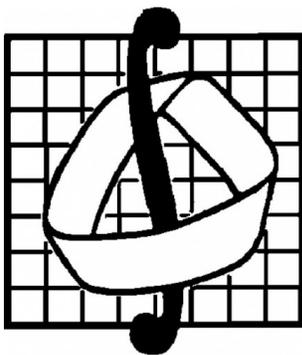


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



ФОКИЧЕВА ВИКТОРИЯ ВИКТОРОВНА

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ  
БИЛЛИАРДОВ

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
академик РАН А.Т.Фоменко

Москва–2016 г.

# Оглавление

Введение	4
<b>1 Основные определения.</b>	<b>20</b>
1.1 Интегрируемые системы.	20
1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы.	20
1.1.2 Теорема Лиувилля.	20
1.1.3 Отношение эквивалентности на множестве интегрируемых гамильтоновых систем.	21
1.2 Инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых систем.	22
1.2.1 Грубые инварианты.	22
1.2.2 Атомы-бифуркации.	22
1.2.3 Некомпактные атомы-бифуркации.	25
1.2.4 Выбор циклов на торах Лиувилля.	26
1.2.5 Молекула Фоменко-Цишанга – полный инвариант Лиувиллевой эквивалентности.	28
1.2.6 Влияние ориентации на метки.	29
1.3 Биллиард.	30
1.3.1 Классическая постановка биллиардной задачи.	30
1.3.2 Гамильтоново сглаживание.	30
1.3.3 Эллиптико-гиперболический биллиард.	31
1.3.4 Параболический биллиард.	32
1.3.5 Обобщённый биллиард: кусочно-плоская биллиардная область получена склейками плоских биллиардных областей, а движение доопределено по непрерывности.	35
<b>2 Классификация биллиардных областей.</b>	<b>37</b>
2.1 Компактные плоские области, ограниченные софокусными эллипсами и гиперболами.	37
2.1.1 Отношение эквивалентности.	37
2.1.2 Классификация эллиптико-гиперболических биллиардных областей.	38
2.2 Области, ограниченные дугами парабол.	42
2.2.1 Отношение эквивалентности.	42
2.2.2 Классификация параболических биллиардных областей.	42
2.2.3 Классификация плоских некомпактных параболических областей.	44
2.3 Обобщенные биллиардные области, ограниченные дугами эллипсов и гипербол.	45
2.3.1 Правила склейки. Конические точки.	45

2.3.2	Отношение эквивалентности. . . . .	46
2.3.3	Обозначения. . . . .	46
2.3.4	Классификация обобщенных областей без конических точек. . . . .	47
2.3.5	Классификация обобщенных областей, содержащих конические точки. . . . .	50
<b>3</b>	<b>Топология изоэнергетического многообразия.</b>	<b>55</b>
3.1	Классификация изоэнергетических 3-поверхностей бильярдов в компактной области без конических точек. . . . .	55
3.1.1	Бильярдная область гомеоморфна кольцу. . . . .	55
3.1.2	Бильярдная область гомеоморфна диску или сфере. . . . .	56
3.2	Классификация изоэнергетических многообразий для бильярдов в компактной области, содержащей конические точки. . . . .	59
3.2.1	Бильярдная область гомеоморфна диску. . . . .	59
<b>4</b>	<b>Лиувиллева классификация эллипτικο-гиперболических бильярдов.</b>	<b>62</b>
4.1	Слоение Лиувилля: вычисление молекулы Фоменко. . . . .	62
4.1.1	Особые и неособые уровни интеграла. . . . .	62
4.1.2	Теорема Лиувилля для эллипτικο-гиперболического бильярда: эллиптические значения интеграла. . . . .	63
4.1.3	Теорема Лиувилля для эллипτικο-гиперболического бильярда: гиперболические значения интеграла. . . . .	64
4.1.4	Особые уровни интеграла. Описание их окрестности в терминах атомов-бифуркаций. . . . .	64
4.2	Вычисление инварианта Фоменко-Цишанга. . . . .	68
4.2.1	Метки эллипτικο-гиперболического бильярда в бесфокусной области. . . . .	70
4.2.2	Метки эллипτικο-гиперболического бильярда в области, содержащей фокусы. . . . .	73
<b>5</b>	<b>Лиувиллева классификация бильярдных систем в плоской области, ограниченной дугами софокусных парабол.</b>	<b>77</b>
5.1	Слоение Лиувилля: вычисление молекулы Фоменко-Цишанга для параболического бильярда в компактной области. . . . .	78
5.2	Слоение Лиувилля: вычисление аналога молекулы Фоменко для параболического бильярда в некомпактной области. . . . .	79
<b>6</b>	<b>Лиувиллева классификация систем обобщённых бильярдов.</b>	<b>83</b>
6.1	Слоение Лиувилля: вычисление молекулы Фоменко. . . . .	83
6.1.1	Особые и неособые уровни интеграла. . . . .	83
6.1.2	Теорема Лиувилля для обобщённого бильярда: эллиптические значения интеграла. . . . .	84
6.1.3	Теорема Лиувилля для обобщённого бильярда: гиперболические значения интеграла. . . . .	86
6.1.4	Особые уровни интеграла. Описание их окрестности в терминах атомов-бифуркаций. . . . .	86
6.2	Вычисление меток и построение инварианта Фоменко-Цишанга. . . . .	94

6.2.1	Лиувиллева классификация бильярдных областей, каждая элементарная область в составе которых не содержит фокусов семейства границы. . . . .	94
6.2.2	Лиувиллева классификация бильярдных областей, в составе которых есть элементарная область, содержащая фокусы семейства границы. . . . .	99
<b>7</b>	<b>Бильярдные модели динамики твёрдого тела.</b>	<b>111</b>
7.1	Задачи динамики твёрдого тела. Известные случаи интегрируемости. . . . .	111
7.2	Известные случаи интегрируемости в динамике твёрдого тела, лиувиллево эквивалентные бильярдным системам, ограниченным дугами софокусных квадрик. . . . .	116
	<b>Литература</b>	<b>126</b>

# Введение

## Актуальность темы

В диссертации получена топологическая (лиувиллева) классификация интегрируемых бильярдных областей в плоских и локально-плоских компактных областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, с помощью методов теории Фоменко-Цишанга об инвариантах интегрируемых систем. Кроме того, исследована топология соответствующих изоэнергетических поверхностей.

Теории математического бильярда – задаче о движении материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой, с абсолютно упругим отражением на границе – посвящено множество работ (отметим книгу [1] С. Л. Табачникова, в которой дан обзор современных и классических исследований бильярдных систем). Одними из классических вопросов являются задачи о существовании периодических траекторий и об интегрируемости бильярдного движения в области в зависимости от ее границы. К примеру, в любом треугольнике существует периодическая бильярдная траектория из трех звеньев, а именно, треугольник наименьшего периметра, вершины которого находятся в основании высот исходного треугольника (теорема Фаньяно). В настоящий момент достаточно популярными интегрируемыми бильярдами являются плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

Интегрируемость бильярда в области, ограниченной эллипсом, была замечена в работе [2] Дж. Д. Биркгофа. Интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде следует из теоремы Якоби-Шаля. При стремлении меньшей полуоси эллипсоида к нулю движение по геодезическим на нём переходит в движение по ломаным, целиком лежащим в образе эллипсоида – плоской области, ограниченной эллипсом. Интегрируемость бильярда сохраняется, если перейти к плоским областям, ограниченным дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства, на границе которых нет точек излома с углами  $\frac{3\pi}{2}$ . В этом случае все углы в точках излома равны  $\frac{\pi}{2}$ , поскольку известно, что софокусные квадрики пересекаются всегда под прямыми углами. В книге [3] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв заметили, что эти динамические системы являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю (т.е. имеется дополнительный независимый интеграл  $\Lambda$ ), а именно, что интегрируемость данных систем эквивалентна малой теореме Понсе. Для системы плоского бильярда в эллипсе были построены координаты, в которых движение представляется в виде периодического движения по торах. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности были подробно (но не полностью) изучены в работах [4, 5] В. Драгович, М. Раднович.

В диссертации классифицированы все плоские бильярдные области, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол (при этом не обязательно изометрично вложимые в плоскость), а также области, уже не обязательно являющимися плоскими, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых сегментов границ. В работе исследована топология возникающих изоэнергетических поверхностей интегрируемых бильярдных областей в таких областях.

Кроме того, не только описан топологический тип возникающих 3–поверхностей, но и исследована топология возникающего слоения Лиувилля с помощью вычисления меченых молекул Фоменко-Цишанга – инвариантов лиувиллевой эквивалентности. Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы. Если торы Лиувилля на всюду плотном множестве являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости), то лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания решений (т.е. интегральных траекторий) на трёхмерных уровнях постоянной энергии. Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко-Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. книгу [11] А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко). Далее, для многих интегрируемых случаев динамики твердого тела для ряда изоэнергетических поверхностей вычисление инварианта Фоменко-Цишанга позволило обнаружить лиувиллеву эквивалентность этих систем полученным бильярдным системам с помощью сравнения меченых молекул. Тем самым, образно говоря, локально-плоские интегрируемые бильярды “наглядно моделируют” многие достаточно сложные случаи интегрируемости в динамике твердого тела.

Также в работе исследована топология некомпактных бильярдов в областях, ограниченных софокусными параболой – для них построены грубые молекулы (без меток) – инварианты грубой лиувиллевой эквивалентности.

## Цель диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Классифицировать все плоские компактные области, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также локально-плоские области, полученные из них склейками вдоль выпуклых эллиптических граничных дуг и некоторых выпуклых гиперболических граничных дуг, а также описать плоские области, ограниченные дугами софокусных парабол.
2. Вычислить инварианты лиувиллевой эквивалентности – меченые молекулы Фоменко-Цишанга – для бильярда в каждой из описанных областей.
3. Среди найденных слоений найти слоения Лиувилля, которые эквивалентны ранее известным слоениям Лиувилля, возникшим в известных случаях интегрируемости твердого тела, что позволит промоделировать ряд задач динамики твердого тела наглядными бильярдами.
4. Обнаружить “новые” слоения Лиувилля, в том смысле, что они лиувиллево не эквивалентны никаким ранее обнаруженным слоениям Лиувилля, возникшим в известных случаях динамики твердого тела.
5. Вычислить некомпактные аналоги инварианта Фоменко-Цишанга для важного примера некомпактных слоений Лиувилля.

## Методы исследования

В работе используется теория топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенная А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым и другими. Активно применяются методы топологии трехмерных многообразий.

## Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Классифицированы все компактные плоские области, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол. Классифицированы все обобщенные локально-плоские области, полученные из них склейками вдоль выпуклых эллиптических граничных сегментов и некоторых выпуклых гиперболических граничных сегментов, приводящих к образованию так называемых конических точек.
2. Вычислены инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы  $W^*$ , описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  – для билиардов в каждой из описанных областей.
3. Вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для билиардов в компактных областях, ограниченных софокусными параболоми, а также их некомпактные аналоги – молекулы Фоменко (без меток) – для билиардов в некомпактных областях, ограниченных софокусными параболоми.
4. Для локально-плоских билиардов найдены слоения Лиувилля, которые эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в случаях интегрируемости Эйлера (все слоения), Лагранжа, Ковалевской, Ковалевской-Яхьи, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Клебша и Соколова, что означает лиувиллеву эквивалентность вышеперечисленных систем системе билиарда при подходящем выборе обобщенной билиардной области.
5. Обнаружены слоения Лиувилля, которые описываются инвариантами, ранее не встречавшихся в задачах динамики твердого тела, в том числе молекулы, атомы-бифуркации в которых являются новыми и также не встречались ранее.

## Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер.

Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем в том числе для моделирования сложных эффектов поведения решений для сложных и менее наглядных систем, к которым относятся, например, классические случаи динамики твердого тела.

Полученный метод вычисления инвариантов и метод построения билиардных областей позволяет расширять класс билиардных задач и строить интересные примеры интегрируемых систем, топология слоений которых достаточно наглядна.

Вычисленные некомпактные аналоги инвариантов являются важным примером для начала построения теории некомпактных бифуркаций в интегрируемых системах, которая активно начинает развиваться.

## Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, 8–13 апреля 2013);

XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, 7–11 апреля 2014);

XXII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, 13–17 апреля 2015);

международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2012” (Воронеж, 25–30 января 2012);

международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2014” (Воронеж, 26–31 января 2014);

международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2016” (Воронеж, 25–29 января 2016);

ежегодная научная конференция “Ломоносовские чтения” 2011 года (МГУ), посвященная 300-летию со дня рождения М.В.Ломоносова (Москва, 14–23 ноября 2011);

International Topological Conference “Alexandroff Readings” Lomonosov Moscow State University (Moscow, May 21–25, 2012);

открытый семинар представителей молодежных коллективов и профессоров механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Российская Федерация) и УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ» (Украина)(Москва-Киев, 18 ноября 2015);

Результаты диссертации докладывались на заседании семинара “Гамильтоновы системы и статистическая механика” под рук. акад. В.В.Козлова, проф. С.В.Болотина и чл.-корр. Д.В.Трещева (2015), а также неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях семинара “Современные геометрические методы” под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой, доц. И.М. Никонова, асс. А.Ю. Коняева, асс. А.М. Изосимова; 2010 – 2015 гг.

## Публикации

Основные результаты диссертации представлены в пяти работах в журналах их списка ВАК, список работ приведен в конце введения.

# Структура и объём

Диссертация состоит из введения и семи глав. Текст диссертации изложен на 130 страницах. Список литературы содержит 38 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной теории интегрируемых систем.

В **первой главе** вводятся основные понятия теории интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе дано описание атомов – бифуркаций торов Лиувилля и построение инварианта Фоменко-Цишанга.

**Определение.** Пусть  $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$  и  $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$  – две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях  $M_1^4$  и  $M_2^4$ , обладающих, соответственно, интегралами  $f_1, g_1$  и  $f_2, g_2$ . Рассмотрим изоэнергетические поверхности  $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ . Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм  $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$ , который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий  $Q_1^3$  и  $Q_2^3$  и ориентацию всех критических окружностей.

**Теорема. (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг)** *Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на регулярных изоэнергетических поверхностях  $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$  лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Классический бильярд это динамическая система, описывающая движение (материальной) точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой, углы излома которой составляют  $\frac{\pi}{2}$ . Среди известных нетривиальных классов интегрируемых бильярдов – бильярд в компактной плоской области, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол (эллиптико-гиперболический бильярд), бильярд в области, ограниченной дугами софокусных парабол (параболический бильярд), а также класс обобщенных (локально-плоских) бильярдов, склеенных из областей, ограниченных дугами софокусными эллипсами и гиперболами, вдоль некоторых выпуклых граничных сегментов.

Интегрируемость бильярда в области, ограниченной эллипсом, следует из интегрируемости задачи Якоби о геодезическом потоке на эллипсоиде. Геодезический поток на эллипсоиде интегрируем вследствие теоремы Якоби-Шаля.

**Теорема. (Якоби, Шаль)** *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще  $n - 2$  конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

В двумерном случае при стремлении к нулю наименьшей оси эллипсоида траектории – геодезические на эллипсоиде переходят в ломаные, концы звеньев которых лежат на эллипсе. Эти ломаные в эллипсе являются бильярдными траекториями – на границе верен закон бильярдного движения. При этом, если фиксировать ломаную, то прямые, содержащие ей звенья,

являются касательными к некоторой квадрике (эллипсу или гиперболе), софокусной с граничным эллипсом. Эти эллипсы и гиперболы получаются в результате предельного перехода из однополостных и двуполостных гиперболоидов, которых касались касательные к геодезическим на эллипсоиде. Если в качестве области выбрать область, ограниченную дугами софокусных эллипсов и гипербол (углы не больше  $\pi$ ), то для траекторий бильярда в ней – ломаных – будет сохраняться то же свойство что и для бильярда в эллипсе, то есть система бильярда останется интегрируемой.

Аналогично можно рассмотреть бильярд в области, ограниченной софокусными парабололами. Параболу можно рассмотреть как эллипс, один из фокусов которого находится на бесконечности. При этом в работе явно проведена проверка интегрируемости – доказано, что для фиксированной бильярдной траектории-ломаной все прямые, содержащие её звенья, являются касательными к одной и той же параболе.

В работе показано построение так называемого обобщенного бильярда, который также будет интегрируемым. Для этого рассмотрим (локально-плоскую) область, которая получается с помощью изометричных склеек вдоль некоторых границ из плоских областей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Движение в ней определяется следующим образом – если материальная точка совершает движение по плоской области и ударяется о её границу, на которой была определена склейка, то она переходит на другую плоскую область, продолжая движение так, как и при отражении от общей границы, вдоль которой были склеены эти две плоские области.

Во **второй главе** приведена классификация локально-плоских бильярдных областей для компактных плоских эллиптико-гиперболических, плоских параболических и компактных локально-плоских обобщенных бильярдных областей с точностью до некоторого отношения эквивалентности, которое, как показано в дальнейших главах, позволяет сохранить топологию слоения Лиувилля бильярдного движения при переходе от одной бильярдной области к её эквивалентной.

Дадим определения эллиптико-гиперболических (элементарных), параболических и компактных обобщенных (локально-плоских) бильярдных областей, более подробные определения которых содержатся во второй главе диссертации.

Фиксируем семейство софокусных эллипсов и гипербол на плоскости  $Oxy$

$$x^2(b - \lambda) + y^2(a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda).$$

Здесь числа  $a > b > 0$  – фиксированные параметры этого семейства, а  $\lambda$  – параметр квадрики.

**Определение.** *Простейшей элементарной (плоской) областью* назовём плоское, компактное, изометрично вложимое в плоскость многообразие с краем, граница которого при этом вложении ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол и не содержит углов, превышающих  $\pi$ . *Составной элементарной (локально-плоской) областью* назовем компактное локально-плоское многообразие, которое получается в результате нескольких склеек из конечного числа простейших элементарных областей вдоль некоторых граничных дуг гипербол таким образом что, во-первых, склеиваемые области при их вложениях в плоскость локально находятся по разные стороны от дуги склейки (в случае если дуга является прямолинейным отрезком мы опускаем это требование), а во вторых, при этом на границе области не образуются углы, превышающие  $\pi$ . При этом мы не требуем, чтобы существовало изометричное вложение в плоскость составной элементарной области целиком. Простейшие и составные элементарные области для краткости мы будем называть просто *элементарными*.

