{Sc}}$ .



Таким образом, остается только один вариант — две из линий Стокса, начинающихся в точке  $z_+$ , заканчиваются в одной из двух бесконечностей  $\pm i\infty$ , а третья заканчивается в другой бесконечности.

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Эта схема расположения линий Стокса реализуется для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Это случай общего положения, то есть, он реализуется во всей  $E$ -плоскости, за исключением множества лебеговой меры нуль, а

именно за исключением счетного объединения некоторых гладких кривых. Кривые, на которых реализуется случай 3 при различных  $k$ , и кривые, на которых реализуются случаи 1 и 2, разделяют  $E$ -плоскость на области, в которых эта схема реализуется при фиксированных  $k$ .



□

ЛЕММА 12. Если точки  $z_+$  и  $z_+ + 2\pi$  соединены в графе Стокса (то есть, соединены криволинейной ломаной из линий Стокса), то

$$I(E) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как вдоль линий Стокса  $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) = 0$ , то достаточно взять в качестве пути интегрирования в  $\xi(z_+, z_+ + 2\pi)$  ломаную из линий Стокса, соединяющую точки  $z_+$  и  $z_+ + 2\pi$ , чтобы убедиться в равенстве  $\operatorname{Re} \xi(z_+, z_+ + 2\pi) = 0$ . А значит

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos w - E} dw = \\ & = \operatorname{Re} \int_0^{z_+} \sqrt{i \cos w - E} dw + \operatorname{Re} \int_{z_+}^{z_+ + 2\pi} \sqrt{i \cos w - E} dw + \\ & \quad + \operatorname{Re} \int_{z_+ + 2\pi}^{2\pi} \sqrt{i \cos w - E} dw = \\ & = \operatorname{Re} \int_0^{z_+} \sqrt{i \cos w - E} dw + 0 - \operatorname{Re} \int_{2\pi}^{z_+ + 2\pi} \sqrt{i \cos w - E} dw = \\ & = \operatorname{Re} \int_0^{z_+} \sqrt{i \cos w - E} dw - \operatorname{Re} \int_0^{z_+} \sqrt{i \cos w - E} dw = 0, \end{aligned}$$

так как подынтегральная функция периодична с периодом  $2\pi$ . Интеграл по отрезку  $[0, 2\pi]$  можно записать как интеграл по действительной переменной  $x$

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0.$$

□

ЛЕММА 13. Если точки  $z_+$  и  $z_-$  соединены в графе Стокса, то

$$J(E) = \operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos x - E} dx = \xi(z_-, z_+) = 0.$$

Если соединены точки  $z_+ - 2\pi k$  и  $z_-$ , то

$$\xi(z_-, z_+ - 2\pi k) = 0.$$

В частности, при  $k = -1$  имеем:  $J(\bar{E}) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма аналогична предыдущей (с учетом леммы 8). □

ЛЕММА 14. Случай 1 топологической конфигурации графа Стокса может реализоваться только если  $E \in (0, +\infty)$ . Случай 2 топологической конфигурации графа Стокса может реализоваться только при  $E = E^*$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти два случая удовлетворяют условию леммы 12. Объединяя леммы 12 и 9, приходим к выводу, что эти случаи могут реализоваться только при  $E \in (0, +\infty)$ .

Для 2-го топологического случая дополнительно отметим, что он удовлетворяет еще и условию леммы 13, а значит и леммы 10. Следовательно этот случай может реализоваться только при  $E = E^*$ . □

ЛЕММА 15. Случаи 3 и 4 топологической конфигурации графа Стокса могут реализоваться только на аналитических кривых в  $E$ -плоскости, на каждой из которых выполняется условие

$$\operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E) - 2\pi k} \sqrt{i \cos x - E} dx = 0,$$

для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ . Все эти кривые (обозначим их  $\eta_k$ ) проходят через точку  $E^*$  и пересекают луч  $(0, +\infty)$  только в этой точке. Кривые  $\eta_k$  и  $\eta_{-k+1}$  симметричны друг другу относительно оси  $\operatorname{Re} E$ :  $\eta_{-k+1} = \overline{\eta_k}$ . Кривая  $\eta_0$  проходит через точку  $i$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможность реализации топологических случаев 3 и 4 только на кривых  $\eta_k$  следует из леммы 13. Симметрия относительно  $\operatorname{Re} E$  следует из леммы 8. Все кривые  $\eta_k$  проходят через точку  $E^*$ , так как в ней

имеем одновременно  $\xi(z_-, z_+) = 0$  и  $\xi(0, 2\pi) = 0$ , а для периодического с периодом  $2\pi$  косинуса, при любом  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)-2\pi k} \sqrt{i \cos x - E} dx &= \operatorname{Re} \xi(z_-, z_+ - 2\pi k) = \\ &= \operatorname{Re} \xi(z_-, z_+) - k \operatorname{Re} \xi(0, 2\pi) = 0. \end{aligned}$$

По леммам 13 и 10 кривая  $\eta_0$  пересекает луч  $(0, +\infty)$  только в точке  $E^*$ . Далее, при  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  в точках пересечения  $\eta_k$  с  $(0, +\infty)$  имеем  $\operatorname{Re} \xi(z_-, z_+ - 2\pi k) = 0$  и  $\operatorname{Re} \xi(0, 2\pi) = 0$ , значит

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \xi(z_-, z_+) &= \operatorname{Re} \xi(z_-, z_+ - 2\pi k) + \operatorname{Re} \xi(0, 2\pi k) = \\ &= \operatorname{Re} \xi(z_-, z_+ - 2\pi k) + k \operatorname{Re} \xi(0, 2\pi) = 0 + k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

То есть, все точки пересечения кривой  $\eta_k$  с лучом  $(0, +\infty)$  являются точками пересечения кривой  $\eta_0$  с лучом  $(0, +\infty)$ , а такая точка только одна — точка  $E^*$ .

При  $E = i$  точки  $z_+$  и  $z_-$  совпадают, значит  $\xi(z_-(i), z_+(i)) = 0$ . Следовательно, кривая  $\eta_0$  проходит через точку  $i$ .  $\square$

### 3.5. Реализуемость топологических случаев

По лемме 6 точки  $z_{\pm}(E)$  зависят от параметра  $E$  непрерывно. Вне окрестностей точек  $\pm i$  функции  $\xi(z_0, z)$  и  $\xi'(z_0, z)$  являются непрерывными по тройке независимых переменных  $(E, z_0, z)$ , так как производная  $\xi'$  — интеграл, сходящийся равномерно вне окрестностей точек  $\pm i$  (если хотя бы один из пределов интегрирования совпадает с  $z_{\pm} + T\mathbb{Z}$ , иначе  $\xi'$  — собственный интеграл; пути интегрирования в  $\xi$ , как мы уже отмечали, могут содержать точки поворота только в качестве своих концов).

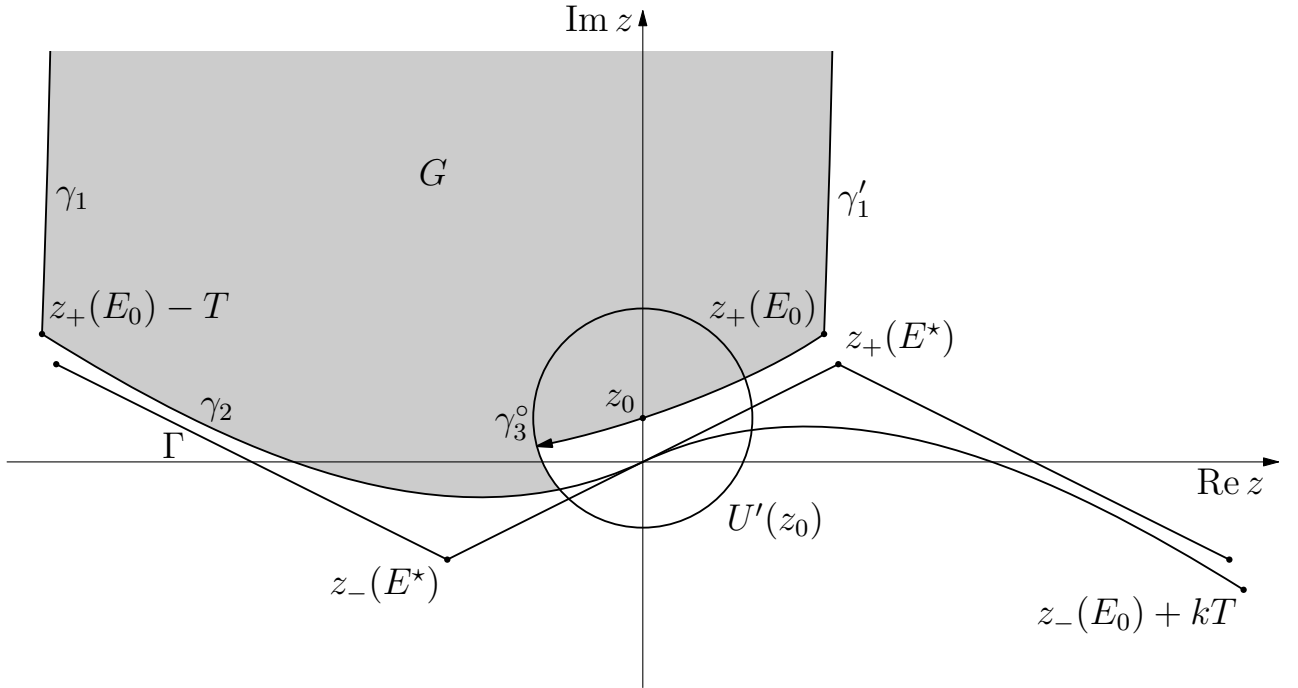
Как мы знаем, спектр принадлежит полуполосе  $[0, +\infty) + i[-1, 1]$ . Нам придется выкинуть из нее окрестности точек  $\pm i$ . Оставшееся множество разбивается на подмножества, на которых достигаются различные топологические случаи, описанные в лемме 11. Нашей целью является построение этого разбиения. Прежде всего докажем, что топологический случай 4 реализуется только при  $k = 0$  и  $k = -1$ .

**ЛЕММА 16.** *В окрестности точки  $E^*$  топологический случай 4 реализуется только при  $k = 0$  и  $k = -1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В окрестности точки  $E^*$  по непрерывности функции  $\xi$  линии уровня  $\operatorname{Re} \xi|_{E \in U(E^*)} = \operatorname{const}$  близки к линиям уровня  $\operatorname{Re} \xi|_{E=E^*} = \operatorname{const}$ . Отметим, что поле  $\operatorname{grad} \operatorname{Im} \xi(E, z_0, z) = \left( \frac{\partial \operatorname{Im} \xi}{\partial \operatorname{Re} z}, \frac{\partial \operatorname{Im} \xi}{\partial \operatorname{Im} z} \right)$  является касательным для линий уровня  $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) = \operatorname{const}$  при фиксированных  $E$  и  $z_0$ .

При  $E = E^*$  в графе Стокса (см. стр. 65) имеется ломаная  $\Gamma$  из линий Стокса, ведущая из точки  $z_+(E^*) - T$  в точку  $z_-(E^*) + kT$ . Обозначим отрезок  $[z_+(E^*) - T, z_-(E^*)]$  этой ломаной  $\Gamma_0$ , отрезок  $\Gamma_0 + T = [z_+(E^*), z_-(E^*) + T]$

обозначим  $\Gamma'_0$ , а отрезок  $[z_-(E^*), z_+(E^*)] - \Gamma_1$ .  $\Gamma_0, \Gamma'_0$  и  $\Gamma_1$  — линии Стокса при  $E = E^*$ . Как мы отмечали, линия Стокса  $\gamma_2$  должна быть близка к ломаной  $\Gamma$ , так как это линии уровня  $\xi$  при близких значениях параметра  $E$ .



Предположим, что в окрестности точки  $E^*$  есть такое  $E_0$ , что при  $E = E_0$  имеется конечная линия Стокса, не однозначно проектирующаяся на  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  («обматывающая» цилиндр  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ ). Пусть, для определенности, она начинается в точке  $z_+(E_0) - T$  и идет «вправо», то есть, имеет начальное направление, близкое к  $11\pi/6$ . «Вправо», то есть, она близка к  $\Gamma_0$  в окрестности своей начальной точки  $z_+(E_0) - T$  (здесь и далее мы берем достаточно большую окрестность, чтобы  $\Gamma_0$  с ней пересекалась; это то же самое, что говорить о близости начальных векторов  $\gamma_2$  и  $\Gamma_0$ ). Как мы знаем (см. лемму 11 на стр. 38), эта линия не может заканчиваться в точке  $z_+(E_0) + kT$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Обозначим точку, в которой она заканчивается —  $z_-(E_0) + kT$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ . Саму линию Стокса обозначим  $\gamma_2$ .

Кроме того, из точки  $z_+(E_0) - T$  и точки  $z_+(E_0)$  должны выходить линии Стокса  $\gamma_1$  и  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$  в направлении  $+iT\infty$  на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , так как они должны идти в бесконечность (по лемме 11), кроме того, они должны быть близки (на произвольном компакте) к уходящим в  $+iT\infty$  из точек  $z_+(E^*) - T$  и  $z_+(E^*)$  линиям Стокса при  $E = E^*$ . Из точки  $z_+(E_0)$  по периодичности должна также выходить линия Стокса  $\gamma_2 + T$ , идущая «вправо» (то есть, близкая к  $\Gamma'_0$  в окрестности своей начальной точки). Остается только понять, куда идет третья линия Стокса  $\gamma_3$ , выходящая из точки  $z_+(E_0)$  «влево» (то есть, в окрестности точки  $z_+(E_0)$  близкая к  $\Gamma_1$ ). По лемме 11, эта линия Стокса уходит в одну из бесконечностей. Если она уходит в  $+iT\infty$ , получаем топологический случай 3, если же она уходит в  $-iT\infty$ , получаем топологический случай 4. Нашей целью будет показать, что она уходит

в  $+iT\infty$ . Тогда в окрестности  $E^*$  топологический случай 4 не реализуется при  $k \in \mathbb{N}$  (а значит, и при  $k \in -\mathbb{N} - 1$ ), а реализуется только на двух кривых (соответствующих  $k = 0$  и  $k = -1$ ), так как его конечная линия Стокса однозначно проектируется на  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  (не «обматывает» цилиндр  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ ).