**Определение.** Элементарная область  $\Omega$ , ограниченная дугами квадрик из софокусного семейства, называется *эквивалентной* другой элементарной области  $\Omega'$ , ограниченной дугами квадрик из того же семейства, если  $\Omega'$  можно получить из  $\Omega$  композицией следующих преобразований:

- последовательным изменением сегментов границы в образах некоторых простейших элементарных областей, составляющих элементарную область, при их изометричных вложениях в плоскость путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик границы, так, чтобы значение параметра  $\lambda$  изменяемого сегмента границы не принимало значения  $b$ ; при этом если изменяемый сегмент  $l_\lambda$  лежит в пересечении двух простейших элементарных областей (при их изометричных вложениях в плоскость), входящим в данную составную элементарную область, то при данной деформации одновременно меняются и остаются равными друг другу значения параметра  $\lambda$  этого сегмента границы;
- симметрией относительно оси семейства софокусных квадрик во всех простейших элементарных областях одновременно;
- объединением нескольких простейших элементарных областей в одну или же путем разбиения одной элементарной области на более мелкие.

**Теорема.** Любая элементарная область эквивалентна области, принадлежащей к одной из следующих трёх серий:

- конечная серия, состоящая из шести областей, вложимых в плоскость: область  $A_2$ , ограниченная эллипсом, область  $A_1$  ограниченная дугой эллипса и дугой гиперболы, область  $A_0$ , ограниченная дугами двух эллипсов и двумя дугами гипербол, а также три их верхние половины – области  $A'_2$ ,  $A'_1$  и  $A'_0$  ограниченные тем же набором квадрик что и соответствующая нештрихованная область (а именно, область  $A_2$ ,  $A_1$  и  $A_0$  соответственно) и фокальной прямой (нижний индекс обозначает количество фокусов семейства границы, входящих в данную область);
- бесконечная серия областей-колец  $C_n$ : область  $C_2$ , ограниченная двумя эллипсами, область  $C_1$ , получающаяся её факторизацией по действию группы  $\mathbb{Z}_2$ , а также  $n$ -листные накрытия над ними (таким образом число  $n$  – это суммарное количество отрезков фокальной прямой, входящих в область);
- серия областей-лент, состоящая из трёх бесконечных подсерий  $B_n$ ,  $B'_n$  и  $B''_n$ , являющихся односвязными частями областей  $C_n$ , такими что ноль ( $B_n$ ), один ( $B'_n$ ) или два ( $B''_n$ ) сегмента границы лежат на фокальной прямой (здесь число  $n$  – это суммарное количество отрезков фокальной прямой, входящих в область).

Определение запрещает сегменту изменяемой границы становиться отрезком фокальной прямой.

В дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что у семейства софокусных парабол фокус находится в начале координат, а директрисы параллельны оси  $Oy$ . Более точно, мы фиксируем семейство парабол на плоскости  $Oxy$  следующим соотношением:

$$y^2 + 4px - 4p^2 = 0.$$

**Определение.** *Параболической бильiardной областью* назовём плоское, изометрично вложимое в плоскость, многообразие с краем, граница которого при этом вложении ограничена дугами софокусных парабол и не содержит углов, превышающих  $\pi$ . *Особой параболической бильiardной областью* назовем такую параболическую бильiardную область, часть границы которой при изометричном вложении в плоскость лежит на прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно директрисам.

При этом отношение эквивалентности на множестве параболических бильiardных областей вводится аналогично отношению эквивалентности для элементарных областей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, где вместо запрещения параметру изменяемой квадратики принимать значение  $b$  мы запрещаем параметру принимать нулевое значение. Нулевому значению параметра  $p$  соответствует так называемая *вырожденная парабола* – прямая, проходящая через фокус семейства перпендикулярно директрисам (ось  $Ox$ ).

**Теорема.** *Любая параболическая бильiardная область принадлежит одной из четырех серий:*

- *Три класса эквивалентности параболических компактных неособых областей  $\Omega$ , ограниченных софокусными парабололами: область  $\Omega_1$ , ограниченная двумя парабололами, параметры которых имеют разные знаки, область  $\Omega_2$ , ограниченная тремя парабололами, и область  $\Omega_3$ , ограниченная четырьмя парабололами с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и двумя отрицательными, не имеющая общих точек с горизонтальной осью  $Ox$ .*
- *Два класса эквивалентности параболических компактных особых областей: область  $\omega_1$ , ограниченная двумя невырожденными и одной вырожденной параболой и область  $\omega_2$ , ограниченная тремя невырожденными и одной вырожденной параболой.*
- *Четыре класса эквивалентности параболических некомпактных неособых областей  $\Theta$ , ограниченных софокусными парабололами: области  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ , ограниченные одной и двумя парабололами соответственно, и области  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$ , ограниченные тремя парабололами с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и одной отрицательной, причем сегмент отрицательной параболы для области  $\Theta_3$  является выпуклым, а для  $\Theta_4$  невыпуклым.*
- *Два класса эквивалентности параболических некомпактных особых областей: области  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , ограниченные одной вырожденной параболой и одной и двумя невырожденными парабололами соответственно.*

Введем понятия склеек элементарных областей друг с другом, а именно, изометричных склеек вдоль выпуклых сегментов границ, так что склеиваемые области находятся по одну сторону от данного выпуклого сегмента при любом вложении этих элементарных областей в плоскость (более подробно см. в третьем параграфе второй главы текста диссертации). Полученное в результате такой операции многообразие (с краем или без) будем называть *обобщенной (локально-плоской) областью*. Бильiardное движение при этом определяется так – совершая движение по одной элементарной области и попадая на сегмент склейки, материальная точка продолжает движение уже по другой элементарной области так, как будто бы она отразилась от сегмента склейки. Введем понятие *конической точки*, возникающей при склейке двух элементарных областей вдоль двух сегментов, имеющих общую точку – вершину угла в склеиваемых

элементарных областях. При этом если материальная точка при движении попадает в конечную точку, то она продолжает движение по тому же экземпляру элементарной области что и до удара – это условие возникает из требования непрерывности бильярдного движения. При этом в работе рассматриваются области, в которых склейки вдоль выпуклых гиперболических сегментов обязательно приводят к образованию конических точек.

**Определение.** Обобщённая область  $\Delta$ , склеенная из элементарных областей  $\Omega_i$  вдоль ребер склейки  $f_{ij}$  называется *эквивалентной* другой обобщённой области  $\Delta'$ , склеенной из  $\Omega'_i$  вдоль ребер склейки  $f'_{ij}$ , если  $\Delta'$  можно получить из  $\Delta$  путем замены элементарных областей  $\Omega_i$  на им эквивалентные.

Для удобства описания обобщенных областей мы придерживаемся следующих обозначений. Обозначим обобщённые области без конических точек через  $\Delta_\alpha$ . В скобках будем указывать элементарные области, образующие область  $\Delta$ , причём если эквивалентные области склеиваются друг с другом последовательно в некотором количестве экземпляров, то будем указывать это количество, например  $\Delta_\alpha(kA_0)$ , а если нет, то будем указывать это отдельным суммированием, например  $\Delta_\alpha(\Omega + kA_0 + \Omega)$  – две эквивалентные области  $\Omega$  склеены не друг с другом, а с областями  $A_0$ . Введём специальное обозначение  $\Delta_\alpha(kA_0)^2$  для области, склеенной из  $k$  экземпляров  $A_0$  склейкой вдоль всех эллиптических границ в область, гомеоморфную кольцу.

Обобщённые области с коническими точками обозначим через  $\Delta_\beta$ . Введём типы конических точек. Как легко видеть, конические точки делятся на три типа. Конические точки типа  $x$  – это конические точки, образованные склейкой вдоль выпуклого эллиптического сегмента  $l$  и горизонтального сегмента  $m$ . Конические точки типа  $y$  образованы склейкой выпуклого или вертикального гиперболического сегмента  $m$  и выпуклого эллиптического сегмента  $l$ . Конические точки типа  $c$ , иначе говоря центральные конические точки, образованы склейкой вдоль выпуклого или вертикального гиперболического сегмента  $m$  и горизонтального сегмента  $l$  – отвечающего квадрике с параметром  $b$ .

Введём обозначения склеек, показывающих какие именно конические точки образовались:  $\Delta_\beta(\Omega)_c^2$  обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  с образованием центральной конической точки типа  $c$ ,  $\Delta_\beta(\Omega)_y^2$  обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  с образованием конической точки типа  $y$ ,  $\Delta_\beta(\Omega)_x^2$  обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  с образованием конической точки типа  $x$ . Удвоенные индексы показывают, что склейка произошла с образованием двух конических точек, например  $\Delta_\beta(\Omega)_{2y}^2$  – область, склеенная из двух экземпляров области  $\Omega$  с образованием двух конических точек типа  $y$ .

**Теорема.** Любая обобщенная область принадлежит к одному из четырех классов:

- класс областей, склеенных из элементарных областей одинаковых типов без конических точек: 5 “простейших удвоенных” областей вида  $\Delta_\alpha(2\Omega)$ , где  $\Omega$  эквивалентна  $A'_0, A'_1, A_1, A_2, A'_2$  и 4 бесконечных серии  $\Delta_\alpha(kA_0), k > 1, \Delta_\alpha(kA_0)^2, k > 0, \Delta_\alpha(2B_k), \Delta_\alpha(2C_k)$ ;
- класс областей, склеенных из элементарных областей разных типов без конических точек: 4 области  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ , где  $\Omega_1$  содержит фокусы семейства и эквивалентна  $A'_1, A'_2, A_1, A_2$ , а область  $\Omega_2$  не содержит фокусы семейства и эквивалентна  $B'_1, B''_2, B_1, C_2$  соответственно и 5 бесконечных серий  $\Delta_\alpha(kA_0 + B_0), \Delta_\alpha(kA_0 + A'_0), \Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + B_0), \Delta_\alpha(B_0 + kA_0 + B_0)$  и  $\Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + A'_0), k > 0$  ;

- класс областей, склеенных из элементарных областей одинаковых типов с образованием конических точек: 13 областей  $\Delta_\beta(A'_1)_y, \Delta_\beta(A'_1)_x, \Delta_\beta(A'_1)_c, \Delta_\beta(A'_1)_{cy}, \Delta_\beta((A'_1)_c + (A'_1)_c), \Delta_\beta(A'_0)_c, \Delta_\beta(A'_0)_y, \Delta_\beta(A'_0)_{cy}, \Delta_\beta((A'_0)_c + (A'_0)_c), \Delta_\beta((A'_0)_c + 2A'_0), \Delta_\beta(A'_2)_{2x}, \Delta_\beta(A_1)_{2y}$  и  $\Delta_\beta(A_0)_{2y}$  и 9 бесконечных серий  $\Delta_\beta((A_0)_y + 2kA_0), \Delta_\beta((A_0)_y + 2kA_0 + (A_0)_y), \Delta_\beta(B_k)_y, \Delta_\beta(B_k)_{2y}, \Delta_\beta(B'_k)_{yx}, \Delta_\beta(B'_k)_y, \Delta_\beta(B'_k)_x, \Delta_\beta(B''_k)_x$  и  $\Delta_\beta(B''_k)_{2x}$ ;
- класс областей, склеенных из элементарных областей разных типов с образованием конических точек: область  $\Delta_\beta((A'_1)_c + C_1)$  и 7 бесконечных серий  $\Delta_\beta((A'_0)_c + 2kA_0), \Delta_\beta((A'_0)_c + 2kA_0 + 2B_0), \Delta_\beta((A_0)_y + 2kA_0 + 2B_0), \Delta_\beta((A'_0)_c + 2kA_0 + 2A'_0), \Delta_\beta((A_0)_y + 2kA_0 + 2A'_0), \Delta_\beta((A'_0)_c + 2kA_0 + (A'_0)_c)$  и  $\Delta_\beta((A_0)_y + 2kA_0 + (A'_0)_c)$ .

В третьей главе исследована топология изоэнергетического многообразия  $Q^3$ , которое получается при ограничении системы с фазового пространства  $M^4$  билиярда на уровень постоянного модуля скорости – первого интеграла системы. Показано, как именно введение конических точек усложняет топологию. Фактически доказано следующее

**Предложение.** Пусть  $\Delta$  – компактная билиардная область, принадлежащая к одному из трех классов билиардных областей (эллиптико-гиперболическому, параболическому, обобщенному). Тогда изоэнергетическая поверхность  $Q^3 = \{x \in M^4 : |v(x)| = \text{const} > 0\}$  гомеоморфна

- $S^3$ , если область  $\Delta$  односвязна и не содержит конических точек;
- $S^1 \times S^2$ , если область  $\Delta$  не односвязна;
- $\mathbb{R}P^3$ , если область  $\Delta$  ограничена кусочно-гладкой кривой и содержит одну коническую точку;
- $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ , если область  $\Delta$  ограничена кусочно-гладкой кривой и содержит две конических точки.

В четвёртой, пятой и шестой главах дана полная лиувиллева классификация плоских эллиптико-гиперболических, параболических и обобщенных билиардов соответственно. Оказалось, что эллиптико-гиперболические билиарды описываются с помощью трех неэквивалентных друг другу слоений Лиувилля, соответствующих инвариантам с конечными метками и двух бесконечных серий слоений, одна или две метки которых бесконечны. Компактные параболические билиарды оказываются лиувиллево эквивалентными соответствующим компактным эллиптико-гиперболическим билиардам, тогда как некомпактные описываются тремя типами атомов: компактными, некомпактными атомами с компактной базой и некомпактным слоем (билиард в области, ограниченной одной параболой) и некомпактными атомами с некомпактной базой и компактным слоем (билиард в области, заключенной между двух непересекающихся софокусных парабол). В слоениях Лиувилля изоэнергетических поверхностей обобщенных билиардов в некоторых областях возникают перестройки, не наблюдавшиеся ранее – а именно, серии атомов с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (с одной и двумя звездочками).

**Теорема.** Инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула  $W^*$ , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для билиардного движения в элементарной области  $\Omega$ , имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ , если область  $\Omega$  не содержит (внутри области или на границе) отрезков фокальной прямой, т.е. если область  $\Omega$  эквивалентна  $A'_0, A'_1, A'_2, B_0, B'_1$  или  $B''_2$ . Если область  $\Omega$  содержит отрезки фокальной прямой, то молекула имеет указанный в таблице вид (см. рис. 1).

Обозначение элементарной области	Элементарная область	Инвариант Фоменко-Цишанга	Обозначение элементарной области	Элементарная область	Инвариант Фоменко-Цишанга
$A_0$		$A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} A$	$B_n$ $B'_{n+1}$ $B''_{n+2}$		$A \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} B_n \begin{matrix} \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A \\ \vdots \\ \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A \end{matrix}$
$A_1$		$A \xrightarrow[n=0]{r=0, \varepsilon=1} A^* \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$			
$A_2$		$A \xrightarrow[n=1]{r=0, \varepsilon=1} B \begin{matrix} \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A \\ \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A \end{matrix}$	$C_n$		$A \begin{matrix} \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} D_n \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A \\ \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} D_n \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A \end{matrix}$ $\vdots$

Рис. 1: Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  бильярдного движения в элементарных областях, внутренность которых имеет непустое пересечение с фокальной прямой.

**Теорема.** *Инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула  $W^*$ , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для бильярдного движения в параболической бильярдной компактной области  $\Omega$  может быть описана следующим образом.*

- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\Omega_1$ , молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A^* \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ , метка  $n$  в единственной семье равна 0.
- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\Omega_2$ , молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} B \Rightarrow \frac{A}{A}$ , где метки  $r = 0, \varepsilon = 1$  на правых ребрах.
- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\omega_1, \omega_2$  или  $\Omega_3$ , т.е. не содержит внутри себя отрезков прямой, проходящей через фокус перпендикулярно директрисам, то молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ .

Для бильярдного движения в некомпактной области, ограниченной параболой, топология слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  описывается следующей молекулой:

- $\frac{\bar{A}}{A} \Rightarrow \bar{B} \rightarrow C_\infty$  для области  $\Theta_1$ ; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры, два минимаксных особых слоя, гомеоморфных прямой  $\mathbb{R}$ , а седловая бифуркация описывается атомом  $\bar{B}$ ,
- $\frac{\bar{A}}{A} \Rightarrow B'' \Rightarrow \frac{C_\infty}{C_\infty}$  для области  $\Theta_2$ ; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры, два минимаксных особых слоя, гомеоморфных прямой  $\mathbb{R}$ , а седловая бифуркация описывается атомом  $B''$  с некомпактной базой,
- $\bar{A} \rightarrow B' \Rightarrow \frac{A}{C_\infty}$  для области  $\Theta_3$ ; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры и торы, один минимаксный особый слой, гомеоморфный прямой  $\mathbb{R}$ , один особый минимаксный слой,

гомеоморфный окружности  $S^1$ , а седловая бифуркация описывается атомом  $B'$  с некомпактной базой,

- $\bar{A} \rightarrow C_\infty$  для областей  $\Theta_4$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , т.е. для областей не содержащих внутри себя отрезков прямой, проходящей через фокус перпендикулярно директрисам; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры и особый слой, гомеоморфный прямой  $\mathbb{R}$ .

**Замечание.** Поясним обозначения некомпактных атомов, используемые в теореме. Атомы  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  гомеоморфны прямым произведениям соответствующих двумерных атомов  $A$  и  $B$  на прямую  $\mathbb{R}$ . Атомы  $B'$  и  $B''$  гомеоморфны прямым произведением двумерных некомпактных атомов  $B'$  и  $B''$  на окружность  $S^1$ . Бифуркация  $C_\infty$  не является атомом в стандартном смысле. Она описывает пустой предел цилиндров – некомпактных слоев Лиувилля, т.е. гомеоморфна прямому произведению цилиндра на полуинтервал  $[0, 1)$ . Подробнее описание этих некомпактных атомов изложено в первой главе диссертации (пункт 1.2.3).

**Теорема.** Пусть обобщенная область  $\Delta$  состоит из элементарных областей  $\Omega$ , причем хотя бы одна элементарная область  $\Omega$  содержит (внутри области или же на границе) фокус семейства границы. Тогда инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы  $W^*$ , описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  в таких обобщенных областях  $\Delta$ , разбиваются на девять неэквивалентных между собой типов. Если область  $\Delta$  не содержит внутри области или же в качестве ребёр склейки отрезков фокальной прямой, то тогда инвариант Фоменко-Цишанга имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ , если область  $\Delta$  не содержит конических точек, и вид  $A \xrightarrow{r=\frac{1}{2}, \varepsilon=1} A$ , если область  $\Delta$  содержит конические точки. Инварианты для всех остальных бильярдных областей приведены в таблице (см. рис. 2).

**Теорема.** Пусть обобщенная область  $\Delta$  состоит из элементарных областей  $\Omega$ , причем любая элементарная область  $\Omega$  не содержит фокусов. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула  $W^*$ , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  бильярдного движения в такой обобщенной области  $\Delta$  имеет следующий вид (см. подробнее рис. 3):

- молекула содержит одно или два нижних ребра (два ребра, только если область гомеоморфна кольцу), эти ребра бесконечные  $r = \infty$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ;
- если область гомеоморфна кольцу, то бифуркация на уровне интеграла  $\Lambda = b$  описывается атомом  $D_n$ , где  $n$  это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей  $\Omega$ ;
- если область односвязна, то бифуркация на уровне интеграла  $\Lambda = b$  описывается атомом  $B_n$ , где  $n$  это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей  $\Omega$ , причем атом имеет столько звездочек, сколько конических точек типа  $c$  или  $x$  имеет область  $\Delta$  (конические точки типа  $c$  и  $x$  расположены на оси  $Ox$ );
- на верхних ребрах молекулы стоят метки  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  или  $r = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon = 1$ , причем количество дробных меток в молекуле совпадает с количеством конических точек, имеющих тип  $y$ .

Обобщенная область	Инвариант Фоменко-Цишанга	Обобщенная область	Инвариант Фоменко-Цишанга
$\Delta_\alpha(2A_1)$ $\Delta_\alpha(A_2 + C_1)$		$\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$ $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$	
$\Delta_\alpha(2A_2)$		$\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$	
$\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$		$\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$	
		$\Delta_\beta(A'_1)_{xyc}^2$	

Рис. 2: Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  билиардного движения в обобщенных областях, содержащих фокусы.

В **седьмой** главе приведены случаи интегрируемости в динамике твердого тела (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова) оказавшиеся лиувиллево эквивалентными эллиптико-гиперболическим и обобщенным билиардам. Приведён полный список лиувиллево эквивалентных слоений и указаны области на бифуркационных диаграммах случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, которые соответствуют этим изоэнергетическим 3-поверхностям. Для каждого инварианта указаны области, билиард в которых моделирует поведение решений на данных изоэнергетических поверхностях.

**Теорема.** Следующие случаи динамики твердого тела моделируются (лиувиллево эквивалентны) следующим обобщенным билиардам:

- случай Эйлера, см. [11], полностью моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4а,з,и, соответствующих зонам I, II, III энергии H, соответственно;
- случай Лагранжа, см. [11, 29], моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунке 4в – зона энергии 5;
- случай Ковалевской, см. [11], моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунке 4в – зона энергии 5; ;
- случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского, см. [11, 28, 29] моделируется билиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4в– зона энергии 4, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$ ,

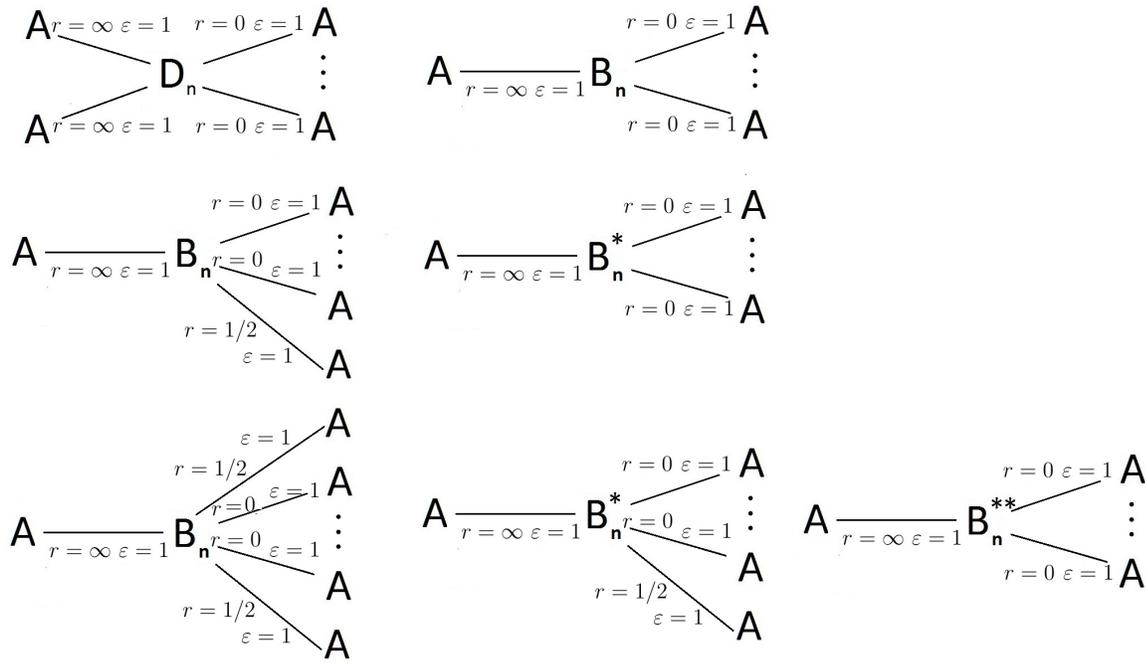


Рис. 3: Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  биллиардного движения в обобщенных областях, не содержащих фокусов. В верхнем ряду расположены молекулы для движения в областях без конических точек, во втором – с одной конической точкой, в третьем – с двумя коническими точками.

4 ж – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^3$ ;

- случай Жуковского, см. [11, 22, 23] моделируется биллиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4б – зона энергии 11, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq RP^3$ , 4в – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$ , 4г – зона энергии 8, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^3$ , 4е – зона энергии 12, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq RP^3$ ;
- случай Ковалевской-Яхьи, см. [37], моделируется биллиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4в – зона энергии  $h_{16}$ , изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$ , 4д – зона энергии  $h_{18}$ , изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^3$ ;
- случай Клебша, см. [35], моделируется биллиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4д – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^3$ , 4з – зоны энергии 10, 12, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$ , 4и – зона энергии 5, изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq RP^3$ ;
- случай Соколова, см. [36], моделируется биллиардами в обобщенных областях, указанных на рисунках 4д – зона энергии  $B$ , изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq S^3$ , 4и – зона энергии  $I$ , изоэнергетическая поверхность  $Q^3 \simeq RP^3$ .

	Обобщенная бильярдная область	Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий бильярд в этой области	Эквивалентные известные случаи интегрируемости для твердого тела
а		$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A$	Лагранж, Эйлер
б		$A \xrightarrow[r=1/2 \ \varepsilon=1]{} A$	Лагранж, Жуковский,
в		$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=\infty \ \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[r=\infty \ \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Ковалевская, Горячев-Чаплыгин-Сретенский, Жуковский, Ковалевская-Яхья
г		$A \xrightarrow[r=\infty \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Жуковский
д		$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[n=1]{} A \\ \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Клебш, Соколов, Ковалевская-Яхья
е		$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A \\ \xrightarrow[n=2]{} A \\ \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A \end{cases}$	Жуковский
ж		$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A^* \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A$ $n=0$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский
з		$A \xrightarrow[r=\infty \ \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A$ $A \xrightarrow[r=\infty \ \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A$	Эйлер, Клебш
и		$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A$ $A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} C_2 \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A$ $n=2$	Эйлер, Клебш, Соколов

Рис. 4:

## Благодарность

Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю А.Т.Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор искренне признателен Е.А.Кудрявцевой за множество ценных замечаний, способствовавших улучшению изложения, А.А.Ошемкову за ряд существенных разъяснений и комментариев, относящихся к теории инвариантов Фоменко-Цишанга, и С.В.Матвееву за помощь в вопросах трехмерной топологии. Также хочется выразить благодарность всему коллективу кафедры Дифференциальной геометрии и приложений за творческую атмосферу и постоянную научную поддержку.

## Публикации автора по теме работы

1. В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., М.: Издательство Московского университета, №5(2012), 31–34
2. В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, №4, 18–27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas Moscow Univ. Math. Bull, 69:4 (2014), 148-158.
3. В. В. Фокичева, *Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными парабололами*, Матем. сб., **205**:8 (2014), 139-160; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas Sb. Math., 205:8 (2014), 1201-1221.
4. В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., **206**:10 (2015), 127-176
5. В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко. *Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела*, ДАН, **465**:2(2015), 1-4

# Глава 1

## Основные определения.

### 1.1 Интегрируемые системы.

#### 1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы.

**Определение 1.1.1.** Четномерное гладкое многообразие  $M^{2n}$  называется симплектическим, если на нём можно ввести симплектическую структуру, то есть определить невырожденную, замкнутую кососимметричную форму на касательных векторах к  $M^{2n}$ :  $\omega(a, b) := \omega_{ij}a^ib^j$ .

**Определение 1.1.2.** Пусть  $(M^{2n}, \omega)$  – симплектическое многообразие с некоторой гладкой функцией  $H$ . Тогда можно определить векторное поле  $\text{sgrad}H$ , ей соответствующее, по следующему правилу  $(\text{sgrad}H)^i = w^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$ .

**Определение 1.1.3.** Динамическая система на гладком многообразии  $M^{2n}$  называется гамильтоновой, если на многообразии  $M^{2n}$  можно выбрать симплектическую структуру и функцию  $H$  таким образом, что динамическая система запишется в виде  $v = \text{sgrad}H$ . В этом случае функцию  $H$  называют гамильтонианом.

**Определение 1.1.4.** На функциях на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  определена скобка Пуассона  $\{f_1, f_2\} := \omega^{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \frac{\partial f_2}{\partial x^j}$ . Эта операция может быть определена даже в том случае, если форма  $\omega$  вырождена (т.е. если снять условие невырожденности на форму, но оставить условие замкнутости и кососимметричности); в этом случае многообразие называют Пуассоновым. Если скобка Пуассона двух функций равняется нулю, то говорят, что эти функции находятся в инволюции.

#### 1.1.2 Теорема Лиувилля.

Пусть  $M^{2n}$  – симплектическое многообразие и  $v = \text{sgrad}H$  – гамильтонова система с гладким гамильтонианом  $H$ .

**Определение 1.1.5.** Гамильтонова система называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор функционально независимых, находящихся друг с другом в инволюции гладких функций  $f_1, \dots, f_n$ , являющихся первыми интегралами гамильтоновой системы  $v$ , причем соответствующие им векторные поля  $\text{sgrad}f_i$  являются полными.

**Определение 1.1.6.** Слоением Лиувилля называется слоение многообразии  $M^{2n}$  на совместные поверхности уровня функций  $f_1, \dots, f_n$ .

**Теорема 1.1.** Пусть на  $M^{2n}$  задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система  $v = \text{sgrad}H$  и  $T_\xi$  – регулярная поверхность уровня интегралов  $f_1, \dots, f_n$ . Тогда

1.  $T_\xi$  – гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков  $v = \text{sgrad}H$  и  $\text{sgrad}f_1, \dots, \text{sgrad}f_n$ .
2. Если подмногообразие  $T_\xi$  связно и компактно, то  $T_\xi$  диффеоморфно  $n$ -мерному тору  $T^n$ . Этот тор называется тором Лиувилля.
3. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности  $U$  тора Лиувилля  $T_\xi$  тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора  $T^n$  на диск  $D^n$ .
4. В окрестности  $U = T^n \times D^n$  существует система координат  $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:
  - $s_1, \dots, s_n$  – координаты на диске  $D^n$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – стандартные угловые координаты на торе  $T^n$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
  - $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$ .
  - Переменные действия  $s_i$  являются функциями от интегралов  $f_1, \dots, f_n$ .
  - В переменных действие-угол гамильтоновы потоки  $v$  выпрямляются на каждом торе Лиувилля из окрестности  $U$ , т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток  $v$  задаёт условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

### 1.1.3 Отношение эквивалентности на множестве интегрируемых гамильтоновых систем.

Задачи механики твердого тела описываются на шестимерном фазовом многообразии, которое, в ряде случаев является Пуассоновым. Подобрать в каждом отдельном случае набор функций-интегралов, можно однако, ограничить систему на подмногообразии  $M^4$ , на котором в свою очередь уже можно ввести симплектическую структуру. Таким образом, важным случаем является рассмотрение слоения Лиувилля уже четырехмерного многообразия  $M^4$ . Всюду далее будем считать, что симплектическое многообразие четырехмерно. Таким образом, торы Лиувилля являются двумерными торами.

**Определение 1.1.7.** Пусть  $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$  и  $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$  – две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях  $M_1^4$  и  $M_2^4$ , обладающих, соответственно, интегралами  $f_1, g_1$  и  $f_2, g_2$ . Рассмотрим изоэнергетические поверхности  $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ . Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм  $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$ , который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий  $Q_1^3$  и  $Q_2^3$  и ориентацию всех критических окружностей.

## 1.2 Инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых систем.

### 1.2.1 Грубые инварианты.

Напомним, что в силу теоремы Лиувилля многообразие  $Q^3$  расслоено на торы и особые слои (фактически оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам). Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на  $Q^3$ . Эта база является одномерным графом  $W$ , называемым графом Кронрода-Риба функции  $f_2|_{Q^3}$ . Структура слоения в малой окрестности особого слоя, отвечающего любой вершине этого графа, описывается комбинаторным объектом, называемым атомом. Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко. В вершинах  $W$  расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля. На каждом ребре графа  $W$  можно указать стрелкой ориентацию этого ребра. Обычно это делают глобально, исходя из направления роста дополнительного интеграла, однако это можно сделать и произвольно.

### 1.2.2 Атомы-бифуркации.

Приведём эффективный метод описания перестроек торов Лиувилля, основанный на понятиях двумерных и трёхмерных атомов [11].

**Определение 1.2.1.** Двумерным атомом называется пара  $(P^2, K)$ , где  $P^2$  – связная компактная поверхность с краем, ориентируемая или неориентируемая, а  $K$  – связный граф в ней такой, что выполняются следующие условия.

1. Либо  $K$  состоит только из одной точки, т.е. изолированной вершины степени ноль, либо все вершины графа  $K$  имеют степень 4.
2. Каждая связная компонента множества  $P^2 \setminus K$  гомеоморфна кольцу  $S^1 \times (0, 1]$  и множество этих колец можно разбить на два класса – положительные кольца и отрицательные кольца так, так чтобы:
3. К каждому ребру графа  $K$  примыкало ровно одно положительное кольцо и ровно одно отрицательное кольцо.

При этом атомы обычно рассматривают с точностью до естественной эквивалентности: два атома  $(P^2, K)$  и  $(P'^2, K')$  эквивалентны, если существует гомеоморфизм, переводящий  $P'^2$  в  $P^2$ , и  $K'$  в  $K$ .

Приведём примеры часто встречающихся двумерных атомов.

Двумерный атом  $A$  гомеоморфен диску – он расслоен на концентрические окружности, стягивающиеся на особый слой – центральную точку. Двумерный атом  $B$  представляет собой перестройку одной окружности в две, особым слоем этого атома является “восьмерка”. Двумерный атом  $C_2$  представляет собой перестройку двух окружностей в две. Примеры этих простых атомов представлены на рисунке 1.1. Для описания топологии систем в настоящей работе нам потребуются две бесконечные серии атомов. Так как в различных источниках их обозначения разнятся, то примем за атомы серий  $B_n$  и  $D_n$  атомов, изображённые на рисунке 1.2.

Поясним, что атом  $B$  является частным случаем серии  $B_n$  (при  $n = 1$ ), а атом  $C_2$  частным случаем серии максимально симметричных атомов  $D_n$  (при  $n = 2$ ). Число  $n$  в атомах серий  $B_n$

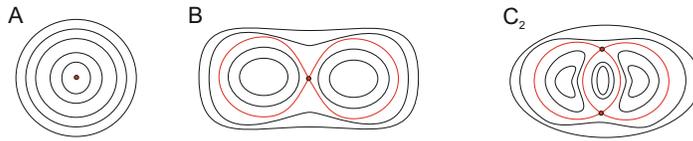


Рис. 1.1: Двумерные атомы  $A$ ,  $B$  и  $C_2$ .

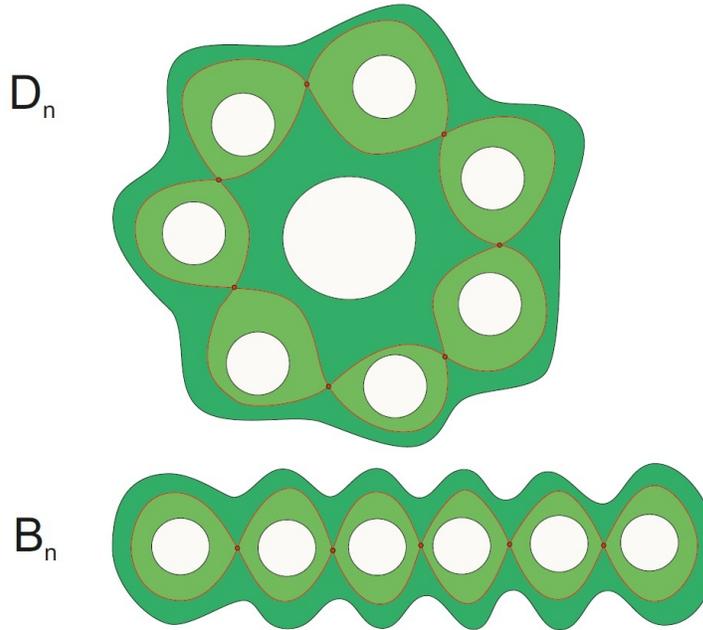


Рис. 1.2: Примеры двумерных атомов серий  $B$  и  $D$ , а именно, атомы  $B_5$  и  $D_7$ .