Линия Стокса  $\gamma_2$  должна проходить ниже точки  $z_+(E_0)$ , иначе она пересечет линию Стокса  $\gamma'_1$ . Беря достаточно малую окрестность  $U(E^*)$ , можно добиться того, чтобы кривая  $\gamma_2$  проходила в достаточно малой окрестности точки  $z_+(E_0)$ . Тогда начальный отрезок (можно добиться, чтобы как минимум до окрестности точки  $z_-(E_0)$ ) линии Стокса  $\gamma_3$  лежит в достаточно малой окрестности линии Стокса  $\gamma_2$ . Выберем точку  $z_0$  на линии  $\gamma_3$  вдали от точек поворота, например, точку, в которой  $\gamma_2$  пересекает ось  $\text{Im } z$ . Можно считать, что окрестность  $U(E^*)$  была выбрана таким образом, что в некоторой окрестности  $U'(z_0)$ , пересекающейся с  $\gamma_2$ , поле  $\text{grad } \text{Im } \xi(z_+(E_0), z)|_{E=E_0}$  отклонялось бы от своего направления в точке  $z_0$  на угол, не превышающий (по модулю)  $\alpha$ , где  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Обозначим  $\gamma_3^\circ$  — начальный отрезок  $\gamma_3$ , начинающийся в точке  $z_+(E_0)$  и заканчивающийся в точке, в которой  $\gamma_3$  выходит из окрестности  $U'(z_0)$ .

Предположим, что линия  $\gamma_3$  уходит в  $-iT\infty$ . Тогда, она должна выходить из области  $G$ , ограниченной линиями Стокса  $\gamma_2, \gamma_1, \gamma'_1$ , начальным отрезком  $\gamma_3^\circ$  самой  $\gamma_3$  и частью границы  $\partial U'(z_0)$ , так как эта область не содержит  $-iT\infty$  (она содержит только  $+iT\infty$ ). То есть,  $\gamma_3$  должна пересекать границу  $\partial G$  области  $G$ , а значит должна пересекать одну из кривых  $\gamma_2, \gamma_1, \gamma'_1, \gamma_3^\circ$  или  $\partial U'(z_0)$ . Но линия Стокса не может пересекать себя или другую линию Стокса кроме как в точке поворота, а  $\gamma_3$ , как мы уже выяснили, уходит в бесконечность, и, значит, не может входить в точку  $z_+ - T$  или точку  $z_+$ . Таким образом,  $\gamma_3$  может выйти из области  $G$  только если пересечет  $\partial U'(z_0)$ . При этом, для того чтобы выйти из  $G$  линия Стокса  $\gamma_3$  должна пройти через  $U'(z_0)$  в направлении, близком к противоположному тому направлению, в котором она проходит через эту окрестность первый раз (когда проходит через точку  $z_0$ ). Так как в  $U'(z_0)$  аргумент поля  $\text{grad } \text{Im } \xi(z_+(E_0), z)|_{E=E_0}$  отличается (по модулю) от своего значения  $\text{grad } \text{Im } \xi|_{z=z_0}$  в точке  $z_0$  не более чем на  $\alpha < \pi/2$ , получаем, что при втором проходе линии  $\gamma_3$  через окрестность  $U'(z_0)$  направление изменения  $\text{Im } \xi$  вдоль нее должно быть противоположным направлению изменения  $\text{Im } \xi$  вдоль нее же во время первого прохода через окрестность  $U'(z_0)$ .

Остается заметить только, что так как  $\text{Im } \xi$  строго монотонно возрастает вдоль линии Стокса (см. [4]), мы получили противоречие. Таким образом,  $\gamma_3$  не может уйти в  $-iT\infty$ , значит она уходит в  $+iT\infty$ . Это, в свою очередь, означает, что топологический случай 4 в окрестности точки  $E^*$  реализуется только на двух кривых, задающихся в  $E$ -плоскости уравнениями

$$\text{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz = 0, \quad \text{и} \quad \text{Re} \int_{z_-(E)}^{z_+(E) - 2\pi} \sqrt{i \cos z - E} dz = 0.$$

Только на этих кривых конечная линия Стокса (соединяющая точку поворота  $z_-(E)$  с точкой  $z_+(E)$  или точкой  $z_+(E) - 2\pi$  соответственно) однозначно проецируется на основание  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  цилиндра  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ . При  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ , любая кривая, соединяющая точки  $z_-(E)$  и  $z_+(E) - 2\pi k$  не проецируется однозначно на основание цилиндра — «обматывает» его.  $\square$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением числового образа оператора  $\mathfrak{D}$ , то есть  $E \in \text{Im} \mathfrak{D} = [0, +\infty) + i(\min V, \max V)$ .

**ЛЕММА 17.** *На кривых  $\eta_k$  и на луче  $(0, +\infty)$  смена топологического вида графа Стокса может происходить только в точке  $E^*$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $z_{\pm}$  и линии Стокса непрерывны по параметру  $E$ , а различные топологические случаи определяются попаданием или непопаданием линий Стокса в различные точки поворота, то:

- (1) топологический случай 5 (случай общего положения) реализуется на открытом подмножестве  $E$ -плоскости;
- (2) топологические случаи 3 и 4 реализуются на открытых подмножествах кривых, для которых  $\text{Re} \xi(z_- + kT, z_+) = 0$  (при каждом фиксированном  $k \in \mathbb{Z}$ );
- (3) случай 1 реализуется на открытом подмножестве множества, на котором  $\text{Re} \xi(z_+, z_+ + T) = 0$  (как мы знаем, последнее множество — луч  $(0, +\infty)$ );
- (4) случай 2 реализуется на открытом подмножестве множества, на котором одновременно  $\text{Re} \xi(z_-, z_+) = 0$  и  $\text{Re} \xi(z_- + T, z_+) = 0$  (как мы знаем, указанные множество и его подмножество — это  $\{E^*\}$ ).

Таким образом, вдоль кривых в  $E$ -плоскости, которые задаются условием  $\text{Re} \xi(z_- + kT, z_+) = 0$ , топологический вид графа Стокса может измениться только в точке  $E^*$ . Действительно, рассмотрим любую точку  $E_0 \in \eta_k \setminus \{E^*\}$ . Связная окрестности этой точки на кривой  $U(E_0) \cap \eta_k$  разбивается на три множества — множества  $U_j$ , на каждом из которых реализуется топологический случай  $j \in \{3, 4, 5\}$  (по леммам 14 и 15 случаи 1 и 2 не достигаются в достаточно малой окрестности любой точки  $E_0 \in \eta_k \setminus \{E^*\}$ ). Каждое из множеств  $U_j$  является открытым на  $\eta_k$  ( $U_5$  является открытым на  $\eta_k$ , так как является пересечением открытого в  $\mathbb{C}$  множества с  $\eta_k$ ). Другими словами мы имеем разбиение множества  $U(E_0) \cap \eta_k$  на три открытые в нем компоненты  $U(E_0) \cap \eta_k = U_3 \cup U_4 \cup U_5$ . Так как множество  $U(E_0) \cap \eta_k$  связно, то две из этих трех компонент должны быть пусты. Другими словами в  $U(E_0) \cap \eta_k$  реализуется только один топологический случай, значит вдоль кривой  $\eta_k$  смена топологического случая может происходить только в точке  $E^*$ .

Аналогично доказывается, что на луче  $(0, +\infty)$  смена топологического случая может произойти только в точке  $E^*$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *На интервале  $(0, E^*)$  реализуется топологический случай 5, а на луче  $(E^*, +\infty)$  — топологический случай 1.*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что на каждом из указанных множеств реализуется либо топологический случай 1, либо топологический случай 5. Это следует из того, что топологический случай 2 реализуется только в точке  $E^*$ , а топологические случаи 3 и 4 — на кривых  $\eta_k$ , пересекающих ось  $\operatorname{Re} E$  только в точке  $E^*$ . Кроме того, из леммы 17 следует, что на каждом из множеств  $(0, E^*)$  и  $(E^*, +\infty)$  реализуется только один топологический случай.

Нетрудно заметить, что какой именно случай (1 или 5) реализуется, зависит от знака  $\operatorname{sign} \operatorname{Re} J(E) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \xi(z_-, z_+)$ . Действительно, в окрестности точки  $E^*$  точки поворота  $z_{\pm}(E)$  близки к точкам  $z_{\pm}(E^*)$ , а линии Стокса, выходящие из точки  $z_+$  близки (в окрестности этой точки) к линиям Стокса для топологического случая 2, выходящим из точки  $z_+(E^*)$ . В самой точке  $E^*$ , действительная часть интеграла  $\xi(z_-, z_+)$  равна нулю, а мнимая часть интеграла  $\xi(z_-, z)$  монотонна при движении  $z$  по линии Стокса, соединяющей точку  $z_-$  с точкой  $z_+$ .

Зафиксируем ветвь корня, как и в лемме 10:

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Тогда при  $E = E^*$  мнимая часть интеграла  $\xi(z_-, z)$  монотонно возрастает при движении  $z$  от точки  $z_-$  по конечной линии Стокса, соединяющей точки  $z_-(E^*)$  и  $z_+(E^*)$ . При  $E \in U(E^*)$ , имеется линия Стокса, близкая (на своем начальном отрезке) к этой конечной линии Стокса. По непрерывности  $\xi$  на ней мнимая часть интеграла  $\xi(z_-, z)$  также возрастает при движении  $z$  от  $z_-$ . Для топологического случая 1 это должна быть линия Стокса, выходящая из точки  $z_-$  вправо в точку  $z_- + T$ , а для случая 5 — линия Стокса, выходящая из точки  $z_-$  вправо в  $+i\infty$ . При выбранной ветви корня эта линия Стокса задает положительное направление на оси  $\operatorname{Im} \xi(z_-, z)$ , значит по нему, из взаимного расположения этой линии Стокса и отрезка  $[z_-, z_+]$ , однозначно определяется знак  $\operatorname{Re} \xi(z_-, z_+)$ . Для топологического случая 2 этот знак — 0, для случая 1 этот знак —  $-1$ , для случая 5 — 1. Причем, как мы знаем (леммы 10 и 17) и смена знака действительной части интеграла  $\xi(z_-, z_+)$  и смена топологического случая на луче  $(0, +\infty)$  происходит только в точке  $E^*$ .

Таким образом, на всем луче  $(0, +\infty)$ , а не только в окрестности точки  $E^*$ , топологические случаи однозначно соответствуют значениям знака  $\operatorname{Re} \xi(z_-, z_+)$ . В конце леммы 10 (где ветвь корня выбиралась такой же как здесь) проведены оценки на этот знак, из которых следует, что на  $(E^*, +\infty)$  реализуется топологический случай 1, а на интервале  $(0, E^*)$  — топологический случай 5.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Топологический случай 4 может реализоваться только на кривых  $\eta = \eta_0$  и  $\bar{\eta} = \eta_1$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 16, 17 и 15 следует, что топологический случай 4 при  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$  не реализуется ни при каком  $E \in \mathbb{C}$ . Следовательно топологический случай 4 может реализоваться только на кривой  $\eta_0$  или на сопряженной ей кривой  $\eta_1$ .  $\square$

Остается только проверить, какой случай реализуется на каждой из четырех связанных компонент множества  $(\eta \cup \bar{\eta}) \setminus \{E^*\}$ .

**ЛЕММА 18.** *Случай 4 реализуется на интервале кривой  $\eta$  ( $\bar{\eta}$ ), лежащем между точкой  $E^*$  и точкой  $i$  (соответственно  $-i$ ). Вне замыкания указанных интервалов на кривых  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  реализуется топологический случай 3.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Аналогично следствию 2, какой именно случай реализуется на той или иной компоненте связности, зависит от знака  $\operatorname{Re} \xi(0, 2\pi)$  на этой компоненте связности и от того, какие именно точки поворота соединены конечной линией Стокса на этой компоненте связности. Для определенности будем рассматривать  $\eta$ , на  $\bar{\eta}$  все аналогично. На  $\eta$  конечной линией Стокса соединены точки  $z_-$  и  $z_+$ . Если фиксировать ветвь корня также, как в следствии 2, то топологическому случаю 3 будет соответствовать знак  $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \xi(z_+, z_- + 2\pi) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \xi(z_-, z_- + 2\pi) = \operatorname{sign} \operatorname{Re}(0, 2\pi) = +1$ , а случаю 4 — знак  $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \xi(z_+, z_- + 2\pi) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \xi(z_+, z_+ + 2\pi) = \operatorname{sign} \operatorname{Re}(0, 2\pi) = -1$ .

Так как гладкая кривая  $\eta$  пересекает  $\operatorname{Re} z$ , причем только в одной точке  $E^*$ , то разные компоненты связности множества  $\eta \setminus \{E^*\}$  лежат по разные стороны от  $\operatorname{Re} z$ . То есть, на компоненте связности, содержащей точку  $i$ , мнимая часть всех точек положительна, а на второй компоненте связности — отрицательна.

Для любой точки  $E_0 \in \eta$  имеем

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \xi(0, 2\pi)|_{E=E_0} = \operatorname{sign} I(E_0) = -\operatorname{sign} \operatorname{Im} E_0,$$

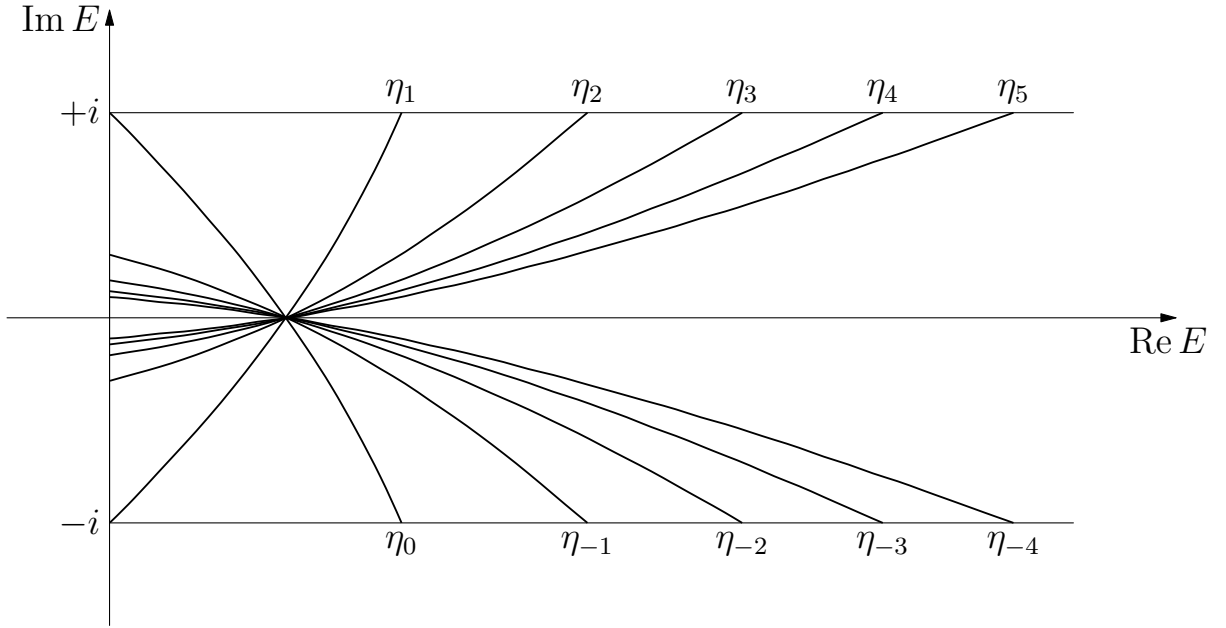
так как  $I(E)$  строго монотонно убывает по  $\operatorname{Im} E$  при любом фиксированном  $\operatorname{Re} E$  и  $I(E) = 0$  на  $(0, +\infty)$  (см. лемму 9). Таким образом, так как на интервале кривой  $\eta$ , лежащем между точками  $E^*$  и  $i$  имеем  $\operatorname{Im} E_0 > 0$ , то на этом интервале  $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \xi(0, 2\pi) < 0$ , а значит на нем реализуется топологический случай 4. На второй компоненте связности множества  $\eta \setminus \{E^*\}$ , соответственно, реализуется случай 3. □

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.** Аналогично доказывается, что на кривых  $\eta_k$  при  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$  топологический случай 3 реализуется правее точки  $E^*$ , а левее нее на них реализуется случай 5 общего положения. Однако, как будет видно в дальнейшем, случаи 3 и 5 не вносят вклад в спектр рассматриваемого оператора  $\mathfrak{D}$ , а значит нам не имеет смысла их различать.