и  $D_n$  это число вершин соответствующих графов  $K$ . Примем обозначение, при котором  $B_0$  и  $D_0$  гомеоморфны прямому произведению окружности на отрезок (пустой граф), а  $D_1$  гомеоморфен атому  $B$ .

Добавим у уже описанным двумерным атомам новые атомы, которые мы будем называть атомами со звездочками. Возьмём произвольный атом  $(P^2, K)$  и рассмотрим его граф  $K$ . При этом наряду с прежними атомами рассмотрим ещё один простой атом, получающийся следующим образом. В качестве поверхности  $P$  мы возьмём кольцо и объявим графом  $K$  любую его осевую окружность. Изготовим теперь атомы со звездочками. Отметим на некоторых ребрах графа  $K$  произвольной число внутренних точек. Объявим их новыми вершинами графа  $K$  и обозначим их звездочками. См. примеры на рисунке ниже.

Теперь построим отображение, которое сопоставит каждому двумерному атому (со звездочками или без) некий трёхмерный атом. Возьмём двумерный атом  $(P^2, K)$  и построим функцию Морса  $f$  на  $P^2$  такую, что её единственный критический уровень совпадает с  $K$ . Такая функция определена однозначно с точностью до послышной эквивалентности. Она естественным образом расслаивает  $P^2$  своими линиями уровня. Из теоремы 3.1 [11] вытекает, что по базе  $P^2$  с отмеченными на ней звездочками (если они есть) однозначно (с точностью до послышной эквивалентности) восстанавливается 3-многообразие  $U(L)$  со структурой расслоения Зейферта. Так неособые линии уровня функции  $f$  на базе  $P^2$  представляют собой окружности, то тогда их

образом в 3-многообразии  $U(L)$  будут торы. В случае, когда двумерный атом  $(P^2, K)$  не содержит звездочек, особый слой – образ графа  $K$  будет представлять собой прямое произведение графа  $K$  на окружность.

Пусть двумерный атом  $(P^2, K)$  содержит точки-звездочки. Для такого атома можно построить его дубль  $(\hat{P}^2, \hat{K})$  – разветвленное двулистное накрытие над  $(P^2, K)$  так, чтобы точками ветвления были как раз точки-звездочки. Это можно сделать, например, сделав разрезы трансверсально графу  $K$  в точках-звездочках и склеив два экземпляра разрезанных атомов вдоль границы разреза. Заметим, что функцию  $f$  на  $P^2$  можно продолжить до функции Морса  $\hat{f}$  на поверхности  $\hat{P}$ . При этом на дубле  $(\hat{P}^2, \hat{K})$  определена естественная инволюция  $\tau : \hat{P}^2 \rightarrow \hat{P}^2$ , меняющая местами две части дубля – исходные поверхности  $P^2$ . Эта инволюция, очевидно, обладает следующими свойствами:

1.  $\tau^2 = id$ ,
2.  $\tau$  сохраняет функцию  $f$ , т.е.  $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$  для любого  $x \in \hat{P}$ ,
3.  $\tau$  сохраняет ориентацию.

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр  $\hat{P} \times [0, 2\pi]$  и склеим его основания по инволюции  $\tau$ , отождествляя точки  $(x, 2\pi)$  и  $(\tau(x), 0)$ . В результате мы получим ориентируемое 3-многообразие  $U$  с краем, которое и будем называть 3-атомом со звездочками.

В качестве дубля двумерного атома  $A^*$  можно взять двумерный атом  $B$ , поэтому трехмерный атом  $A^*$  (см. рис. 1.3) получается из двумерного атома  $B$  нетривиальным умножением на окружность: необходимо “прокрутить” атом  $B$  на  $\pi$ . В результате, атому  $A^*$  будет соответствовать перестройка одного тора в один (в отличие от трехмерного атома  $B$ , который перестраивает два тора в один). Атом  $A^{**}$  можно получить аналогичным построением, используя в качестве дубля двумерным атом  $C_2$ . При этом атом  $A^{**}$  также будет описывать перестройку одного тора в один, но число критических окружностей при этом будет равно двум.

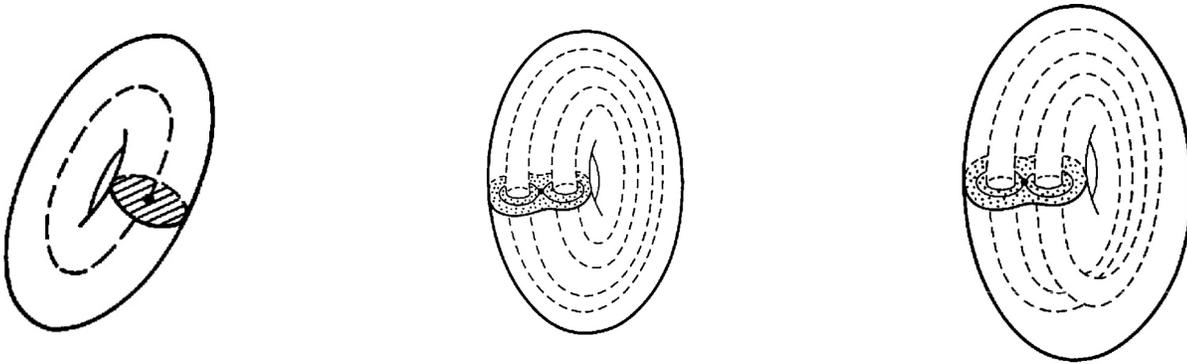


Рис. 1.3: Трехмерные атомы  $A, B, A^*$

Покажем конструкцию получения бесконечных серий  $B_n^*$  и  $B_n^{**}$ ,  $n > 0$  атомов со звездочками, необходимых в настоящей работе. Двумерные атомы этих серий получаются в результате добавления точек-звездочек на граничные окружности соответствующих графов  $K$  (см. рис. 1.4). В качестве дублей атомов серий  $B_n^*$  и  $B_n^{**}$  будут выступать атомы  $B_{2n+1}$  и  $D_{2n+2}$  соответственно.

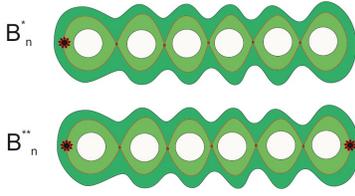


Рис. 1.4: Плоские атомы со звездочками серий  $B_n^*$  и  $B_n^{**}$ .

### 1.2.3 Некомпактные атомы-бифуркации.

Для описания топологии некомпактных изоэнергетических поверхностей  $Q^3$ , описывающих перестройки торов, цилиндров и плоскостей необходимо ввести некомпактные атомы-бифуркации. Теория некомпактных атомов ещё не построена, поэтому ограничимся приведением некоторых примеров, которые позволят описать топологию слоения Лиувилля некоторых интегрируемых бильярдов.

Пусть дана трехмерная изоэнергетическая поверхность  $Q^3$ , расслоенная линиями уровня интеграла  $f$ . Если слои интеграла  $f$  в  $Q^3$  некомпактны, то их перестройки описываются некомпактными атомами. С другой стороны, область значений функции  $f : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$  может быть некомпактным подмножеством  $\mathbb{R}$  (например, полуинтервалом). Это влечет за собой некомпактность всей  $Q^3$ . Тогда прообразы всех предельных точек множества  $A$ , не принадлежащих самому множеству  $A$ , описываются так называемыми “пустыми атомами”, гомеоморфными прямым произведениям торов ( $T_\infty$ ), цилиндров ( $C_\infty$ ) и плоскостей ( $P_\infty$ ) на полуинтервал  $[0, 1)$ .

**Замечание 1.** Такое обозначение преследует две цели. С одной стороны, оно позволяет описывать  $Q^3$  графом, т.е. не оставлять ребер, только один конец которого инцидентен некоторой вершине графа. С другой стороны, такое обозначение позволяет показать топологию слоёв  $Q^3$  на таких ребрах: если в компактном случае слои всегда торы, то в некомпактном случае они могут быть как торами, так цилиндрами, так и плоскостями. Обозначения позволяют не надписывать на ребрах тип слоя.

Опишем атомы, являющиеся некомпактными перестройками слоёв интеграла  $f$  друг в друга.

Рассмотрим некоторый компактный 3-атом, который гомеоморфен произведению двумерного атома  $P$  и окружности  $S^1$  (может быть непрямого, в случае если атом имеет звездочки). Некомпактный 3-атом можно получить из такого компактного 3-атома путём следующих преобразований:

- заменой окружности  $S^1$  на прямую  $\mathbb{R}$ ,
- заменой компактной базы  $P$  слоения Зейферта на некомпактную путём выкидывания некоторых точек.

В задачах описания некомпактных бифуркаций будем придерживаться следующих обозначений. Для каждого некомпактного атома, полученного в результате прямого произведения компактной базы  $P$  на прямую  $\mathbb{R}$  используем обозначение  $\bar{P}$ .

Опишем некоторые двумерные некомпактные атомы, которые нам понадобятся в дальнейшем. Рассмотрим двумерный атом  $B$  и его особый слой. Он представляет собой восьмёрку. На одном “ушке” этой восьмёрки отметим точку. Рассмотрим отрезок, трансверсальный особому слою двумерного атома и проходящий через эту точку. такой отрезок пересекается с каждой

окружностью – неособым слоем – ровно в одной точке. При удалении этого отрезка получится некоторый некомпактный двумерный атом, который обозначим через  $B'$  (см. рис. 1.5 ниже). Он описывает бифуркацию отрезка в пару отрезка и окружности. Соответствующий трёхмерный атом  $B'$  (гомеоморфный произведению плоского атома на окружность  $S^1$ ) описывает перестройку цилиндра в тор и цилиндр. Если же в двумерном атоме  $B$  удалить два отрезка, пересекающихся с особым слоем по разные стороны от особой точки, то получим атом  $B''$ , изображённый на рисунке ниже. Этот атом описывает перестройку двух отрезков в два отрезка. Другим способом его описания является удаление из двумерного атома  $C_2$  окрестности одной из особых точек на особом слое.

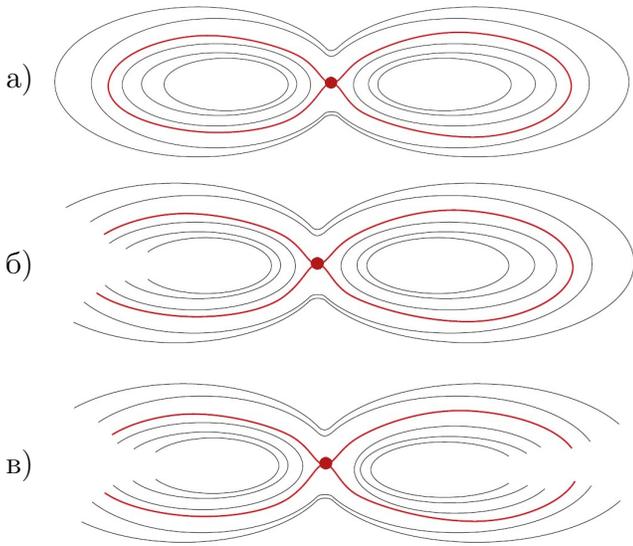


Рис. 1.5: Двумерный компактный атом  $B$  (а) при удалении точки на особом слое и её окрестности на прилегающих окружностях переходит в некомпактный атом  $B'$  (б), а при удалении точек симметрично в некомпактный атом  $B''$  (в). Жирным выделена особая точка.

### 1.2.4 Выбор циклов на торах Лиувилля.

Построенная молекула Фоменко – граф  $W$  – не описывает полностью топологию слоения Лиувилля, так как она не содержит всей информации о склейках регулярных окрестностей особых слоев. Оказывается, для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Структура атома-бифуркации задаёт правило выбора допустимого базиса. Более подробное изложение приведено в работах [11, 12, 14], здесь ограничимся явным указанием построения.

#### Случай атома $A$ .

В этом случае бифуркация представляет собой полноторие. В качестве первого базисного цикла  $\lambda$  необходимо выбрать меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся внутри полнотория в точку. В качестве второго базисного цикла  $\mu$  можно взять произвольный цикл, дополняющий  $\lambda$  до базиса. В этом случае цикл  $\mu$  можно считать слоем расслоения Зейферта. Слои расслоения Зейферта имеют естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым векторным

полем. Говоря точнее, только один из этих слоев является траекторией рассматриваемого векторного поля, а именно – критическая окружность дополнительного интеграла  $f$ , ось полнотория. Ориентация этого слоя позволяет однозначно определить ориентацию на цикле  $\mu$ . Кроме того, мы имеем ориентацию на всём 3-атоме, а, следовательно, и на его граничном торе. Поэтому мы можем однозначно определить ориентацию и первого базисного цикла  $\lambda$ , потребовав, чтобы пара  $(\lambda, \mu)$  была положительно ориентирована.

**Случай седлового атома без звездочек.** В этом случае 3-атом  $U$  имеет структуру тривиального  $S^1$ -расслоением над двумерным атомом  $P$ . Тогда в качестве первого базисного цикла  $\lambda_i$  на каждом из граничных торов  $T_i$  мы возьмём слой этого расслоения. Дополнительные циклы  $\mu_i$  выбираются следующим образом. Рассмотрим произвольное сечение  $P \subset U$ . Оно высекает на каждом граничном торе  $T_i$  некоторый цикл  $\mu_i$ , который мы и возьмём в качестве второго базисного цикла на  $T_i$ . Ориентация на базисных циклах выбирается однозначно так же, как и в предыдущем случае.

**Случай атома со звездочками.** Как и в предыдущем случае в качестве первых базисных циклов  $\lambda_i$  на каждом из граничных торов  $T_i$  мы возьмём слой расслоения Зейферта. Однако наличие особых слоёв не позволяет нам далее поступать аналогично, так как это расслоение не имеет глобального сечения такого, чтобы каждый слой пересекал его ровно один раз. Оказывается, можно очень естественным способом построить циклы допустимой системы координат, используя для этого дубль  $\hat{P}$  базы расслоения Зейферта. Будем пользоваться тем, что расслоение Зейферта в случае трехмерного атома со звездочками обладает “удвоенным” сечением, то есть в него можно вложить поверхность  $\hat{P}$  так, что любой неособый слой расслоения Зейферта пересекает  $\hat{P}$  ровно в двух точка, а особый слой – в одной. Такое вложение определяет естественную инволюцию  $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$  такую, что база  $P$  расслоения Зейферта является факторпространством  $P = \hat{P}/\tau$ .

Рассмотрим вложенный дубль  $\hat{P} \subset U$  и его границу  $\partial\hat{P} = \hat{P} \cap \partial U$ . Пусть  $\hat{\mu}_i = \hat{P} \cap T_i$  – часть границы  $\partial\hat{P}$ , лежащая на торе  $T_i \subset \partial U$ .

Возможны два случая. Первая возможность состоит в том, что  $\hat{\mu}_i$  представляет собой объединение двух отдельных циклов, каждый из которых пересекается со слоем  $\lambda_i$  расслоения Зейферта в одной точке и, следовательно, является сечением расслоения Зейферта на граничном торе  $T_i$ . Во втором случае  $\hat{\mu}_i$  является связным циклом, имеющим индекс пересечения 2 со слоем  $\lambda$ .

Построим из циклов  $\hat{\mu}_i$  нужные нам циклы  $\mu_i$  допустимой системы координат. Для начала в первом случае в качестве цикла  $\mu_i$  необходимо взять одну из связных компонент  $\hat{\mu}_i$ , а во втором положить  $\mu_i = \frac{1}{2}(\hat{\mu}_i + \lambda_i)$ . Локально на каждом граничном торе построенные циклы  $\mu_i$  будут полностью удовлетворять требуемым свойствам, т.е. будут настоящими сечениями расслоения Зейферта на каждом из граничных торов. Однако, для согласованности различных способов построения циклов (см. книгу [11]) один из этих циклов необходимо чуть подправить, добавив к нему цикл, кратный слою  $\lambda$ . При этом кратность должна выбираться так, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\sum_i \mu_i = \frac{1}{2} \left( \sum_i \hat{\mu}_i + s\lambda \right) = \frac{\partial\hat{P} + s\lambda}{2},$$

где  $s$  – число критических окружностей в  $U$  с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами, т.е. количество звездочек в атоме  $U$ .

## 1.2.5 Молекула Фоменко-Цишанга – полный инвариант Лиувиллевой эквивалентности.

Таким образом, в точке каждого ребра грубой молекулы  $W$ , представляющей собой тор Лиувилля, определены два допустимых базиса, которые определяются по правилам выше, согласно тем атомам, которые соединяет выбранное ребро. Для каждой такой пары базисов можно указать матрицу перехода от одного базиса к другому, которая называется матрицей склейки. Так как допустимые базисы выбираются не совсем однозначно, то полученная матрица склейки может меняться при замене одних допустимых базисов на другие. Однако, по матрице склейки можно определить ряд чисел-меток, которые для всех таких матриц будут совпадать (см. [11, 12, 14]). Приведём эти правила.

Пусть на выбранном ребре найдена матрица склейки  $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ . Сопоставим матрице склейки  $C_i$  следующие числовые метки.

**Определение 1.2.2.** Числовой рациональной меткой  $r_i$  на ребре  $e_i$  молекулы  $W$  называется:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

**Определение 1.2.3.** Числовой целочисленной меткой  $\varepsilon_i$  на ребре  $e_i$  молекулы  $W$  называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Назовём бесконечным ребро молекулы с меткой  $r_i$ , равной  $\infty$ . Остальные рёбра будем называть конечными. Разрежем молекулу по всем конечным рёбрам. В результате молекула распадётся на некоторое число связных кусков.

**Определение 1.2.4.** Семейей называется кусок молекулы, который не содержит атомов  $A$  после разреза молекулы по всем конечным ребрам.

В каждой семье все рёбра можно разделить на три класса: входящие, выходящие и внутренние.

**Определение 1.2.5.** Сопоставим каждому из этих рёбер  $e_i$  целое число  $\Theta_i$  по следующему правилу:

$$\Theta_i = \begin{cases} \left[ \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i \text{ – выходящее ребро,} \\ \left[ -\frac{\delta_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i \text{ – входящее ребро,} \\ \left[ -\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \right], & \text{если } e_i \text{ – внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Тогда для каждой семьи определена целочисленная метка  $n$ , определенная по следующему правилу

$$n = \sum \Theta_i,$$

где сумма берётся по всем рёбрам данной семьи.

Числовые метки  $r$ ,  $\varepsilon$  и  $n$  инвариантны относительно допустимых замен базисов на граничных торах (см. леммы 4.5 и 4.6 книги [11]).

**Определение 1.2.6.** Молекула  $W$ , снабжённая числовыми метками  $r$ ,  $\varepsilon$  и  $n_k$ , называется меченой молекулой или инвариантом Фоменко-Цишанга.

**Теорема 1.2.** (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг) *Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях  $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$  лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

### 1.2.6 Влияние ориентации на метки.

При построении меченой молекулы  $W^*$  мы использовали ориентации многообразия  $Q^3$ , критических окружностей интеграла  $f$  и ребер молекулы. При изменении любой из этих ориентаций меченая молекула  $W^*$  будет, вообще говоря, меняться. Опишем формальные правила, показывающие, что происходит с меченой молекулой при заменах ориентаций.

#### Изменение ориентации на ребре молекулы.

В случае бесконечного ребра метки  $\varepsilon$  и  $n$  не меняются. Если метка  $r$  была бесконечной, то она не меняется. В случае конечного ребра метка  $r = (\frac{\alpha}{\beta}) \bmod 1$  меняется на метку  $r^* = (\frac{\delta}{\beta}) \bmod 1$ , где  $\delta$  однозначно определяется из условия  $(\alpha\delta - 1) \bmod \beta = 0$ . Мы предполагаем что  $\alpha$  и  $\beta$  взаимно просты.

#### Изменение ориентации 3-многообразия $Q$ .

- Ребро соединяет атомы одного типа, т.е. либо  $A$  с  $A$  либо седло с седлом. Тогда в случае конечного ребра метки  $r$  и  $\varepsilon$  меняют знаки. В случае бесконечного ребра метки  $r$  и  $\varepsilon$  не меняются.
- Ребро соединяет атомы разных типов. При замене ориентации многообразия  $Q^3$  в случае конечного ребра метка  $r$  меняет знак, а метка  $\varepsilon$  не меняется. В случае бесконечного ребра наоборот: метка  $r$  не меняется, а метка  $\varepsilon$  меняет знак.
- Метка  $n$  заменяется на метку  $n'$  которая вычисляется следующим образом. Пусть  $l$  – число ребре молекулы, несущих на себе дробную метку метку  $r$ , а  $s$  – число звездочек у всех атомов, образующих данную семью. Тогда

$$n' = -n - l - s.$$

**Изменение ориентации гамильтонова векторного поля** не меняет меток.

**Замечание 2.** Пусть молекула Фоменко имеет вид указанный на рисунке 1.6. На дополнительных циклах  $\mu_A$ , относящихся к граничным торам минимаксных атомов  $A$ , и на циклах  $\lambda_V$ , относящихся к граничным торам седлового атома  $V$ , ориентация фиксирована и задаётся потоком гамильтонова векторного поля. Фиксируем ориентацию циклов  $\mu_V$  (или  $\widehat{\mu}_V$  в случае, если атом  $V$  имеет звездочки) на седловом атоме  $V$  единым образом – напомним, что циклы  $\mu_V$  ( $\widehat{\mu}_V$ ) связаны существованием глобального сечения. Тогда для того чтобы проверить, что ориентация стягивающихся циклов  $\lambda_A$  на минимаксных атомах выбрана правильно, необходимо проверить, что определители всех матриц склеек равны  $-1$ .

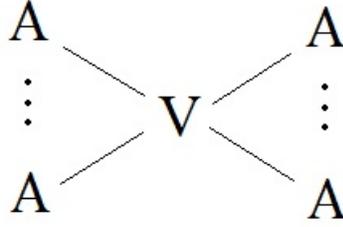


Рис. 1.6: Атом  $V$  – это некоторый седловой атом.

## 1.3 Биллиард.

### 1.3.1 Классическая постановка биллиардной задачи.

Пусть область  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой кривой углы равны  $\frac{\pi}{2}$ . Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области  $\Omega$  с естественным отражением на границе  $P = \partial\Omega$ . Эту систему назовём “биллиардом в области”. Будем считать, что в точках, где граница  $P$  не гладкая (тогда, как было сказано выше, угол излома обязательно равен  $\frac{\pi}{2}$ ) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла границы, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim$$

где отношение эквивалентности задаётся так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь через  $T_xP$  обозначена касательная плоскость к области  $\Omega$  в точке  $x$ , а через  $|v|$  – евклидова длина вектора  $v$ . Это отношение эквивалентности иногда будем называть биллиардным законом.

### 1.3.2 Гамильтоново сглаживание.

Система биллиарда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру в декартовых координатах. Необходимо видоизменить определения выше с учетом граничных точек. Описываемый ниже подход и определения предложены А. Т. Фоменко.

Фазовое многообразие  $M^4$  является кусочно-гладким и распадется на гладкие куски (объединение которых мы обозначим  $\widetilde{M}^4$ ), склеенные по точкам, проектирующимся (в случае биллиардной системы) в одни и те же точки границы области, где определен биллиард. На многообразии введем симплектическую структуру только в  $\widetilde{M}^4$ . Будем предполагать, что гладкие симплектические структуры в соседних гладких областях непрерывно согласованы на границе раздела, то есть их пределы “справа и слева” совпадают. Будем говорить, что кусочно-гладкая система на  $M^4$  интегрируема (в кусочно-гладком смысле, но в дальнейшем будем говорить, для краткости, просто об интегрируемости), если существуют непрерывные на  $M^4$  и гладкие

на  $\widetilde{M}^4$  функционально независимые функции  $f$  и  $H$ , которые находятся в инволюции на  $M^4$ . Подобное определение имеет смысл не только для бильярдных систем, но в данной работе мы будем рассматривать только плоские бильярды.

Рассмотрим кусочно-гладкое изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  и связную компоненту совместного уровня функций  $f$  и  $H$ . Пусть гамильтоновы потоки  $sgradf$  и  $sgradH$  полны. Если можно показать, что связная компактная компонента совместного уровня функций  $f$  и  $H$  гомеоморфна либо кусочно-гладкому тору либо особому слою кусочно-гладкого трехмерного атома (для конечного числа значений  $f$ ), то будем говорить, что выполнена кусочно-гладкая теорема Лиувилля. В этом случае мы можем построить грубую молекулу  $W$  и определить метки. В случае бильярда в компактной области полнота гамильтоновых потоков очевидна.

Фактически, кусочно-гладкое слоение Лиувилля в случае бильярдной системы отличается от слоения Лиувилля классической интегрируемой гамильтоновой системы тем, что каждая совместная поверхность уровня, как правило, представляет собой либо особый слой кусочно-гладкого атома либо кусочно-гладкий тор. В дальнейшем мы будем пользоваться однако теми же обозначениями для атомов и молекул, что и в классическом случае.

В работе В. Лазуткина [19], показано, что в случае, если граница бильярда является выпуклой, то в прообразе ее окрестности при проекции  $M^4 \rightarrow \Omega$  можно ввести гладкую и симплектическую структуры на многообразии  $M^4$ , относительно которых функции  $f_1$  и  $f_2$  являются гладкими, а проекция  $\widetilde{M}^4 \rightarrow M^4$  является гладким симплектическим отображением. Однако, в прообразах точек излома границы (в углах) и в прообразе точек её невыпуклости гладкость пока не удалось показать.

### 1.3.3 Эллиптико-гиперболический бильярд.

**Определение 1.3.1.** Фиксируем систему координат  $(x, y)$ . Определим софокусные квадрики как квадрики семейства

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1 \quad \lambda \in (-\infty, b) \cup (b, a)$$

и полученные из них “предельным переходом”, точнее квадрики семейства

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \lambda \leq a. \quad (1.1)$$

Здесь  $\infty \geq a \geq b > 0$  — фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик),  $\lambda$  — параметр семейства (определяющий квадратик семейства).

В классическом случае ( $\infty > a > b$ ) при  $\lambda \neq a$  или  $b$  это эллипсы или гиперболы. При  $\lambda = b$  это объединение вырожденной гиперболы (образованной двумя горизонтальными лучами из фокусов) и вырожденного эллипса (отрезка между фокусами). Вертикальную прямую, соответствующую параметру  $\lambda = a$  мы будем называть гиперболой (а не вырожденной гиперболой).

При  $\infty = a > b$  софокусные квадрики являются софокусными параболами.

При  $a = b$  квадрики вырождаются в концентрические окружности и ортогональные им радиальные прямые. Этот случай мы не будем рассматривать в настоящей работе.

Нетрудно показать, что софокусные квадрики ортогональны друг другу.

**Замечание 3.** В дальнейших рассуждениях эллипсы и гиперболы предполагаются софокусными квадриками семейства (1.1), причем  $\infty > a > b$ .

**Определение 1.3.2.** Пусть дана компактная область в плоскости, ограниченная дугами софокусных квадрик, все углы которой в точках излома границы не превосходят  $\pi$ . В этом случае граница области является либо простой замкнутой кривой, либо несвязным объединением двух эллипсов. Рассмотрим минимальный набор дуг квадрик, которыми образована граница области. Эти дуги назовем *сегментами квадрик*, ограничивающих данную область (или сегментами границы данной области).

Мы будем различать сегменты четырёх типов: эллипс, дуга невырожденной гиперболы, заключённая между двумя эллипсами, дуга невырожденного эллипса, заключённая между двумя гиперболами, отрезок фокальной прямой.

Пусть плоская область  $\Omega$  ограничена сегментами софокусных квадрик.

### Теорема 1.3. (Якоби, Шаль)[3]

*Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще  $n - 2$  конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

**Замечание 4.** Софокусные квадрики в многомерном случае иногда называются конфокальными.

В плоском двумерном случае из теоремы Якоби-Шалля следует, что касательные в любой точке бильярдной траектории внутри области  $\Omega$  касаются эллипса или гиперболы, софокусных с семейством квадрик, образующих границу  $P$  области  $\Omega$ .

Относительно стандартной симплектической структуры на плоскости, функции  $|v|$  — модуль вектора скорости — и  $\Lambda$  — параметр софокусной квадрики коммутируют. Так как они сохраняются вдоль траекторий бильярда, значит в пределе они коммутируют и на границе области. Таким образом, данная “бильярдная” система обладает двумя независимыми (см. [3]) интегралами:

1.  $|v|$  — модуль вектора скорости,
2.  $\Lambda$  — параметр софокусной квадрики.

### 1.3.4 Параболический бильярд.

Зафиксируем систему координат на плоскости  $OXY$ . Уравнение

$$y^2 + 4px - 4p^2 = 0 \tag{1.2}$$

описывает семейство софокусных парабол ( $p$  — параметр параболы). Фокус парабол находится в начале координат, а директрисами являются вертикальные прямые, проходящие через точки вида  $(2p, 0)$ . Включим в это семейство прямую  $y = 0$ , соответствующую параметру  $p = 0$ . Будем называть эту прямую *вырожденной параболой*.

**Лемма 1.4.** *Параболы, задаваемые уравнением (1.2) при различных значениях параметров пересекаются под прямыми углами.*

*Доказательство.* Пусть  $l_p$  и  $l_q$  – две параболы, удовлетворяющие уравнению (1.2) с параметрами  $p$  и  $q$  соответственно. Тогда координаты точки их пересечения имеют следующий вид:  $(p + q, \pm 2\sqrt{-pq})$ .

Очевидно, что софокусные параболы пересекаются тогда и только тогда когда их параметры имеют разные знаки, таким образом выражение  $\sqrt{-pq}$  корректно определено.

Продифференцируем уравнение (1.2) по  $x$  и по  $y$ . Получим вектор нормали к параболе (1.2). Подставим в результат координаты точки пересечения  $(p + q, 2\sqrt{-pq})$ . Для парабол  $l_p$  и  $l_q$  координаты векторов нормали  $N_{l_p}$  и  $N_{l_q}$  в точке их пересечения примут следующий вид:

$$N_{l_p} = (4p, 4\sqrt{-pq}) \quad N_{l_q} = (4q, 4\sqrt{-pq}).$$

Легко видеть, что такие вектора ортогональны. Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 1.5.** Пусть точка  $(x, y)$  принадлежит параболической бильiardной области  $\Omega$ , а именно, области на плоскости, ограниченной дугами софокусных парабол семейства (1.2), такой, что ее граница  $\partial\Omega$  не содержит углов  $\frac{3\pi}{2}$ . Рассмотрим траекторию бильiardа в области  $\Omega$ , проходящую через точку  $(x_0, y_0)$  в направлении вектора (скорости)  $(v_1, v_2)$ . Тогда для любой точки  $(x, y, w_1, w_2)$  данной бильiardной траектории выполняется следующее свойство: прямые, проходящие через точки  $(x, y)$  в направлении векторов скорости  $(w_1, w_2)$ , касаются (одной и той же) параболы с параметром  $p = \frac{v_2(v_2x - v_1y)}{v_1^2 + v_2^2}$ .

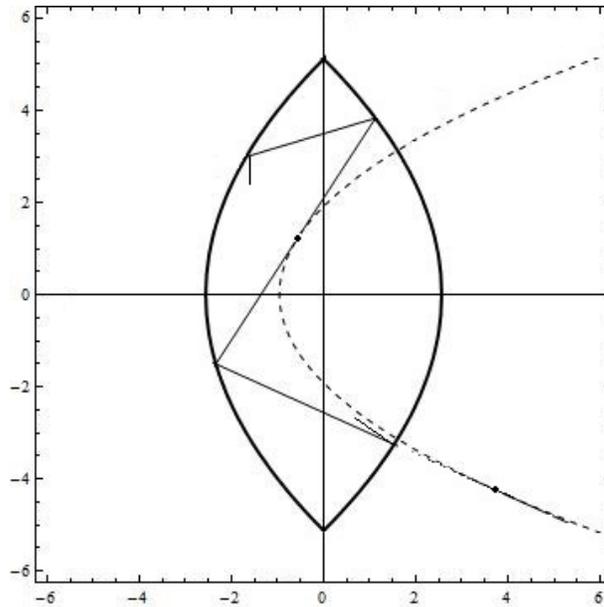


Рис. 1.7: Бильiardное движение в области  $\Omega$ , ограниченной двумя параболой (выделены жирным). Пунктиром выделена парабола, которой касается траектория или её продолжение. Жирным выделены точки касания.

*Доказательство.* Вычислим параметр  $p$  параболы семейства (1.2), которой касается прямая, проходящая через точку  $(x_0, y_0)$  с направляющим вектором  $v = (v_1, v_2)$ .

Уравнение прямой  $l$ , проходящей через точку  $(x_0, y_0)$  в направлении вектора скорости  $v$  имеет вид  $x = x_0 + tv_1, y = y_0 + tv_2$ . Пусть эта прямая касается параболы  $y^2 + 4px - 4p^2 = 0$  в некоторой точке. Подставим выражения для точки прямой в уравнение параболы:

$$(y_0 + tv_2)^2 + 4p(x_0 + tv_1) - 4p^2 = 0.$$

Получим следующее квадратное уравнение на  $t$

$$v_2^2 t^2 + 2t(y_0 v_2 + 2pv_1) + y_0^2 + 4px_0 - 4p^2 = 0.$$

Пусть  $v_2 = 0$ . Тогда воспользуемся фокальным свойством параболы – материальная точка, совершая движение по прямой, перпендикулярной директрисе (в данном случае параллельно оси  $Ox$ ), при ударе о параболу перейдёт в фокус этой параболы. Это означает, что  $p = 0$ .

Пусть теперь  $v_2 \neq 0$ .

Условие касания прямой  $l$  параболы семейства (1.2) в этом случае равносильно равенству нулю дискриминанта  $D$  описанного выше квадратного уравнения на  $t$  :

$$\frac{D}{4} = (y_0 v_2 + 2pv_1)^2 - v_2^2(y_0^2 + 4px_0 - 4p^2) = 0.$$

Получаем

$$y_0^2 v_2^2 + 4y_0 v_2 p v_1 + 4p^2 v_1^2 - v_2^2 y_0^2 - 4px_0 v_2^2 + 4p^2 v_2^2 = 0.$$

Последнее равносильно следующему:

$$p^2(v_1^2 + v_2^2) + pv_2(y_0 v_1 - x_0 v_2) = 0. \text{ Откуда получаем}$$

$$p(x_0, y_0, v_1, v_2) := \frac{v_2(x_0 v_2 - y_0 v_1)}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Знаменатель выражения – это квадрат евклидовой длины вектора  $v$ , который по определению биллиарда положителен. Равенство нулю числителя равносильно фокальному свойству – точка либо движется параллельно оси  $Ox$ , либо проходит через фокус семейства (1.2) – начало координат  $(0, 0)$ .

Покажем, что в том случае, если точка  $(\hat{x}, \hat{y})$  лежит на границе области  $\Omega$ , а именно, принадлежит некоторой параболе с параметром  $P$ , а вектора  $v = (v_1, v_2)$  и  $w = (w_1, w_2)$  удовлетворяют закону отражения, т.е. симметричны относительно касательной прямой в точке  $(\hat{x}, \hat{y})$  к параболе с параметром  $P$  выполняется равенство  $p(\hat{x}, \hat{y}, v_1, v_2) = p(\hat{x}, \hat{y}, w_1, w_2)$ . Так как в знаменателе для выражения параметра  $p$  стоит квадрат евклидовой длины вектора скорости, который сохраняется при абсолютно упругом отражении, то необходимо и досаточно проверить равенство числителей данных выражений.