**ЛЕММА 19.** *Топологический случай 1) графа Стокса реализуется на открытом луче  $(E^*, +\infty)$ . Случай 4) — на интервале кривой  $\eta$ , соединяющем точки  $i$  и  $E^*$  (при этом в графе Стокса конечной линией Стокса соединены точки  $z_-$  и  $z_+$ ) и на интервале кривой  $\bar{\eta}$ , соединяющем точки  $-i$  и  $E^*$  (при этом в графе Стокса конечной линией Стокса соединены точки  $z_-$  и  $z_+ - 2\pi$ ). Случай 2) реализуется в точке  $E^*$ . В остальных точках полуплоскости  $[0, +\infty) + i[-1, 1]$ , кроме точек  $\pm i$ , реализуются случаи 3) и 5).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Это вытекает из лемм 14 и 18 и следствий 2 и 3. □

В полуполосе  $[0, +\infty) + i[-1, 1]$  кривые  $\eta_k$  выглядят так:



Правее точки  $E^*$  на  $\eta_k$  реализуется топологический случай 3). Левее точки  $E^*$  на  $\eta_0$  и  $\eta_1$  реализуется случай 4), а на остальных кривых — случай 5).

### 3.6. Матрица монодромии и условие на спектр

Обозначим  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  — пространство целых аналитических функций. Кроме того, как и раньше,  $\mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}(\mathbb{C})$  — пространство периодичных с периодом  $T$  целых аналитических функций.

Вопрос принадлежности точки  $E$  дискретному спектру оператора  $\mathfrak{D}$  эквивалентен вопросу существования нетривиального периодичного (с периодом  $T$ ) решения  $\psi_0(z)$  уравнения

$$(D_{\mathbb{S}^1} - E)\psi_0 = -h^2\psi_0'' + (iV(z) - E)\psi_0 = 0, \quad \psi_0(z + T) = \psi_0(z).$$

Для того, чтобы найти условия существования такого решения, построим пару фундаментальных решений  $\psi_1(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ,  $\psi_2(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$  уравнения  $(D_{\mathbb{S}^1} - E)\psi = 0$ . Для удобства введем обозначение  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$  для (периодичного) оператора на  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ , порожденного дифференциальным выражением  $D_{\mathbb{S}^1}$  (при этом  $V$  рассматривается как функция на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , а не на факторе  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , как раньше). Тогда, так как пространство решений линейного однородного уравнения второй степени с целыми коэффициентами является двумерным подпространством в пространстве целых функций:

$$\ker(\mathfrak{D}_{\mathbb{C}} - E) = L, \quad L = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle \subset \mathcal{A}(\mathbb{C}), \quad \dim L = 2.$$

Выясним, существует ли нетривиальная  $\psi_0 \in L \cap \mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$ . Для этого построим оператор монодромии  $\mathfrak{M}: L \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C})$  — оператор, отвечающий сдвигу аргумента в функциях из пространства  $L$  на период  $T$ . То есть, этот оператор отображает функцию  $\psi$  в функцию  $\psi^T$ :

$$\mathfrak{M}: \psi \mapsto \psi^T, \quad \psi^T(z) = \psi(z + T).$$

Так как оператор  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}} - E$  периодичен с периодом  $T$ , то он коммутирует с оператором монодромии  $\mathfrak{M}$ , а значит  $\mathfrak{M}$  отображает решение  $\psi \in L$  в решение  $\psi^T \in L$ :

$$(\mathfrak{D}_{\mathbb{C}} - E) \circ \mathfrak{M}\psi = \mathfrak{M} \circ (\mathfrak{D}_{\mathbb{C}} - E)\psi = \mathfrak{M}(0) = 0.$$

Другими словами,  $\mathfrak{M}: L \rightarrow L$ , а значит оператор  $\mathfrak{M}$  представим матрицей  $2 \times 2$  в некотором базисе двумерного линейного пространства  $L$  — матрицей монодромии  $M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ . Нам будет не важно, в каком именно базисе мы построим матрицу  $M$ . Смена базиса в  $L$  отвечает сопряжению матрицы  $M$ , а сопряжение не меняет инвариантов  $\det M$  и  $\operatorname{tr} M$ , через которые мы выразим условие нетривиальности пересечения  $L \cap \mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$ .

Пересечение  $L \cap \mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$  нетривиально тогда и только тогда, когда оператор монодромии  $\mathfrak{M}$  имеет собственную функцию  $\psi_0$  с собственным значением 1:

$$\mathfrak{M}: \psi_0 \mapsto \psi_0^T = \psi_0, \quad \psi_0 \in L \cap \mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z}) \setminus \{0\}.$$

Это эквивалентно наличию собственного вектора с собственным значением 1 у матрицы монодромии  $M$  — это вектор координат функции  $\psi_0$  в том же базисе пространства  $L$ , в котором строилась матрица  $M$ . Последнее означает, что  $\det(M - \operatorname{id}_{2 \times 2}) = 0$ . Так как

$$\begin{aligned} \det(M - \operatorname{id}_{2 \times 2}) &= \begin{vmatrix} m_{11} - 1 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - 1 \end{vmatrix} = \\ &= (m_{11} - 1)(m_{22} - 1) - m_{12}m_{21} = \\ &= m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} - (m_{11} + m_{22}) + 1 = \\ &= \det M - \operatorname{tr} M + 1, \end{aligned}$$

то мы получаем условие  $\operatorname{tr} M = \det M + 1$  на матрицу монодромии, эквивалентное условию принадлежности  $E$  дискретному спектру оператора  $\mathfrak{D}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.** *Отметим, что не имеет значения в каком направлении  $+T$  или  $-T$  сдвигать аргумент на период. Матрицы, соответствующие этим сдвигам, взаимно обратны. Условие  $\operatorname{tr} M = \det M + 1$  выполняется или не выполняется для них одновременно, так как условия  $\psi_0^T = \psi_0$  и  $\psi_0^{-T} = \psi_0$  эквивалентны.*

Для того, чтобы вычислить матрицу монодромии достаточно построить пару фундаментальных решений  $\psi_1, \psi_2$  в некоторой связной области  $G$ , включающей в себя одновременно некоторое непустое открытое множество  $U$  и множество  $U + T$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} \psi_1(z + T) \\ \psi_2(z + T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^T(z) \\ \psi_2^T(z) \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

при  $z \in U$ . Отсюда матрица монодромии находится однозначно. Связность области  $G$  нужна для того, чтобы  $\psi_j$  было бы одним и тем же решением на  $U$  и на  $U + T$ . Это гарантируется непрерывностью  $\psi_j$  на связной области, включающей в себя и  $U$  и  $U + T$ . Фактически требуется, чтобы область  $G$

содержала нестягиваемый на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$  путь, что эквивалентно тому, что сама область  $G$  нестягиваема на  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ .

Фундаментальные решения  $\psi_1$  и  $\psi_2$  будем строить методом ВКБ–приближения (при этом и возникнут асимптотики для  $h \rightarrow 0 + 0$ ). Напомним, что

$$\xi(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{iV(w) - E} dw,$$

где в качестве  $z_0$  берется одна из точек поворота. Максимальные области однолистности функции  $\xi$ , содержащие точку  $z_0$  на своей границе и ограниченные линиями Стокса, называются каноническими. В канонической области канонической парой фундаментальных решений являются

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= (iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{h}\xi(z_0, z)} (1 + O(h)), \\ \psi_2(z) &= (iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{h}\xi(z_0, z)} (1 + O(h)). \end{aligned} \quad (16)$$

Если есть пересекающиеся канонические области  $K$  и  $K^\circ$ , то в них (16) задает канонические пары  $(\psi_1, \psi_2)$  и  $(\psi_1^\circ, \psi_2^\circ)$ . В пересечении  $K \cap K^\circ$  определены обе эти пары. Так как  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = L = \langle \psi_1^\circ, \psi_2^\circ \rangle$ , то пара  $(\psi_1^\circ, \psi_2^\circ)$  выражается через пару  $(\psi_1, \psi_2)$  с помощью некоторой невырожденной комплексной матрицы  $2 \times 2$ . Если обозначить ее  $\Omega(K, K^\circ) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ , то

$$\begin{pmatrix} \psi_1^\circ \\ \psi_2^\circ \end{pmatrix} = \Omega(K, K^\circ) \times \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Матрица  $\Omega(K, K^\circ)$  называется матрицей перехода из  $K$  в  $K^\circ$ . Равенство (17) дает возможность продолжить фундаментальную пару решений  $(\psi_1^\circ, \psi_2^\circ)$  в область  $K$ , так как правая часть этого равенства определена в  $K$ . Аналогично, с помощью матрицы перехода  $\Omega(K^\circ, K) = (\Omega(K, K^\circ))^{-1}$  фундаментальную пару решений  $(\psi_1, \psi_2)$  можно продолжить в область  $K^\circ$ . Формулы для  $\Omega(K, K^\circ)$  можно найти, например, в [4] или [13]. В случае, когда  $K$  и  $K^\circ$  не пересекаются, если есть (конечная) цепочка канонических областей, объединение которых является связным и содержит  $K$  и  $K^\circ$ , можно построить  $\Omega(K, K^\circ)$  как произведение промежуточных матриц перехода.

Если бы области  $U$  и  $U+T$  вместе включались в некоторую каноническую область, то представления (16) было бы достаточно для вычисления матрицы монодромии  $M$ . Однако, в нашем случае, такой канонической области нет, и для того, чтобы построить матрицу  $M$  необходимо продолжить решения в некоторую нестягиваемую на  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$  область  $G$ . Для этого воспользуемся матрицами перехода, которые позволяют продолжить пару  $(\psi_1, \psi_2)$  в другие канонические области. Будем делать это до тех пор, пока область определения пары решений  $(\psi_1, \psi_2)$  не станет нестягиваемой на  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ . Тогда можно будет вычислить матрицу монодромии  $M$ , причем она будет выражаться через матрицы перехода.

Пусть в канонической области  $K$  выбрана некоторая фундаментальная пара решений  $(\psi_1(z), \psi_2(z))$ . Тогда в канонической области  $K - T$  автоматически

выбрана фундаментальная пара решений  $(\psi_1^T(z), \psi_2^T(z))$ , так как комплексные области  $K$  и  $K - T$  с точки зрения уравнения (4) — это одна и та же область. То есть, если в  $K$  задана фундаментальная система решений  $(\psi_1(z), \psi_2(z))$ , то в области  $K - T$  автоматически задана система  $(\psi_1^T(z), \psi_2^T(z))$ :

$$(\psi_1^T(z), \psi_2^T(z)) = (\psi_1(z + T), \psi_2(z + T)), \quad z \in K - T, \quad (z + T) \in K.$$

С другой стороны, систему решений  $(\psi_1(z), \psi_2(z))$  можно продолжить в область  $K - T$  (возможно не напрямую, а через другие канонические области) с помощью матрицы перехода  $\Omega$  (которая будет произведением матриц промежуточных переходов). Тогда в области  $K - T$  будут определены две системы решений  $(\psi_1^T(z), \psi_2^T(z))$  и  $(\psi_1(z), \psi_2(z))$ . Они будут отличаться друг от друга умножением слева на некоторую матрицу размера  $2 \times 2$ . Это — матрица монодромии, так как она, как раз, определяет переход от фундаментальной системы решений  $(\psi_1(z), \psi_2(z))$  к системе  $(\psi_1^T(z), \psi_2^T(z)) = (\psi_1(z + T), \psi_2(z + T))$ , то есть, отвечает за сдвиг аргумента на период.

Остается только выразить матрицу монодромии  $M$  через матрицу перехода  $\Omega$ . Для того, чтобы не запутаться, будем считать, что во всех последующих формулах  $z \in K$ ,  $z_0$  — точка поворота,  $z_0 \in \partial K$ . Кроме того, обозначим  $(\psi_1, \psi_2)$  — каноническая система решений в области  $K$ ,  $(\psi_1^\circ, \psi_2^\circ)$  — каноническая система решений в  $K - T$ , а  $(\psi_1^T, \psi_2^T)$  — фундаментальная (но не обязательно каноническая) система решений в  $K - T$ , получающаяся из  $(\psi_1, \psi_2)$  сдвигом аргумента на период:

$$(\psi_1^T(z - T), \psi_2^T(z - T)) = (\psi_1(z), \psi_2(z)), \quad z \in K.$$

В канонической области  $K$  каноническая фундаментальная система решений  $(\psi_1, \psi_2)$  задается так:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix} = (iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\hbar}\xi(z_0, z)} \\ e^{-\frac{1}{\hbar}\xi(z_0, z)} \end{pmatrix}, \quad z \in K,$$

а в канонической области  $K - T$  каноническая система решений  $(\psi_1^\circ, \psi_2^\circ)$  задается так:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^\circ(z - T) \\ \psi_2^\circ(z - T) \end{pmatrix} = (iV(z - T) - E)^{-\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\hbar}\xi(z_0 - T, z - T)} \\ e^{-\frac{1}{\hbar}\xi(z_0 - T, z - T)} \end{pmatrix}, \quad (z - T) \in (K - T).$$

Так как  $V$  периодична с периодом  $T$ , то  $V(z - T) = V(z)$ . Кроме того, опять же по периодичности,  $\xi(z_0 - T, z - T) = \xi(z_0, z)$ . С учетом этого имеем:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^\circ(z - T) \\ \psi_2^\circ(z - T) \end{pmatrix} = (iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\hbar}\xi(z_0, z)} \\ e^{-\frac{1}{\hbar}\xi(z_0, z)} \end{pmatrix}, \quad (z - T) \in (K - T). \quad (18)$$

Теперь распишем  $(\psi_1^T, \psi_2^T)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1^T(z-T) \\ \psi_2^T(z-T) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix} = \\ &= (iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{h}\xi(z_0, z)} \\ e^{-\frac{1}{h}\xi(z_0, z)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$(z-T) \in (K-T).$$

Как нетрудно видеть, сравнив (18) и (19), в области  $K-T$  каноническая система решений  $(\psi_1^\circ(z-T), \psi_2^\circ(z-T))$  совпадает с фундаментальной системой  $(\psi_1^T(z-T), \psi_2^T(z-T))$ .