Для начала рассмотрим случай, когда  $P = 0$ . Тогда  $\hat{y} = 0$  и при этом  $w_1 = v_1, w_2 = -v_2$ . Получаем, что числитель выражения  $p(\hat{x}, \hat{y}, w_1, w_2)$  равен  $w_2(\hat{x}w_2 - \hat{y}w_1) = -v_2(-\hat{x}v_2) = v_2^2 \hat{x} = p(\hat{x}, \hat{y}, v_1, v_2)$ .

Пусть теперь  $P \neq 0$ . Заметим, что координата  $\hat{x}$  может быть выражена через уравнение параболы с параметром  $P$  следующим образом  $\hat{x} := \frac{4P^2 - \hat{y}^2}{4P}$ . Тогда выражение для параметра  $p$  можно переписать в виде:

$$p(\hat{x}, \hat{y}, v_1, v_2) = \frac{v_2(\hat{x}v_2 - \hat{y}v_1)}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2(4P^2 v_2 - 4Pv_1 \hat{y} - v_2 \hat{y}^2)}{4P(v_1^2 + v_2^2)}$$

Касательный вектор к параболе  $y^2 + 4Px - 4P^2 = 0$  в точке  $(\hat{x}, \hat{y})$  коллинеарен вектору  $\tan = (-y_0, 2P)$ , а вектор нормали коллинеарен вектору  $n = (2P, y_0)$ . Для того чтобы вектора скоростей  $v$  и  $w$  в точке  $(\hat{x}, \hat{y})$  удовлетворяли закону отражения на границе, они должны

удовлетворять следующим соотношениям:

$$(v + w, n) = 0, \quad (v - w, \tan) = 0,$$

где через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено стандартное скалярное произведение. Из этих соотношений можно выразить координаты вектора  $w = (w_1, w_2)$  через координаты вектора  $v$  и точки  $x$ :

$$w_1 = \frac{-4P^2v_1 - 4Pv_2\hat{y} + v_1\hat{y}^2}{4P^2 + \hat{y}^2}, \quad w_2 = \frac{4P^2v_2 - 4Pv_1\hat{y} - v_2\hat{y}^2}{4P^2 + \hat{y}^2}.$$

Подставим эти выражения в числитель выражения для параметра  $p$ , в который подставлена координата  $\hat{x}$  (знаменатель принимает одинаковые выражения при подстановке координат векторов  $v$  и  $w$ ). Получаем:

$$\begin{aligned} w_2(4P^2w_2 - 4Pw_1\hat{y} - w_2\hat{y}^2) &= \frac{1}{4P^2 + \hat{y}^2}(4P^2v_2 - 4Pv_1\hat{y} - v_2\hat{y}^2) \times \\ &\times \left( -\frac{4P\hat{y}(-4P^2v_1 - 4Pv_2\hat{y} + v_1\hat{y}^2)}{4P^2 + \hat{y}^2} + \frac{4P^2(4P^2v_2 - 4Pv_1\hat{y} - v_2\hat{y}^2)}{4P^2 + \hat{y}^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hat{y}^2(4P^2v_2 - 4Pv_1\hat{y} - v_2\hat{y}^2)}{4P^2 + \hat{y}^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4P^2 + \hat{y}^2}(4P^2v_2 - 4Pv_1\hat{y} - v_2\hat{y}^2) \frac{16P^4v_2 + 8P^2v_2\hat{y}^2 + v_2\hat{y}^4}{4P^2 + \hat{y}^2} = \\ &= \frac{1}{4P^2 + \hat{y}^2}(4P^2v_2 - 4Pv_1\hat{y} - v_2\hat{y}^2)v_2(4P^2 + \hat{y}^2) = v_2(4P^2v_2 - 4Pv_1\hat{y} - v_2\hat{y}^2). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

### 1.3.5 Обобщённый бильярд: кусочно-плоская бильярдная область получена склейками плоских бильярдных областей, а движение доопределено по непрерывности.

Пусть дан набор компактных (локально-плоских) бильярдных областей  $\Omega_i$ , ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол одного софокусного семейства.

Введём понятие обобщенной бильярдной области. Пусть область  $\Delta$  состоит из нескольких элементарных областей  $\Omega_i$ , склеенных по ряду правил, которые будут уточнены и формализованы ниже. В частности, любые элементарные области  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  склеиваются только по “общим” сегментам границы (т.е. по таким их граничным сегментам, образы которых при изометричных погружениях областей  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  или их двулистных накрытий в плоскость совпадают), причем мы запрещаем все склейки, приводящие либо к углам больше чем  $\pi$  на границе полученной обобщенной области, либо к углам больше чем  $2\pi$  во внутренних точках этой области.

Опишем фазовое пространство  $M^4$  обобщенного бильярда. Обозначим  $P_i$  объединение открытых граничных сегментов области  $\Omega_i$ , не являющихся рёбрами склейки. Определим

$$M_{\Omega_i}^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega_i, v \in T_x\Omega_i, |v| > 0\} / \sim$$

где отношение эквивалентности задаётся так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P_i, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P_i.$$

Здесь через  $T_x P$  обозначена касательная плоскость к области  $\Omega$  в точке  $x$ , а через  $|v|$  – евклидова длина вектора  $v$ .

Далее склеим многообразие  $M^4$  из  $M_{\Omega_i}^4$ . Обозначим через  $Q_{ij}$  одно из ребер склейки (их может быть несколько) области, вдоль которого склеиваются элементарные области  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$ . Тогда в случае, если  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  изометрично вложены в плоскость так, что образы склеиваемых сегментов при этих вложениях совпадают и склеиваются по тождественному отображению, а сами области лежат по одну и ту же сторону от этих сегментов, многообразия  $M_{\Omega_i}^4$  и  $M_{\Omega_j}^4$  склеиваются по следующему правилу:

$$(x_1, v_1) \in M_{\Omega_i}^4 \sim (x_2, v_2) \in M_{\Omega_j}^4 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in Q_{ij}, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1} Q_{ij}.$$

Аналогично определяется правило склеивания  $M_{\Omega_i}^4$  и  $M_{\Omega_j}^4$  в общем случае. Это правило склейки иногда будем называть обобщенным бильярдным законом.

Мы получаем, что траектория так определённой бильярдной системы “перескакивает” с одной элементарной области на другую в точках пересечения с рёбрами склейки и отражается по стандартному закону отражения при ударе о границу области  $\Delta$ .

Оговорим отдельно случай конической точки – точки, в которой склеиваются два угла различных элементарных областей  $\Omega$ , входящих в состав области  $\Delta$ . В этом случае, как легко понять из соображений непрерывности, закон отражения будет выглядеть так – материальная точка, проходя по элементарной области  $\Omega$ , попав в коническую точку, отразится по той же прямой и будет продолжать находиться на той же элементарной области  $\Omega$  (см. рис.1.8). То есть, “перескакивание” материальной точки в конце ребра склейки возможно, только если локально в этой вершине излома определена склейка четырех элементарных областей. Очевидно,

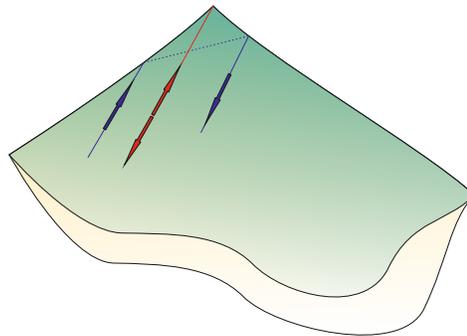


Рис. 1.8: Движение в конической точке доопределяется по непрерывности.

что при таком определении фазового многообразия  $M^4$  сохраняется интегрируемость системы, а именно, сохраняется дополнительный интеграл  $\Lambda$  – параметр софокусной квадррики, которой касается бильярдная траектория. Это связано с тем, что граница любой плоской (элементарной) области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщенной области  $\Delta$  и, в частности, все ребра склейки, лежат на дугах одного и того же семейства софокусных квадррик при изометричных погружениях этих областей в плоскость.

# Глава 2

## Классификация бильярдных областей.

### 2.1 Компактные плоские области, ограниченные софокусными эллипсами и гиперболами.

**Определение 2.1.1.** *Простейшей элементарной (плоской) областью  $\Omega$*  назовем двумерное связное, компактное, плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, которое имеет изометричное вложение в плоскость, причем граница его образа при этом вложении состоит из сегментов софокусных квадрик семейства (1.1), углы между которыми не превышают  $\pi$ .

**Определение 2.1.2.** *Составной элементарной (локально-плоской) областью  $(\Omega, U_i)$*  назовем двумерное связное, компактное, локально-плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, не имеющее изометричного вложения в плоскость, которое может быть разбито в конечное объединение простейших элементарных областей  $U_i$ , ограниченных дугами квадрик из одного и того же софокусного семейства (1.1) так, что либо пересечение любых двух элементарных областей  $U_i$  и  $U_j$  пусто, либо существуют изометричные вложения этих областей  $U_i, U_j$  в плоскость, согласованные на их пересечении  $U_i \cap U_j$ , причем пересечение  $U_i \cap U_j$  является как сегментом границы области  $U_i$ , так и сегментом границы области  $U_j$ , образ этого пересечения  $U_i \cap U_j$  при любой из этих изометрий является дугой гиперболы семейства (1.1), а образы областей  $U_i$  и  $U_j$  лежат по разные стороны от этой дуги, в случае если эта дуга не лежит на осях семейства (1.1). При этом отметим, что мы не требуем существования глобального изометричного вложения составной элементарной области в плоскость.

Простейшие элементарные области и составные элементарные области будем называть просто элементарными. Бильярдное движение в такой области иногда будем называть эллиптико-гиперболическим, а саму область – эллиптико-гиперболической бильярдной областью.

#### 2.1.1 Отношение эквивалентности.

**Определение 2.1.3.** Элементарная область  $(\Omega, U_i)$ , ограниченная дугами квадрик из софокусного семейства (1.1), называется **эквивалентной** другой элементарной области  $(\Omega', U'_i)$ , ограниченной дугами квадрик из того же семейства (1.1), если  $(\Omega', U'_i)$  можно получить из  $(\Omega, U_i)$  путем композиции следующих преобразований:

- последовательным изменением сегментов границы в образах некоторых простейших элементарных областей  $U_i$  при их изометричных вложениях в плоскость путем непрерывной

деформации в классе квадрик (1.1), так, чтобы значение параметра  $\lambda$  изменяемого сегмента границы не принимало значения значения  $b$ ; при этом потребуем, чтобы одновременно менялись и оставались равными друг другу значения параметра  $\lambda$  для квадрик (гипербол), содержащих образы общей граничной дуги любых двух пересекающихся простейших элементарных областей при их изометричных вложениях в плоскость, согласованных на этой дуге до деформации (а потому также во время и после деформации), а также одновременно меняются и остаются равными друг другу значения параметра  $\lambda$  для квадрик (эллипсов), содержащих образы эллиптических граничных сегментов (разных элементарных областей), имеющих общую вершину;

- симметрией относительно оси семейства (1.1) во всех простейших элементарных областях  $U_i$  одновременно;
- объединением нескольких простейших элементарных областей в одну или же путем разбиения одной элементарной области на более мелкие.

**Замечание 5.** Определение запрещает сегменту изменяемой границы становиться отрезком фокальной прямой. Далее будет показано, что в слоении Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  биллиарда в элементарной области, имеется столько критических окружностей на седловом уровне дополнительного интеграла (параметра квадрики), сколько отрезков в пересечении с внутренностью этой области имеет фокальная прямая (для составной элементарной области – сумма числа пересечений для каждой простейшей элементарной и числа общих ребер простейших элементарных областей, лежащих при их погружениях в плоскость на фокальной прямой).

## 2.1.2 Классификация эллиптико-гиперболических биллиардных областей.

**Предложение 2.1.1.** *Любая элементарная область  $(\Omega, U_i)$  эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих трёх серий (все они представлены на рисунках 2.1 и 2.2):*

1. *Односвязные элементарные области, изометрично вложимые в плоскость, содержащие отрезок фокальной прямой между фокусами (внутри области или на границе). Существует ровно шесть типов, задаваемых формулой  $a + |2f - f'| = 4$ , где  $a$  – число углов границы,  $f$  – количество фокусов, принадлежащих области,  $f'$  – число фокусов принадлежащих границе области. Такие области будем обозначать  $A_f$  если их граница не содержит отрезок фокальной прямой и  $A'_f$  иначе. Все области, принадлежащие этой серии изображены на рисунке 2.1.*
2. *Односвязные элементарные области, изометрично погружаемые в плоскость так, что образ области при этом погружении не содержит отрезка фокальной прямой между фокусами. Каждую такую область ограничивает четырёхугольник, образ которого при указанном погружении состоит из дуг двух эллипсов и двух гипербол (быть может совпадающих). Такие области будем обозначать либо  $B_n$ , либо  $B'_n$ , либо  $B''_n$  в зависимости от того, образы нуля, одного или двух отрезков границы лежат на фокальной прямой, где  $n$  – это количество связных компонент прообраза фокальной прямой при изометричном погружении области вместе с ее границей в плоскость. Будем называть их областями типа  $B$ . Пример области изображен на рисунке 2.2.*

3. Неодносвязные элементарные области. Двухлистные накрытия таких областей изометрично погружаемы в плоскость, их образы при таких погружениях ограничены двумя эллипсами. Будем обозначать эти области через  $C_n$ , где  $n$  — это половина количества связных компонент прообраза фокальной прямой при изометричном погружении двухлистного накрытия области в плоскость (или же количество связных компонент прообраза фокальной прямой при изометричном погружении области вместе с ее границей в плоскость). Будем называть их областями типа  $C$ . Пример области изображен на рисунке 2.2.

При этом области, принадлежащие к различным сериям ( $A$ ,  $B$  или  $C$ ) неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

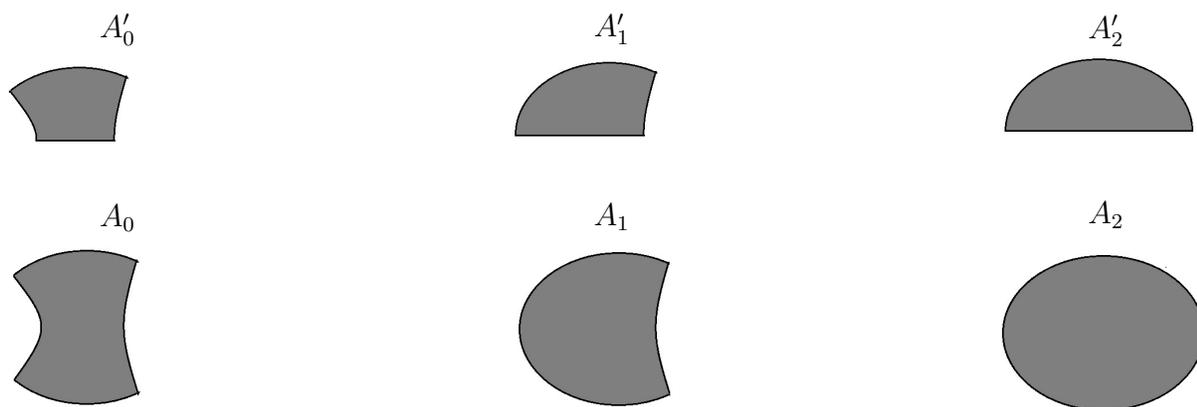


Рис. 2.1: Элементарные области, образующие конечную серию  $A$

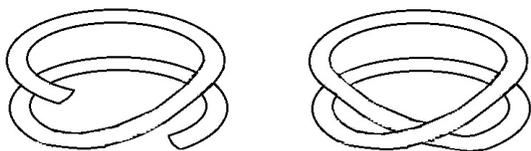


Рис. 2.2: Примеры элементарных областей, принадлежащих бесконечным сериям  $B$  и  $C$ . На рисунке изображены области  $B_4$  (слева) и  $C_4$  (справа).

*Доказательство.* Пусть  $\Omega$  — простейшая элементарная область.

Рассмотрим сетку эллиптических координат на плоскости. Сделаем разрез плоскости вдоль двух лучей вырожденной гиперболы и определим отображение  $f$  из разрезанной плоскости с эллиптической координатной сеткой в полосу с прямоугольной координатной сеткой, т.е. все гиперболы перейдут в вертикальные прямые, а все эллипсы перейдут в пары горизонтальных отрезков. Граница полосы при этом состоит из двух прямых, из которых состоит образ вырожденной гиперболы. Таким образом, на границе полосы определена склейка, переводящая эту полосу в плоскость. В дальнейшем мы будем пользоваться моделью полосы с определённой склейкой на границе.

Образ  $f(\Omega)$  области  $\Omega$ , на плоскости ограниченной дугами квадрат семейства (1.1), в полосе будет ограничен отрезками вертикальных и горизонтальных прямых.

**Лемма 2.1.** *Область  $f(\Omega)$  является несвязным объединением не более трёх прямоугольников.*

*Доказательство.* Область  $\Omega$  связна, а значит при разрезе вдоль дуг вырожденных гипербол она распадается не более чем на три связных куска. Обозначим их  $w_i$ ,  $i < 4$ . Отображение  $f$  является биекцией между областью с двумя разрезами вдоль вырожденных гипербол и полосой, а значит,  $f(w_i) \cap f(w_j) = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Рассмотрим  $f(w_i)$ . Заметим, что  $w_i$  ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол и её граница (а значит и граница  $f(w_i)$ ) не содержит углов  $\frac{3\pi}{2}$ . Заметим, что область  $w_i$  гомеоморфна диску. Граница  $f(w_i)$  лежит на горизонтальных и вертикальных прямых. Значит,  $f(w_i)$  – прямоугольник.  $\square$

Рассмотрим каждый случай отдельно.

- Пусть  $f(\Omega)$  – это один прямоугольник. Возникает три случая.