Вспоминая выражения (17) и (15) и учитывая, что в канонической области  $K-T$  имеем совпадение  $(\psi_1^\circ, \psi_2^\circ) = (\psi_1^T, \psi_2^T)$ , получаем, что матрица монодромии выражается через матрицу перехода тривиально:  $M = \Omega$ . Отметим, что хотя эти две матрицы и совпали, их смысл различен. В дальнейшем мы с помощью матриц элементарных переходов (см. [4]) построим матрицу перехода  $\Omega = \Omega(K, K-T)$  для различных  $E$ . Условие принадлежности  $E$  дискретному спектру оператора  $\mathfrak{D}$  будет выражаться через матрицу перехода  $\Omega$  так же, как оно выражается через матрицу монодромии:

$$\text{tr } \Omega = \det \Omega + 1. \quad (20)$$

Для матрицы  $\Omega$  мы получим асимптотическое выражение. Соответственно, и уравнение (20) на нее будет выписано лишь асимптотически. Естественно, возникает вопрос, можно ли утверждать, что асимптотические решения уравнения (20) приближают точки спектра, то есть точные решения. Имеем:

$$F(E) = \text{tr } M(E) - \det M(E) - 1,$$

$$F(E) = G(E) + g(E), \quad \text{причем } g(E) = O(h), \quad G(E_0) = 0.$$

$F(E)$  — аналитическая функция, так как фундаментальные решения  $\psi_1$  и  $\psi_2$  аналитичны по параметру  $E$  (это следует из теоремы Пуанкаре о разложении), а от того как выбирать базис решений при разных  $E$ ,  $F(E)$  не зависит. Функция  $G(E)$  будет аналитичной по построению, значит  $g(E)$  также аналитична. Тогда,  $G(E) \sim c(E-E_0)$  в окрестности точки  $E_0$  при некотором ненулевом  $c = \text{const} \neq 0$ . Значит, при достаточно малом  $h$ , можно выбрать окрестность  $U_r(E_0)$  радиуса  $r = c^{-1}O(h)$ , так что  $|cr| \sim |G(E)| > |g(E)| = O(h)$  на  $\partial U_r(E_0)$ . Таким образом, имеем:  $G(E), g(E)$  аналитические на замыкании  $U_r(E_0)$ ,  $|G(E)| > |g(E)|$  на  $\partial U_r(E_0)$ . Отсюда, по теореме Руше, у функции  $F(E)$  в  $U_r(E_0)$  столько же нулей (с учетом кратности), сколько у  $G(E)$ .

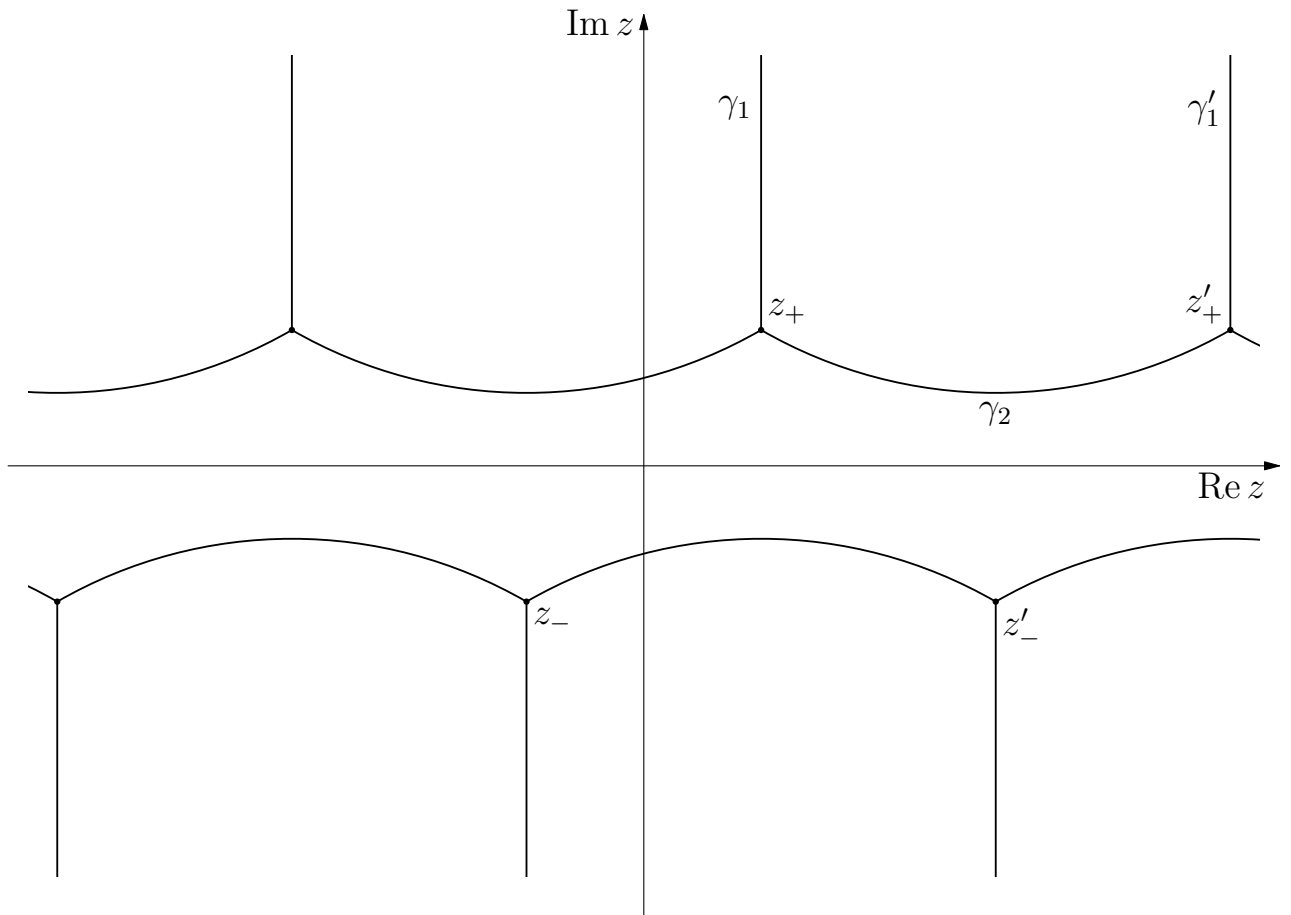
**ЗАМЕЧАНИЕ 9.** При любом  $h > 0$ , на произвольном компакте в  $\mathbb{C}$  имеется лишь конечное число точек спектра оператора  $\mathfrak{D}$ . Действительно, точки спектра являются нулями аналитической функции  $F(E)$ . Она не равна нулю тождественно, иначе она была бы определена и равна нулю вне полуполосы числового образа оператора  $\mathfrak{D}$ , то есть существовали бы точки

спектра, не лежащие в числовом образе. А так как аналитическая и не равная тождественно нулю функция может обращаться в ноль лишь конечное число раз на произвольном компакте, то и точек спектра на нем может быть лишь конечное число.

### 3.7. Матрицы перехода

В этом пункте мы будем полагать, что  $\text{Im } z_+ \in [0, \pi]$ , это соответствует случаю  $\text{Im } E \geq 0$  на  $E$ -плоскости. Именно в этом предположении будут рисоваться графы Стокса и рассчитываться условия на асимптотику. Как мы знаем (см. лемму 4) спектр симметричен относительно оси  $\text{Re } E$ , и ограничение  $\text{Im } E \geq 0$  не является существенным. Нам придется только учесть, что условие (23) на  $E$ , которое мы выведем в дальнейшем, имеет симметричный вариант, получающийся заменой  $E$  на  $\bar{E}$ .

**3.7.1. Топологический случай 1.** Вот приблизительный (полученный вычислительными методами) вид графа Стокса в этом случае:



Обозначим  $\gamma_1$  — линия Стокса, выходящая из точки  $z_+$  вертикально вверх;  $\gamma_2$  — линия Стокса, соединяющая  $z_+$  с  $z'_+ = z_+ + T$ , а  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$ .

Каждую из линий Стокса  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$  можно включить в соответствующую каноническую область  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K'_1 = K_1 + T$ . Тогда, для того чтобы продолжить систему решений из области  $K_1$  в область  $K'_1 = K_1 + T$ ,



необходимо построить матрицы перехода  $\Omega_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ :

$$(\gamma_1, z_+, K_1) \xrightarrow{\Omega_1} (\gamma_2, z_+, K_2) \xrightarrow{\Omega_2} (\gamma_2, z'_+, K_2) \xrightarrow{\Omega_3} (\gamma'_1, z'_+, K'_1).$$

Переход от системы решений в области  $K_1$  к системе решений в области  $K'_1$  будет задаваться произведением этих матриц  $\Omega = \Omega_3 \Omega_2 \Omega_1$ .

Матрицы  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  имеют следующий вид (см. [4]):

$$e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(h) & i(1 + O(h)) \end{pmatrix}.$$

А оставшаяся матрица побочно-диагональна:

$$\Omega_2 = e^{i\tau_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\tau_1}{h}} \\ e^{-\frac{\tau_1}{h}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_0 = \lim_{z \rightarrow z_+, z \in \gamma_2} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} - \lim_{z \rightarrow z'_+, z \in \gamma_2} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} = -\frac{\pi}{6},$$

$$\tau_1 = \xi(z_+, z'_+), \quad \tau_1 \in i(0, +\infty).$$

Таким образом получаем, что

$$\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{\tau_1}{h}} \\ e^{\frac{\tau_1}{h}}(1 + O(h)) & i \left( e^{-\frac{\tau_1}{h}} + e^{\frac{\tau_1}{h}} \right) (1 + O(h)) + e^{\frac{\tau_1}{h}} O(h) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$\det \Omega = -e^{-i\pi}(1 + O(h)) = 1 + O(h),$$

а условие (20) преобразуется в

$$\operatorname{tr} \Omega = \left( e^{-\frac{\tau_1}{h}} + e^{\frac{\tau_1}{h}} \right) (1 + O(h)) + e^{\frac{\tau_1}{h}} O(h) = 2 \cos \frac{\tau_1}{ih} (1 + O(h)) + O(h) = 2 + O(h),$$

что дает условие на величину интеграла  $\tau_1$ :

$$\frac{\tau_1}{h} = \frac{1}{h} \int_{z_+}^{z_++T} \sqrt{i \cos z - E} dz \in i2\pi\mathbb{Z}(1 + O(h)). \quad (21)$$

Как мы помним, действительная часть этого условия выполняется автоматически в данном случае — так как это

$$\operatorname{Re} \int_{z_+}^{z_++T} \sqrt{iV(z) - E} dz = \operatorname{Re} \int_0^T \sqrt{iV(x) - E} dx = 0 = O(h).$$

Из леммы 9 следует, что это влечет  $\operatorname{Im} E = 0$ . Мнимая же часть (21) дает условие принадлежности точки  $E$  дискретному спектру оператора  $\mathfrak{D}$ :

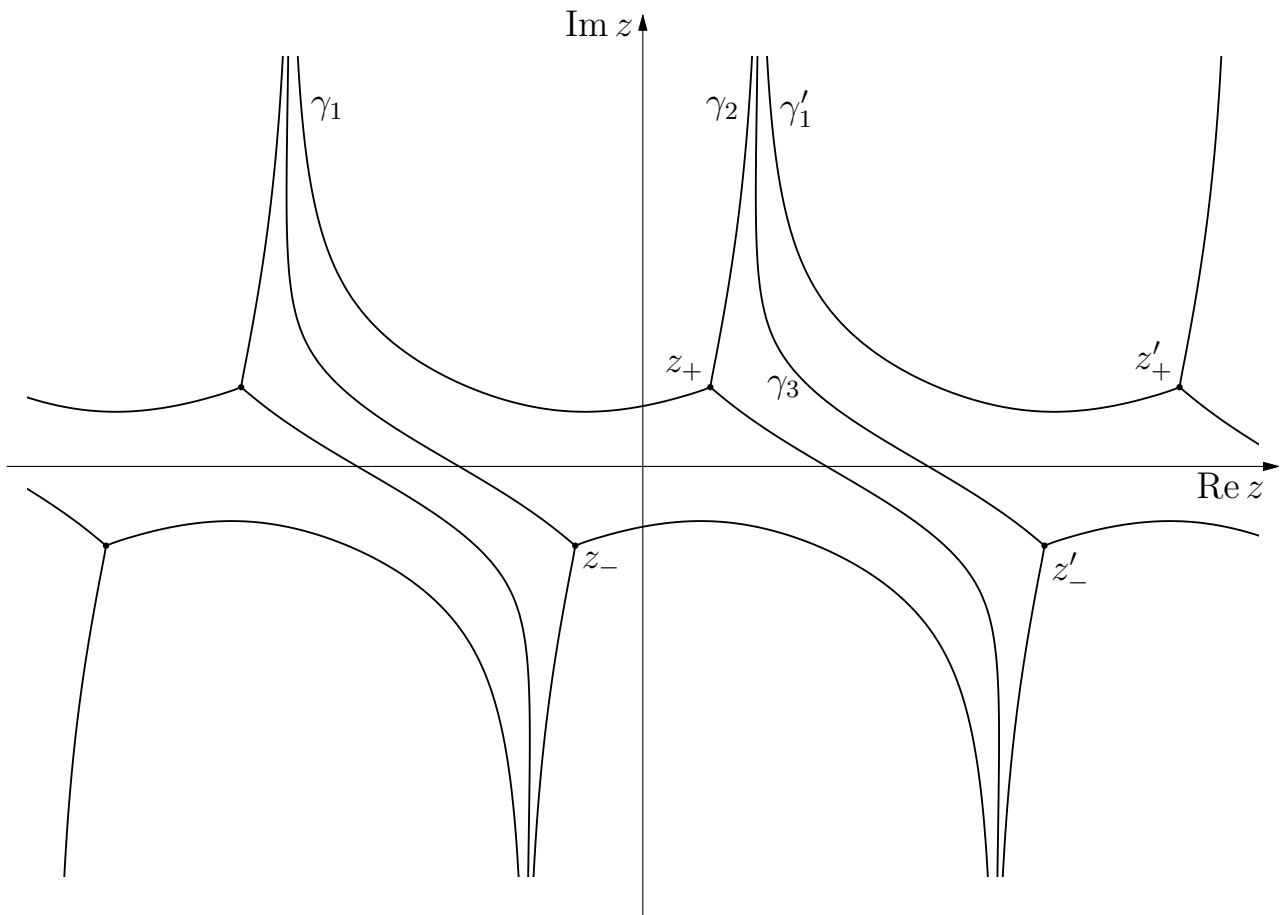
$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_0^T \sqrt{iV(x) - E} dx \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h). \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. При достаточно малом  $\hbar$ , как только окрестности различных точек  $E$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{\hbar} \operatorname{Im} \int_0^T \sqrt{iV(x) - E} dx \in 2\pi\mathbb{Z},$$

перестают пересекаться, в окрестностях этих точек имеется ровно по одной точке спектра. С учетом леммы 4 из этого следует, что точки спектра, соответствующие этому топологическому случаю, лежат на оси  $\operatorname{Re} E$  точно.

**3.7.2. Топологический случай 5.** Рассмотрим случай общего положения, то есть, случай, когда все линии Стокса уходят в бесконечность и ограниченных линий Стокса нет. Тогда картина линий Стокса имеет следующий вид:



Обозначим  $\gamma_1, \gamma_2$  — линии Стокса, выходящие из точки поворота  $z_+$  и уходящие в  $+i\infty$ , а  $\gamma_3$  — линию Стокса, выходящую из точки  $z'_- = z_- + T$  и также уходящую в  $+i\infty$ . Пусть, кроме того,  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$  и  $z'_+ = z_+ + T$ . Каждую из линий Стокса  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$  можно включить в соответствующую каноническую область  $K_1, K_2, K_3$  и  $K'_1 = K_1 + T$ . Тогда, для того чтобы продолжить систему решений из области  $K_1$  в область  $K'_1 = K_1 + T$ , необходимо

построить матрицы перехода  $\Omega_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ :

$$(\gamma_1, z_+, K_1) \xrightarrow{\Omega_1} (\gamma_2, z_+, K_2) \xrightarrow{\Omega_2} (\gamma_3, z'_-, K_3) \xrightarrow{\Omega_3} (\gamma'_1, z'_+, K'_1).$$

Переход от системы решений в области  $K_1$  к системе решений в области  $K'_1$  будет задаваться произведением этих матриц  $\Omega = \Omega_3 \Omega_2 \Omega_1$ .

Матрицы  $\Omega_k$  имеют следующий вид (см. [4]):

$$\Omega_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(h) & i + O(h) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_2 = e^{i\tau_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau_1}{h}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\tau_1}{h}} \end{pmatrix},$$

$$\tau_0 = \lim_{z \rightarrow z_+, z \in \gamma_2} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} - \lim_{z \rightarrow z'_-, z \in \gamma_3} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\tau_1 = \xi(z_+, z'_-), \operatorname{Re} \tau_1 > 0.$$

(Имеется в виду, что для корня выбрана ветвь при которой  $\operatorname{Re} \tau_1 > 0$ .)

$$\Omega_3 = e^{i\tau'_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau'_1}{h}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\tau'_1}{h}} \end{pmatrix},$$

$$\tau'_0 = \lim_{z \rightarrow z'_-, z \in \gamma_3} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} - \lim_{z \rightarrow z'_+, z \in \gamma'_1} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\tau'_1 = \xi(z'_-, z'_+), \operatorname{Re} \tau'_1 > 0.$$

(Аналогично, для корня выбрана ветвь при которой  $\operatorname{Re} \tau'_1 > 0$ .)

Таким образом, получаем

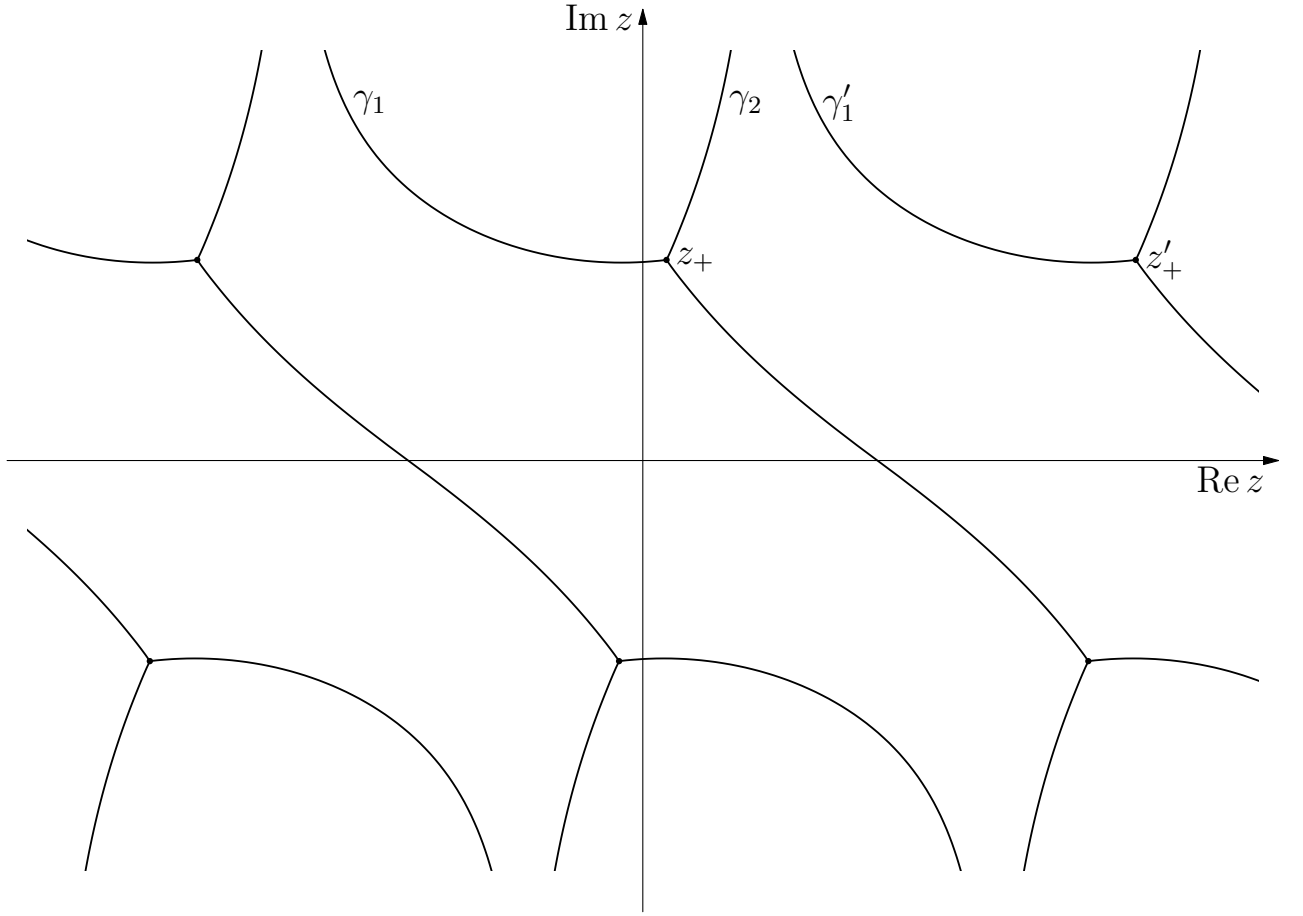
$$\Omega = e^{i(\tau_0 + \tau'_0 - \frac{\pi}{6})} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} \\ e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} (1 + O(h)) & ie^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} (1 + O(h)) \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы  $\det \Omega = -e^{i2(\tau_0 + \tau'_0 - \frac{\pi}{6})} + O(h)$ , откуда  $\tau_0 + \tau'_0 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ .  
 $\operatorname{tr} \Omega = (-1)^{k+1} e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} (1 + O(h))$ . Нам подходит только  $\tau_0 + \tau'_0 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , при котором условие (20) преобразуется в

$$\operatorname{tr} \Omega = e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} (1 + O(h)) = 2 + O(h).$$

Так как  $\operatorname{Re}(\tau_1 + \tau'_1) > 0$ , то при  $h \rightarrow 0 + 0$  модуль  $|\operatorname{tr} \Omega| \rightarrow +\infty$ , то есть, это условие асимптотически не выполняется. Другими словами, этот случай ничего не вносит в асимптотику спектра оператора  $\mathfrak{D}$ .

**3.7.3. Топологический случай 3.** Граф Стокса выглядит приблизительно так:



Обозначим  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — бесконечные линии Стокса, выходящие из одной точки поворота (например, точки  $z_+$ ). В рассматриваемом случае они уходят в одну и ту же бесконечность на цилиндре  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ . Пусть, для определенности, линии  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$  расположены так, как показано на рисунке. Каждую из линий Стокса  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$  можно включить в соответствующую каноническую область  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K'_1 = K_1 + T$ . Тогда, для того чтобы продолжить систему решений из области  $K_1$  в область  $K'_1 = K_1 + T$ , необходимо построить матрицы перехода  $\Omega_k$ ,  $k \in \{1, 2\}$ :

$$(\gamma_1, z_+, K_1) \xrightarrow{\Omega_1} (\gamma_2, z_+, K_2) \xrightarrow{\Omega_2} (\gamma'_1, z'_+, K'_1).$$

Переход от системы решений в области  $K_1$  к системе решений в области  $K'_1$  будет задаваться произведением этих матриц  $\Omega = \Omega_2\Omega_1$ . Матрица  $\Omega_1$  имеет следующий вид:

$$\Omega_1 = e^{-i\frac{\pi}{8}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(h) & i + O(h) \end{pmatrix}$$

А матрица  $\Omega_2$  имеет вид:

$$\Omega_2 = e^{i\tau_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau_1}{h}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\tau_1}{h}} \end{pmatrix},$$

$$\tau_0 = \lim_{z \rightarrow z_+, z \in \gamma_2} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} - \lim_{z \rightarrow z'_+, z \in \gamma'_1} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\tau_1 = \xi(z_+, z'_+), \operatorname{Re} \tau_1 > 0.$$

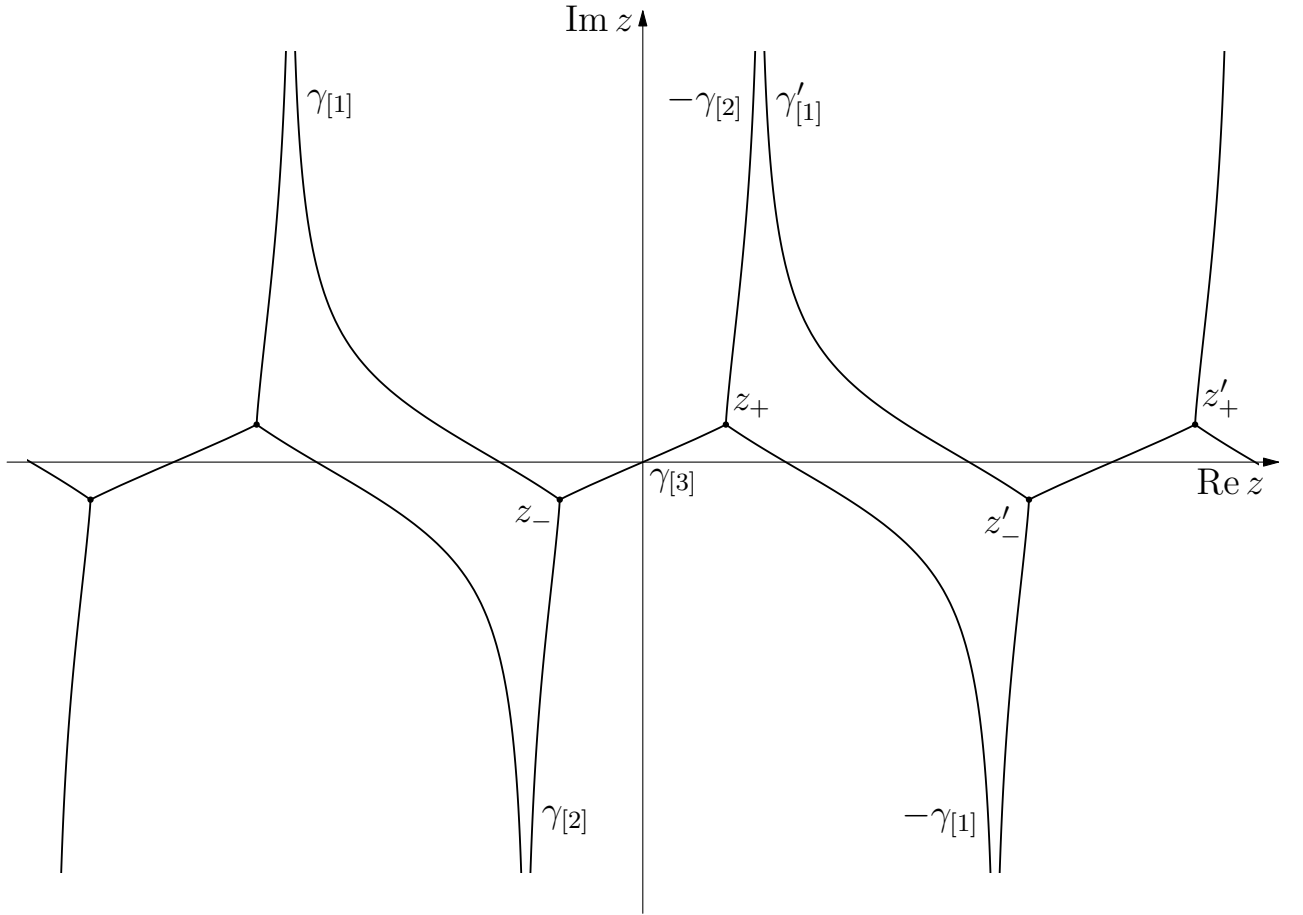
(Имеется в виду, что для корня выбрана ветвь при которой  $\operatorname{Re} \tau_1 > 0$ .)

Таким образом, аналогично случаю общего положения получаем, что матрица монодромии

$$\Omega = e^{i(\tau_0 - \frac{\pi}{6})} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{\tau_1}{h}} \\ e^{\frac{\tau_1}{h}}(1 + O(h)) & ie^{\frac{\tau_1}{h}}(1 + O(h)) \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы  $|\det \Omega| = 1 + O(h)$ ,  $|\operatorname{tr} \Omega| = e^{\frac{\tau_1}{h}}(1 + O(h))$ . Так как  $\operatorname{Re} \tau_1 > 0$ , то при  $h \rightarrow 0+0$  модуль  $|\operatorname{tr} \Omega| \rightarrow +\infty$ , то есть, это условие асимптотически не выполняется. Значит, этот случай ничего не вносит в асимптотику спектра оператора  $\mathfrak{D}$ .