Если прямоугольник  $f(\Omega)$  расположен строго выше (или ниже) оси  $Ox$ , то  $\Omega$  эквивалентна либо  $B_0$  (прямоугольник строго внутри полосы), либо  $B'_1$  (одна вертикальная сторона расположена на границе полосы), либо  $B''_1$  (обе вертикальные стороны расположены на границах полосы).

Если прямоугольник  $f(\Omega)$  расположен строго и в положительной и отрицательной частях полосы, то  $\Omega$  эквивалентна  $A_i$ , где  $i$  – число вертикальных сторон прямоугольника на границе полосы.

Если верхняя или нижняя стороны прямоугольника  $f(\Omega)$  лежат на оси  $Ox$ , то  $\Omega$  эквивалентна  $A'_i$ , где  $i$  – число вертикальных сторон прямоугольника на границе полосы.

- Пусть  $f(\Omega)$  – это объединение двух прямоугольников. Тогда в силу связности, у этих прямоугольников существует по крайней мере одна пара равных вертикальных сторон, расположенных на одной границе полосы симметрично относительно оси  $Ox$ . Если существует одна пара таких сторон, то область  $\Omega$  – это четырёхугольник, ограниченный парой дуг эллипсов и парой дуг гипербол, то есть область  $B_1$  или  $B'_2$ . Если склеилось две пары сторон – то в прообразе  $f(\Omega)$  кольцо, обозначаемое нами  $C_2$ .
- Пусть  $f(\Omega)$  – это объединение трёх прямоугольников. Аналогично предыдущему пункту получаем, что прообраз – это четырёхугольник, ограниченный парой дуг эллипсов и парой дуг гипербол, то есть область  $B_2$ .

Таким образом, мы описали все простейшие элементарные области.

Пусть  $(\Omega, U_i)$  – составная элементарная область. Можно считать, что любые две простейшие элементарные области  $U_i$  и  $U_j$  в ее составе либо не пересекаются либо не имеют глобального вложения в плоскость после склейки вдоль общего сегмента. В самом деле, для этого необходимо осуществлять последовательную склейку простейших элементарных областей до тех пор, пока глобальное вложение существует. Простейших областей конечное число, следовательно, процесс в какой-то момент остановится.

Теперь фиксируем какую-нибудь простейшую элементарную область  $U_i$ , входящую в составную область  $\Omega, U_i$ , и пересекающуюся с ней область  $U_j$ . Обозначим дугу гиперболы в пересечении этих областей (точнее, их образов при соответствующих изометричных вложениях

в плоскость) через  $l$ . Докажем, что сегмент  $l$  не имеет общих точек с отрезком между фокусами. Пусть это не так, тогда пара областей  $U_i, U_j$  эквивалентна паре областей  $A'_0, A'_0$  или  $A'_0, A'_1$  или  $A_0, A_0$  или  $A_0, A_1$ . Эти пары областей можно заменить на одну простейшую элементарную область, принадлежащую, соответственно, классам  $A'_0, A'_1, A_0$  или  $A_1$ . Противоречие с тем, что мы предположили, что объединение любых двух простейших пересекающихся элементарных областей в составе  $\Omega$  не имеет вложения в плоскость. Значит, сегмент  $l$  не имеет пересечения с отрезком между фокусами. В этом случае области  $U_i$  и  $U_j$  эквивалентны областям  $B_0, B_1, B'_1, B'_2$  или  $B_2$ . Более того, можно утверждать, что все элементарные области  $U_i$  эквивалентны  $B_0, B_1, B'_1, B'_2$  или  $B_2$ .

Из областей  $B_0, B_1, B'_1, B'_2$  или  $B_2$  путем возможных склеек вдоль гиперболических сегментов границ можно получить либо односвязные области-ленты (серия  $B$ ), либо неодносвязные области-кольца (серия  $C$ ).  $\square$

**Определение 2.1.4.** Заметим, что понятие граничного сегмента (см. определение 1.3.2) определено пока лишь для простейших элементарных областей, т.е. элементарных областей, изометрично вложимых в плоскость. Распространим его на любое двумерное связное компактное плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем (возможно с точками излома, т.е. углами). *Граничным сегментом* такого риманова многообразия назовем либо связную компоненту его края, не содержащую точек излома, либо дугу, лежащую в крае, соединяющую две точки излома края и не содержащую других точек излома края. Согласно классификации элементарных областей (утверждение 2.1.1), все они (или их двулистные накрытия) допускают изометричное погружение в плоскость. Граничный сегмент элементарной области назовем *гиперболическим* (соотв. *вертикальным гиперболическим, эллиптическим*), если его образ при этом погружении не содержится в фокальной прямой и содержится в гиперболе (соотв. вертикальной прямой, эллипсе) рассматриваемого софокусного семейства. Граничный сегмент назовем *вырожденным или горизонтальным*, если его образ при этом погружении содержится в фокальной прямой. Граничный сегмент элементарной области  $\Omega$  назовем *выпуклым* (соотв. *нестрого выпуклым*), если любая его точка обладает окрестностью в  $\Omega$ , изометричной строго выпуклому (соотв. нестрого выпуклому) подмножеству плоскости.

**Замечание 6.** Заметим, что любой гиперболический сегмент границы можно перевести в вертикальный сегмент. Таким образом, можно считать, что область  $A'_1$  эквивалентна четверти эллипса, область  $A_1$  эквивалентна половине эллипса (правой или левой), у областей  $A'_0, A_0$  левый гиперболический сегмент границы – вертикальная прямая, у областей серии  $B$  вертикальны все невырожденные гиперболические сегменты.

**Замечание 7.** Можно рассматривать составные элементарные области, которые получаются склейками и вдоль эллиптических сегментов тоже. Но в этом случае запрещение углов  $\frac{3\pi}{2}$  на границе (локально при изометричных вложениях склеиваемых простейших элементарных областей в плоскость) накладывает существенные ограничения на виды склеек. Таким образом, могут возникнуть лишь склейки вдоль дуг эллипсов и их накрытий (для простейших областей  $A_2$  и  $C_2$ ), склейки вдоль целой эллиптической дуги (приклейка к любой области подходящей области-ленты серии  $B$ ), а также склейка четырех элементарных областей серии  $B$  при изометричных вложениях, имеющих общую вершину. Такие типы склейки, как легко видеть, приводят лишь к образованию областей, эквивалентных уже описанным элементарным областям.

## 2.2 Области, ограниченные дугами парабол.

**Определение 2.2.1.** *Параболической бильiardной областью  $\Omega$  назовём двумерное связное, компактное, плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, которое имеет изометричное вложение в плоскость, причем граница его образа при этом вложении состоит из сегментов софокусных парабол семейства (1.2), углы между которыми не превышают  $\pi$ .*

### 2.2.1 Отношение эквивалентности.

Напомним, что параболу с параметром  $p = 0$ , принадлежащую семейству (1.2), мы называем вырожденной параболой.

**Определение 2.2.2.** *Параболическая бильiardная область  $\Omega$ , ограниченная софокусными параболоми семейства (1.2), называется эквивалентной области  $\Omega'$ , если она может быть продеформирована в  $\Omega'$  с помощью композиции двух преобразований:*

1. путем непрерывного изменения границы в классе парабол семейства (1.2) так, чтобы парабола, на которой лежит изменяемый сегмент была невырожденной во время деформации (т.е. знак параметра  $p$  этой параболы сохранялся);
2. симметрией относительно оси семейства (1.2).

**Определение 2.2.3.** *Параболическая бильiardная область  $\Omega$ , ограниченная софокусными параболоми семейства (1.2) называется особой, если одна из парабол, формирующих ее границу, является вырожденной.*

### 2.2.2 Классификация параболических бильiardных областей.

**Предложение 2.2.1.** *Существует ровно три класса эквивалентности параболических неособых областей  $\Omega$ , ограниченных дугами софокусных парабол: область  $\Omega_1$ , ограниченная двумя параболоми, параметры которых имеют разные знаки, область  $\Omega_2$ , ограниченная тремя параболоми, и область  $\Omega_3$ , ограниченная четырьмя параболоми с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и двумя отрицательными, не имеющая общих точек с горизонтальной осью  $Ox$  (см. рис. 2.3).*

*Существует ровно два класса эквивалентности параболических особых областей: область  $\omega_1$ , ограниченная двумя невырожденными и одной вырожденной параболой, и область  $\omega_2$ , ограниченная тремя невырожденными и одной вырожденной параболой (см. рис. 2.3).*

*Доказательство.* Пусть  $\Omega$  – параболическая бильiardная область, ограниченная софокусными параболоми. Выделим из всего семейства парабол две параболы, с максимальным и минимальным значениями параметра. Обозначим параметры этих парабол  $P$  и  $Q$ , где  $P > 0$ ,  $Q < 0$ . Обозначим область, которую ограничивают эти параболы, через  $M$ . Область  $\Omega$  целиком лежит в области  $M$ , причём граница области  $\Omega$  включает в себя хотя бы одну точку пересечения парабол с параметрами  $P$  и  $Q$ . Разрежем область  $M$  по горизонтальному отрезку, один конец которого находится в фокусе семейства парабол, а другой конец лежит на параболе с параметром  $P$ . В области  $M$  с разрезом софокусные параболы задают прямоугольную систему координат. Отобразим область  $M$  в прямоугольник (см. рис. 2.4а).

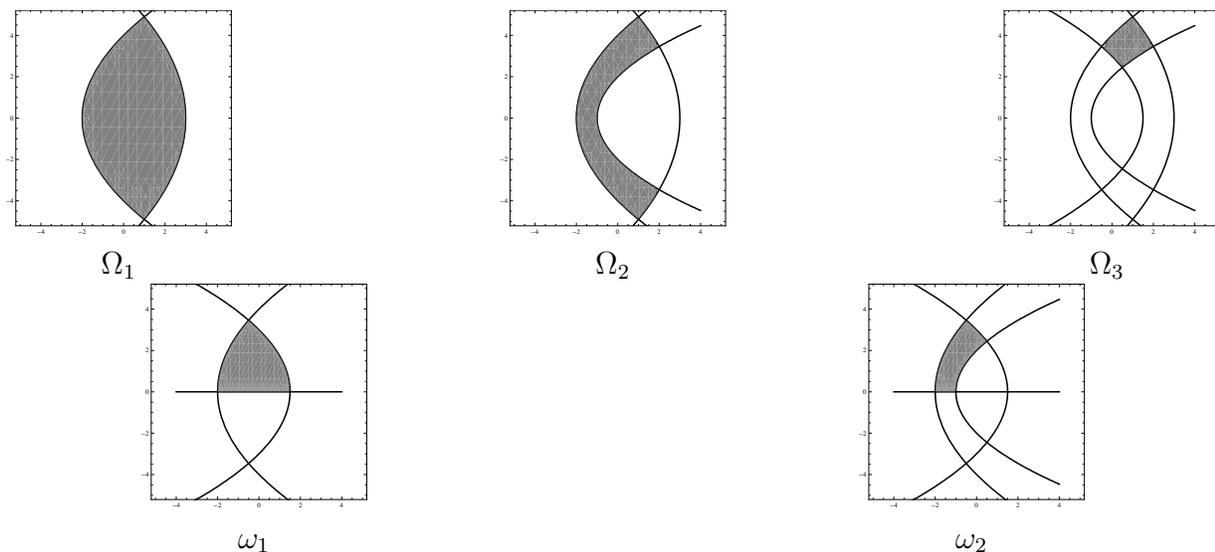


Рис. 2.3: Параболические билиардные области, ограниченные семейством софокусных парабол. Жирным выделены параболы, ограничивающие каждую область. На рисунке области закрашены.

б)

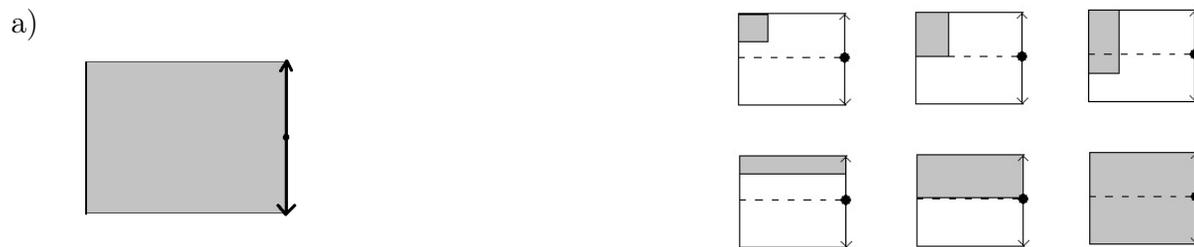


Рис. 2.4: На рисунке а) изображен образ области  $M$  при отображении в прямоугольник. Жирным выделен образ фокуса. Правая граница – линия разреза. Верхняя и нижняя границы – образ параболы с параметром  $P$ . Левая граница – образ параболы с параметром  $P$ . На рисунке б) закрашены возможные области при отображении  $M$  в прямоугольник. Легко понять, что средняя область в верхнем ряду эквивалентна левой области в нижнем ряду. Пунктиром выделен образ горизонтального отрезка

Очевидно, что образ  $f(\Omega)$  в этом прямоугольнике также является прямоугольником. Один из углов  $f(\Omega)$  совпадает с  $f(M)$ . Без ограничения общности можно считать, что это левый верхний угол прямоугольника, изображенного на рис. 2.4а). Рассматривая различные прямоугольники, удовлетворяющие этому условию (см. рис. 2.4б), получаем пять различных типов областей.

□

### 2.2.3 Классификация плоских некомпактных параболических областей.

**Предложение 2.2.2.** Существует ровно четыре класса эквивалентности параболических некомпактных неособых областей  $\Theta$ , ограниченных софокусными парабололами: области  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ , ограниченные одной и двумя парабололами соответственно, и области  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$ , ограниченные тремя парабололами с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и одной отрицательной, причем сегмент отрицательной параболы для области  $\Theta_3$  является выпуклым, а для  $\Theta_4$  невыпуклым (см. рис. 2.5).

Существует ровно два класса эквивалентности параболических некомпактных особых областей: области  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , ограниченные одной вырожденной парабололой и одной и двумя невырожденными парабололами соответственно (см. рис. 2.5).

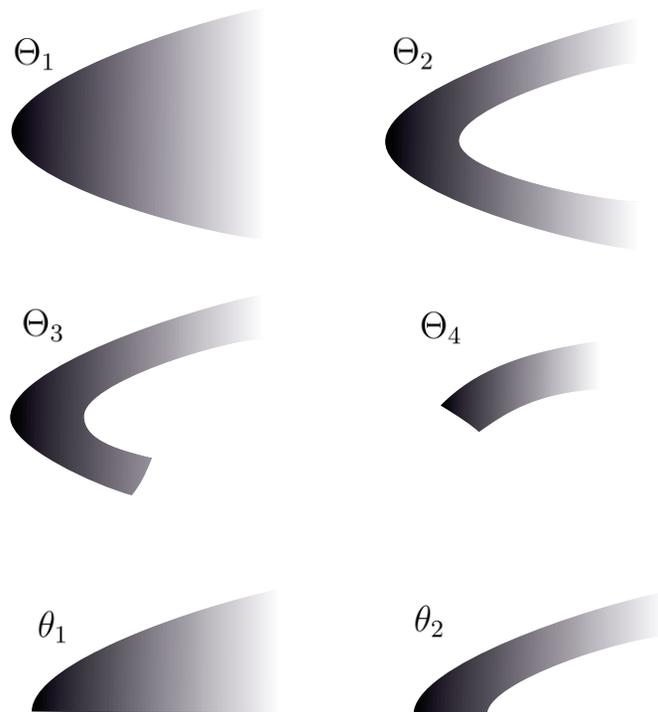


Рис. 2.5: Параболические некомпактные области.

*Доказательство.* Отметим, что классифицируемая некомпактная параболическая билиардная область  $\Theta$  содержит в составе своей границы как минимум одну невырожденную параболу. Легко заметить, что у полученной области число неособых парабол в границе не превышает

трёх (в противном случае, это область либо содержит углы больше  $\pi/2$  либо является компактной).

Пусть область  $\Theta$  содержит в составе своей границы одну невырожденную параболу. В этом случае область  $\Theta$  эквивалентна области  $\Theta_1$  или  $\theta_1$ . Если же граница области  $\Theta$  содержит дуги двух невырожденных парабол, то знаки параметров этих парабол совпадают, т.к. в противном случае область была бы компактной. В результате, эта область эквивалентна областям  $\Theta_2$  (случай когда область неособая) или  $\theta_2$  (случай, когда область является особой). Пусть, наконец, область  $\Theta$  содержит в составе своей границы дуги трёх невырожденных парабол. Здесь имеем два случая, а именно, области  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$ .  $\square$

## 2.3 Обобщенные билиардные области, ограниченные дугами эллипсов и гипербол.

### 2.3.1 Правила склейки. Конические точки.

**Определение 2.3.1.** Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — выпуклые эллиптические или горизонтальные граничные сегменты двух элементарных областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , причем образы этих сегментов при изометричных погружениях областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (или их двулистных накрытий) в плоскость совпадают и содержатся в квадрике семейства (1.1) с параметром  $\lambda_{l_1} = \lambda_{l_2}$ . Определим *склейку* областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  вдоль эллиптических сегментов  $l_1$  и  $l_2$  (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как склейку вдоль  $l_1$  и  $l_2$  по гомеоморфизму между  $l_1$  и  $l_2$ , согласованному с изометричными погружениями областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (или их двулистных накрытий) в плоскость. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

Таким образом, мы можем определить склейку элементарных областей вдоль эллиптических или горизонтальных сегментов, при этом мы можем аналогично определить склейку одного экземпляра элементарной области вдоль двух своих эллиптических граничных сегментов в том случае, если эти сегменты различны и симметричны друг другу относительно фокальной прямой, а склеивающий гомеоморфизм является ограничением симметрии относительно фокальной прямой на рассматриваемые сегменты. Напомним, что гамильтоново склеивание, построенное в книге [19] в данном случае позволяет ввести гладкую структуру в окрестности прообраза открытого ребра склейки при проекции  $M^4 \rightarrow (\Omega_1 \sqcup \Omega_2) / \sim$ .