**3.7.4. Топологический случай 4.** Граф Стокса в этом случае выглядит так:



В этом случае нам удобно будет индексировать линии Стокса и канонические области классами вычетов по модулю 3. То есть, выражения [1], [2], [3], [j] и [j + 1], которые будут встречаться в нижних индексах обозначают класс эквивалентности соответствующего элемента в факторгруппе  $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Обозначим линии Стокса, выходящие из точки  $z_-$ , следующим образом:  $\gamma_{[1]}$  уходит в  $+i\infty$ ,  $\gamma_{[2]}$  уходит в  $-i\infty$ ,  $\gamma_{[3]}$  соединяет точку  $z_-$  с точкой  $z_+$ .

Тогда из точки  $z_+$  выходят линии Стокса  $-\gamma_{[2]}$  (вверх, то есть, в  $+i\infty$ ),  $-\gamma_{[1]}$  (вниз) и  $-\gamma_{[3]}$  (в точку  $z_-$ ). Обозначим  $K_{[j]}$ , каноническую область, в которую можно включить линию Стокса  $\gamma_{[j]}$ . Для краткости, обозначим все эти объекты, сдвинутые на период  $T$ , теми же символами с добавлением штриха. Обратим внимание, что в каноническую область  $K'_{[1]}$  можно включить не только  $\gamma'_{[1]}$ , но и  $-\gamma_{[2]}$ . Так и поступим, тогда в качестве  $K_{[2]}$  можно взять  $K'_{[1]}$ . Таким образом,

$$z'_\pm = z_\pm + T, \quad \gamma'_{[j]} = \gamma_{[j]} + T, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad \gamma_{[3]} = -\gamma_{[3]};$$

$$K_{[j]} \supset \gamma_{[j]}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad K_{[3]} = -K_{[3]}, \quad K'_{[1]} = K_{[1]} + T = -K_{[2]}.$$

В этом случае для нас окажется важным конкретный вид членов  $1 + O(h)$  в матрицах, отвечающих переходу с одной линии Стокса, выходящей из некоторой точки поворота, на другую линию Стокса, выходящую из той же точки. Соответствующие формулы имеются в [13]. Так что, нам удобно будет в этом случае воспользоваться формулами перехода из [13], а не из [4].

Для того, чтобы продолжить систему решений из области  $K'_{[1]} = K_{[1]} + T$  в область  $K_{[1]}$ , необходимо построить матрицы перехода  $\Omega_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ :

$$\begin{aligned} & (z'_-, \gamma'_{[1]}, K'_{[1]} = -K_{[2]}) \xrightarrow{\Omega_1} (z_+, -\gamma_{[2]}, -K_{[2]} = K'_{[1]}) \xrightarrow{\Omega_2} \\ & \xrightarrow{\Omega_2} (z_+, -\gamma_{[3]} = \gamma_{[3]}, -K_{[3]} = K_{[3]}) \xrightarrow{\Omega_3} (z_-, \gamma_{[3]}, K_{[3]}) \xrightarrow{\Omega_4} (z_-, \gamma_{[1]}, K_{[1]}). \end{aligned}$$

Тогда переход от системы решений в области  $K'_{[1]}$  к системе решений в области  $K_{[1]}$  будет задаваться матрицей  $\Omega$ , представимой в виде

$${}^T\Omega = {}^T\Omega_1 {}^T\Omega_2 {}^T\Omega_3 {}^T\Omega_4.$$

(Или, что то же самое,  $\Omega = \Omega_4\Omega_3\Omega_2\Omega_1$ .) Матрицы  $\Omega_j$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{h}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{a}{h}} \end{pmatrix}, \quad a = \xi(z'_-, z_+), \quad \operatorname{Re} a > 0; \\ \Omega_3 &= e^{i\varphi'_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{a'}{h}} \\ e^{i\frac{a'}{h}} & 0 \end{pmatrix}, \quad a' = |\xi(z_+, z_-)| \in (0, +\infty); \\ \Omega_2 &= e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{[2][3]}^{-1} \\ 1 & i\alpha_{[3][1]} \end{pmatrix}; \\ \Omega_4 &= e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{[3][1]}^{-1} \\ 1 & i\alpha_{[1][2]} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_{[j][j+1]}$  имеет асимптотическое разложение

$$\alpha_{[j][j+1]} \sim \exp \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (-h)^k \int_{\gamma_{[j][j+1]}} \alpha_k(t) dt \right),$$

$$\alpha_{-1} = \sqrt{q}, \quad \alpha_0 = -\frac{q'}{4q}, \quad \alpha_1 = \frac{q''}{8q\sqrt{q}} - \frac{5(q')^2}{32q^2\sqrt{q}},$$

$$\alpha_k = -\frac{1}{2\sqrt{q}} \left( \alpha'_{k-1} + \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha_\ell \alpha_{k-1-\ell} \right), \quad q = i \cos z - E.$$

Для  $\sqrt{q}$  в этих формулах выбирается та же ветвь, что и для канонической пары решений в области  $K_{[j]}$ , а контур  $\gamma_{[j][j+1]}$  лежит в  $K_{[j]} \cup K_{[j+1]}$ , начинается в  $K_{[j+1]}$  там, где  $\operatorname{Re} \xi \rightarrow +\infty$ , и заканчивается в  $K_{[j]}$  там, где  $\operatorname{Re} \xi \rightarrow -\infty$ . Отметим также, что  $\alpha_{[j][j+1]}$  обладают следующими свойствами:

$$\alpha_{[j][j+1]} = 1 + O(h), \quad \alpha_{[1][2]} \alpha_{[2][3]} \alpha_{[3][1]} = 1.$$

Таким образом, для  $\Omega$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\Omega &= e^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{h}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{a}{h}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_{[2][3]}^{-1} & i\alpha_{[3][1]} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{a'}{h}} \\ e^{-i\frac{a'}{h}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_{[3][1]}^{-1} & i\alpha_{[1][2]} \end{pmatrix} = \\ &= e^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{a}{h}} \\ \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h}} & i\alpha_{[3][1]} e^{\frac{a}{h}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{[3][1]}^{-1} e^{i\frac{a'}{h}} & i\alpha_{[1][2]} e^{i\frac{a'}{h}} \\ 0 & e^{-i\frac{a'}{h}} \end{pmatrix} = \\ &= e^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{a}{h} - i\frac{a'}{h}} \\ \alpha_{[3][1]}^{-1} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h} + i\frac{a'}{h}} & ie^{\frac{a}{h}} \left( \alpha_{[1][2]} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{i\frac{a'}{h}} + \alpha_{[3][1]} e^{-i\frac{a'}{h}} \right) \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \\ \Omega &= e^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{[3][1]}^{-1} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h} + i\frac{a'}{h}} \\ e^{-\frac{a}{h} - i\frac{a'}{h}} & ie^{\frac{a}{h}} \left( \alpha_{[1][2]} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{i\frac{a'}{h}} + \alpha_{[3][1]} e^{-i\frac{a'}{h}} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для этой матрицы

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \Omega &= ie^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} e^{\frac{a}{h}} \left( \alpha_{[1][2]} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{i\frac{a'}{h}} + \alpha_{[3][1]} e^{-i\frac{a'}{h}} \right) = \\ &= ie^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h}} \left( \alpha_{[1][2]} e^{i\frac{a'}{h}} + \alpha_{[1][2]}^{-1} e^{-i\frac{a'}{h}} \right) = \\ &= ie^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h}} \left( e^{i\frac{a'}{h} + \ln \alpha_{[1][2]}} + e^{-i\frac{a'}{h} - \ln \alpha_{[1][2]}} \right) = \\ &= ie^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h}} \left( e^{i\left(\frac{a'}{h} - i \ln \alpha_{[1][2]}\right)} + e^{-i\left(\frac{a'}{h} - i \ln \alpha_{[1][2]}\right)} \right) = \\ &= ie^{i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h}} 2 \cos \left( \frac{a'}{h} - i \ln \alpha_{[1][2]} \right), \end{aligned}$$

$$\det \Omega = -e^{2i(\varphi_0 + \varphi'_0 - \frac{\pi}{3})} \alpha_{[3][1]}^{-1} \alpha_{[2][3]}^{-1}.$$

Так как  $\det \Omega = 1 + O(h)$ , и

$$\operatorname{tr} \Omega = \mp 2 \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h}} \cos \left( \frac{a'}{h} - i \ln \alpha_{[1][2]} \right).$$

то условие (20) преобразуется в

$$\mp \alpha_{[2][3]}^{-1} e^{\frac{a}{h}} \cos \left( \frac{a'}{h} - i \ln \alpha_{[1][2]} \right) = 1 + O(h).$$

Так как  $\operatorname{Re} a > 0$ , то  $e^{\frac{a}{h}}$  растет при  $h \rightarrow 0+0$  быстрее любой степени  $\frac{1}{h}$ , значит из этого условия следует, что

$$\cos \left( \frac{a'}{h} - i \ln \alpha_{[1][2]} \right) = o(h^\infty).$$

В  $o(h^\infty)$ -окрестности своего нуля  $z_0$  функция  $\cos z$  близка к  $z - z_0$  или к  $-z + z_0$ , значит в такой окрестности можно найти (единственную) точку, в которой косинус принимает значение  $\mp e^{-\frac{a}{h}} \alpha_{[2][3]}$ . Другими словами, в некоторой  $o(h^\infty)$ -окрестности любого нуля косинуса условие квантования выполняется ровно в одной точке. Множество нулей косинуса это

$$\left\{ \frac{a'}{h} - i \ln \alpha_{[1][2]} \right\} = \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z},$$

с учетом того, что  $\ln \alpha_{[1][2]} = O(h)$ , мы получаем такое условие принадлежности точки  $E$  дискретному спектру оператора  $\mathfrak{D}$ :

$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E} dz \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} + O(h). \quad (23)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 11.** Как видно, в окрестностях точек  $E$ , для которых выполняется условие

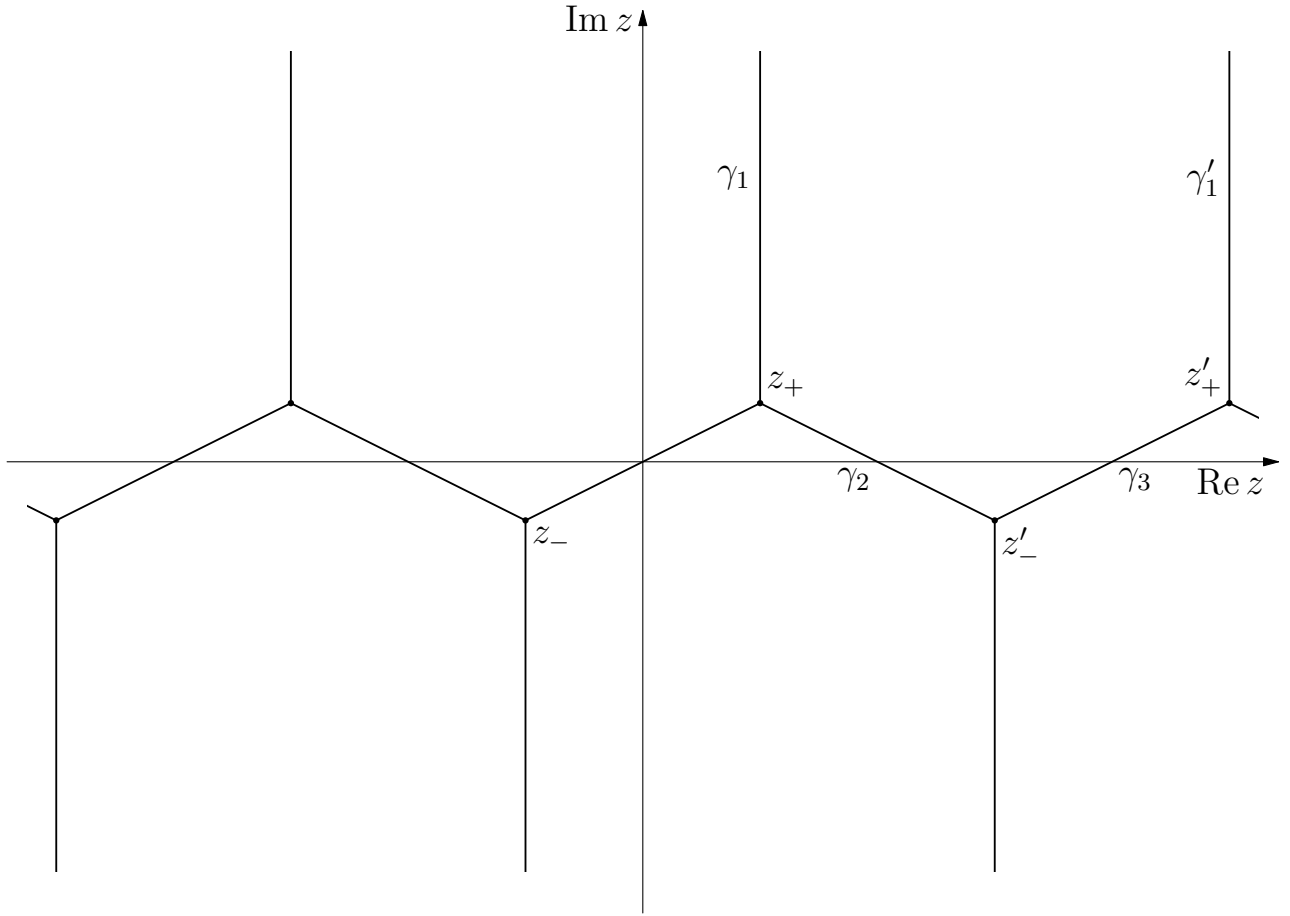
$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E} dz \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z},$$

лежит ровно по одной точке спектра при достаточно малых  $h$  — как только такие окрестности разных точек  $E$ , удовлетворяющих указанному условию, перестают пересекаться.

**ЗАМЕЧАНИЕ 12.** Отметим, что в этом случае мы получили лишь, что точки спектра лежат в окрестности кривых  $\eta$  и  $\bar{\eta}$ . То есть, в отличие от топологического случая 1, спектр на этих кривых сосредоточен асимптотически, но не обязательно точно.



**3.7.5. Топологический случай 2.** При  $E = E^*$  картина линий Стокса имеет следующий вид:



Обозначим  $\gamma_1$  — линия Стокса, выходящая из точки  $z_+$  вертикально вверх,  $\gamma_2$  — линия Стокса, соединяющая  $z_+$  с  $z'_- = z_- + T$ ,  $\gamma_3$  — линия Стокса, соединяющая  $z'_- = z_- + T$  с  $z'_+ = z_+ + T$ ,  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$ .

Каждую линию Стокса из  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и  $\gamma'_1 = \gamma_1 + T$  можно включить в соответствующую каноническую область  $K_1, K_2, K_3$  и  $K'_1 = K_1 + T$ . Тогда, для того чтобы продолжить систему решений из области  $K_1$  в область  $K'_1 = K_1 + T$ , необходимо построить матрицы перехода  $\Omega_k, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ :

$$(\gamma_1, z_+, K_1) \xrightarrow{\Omega_1} (\gamma_2, z_+, K_2) \xrightarrow{\Omega_2} (\gamma_2, z'_-, K_2) \xrightarrow{\Omega_3} (\gamma_3, z'_-, K_3) \xrightarrow{\Omega_4} (\gamma_3, z'_+, K_3) \xrightarrow{\Omega_5} (\gamma'_1, z'_+, K'_1).$$

Переход от системы решений в области  $K_1$  к системе решений в области  $K'_1$  будет задаваться произведением этих матриц  $\Omega = \Omega_5 \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2 \Omega_1$ . Матрицы  $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5$  имеют следующий вид (см. [4]):

$$e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + O(h) & i(1 + O(h)) \end{pmatrix}.$$

А оставшаяся матрицы  $\Omega_2$  и  $\Omega_4$  побочно-диагональны:

$$\Omega_2 = e^{i\tau_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\tau_1}{h}} \\ e^{-\frac{\tau_1}{h}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_0 = \lim_{z \rightarrow z_+, z \in \gamma_2} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} - \lim_{z \rightarrow z'_-, z \in \gamma_2} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\tau_1 = \xi(z_+, z'_-), \quad \text{Im } \tau_1 > 0,$$

$$\Omega_4 = e^{i\tau'_0} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\tau'_1}{h}} \\ e^{-\frac{\tau'_1}{h}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau'_0 = \lim_{z \rightarrow z'_-, z \in \gamma_3} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}} - \lim_{z \rightarrow z'_+, z \in \gamma_3} \arg(iV(z) - E)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\tau'_1 = \xi(z'_-, z'_+), \quad \text{Im } \tau'_1 > 0.$$

Для  $\Omega$  получаем (здесь использовано обозначение  $[\cdot] = \cdot + O(h)$ ):

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_5 \Omega_4 \Omega_3 \Omega_2 \Omega_1 = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}i + (\tau_0 + \tau'_0)i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [1] & [i] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\tau'_1}{h}} \\ e^{-\frac{\tau'_1}{h}} & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [1] & [i] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\tau_1}{h}} \\ e^{-\frac{\tau_1}{h}} & 0 \end{pmatrix} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [1] & [i] \end{pmatrix} = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}i + (\tau_0 + \tau'_0)i} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau'_1}{h}} & 0 \\ e^{-\frac{\tau'_1}{h}}[i] & e^{\frac{\tau'_1}{h}}[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau_1}{h}} & 0 \\ e^{-\frac{\tau_1}{h}}[i] & e^{\frac{\tau_1}{h}}[1] \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [1] & [i] \end{pmatrix} = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}i + (\tau_0 + \tau'_0)i} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} & 0 \\ \left( e^{-\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} + e^{\frac{\tau'_1 - \tau_1}{h}}[1] \right) [i] & e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}}[1] \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [1] & [i] \end{pmatrix} = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}i + (\tau_0 + \tau'_0)i} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} \\ e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}}[1] & \left( e^{-\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} + e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}}[1] + e^{\frac{\tau'_1 - \tau_1}{h}}[1] \right) [i] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для такой матрицы перехода условие (20) на принадлежность точки  $E$  дискретному спектру оператора  $\mathfrak{D}$  преобразуется в

$$e^{-\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} + e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} (1 + O(h)) + e^{\frac{\tau'_1 - \tau_1}{h}} (1 + O(h)) = 2 + O(h). \quad (24)$$

В точке  $E^*$  благодаря виду графа Стокса имеем  $\text{Re } \tau_1 = \text{Re } \tau'_1 = 0$ , а по утверждению (8) и по выбору ветвей корня ( $\text{Im } \tau_1 > 0$  и  $\text{Im } \tau'_1 > 0$ ) имеем  $\tau_1 = -\overline{\tau'_1}$ , значит

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} + e^{\frac{\tau_1 + \tau'_1}{h}} (1 + O(h)) + e^{\frac{\tau'_1 - \tau_1}{h}} (1 + O(h)) &= \\ &= 2 \cos \frac{2 \text{Im } \tau_1}{h} + O(h) + (1 + O(h)) = 2 + O(h). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\cos \frac{2 \text{Im } \tau_1}{h} = \frac{1}{2} + O(h), \quad \iff \quad \frac{1}{h} \text{Im } \tau_1 \in \frac{\pi}{6} + \pi \mathbb{Z} + O(h).$$

Таким образом, получаем условие принадлежности точки  $E^*$  дискретному спектру оператора  $\mathfrak{D}$ :

$$\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E^*} dz \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z} + O(h).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.** Условие (24) разрешимо в некоторой окрестности точки  $E^*$  при любом  $h$ . То есть,  $E^*$  входит в предельный спектральный граф.

Таким образом, нами доказана

**ТЕОРЕМА 2.** В асимптотику спектра оператора  $\mathfrak{D}$  вклад вносят только топологические случаи 1, 2 и 4. В случае 1 принадлежность точки  $E$  спектру определяется условием (22), причем все такие точки лежат на оси  $\operatorname{Re} E$  точно. В случае 2 принадлежность точки  $E$  определяется тем, удовлетворяет ли  $E$  или  $\bar{E}$  условию (23). В окрестностях точек, удовлетворяющих асимптотикам (22) и (23) (возможно, кроме точки  $E^*$ ), лежат ровно по одной точке спектра (при достаточно малых  $h$ ).

### 3.8. Асимптотика спектра

**ТЕОРЕМА 3.** Вне произвольных окрестностей точек  $\pm i$  асимптотика дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}$  при  $iV(z) = i \cos z$  сосредоточена на трех кривых: луче  $(E^*, +\infty)$ , отрезке кривой  $\eta$ , соединяющем точку  $i$  и точку  $E^*$ , и отрезке кривой  $\bar{\eta}$ , соединяющем точку  $-i$  и точку  $E^*$ . На луче  $(E^*, +\infty)$  асимптотика дискретного спектра оператора  $\mathfrak{D}$  выделяется условием

$$\operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx \in h(2\pi\mathbb{Z} + O(h)),$$

на отрезке кривой  $\eta$  условием

$$\operatorname{Im} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{i \cos z - E} dz \in h \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h) \right),$$

а на отрезке сопряженной кривой  $\bar{\eta}$  имеем сопряженное условие

$$\operatorname{Im} \int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz \in h \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h) \right).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно объединить результаты теоремы 2 и леммы 19. □

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.** Как мы видели:

- (1) дискретный спектр при любом  $h > 0$  симметричен относительно оси  $\operatorname{Re} E$ ;

- (2) при любом  $h > 0$ , на произвольном компакте в  $\mathbb{C}$  имеется лишь конечное число точек спектра оператора  $\mathfrak{D}$ ;
- (3) в окрестностях точек, удовлетворяющих указанным в теореме 3 асимптотикам (возможно, кроме точки  $E^*$ ), лежит ровно по одной точке спектра (при достаточно малых  $h$ );
- (4) на луче  $(E^*, +\infty)$  дискретный спектр сосредоточен точно (при достаточно малых  $h$ );
- (5) на указанных в теореме отрезках кривых  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  точки спектра лежат асимптотически (не обязательно точно).

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Условия на асимптотику выписаны в теореме 3 через мнимые части некоторых интегралов. Причем каждая асимптотическая серия сосредоточена на кривой, на которой действительная часть соответствующего интеграла обращается в ноль. Действительно, эти кривые находились из условия присутствия конечной линии Стокса в графе Стокса, а оно влечет равенство нулю действительной части соответствующего интеграла. Поэтому, в условиях на асимптотики, знак  $\text{Im}$  можно опустить. Тогда на луче  $(E^*, +\infty)$  имеем требование

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{i \cos x - E} dx \in ih (2\pi\mathbb{Z} + O(h)) ,$$

а на отрезках кривых  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  (кроме окрестностей точек  $\pm i$ ) имеем соответственно:

$$\int_{z_-(E)}^{z_+(E)} \sqrt{i \cos z - E} dz \in ih \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h) \right) ,$$

$$\int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz \in ih \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + O(h) \right) .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Рассмотрим поверхность  $p^2 + i \cos z = E$  в кокасательном к цилиндру  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$  пространстве  $\{(p, z) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}/T\mathbb{Z})\}$ . (Здесь, как и в теории квазиклассического квантования самосопряженных операторов, выполняется формальная подстановка  $p = -ih \frac{\partial}{\partial x}$  в спектральное уравнение.) Это — риманова поверхность (обозначим ее  $\Lambda$ ) функции  $p(z) = i\sqrt{i \cos z - E}$ . Она получается склейкой вдоль разреза (с «перехлестом») двух экземпляров цилиндра  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , разрезанного по лучам, соединяющим точки  $z_-$  и  $z_+$  с бесконечностями  $-i\infty$  и  $+i\infty$ .

То, что разрезы именно такие (а не вдоль отрезка, соединяющего  $z_-$  с  $z_+$ ), можно понять, рассмотрев поведение  $p(z)$  в окрестностях  $-i\infty$  и  $+i\infty$ . Рассмотрим, для примера, окрестность  $+i\infty$ . Поверхность  $\Lambda$  двулистно накрывает цилиндр  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , значит окружность, обходящая  $+i\infty$  на

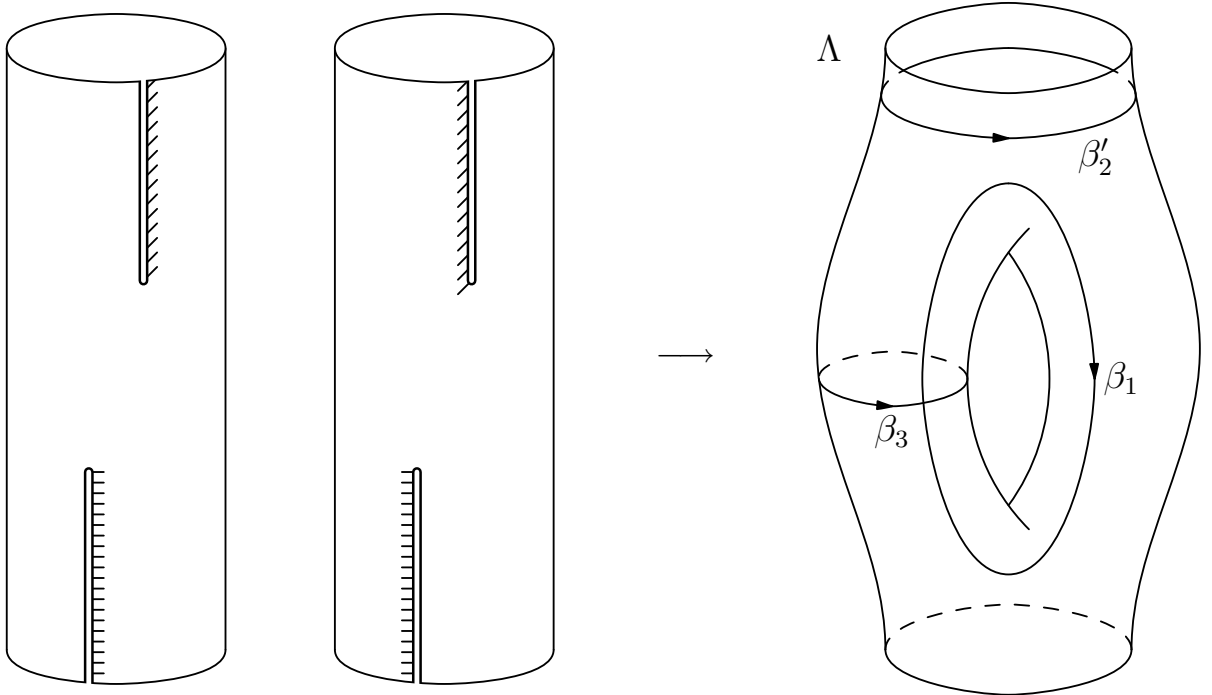
цилиндре поднимается либо до связного цикла, обходящего  $+i\infty$  на  $\Lambda$ , либо до двух связных циклов, обходящих два экземпляра  $+i\infty$  на  $\Lambda$ . Первый случай соответствует склейке по двум разрезам вдоль двух лучей, уходящих в бесконечности, а второй — склейке по разрезу вдоль отрезка  $[z_-, z_+]$ . Итак, рассмотрим цикл  $z \in U(+i\infty) \subset \mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ ,  $z = x + iy$ ,  $x \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ ,  $y = \text{const} \in U(+\infty) \subset \mathbb{R}$ :

$$p = i\sqrt{i \cos z - E} = i\sqrt{i \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} - E}.$$

Пренебрегая малыми по сравнению с  $e^y$  слагаемыми  $E$  и  $e^{-y}e^{ix}$  получаем:

$$p \sim i\sqrt{e^y} \sqrt{ie^{-ix}} = \text{const} \sqrt{ie^{-ix}},$$

то есть цикл, обходящий  $+i\infty$  ведет себя также, как и для римановой поверхности квадратного корня  $\sqrt{\cdot}$  — он поднимается до одного связного цикла. Значит, склейка ведется вдоль лучей, уходящих в бесконечность.



(25)

Таким образом, риманова поверхность  $\Lambda$  — это тор с двумя дырками. На этой поверхности имеются три базисных цикла, например:

- (1)  $\beta_1$  — цикл, идущий из точки  $z_-$  в точку  $z_+$  по левому экземпляру цилиндра и возвращающийся в точку  $z_-$  по правому;
- (2)  $\beta'_2$  — цикл, обходящий дырку  $+i\infty$  в направлении возрастания  $\text{Re } z$ ;
- (3)  $\beta_3$  — цикл, обходящий один из экземпляров цилиндра в направлении возрастания  $\text{Re } z$  и не пересекающий разрез.

Из леммы 8 на стр. 32:

$$\int_{z_-(\bar{E})}^{z_+(\bar{E})} \sqrt{i \cos z - \bar{E}} dz = \overline{\int_{z_-(E)}^{z_+(E)+2\pi} \sqrt{i \cos z - E} dz} = \frac{1}{2} \int_{\beta_1+\beta'_2} \sqrt{i \cos z - E} dz,$$

так как интеграл  $p dz$  по  $[z_-, z_+]$  равен половине интеграла  $p dz$  по циклу  $\beta_1$  ( $\beta_1$  обходит отрезок  $[z_-, z_+]$  дважды, в противоположных направлениях, знаки  $p$  при этих обходах противоположны), а интеграл по  $[0, 2\pi]$  — половине интеграла по циклу  $\beta'_2$  (цикл  $\beta'_2$  обходит период дважды — по двум экземплярам цилиндра). Обозначим  $\beta_2 = \beta_1 + \beta'_2$ , тогда  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  также составляют базис циклов на  $\Lambda$ . С учетом вышеизложенного, интегралы в теореме 3 можно переписать в виде интегралов по путям от формы  $p dz$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \int_{\beta_1} p dz \in h(\pi + 2\pi\mathbb{Z} + O(h)) \\ \int_{\beta_2} p dz \in h(\pi + 2\pi\mathbb{Z} + O(h)) \\ \int_{\beta_3} p dz \in h(2\pi\mathbb{Z} + O(h)). \end{array} \right.$$

В таком виде полученные условия обычно называются условиями квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова.

**ЗАМЕЧАНИЕ 17.** Отметим, что ориентация циклов в условиях квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова не имеет значения. Смена ориентации цикла, по которому ведется интегрирование, отвечает симметрии правой части относительно нуля; а в правых частях всех условий квантования стоят симметричные множества.

С учетом всего этого, теорему 3 можно переформулировать в таком виде:

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $E$  — таково, что на поверхности  $\Lambda$  существует цикл  $\beta \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , для которого

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\beta} p dz \in \mathbb{Z} + \frac{\mu(\beta)}{4}.$$

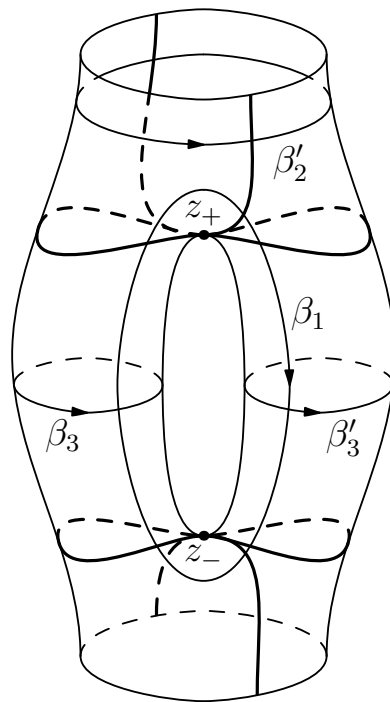
Тогда существует собственное число  $\lambda$  оператора  $\mathfrak{D}$ , для которого  $\lambda - E = O(h^2)$ . Здесь  $\mu(\beta_1) = \mu(\beta_2) = 2$ ,  $\mu(\beta_3) = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 18.** Условия в теореме 4 похожи на условия квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова лагранжеских многообразий в  $\mathbb{R}^{2n}$  (см., например, [7, 6]), описывающие спектр оператора вида  $H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})$ . Отметим однако, что в теории квазиклассического квантования требуется выполнение условий квантования для всех циклов на лагранжеском многообразии.

В рассматриваемом же несамосопряженном случае, во-первых, вместо лагранжева многообразия, имеется риманова поверхность функции  $p(z)$ . А во-вторых, вместо системы, получается совокупность условий Бора–Зоммерфельда–Маслова на интегралы  $p dz$  по трем конкретным циклам на римановой поверхности, то есть достаточно выполнения условия квантования хотя бы для одного из циклов  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Для  $\beta \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  величина  $\mu(\beta)$  — одномерный индекс Маслова проекции цикла  $\beta$  на цилиндр  $\text{Re } \Lambda = \{(\text{Re } z, \text{Re } p) \mid (z, p) \in \Lambda\}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Попробуем разобраться, почему же в качестве условия на разрешимость  $\mathfrak{D}\psi = E\psi$  в  $A(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$  получается совокупность условий на циклы, а не система. Рассмотрим, для примера, топологический случай 1 графа Стокса. Поднимем граф Стокса на риманову поверхность  $\Lambda$ .



При этом его лучше называть не граф Стокса, а как-либо по-другому, например «аналог графа Стокса». Дело в том, что для «аналога графа Стокса» не выполняются свойства графа Стокса, например (как видно из картинке) нарушается  $5^{\text{Sc}}$ , стр. 38. Аналогично, поднятия линий Стокса лучше называть «аналоги линий Стокса». Для них не выполняется, например  $6^{\text{Sc}}$ .

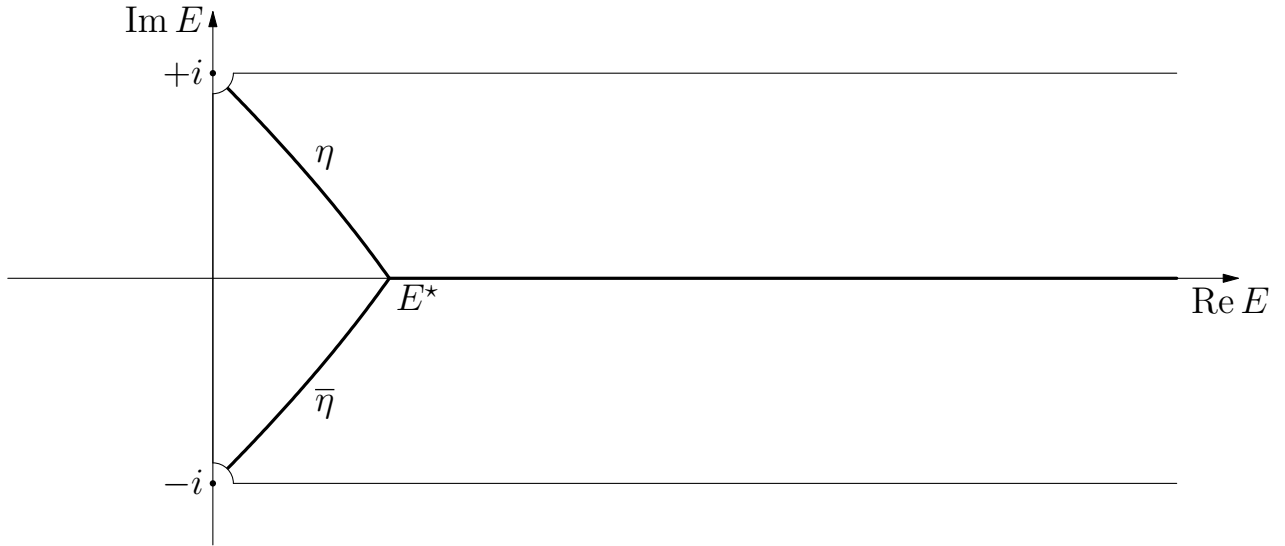
То, что решение при обходе вдоль цикла  $\beta_3$  (равно как и при обходе вдоль цикла  $\beta'_3$ ) переходит в себя, дается условием квантования для этого топологического случая. То, что решение при обходе вдоль цикла  $\beta_1$  переходит в себя, следует из топологического вида «аналога графа Стокса». Действительно, в качестве канонических областей можно взять цилиндры  $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ , формирующие  $\Lambda$  при склейке. Для продолжения решения с левого цилиндра на правый вдоль  $\beta_1$  в окрестности  $z_+$ , необходимо построить матрицу перехода  $\Omega_{z_+}$ , а для продолжения решения с правого цилиндра на левый вдоль

$\beta_1$  в окрестности  $z_-$  — матрицу перехода  $\Omega_{z_-}$ . В силу симметрии  $\cos z$  относительно нуля, матрицы  $\Omega_{z_+}$  и  $\Omega_{z_-}$  взаимно обратны. А значит, решение задано корректно вдоль цикла  $\beta_1$ . Таким образом, в случае 1, решение корректно продолжается вдоль циклов  $\beta_3$ ,  $\beta'_3$  и  $\beta_1$ , которые формируют базис циклов на  $\Lambda$  (и, следовательно, вдоль любого цикла на  $\Lambda$ ), тогда и только тогда, когда выполняется условие квантования на цикле  $\beta_3$

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\beta_3} p dz = m + \frac{\mu(\beta_3)}{4}.$$

### 3.9. Спектральный граф

По теореме 3 асимптотика спектра сосредоточена на луче  $(E^*, +\infty)$ , отрезке кривой  $\eta$ , соединяющем точку  $i$  и точку  $E^*$ , и отрезке кривой  $\bar{\eta}$ , соединяющем точку  $-i$  и точку  $E^*$ . Значит, вне окрестностей точек  $\pm i$  предельный спектральный граф оператора  $\mathfrak{D}$  имеет следующий вид:



**ЗАМЕЧАНИЕ 21.** Выкалывание окрестностей точек  $\pm i$  носит технический, а не принципиальный характер. Спектр не имеет особенностей в этих окрестностях. Сами точки  $\pm i$  не входят в спектр при любом  $\hbar > 0$ , так как они не входят в числовой образ  $\text{Im} \mathfrak{D} = [0, +\infty) + i(-1, 1)$ . А в их окрестностях не может находиться бесконечно много точек спектра — как уже отмечалось, при любом  $\hbar > 0$ , на любом компакте в  $\mathbb{C}$  имеется лишь конечное число точек.



# Литература.

- [1] И. Ц. ГОХБЕРГ, М. Г. КРЕЙН Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
- [2] Ю. Н. ДНЕСТРОВСКИЙ, Д. П. КОСТОМАРОВ О задачах на собственные значения для уравнений второго порядка в случае нелинейной зависимости от параметра  $\lambda$ . *ДАН* — 1963. — **152**, № 1. — 28–30.
- [3] С. Ю. ДОБРОХОТОВ, В. Н. КОЛОКОЛЬЦОВ, ВИКТОР МАРТИНЕС ОЛИВЕ Асимптотически устойчивые инвариантные торы векторного поля  $V(x)$  и квазимоды оператора диффузии. *Мат. заметки* — 1995. — **58**, № 2. — 880–884.
- [4] М. А. ЕВГРАФОВ, М. В. ФЕДОРЮК Асимптотика решений уравнения  $w'' - p(z, \lambda)w = 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  в комплексной плоскости. *УМН* — 1966. — **21**, № 1. — 3–50.
- [5] Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, А. А. РУЗМАЙКИН Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма. *УФН* — 1987. — **152**, № 2. — 263–284.
- [6] В. П. МАСЛОВ Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1987.
- [7] В. П. МАСЛОВ Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: МГУ, 1965.
- [8] С. А. СТЕПИН Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному *УМН* — 1995. — **50**, № 6. — 219–220.
- [9] С. А. СТЕПИН О спектральных свойствах задачи Орра–Зоммерфельда при исчезающей вязкости *Функц. анализ и его прил.* — 1996. — **30**, № 4. — 88–91.
- [10] С. А. СТЕПИН Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства задачи Орра–Зоммерфельда. *Мат. сборник* — 1997. — **188**. — 129–146.
- [11] С. А. СТЕПИН, А. А. АРЖАНОВ Квазиклассические спектральные асимптотики и явление Стокса для уравнения Вебера. *Доклады РАН* — 2001. — **378**, № 1. — 18–21.
- [12] С. А. СТЕПИН, А. А. АРЖАНОВ О локализации спектра в одной задаче сингулярной теории возмущений. *УМН* — 2002. — **57**, № 3. — 161–162.
- [13] С. Н. ТУМАНОВ, А. А. ШКАЛИКОВ О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля. *Известия РАН, серия Математика* — 2002. — **66**, № 4. — 177–204.
- [14] М. В. ФЕДОРЮК Топология линий Стокса уравнений второго порядка. *Известия АН СССР, серия Математика* — 1965. — **23**, № 3. — 645–656.
- [15] А. А. ШКАЛИКОВ О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи. *Мат. заметки* — 1997. — **62**, № 6. — 950–953.

- [16] А. А. ШКАЛИКОВ Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса. *Современная математика. Фундаментальные направления.* — 2003. — **3**. — 89–112.
- [17] S. J. CHAPMAN Subcritical transition in channel flows. *J. Fluid Mech.* — 2002. — **451**. — 35–97.
- [18] E. B. DAVIES Semi-classical states for non-self-adjoint Shrödinger operators. *Commun. Math. Phys.* — 1999. — **200**, — 35–41.
- [19] E. B. DAVIES Pseudospectra of differential operators. *Operator Theory* — 2000. — **43**, — 243–262.
- [20] DOBROKHOTOV S. YU., V. N. KOLOKOLTSOV, V. MARTINEZ OLIVE Quasimodes of the diffusion operator  $-\varepsilon\Delta + v(x) \cdot \nabla$ , corresponding to asymptotically stable limit cycles of the field  $v$ . *Sobretiro de Societed Matematica Mexicana* — 1994. — **11**. — 81–89.
- [21] R. G. DRAZIN, W. H. REID Hydrodynamic Stability. — Cambridge, 1981.
- [22] K. PRAVDA-STAROV A general result about pseudo-spectrum for Shrödinger operators. *Proc. R. Soc. A* — 2004. — **460**. — 471–477.
- [23] P. REDPARTH Spectral properties of non-selfadjoint operators in the semiclassical regime. *Journal of Differential Equations* — 2001. — **177**, № 2. — 307–330.
- [24] A. A. SCHKALIKOV Spectral portraits and the resolvent growth of a model problem associated with the Orr-Sommerfeld equation. *arXiv* — 2003. — [arxiv.org/pdf/math/0306342](http://arxiv.org/pdf/math/0306342).
- [25] S. A. STEPIN, A. A. ARZHANOV WKB–approximations and spectral asymptotics in one problem of singular perturbation theory *Journal of Math. Sciences* — 2005. — **126**, № 5. — 1467–1484.
- [26] L. N. TREFETHEN Pseudospectra of Linear Operators *ISIAM 95: Proceedings of the Third Int. Congress of Industrial and Applied Math., Academic Verlag, Berlin* — 1996. — 401–434.

## Работы автора по теме диссертации

- [27] С. В. ГАЛЬЦЕВ, А. И. ШАФАРЕВИЧ Спектр и псевдоспектр несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами. *Матем. заметки* — 2006. — **80**, № 3. — 356–366.
- [28] С. В. ГАЛЬЦЕВ, А. И. ШАФАРЕВИЧ Квантованные римановы поверхности и квазиклассические спектральные серии для несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами. *Теоретическая и математическая физика* — 2006. — **148**, № 2. — 206–226.
- [29] С. В. ГАЛЬЦЕВ, А. И. ШАФАРЕВИЧ Асимптотика дискретного спектра несамосопряженного периодического оператора. — В кн.: Труды XXVII Конференции молодых ученых. — М.: Мех-мат ф-т МГУ, 2005. — 18–22.
- [30] S. V. GALTSEV, A. I. SHAFAREVICH Semiclassical quantization of Riemann surfaces and spectral problem for non-selfadjoint Shroedinger operator. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics* — 2006. — **12**, № 2. — 167–196.