**Определение 2.3.2.** Пусть  $m_1$  и  $m_2$  — выпуклые гиперболические или горизонтальные граничные сегменты двух элементарных областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , причем образы этих сегментов при изометричных погружениях областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (или их двулистных накрытий) в плоскость совпадают и содержатся в квадрике семейства (1.1) с параметром  $\lambda_{m_1} = \lambda_{m_2}$ . Определим *склейку* областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  вдоль гиперболических или горизонтальных сегментов  $m_1$  и  $m_2$  (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как склейку вдоль  $m_1$  и  $m_2$  по гомеоморфизму между  $m_1$  и  $m_2$ , согласованному с изометричными погружениями областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (или их двулистных накрытий) в плоскость. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

Напомним, что т.к. элементарные области это многообразия с плоской гладкой римановой метрикой, то при их склейке полученное многообразие будет также локально плоским, но вообще говоря с кусочно-гладкой римановой метрикой.

**Определение 2.3.3.** *Обобщённой (локально-плоской) областью  $\Delta$  без конических точек* назовём двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определённых выше склеек элементарных областей вдоль некоторых эллиптических сегментов (определение 2.3.1). Заметим, что в этом случае в каждой вершине склейки сходится одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*).

*Обобщённой (локально-плоской) областью  $\Delta$  с коническими точками* назовём двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определённых выше склеек элементарных областей вдоль некоторых сегментов (опр. 2.3.1, 2.3.2) при выполнении следующих условий. Во-первых, потребуем, чтобы в каждой вершине склейки сходилось либо одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*), либо два ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *коническими точками*), либо четыре ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *внутренними вершинами склейки*). Во внутренних вершинах склейки сходятся два гиперболических или горизонтальных ребра склейки  $m_{i_1}, m_{i_2}$  и два эллиптических или горизонтальных  $l_{j_1}, l_{j_2}$ . Обозначим связную компоненту объединения всех гиперболических (или горизонтальных) ребер склейки через  $\bigcup_i m_i, \{i \in 1 \dots n\}$ , где  $m_i$  последовательно соединены друг с другом. Во-вторых, потребуем, чтобы минимум одно из ребер склейки  $m_1$  или  $m_n$  образовывало коническую точку. В-третьих, потребуем, чтобы в обобщенной области  $\Delta$  с коническими точками число конических точек было больше нуля.

Поясним, что для каждой такой области  $\Delta$  фиксирован набор элементарных областей  $\Omega_i$  с набором ребер склейки  $f_{ij}$  между ними, которые будучи склеенными вдоль этих ребер образуют область  $\Delta$ . Граничные сегменты областей  $\Omega_i$ , которые не являются ребрами склейки мы называем *свободными ребрами*, а их объединение для фиксированной области  $\Delta$  – *свободной границей*. Области, склеенные без образования конических точек будем обозначать через  $\Delta_\alpha$ , а области с коническими точками через  $\Delta_\beta$ .

**Замечание 8.** Элементарные и обобщенные области могут не иметь изометричного погружения в плоскость. В качестве примера можно рассмотреть элементарную область  $C_1$  и обобщенную область, полученную склейкой двух областей, ограниченных эллипсами.

### 2.3.2 Отношение эквивалентности.

**Определение 2.3.4.** Обобщённая область  $\Delta$ , склеенная из элементарных областей  $\Omega_i$  вдоль ребер склейки  $f_{ij}$  называется **эквивалентной** другой обобщенной области  $\Delta'$ , склеенной из  $\Omega'_i$  вдоль ребер склейки  $f'_{ij}$ , если  $\Delta'$  можно получить из  $\Delta$  путем замены элементарных областей  $\Omega_i$  на им эквивалентные.

### 2.3.3 Обозначения.

Напомним, что мы обозначили обобщенные области без конических точек через  $\Delta_\alpha$ . В скобках будем указывать элементарные области, образующие область  $\Delta$ , причем если эквивалентные элементарные области в ее составе склеиваются друг с другом последовательно в некотором количестве экземпляров, то будем указывать это количество, например  $\Delta_\alpha(kA_0)$ , а если нет, то будем указывать это отдельным суммированием, например  $\Delta_\alpha(\Omega + kA_0 + \Omega)$  – две эквивалентные области  $\Omega$  склеены не друг с другом, а с областями  $A_0$ . Введём специальное обозначение

$\Delta_\alpha(kA_0)^2$  для области, склеенной из  $k$  экземпляров  $A_0$  склейкой вдоль всех эллиптических границ в область, гомеоморфную плоскому кольцу.

Обобщённые области с коническими точками обозначим через  $\Delta_\beta$ . Введём типы конических точек. Как легко видеть из определения, конические точки делятся на три типа. Конические точки типа  $x$  – это конические точки, образованные склейкой вдоль выпуклого эллиптического сегмента  $l$  и горизонтального сегмента  $m$  (в обозначениях определений 2.3.1 – 2.3.3 и 2.3.4). Конические точки типа  $y$  образованы склейкой выпуклого или вертикального гиперболического сегмента  $m$  и выпуклого эллиптического сегмента  $l$  (в обозначениях определений 2.3.1, 2.3.2 и 2.1.4). Конические точки типа  $c$ , иначе говоря центральные конические точки, образованы склейкой вдоль выпуклого или вертикального гиперболического сегмента  $m$  и горизонтального сегмента  $l$  – отвечающего квадрике с параметром  $b$  (в обозначениях определений 2.3.1, 2.3.2 и 2.1.4). Напомним, что мы не рассматриваем склейки вдоль невыпуклых сегментов.

Введём обозначения склеек, показывающих какие именно конические точки образовались:  $\Delta_\beta(\Omega)_c^2$  обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  с образованием центральной конической точки типа  $c$ ,  $\Delta_\beta(\Omega)_y^2$  обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  с образованием конической точки типа  $y$ ,  $\Delta_\beta(\Omega)_x^2$  обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  с образованием конической точки типа  $x$ . Удвоенные индексы показывают, что склейка произошла с образованием двух конических точек, например  $\Delta_\beta(\Omega)_{2y}^2$  – область, склеенная из двух экземпляров области  $\Omega$  с образованием двух конических точек типа  $y$ .

## 2.3.4 Классификация обобщенных областей без конических точек.

**Классификация обобщенных областей без конических точек, скленных из эквивалентных друг другу элементарных областей.**

**Предложение 2.3.1.** *Любая обобщённая область  $\Delta$ , склеенная из эквивалентных друг другу элементарных областей, и не содержащая конических точек, эквивалентна области, принадлежащей к одной из следующих серий:*

- конечная серия областей, состоящая из пяти “простейших удвоенных” областей вида  $\Delta_\alpha(2\Omega)$ , которые получаются в результате склейки вдоль одного выпуклого эллиптического сегмента двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  эквивалентной  $A'_0, A'_1, A_1, A_2, A'_2$ ;
- бесконечная серия областей, состоящая из “гиперболических лент”  $\Delta_\alpha(kA_0)$ ,  $k > 1$  полученных путем последовательной склейки  $k$  экземпляров  $A_0$  с образованием двух свободных эллиптических ребер и  $2k$  свободных гиперболических ребер; эти области гомеоморфны диску;
- бесконечная серия областей, состоящая из “гиперболических колец”  $\Delta_\alpha(kA_0)^2$ ,  $k > 0$ ; свободная граница – это объединение  $2k$  свободных гиперболических ребер;
- бесконечная серия областей, состоящая из “эллиптических лент”  $\Delta_\alpha(2B_k)$ ; для этих областей свободная граница – это объединение двух свободных эллиптических ребер и четырех свободных гиперболических ребер; эти области гомеоморфны диску;

- бесконечная серия областей, состоящая из “эллиптических колец”  $\Delta_\alpha(2C_k)$ ; для этих областей свободная граница — это объединение двух свободных эллиптических ребер.

При этом области, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

Все такие области изображены на рисунке 2.6.

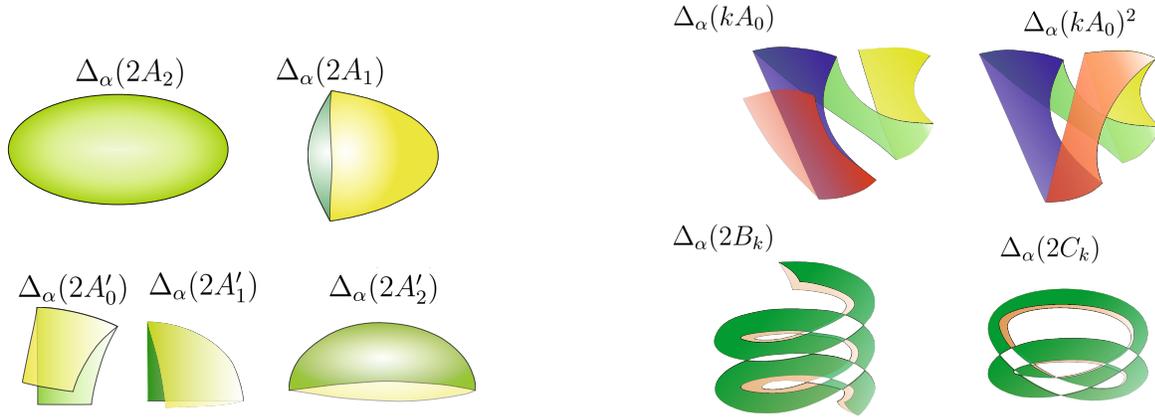


Рис. 2.6: Обобщенные области без конических точек, склеенные из элементарных областей одинаковых типов.

*Доказательство.* Пусть  $\Delta$  – обобщенная область, склеенная из элементарных областей  $\Omega$ , принадлежащих к одному классу эквивалентности.

Пусть  $\Omega$  принадлежит первой серии элементарных областей (серия  $A$ ) и при этом не эквивалентна  $A_0$ . В такой области  $\Omega$  есть лишь один эллиптический сегмент. В результате все обобщенные области  $\Delta$ , которые получаются из этой элементарной области приклейкой таких же элементарных областей  $\Omega$ , целиком принадлежат первой серии (“удвоенные области”).

Пусть  $\Omega$  эквивалентна  $A_0$ . У области  $A_0$  есть два строго выпуклых сегмента. Последовательные склейки вдоль этих сегментов приводят к склейке либо в длинную полосу  $kA_0$ , гомеоморфную диску (“гиперболическая лента”), либо в кольцо, если можно склеить две свободные эллиптические границы области  $\Delta_\alpha(kA_0)$  (“гиперболическое кольцо”). Отметим, что в последнем случае склейка возможна только в том случае, если свободные эллиптические сегменты либо совпадают, либо получаются отражением относительно фокальной прямой (при этом предполагается, что фиксированы такие изометричные вложения в плоскость всех элементарных областей, из которых склеена “лента”  $\Delta_\alpha(kA_0)$ , что склеиваемые эллиптические сегменты соседних элементарных областей совпадают).

Пусть  $\Omega$  эквивалентна области-кольцу  $C_n$  либо области  $B_n$ . Все эллиптические граничные сегменты этой области отвечают софокусным эллипсам с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (предположим при этом, что  $\lambda_1 < \lambda_2$ ). Сегменты границы, вдоль которых может происходить склейка области  $\Omega$  (с другими элементарными областями  $\Omega$ ), принадлежащей серии элементарных областей  $B$ , при погружении в плоскость лежат на эллипсе с параметром  $\lambda_1$ . Так как склейка происходит вдоль всего сегмента границы, то получаемая область строится также как и “удвоенная”, в результате получаем область “эллиптическую ленту” (если  $\Omega$  эквивалентна области серии  $B$ ) или “эллиптическое кольцо” (если  $\Omega$  эквивалентна области серии  $C$ ).

□

**Классификация обобщенных областей без конических точек, склеенных из элементарных областей, принадлежащих различным классам эквивалентности.**

**Предложение 2.3.2.** Любая обобщённая область  $\Delta$ , склеенная из элементарных областей, принадлежащих различным классам эквивалентности и не содержащая конических точек, эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих серий:

- конечная серия областей, состоящая из четырех областей вида  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ , где  $\Omega_1$  содержит фокусы семейства (1.1) и эквивалентна  $A'_1, A'_2, A_1, A_2$ , а область  $\Omega_2$  не содержит фокусы семейства (1.1) и эквивалентна  $B'_1, B''_2, B_1, C_2$  соответственно;
- бесконечная серия областей, состоящая из двух подсерий областей вида  $\Delta_\alpha(kA_0 + B_0)$  и  $\Delta_\alpha(kA_0 + A'_0)$ , где  $k > 0$ ,  
 которые получаются в результате склейки “гиперболической ленты” и одной из областей  $A'_0$  или  $B_0$  вдоль эллиптических сегментов; эти области гомеоморфны диску;
- бесконечная серия областей, состоящая из трех подсерий областей вида  $\Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + B_0)$ , где  $k \geq 0$ ,  
 $\Delta_\alpha(B_0 + kA_0 + B_0)$  и  $\Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + A'_0)$ ,  $k > 0$ ,  
 которые получаются в результате склейки “гиперболической ленты”, возможно пустой, и двух областей  $A'_0$  или  $B_0$ ; эти области гомеоморфны диску.

При этом области, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

Все такие области изображены на рисунке 2.7.

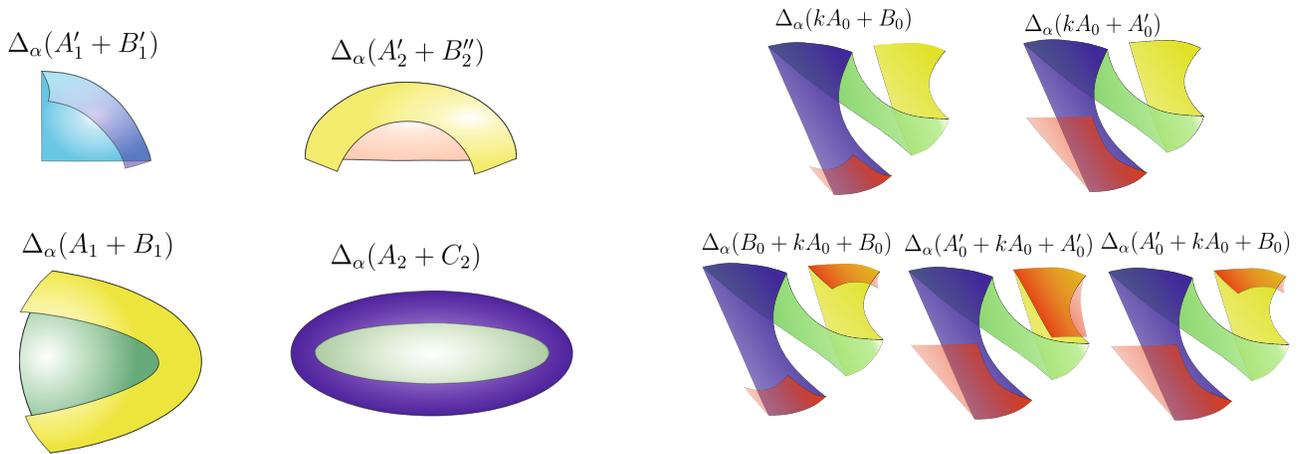


Рис. 2.7: Обобщенные области без конических точек, склеенные из элементарных областей различных типов.

*Доказательство.* Пусть обобщённая область  $\Delta$  склеена из элементарных областей более чем одного класса эквивалентности. Сразу заметим, что тогда в состав области  $\Delta$  не входят области бесконечных серий  $B_n$  и  $C_n$  при  $n > 2$ . Перечислим все ребра склейки, которые лежат на границе двух областей, принадлежащих различным классам эквивалентности (см. таблицу).

Описание сегмента	В границе каких областей содержится
дуга эллипса, не пересекающая ось абсцисс	$B_0, A_0, A'_0$
дуга эллипса, с концами на осях координат	$B'_1, A'_1$
дуга эллипса с концами на горизонтальном диаметре	$B''_2, A'_2$
дуга эллипса, содержащая одну точку горизонтального диаметра эллипса	$B_1, A_1$
эллипс	$C_2, A_2$

Заметим, что если в области  $\Delta$  происходит одна из склеек между парами элементарных областей  $B'_1$  и  $A'_1$ ,  $B''_2$  и  $A'_2$ ,  $B_1$  и  $A_1$ ,  $C_2$  и  $A_2$  то состав обобщенной области  $\Delta$  исчерпывается этими областями с указанной склейкой. Таким образом, остаётся рассмотреть области  $\Delta$ , в которых присутствует склейка вдоль малой дуги эллипса, лежащей целиком в верхней или нижней полуплоскости, т.е. области  $\Delta$ , склеенные из областей  $A_0, A'_0$  и  $B_0$ .

Пусть теперь область  $\Delta$  склеена из элементарных областей эквивалентных  $B_0, A_0$  и  $A'_0$ .

Заметим, что область  $A_0$  можно рассматривать как две области  $A'_0$ , склеенные вдоль горизонтального прямолинейного сегмента. Заменим все области  $A_0$  в составе области  $\Delta$  на пару областей  $A'_0$ . Таким образом, все склейки в  $\Delta$  являются последовательными склейками между областями, эквивалентными  $B_0$  и  $A'_0$ . Однако, если произошла склейка между областью  $B_0$  и  $A'_0$ , то к полученной обобщенной области больше уже нельзя ничего приклеить, т.к. один из её эллиптических сегментов невыпуклый, а второй горизонтальный. Получаем, что любая область  $\Delta$ , состоящая из элементарных областей  $A_0, A'_0$  и  $B_0$  может быть построена по следующей схеме: к области “гиперболической ленте”, состоящей из  $k$  экземпляров  $A_0$  вдоль двух свободных эллиптических границ приклеиваются области  $B_0$  и  $A'_0$ . Получаем пять случаев, описанных во второй и третьей сериях.  $\square$

### 2.3.5 Классификация обобщенных областей, содержащих конические точки.

**Классификация обобщенных областей с коническими точками, склеенных из элементарных областей одного класса эквивалентности.**

**Предложение 2.3.3.** *Любая обобщённая область  $\Delta$ , склеенная из элементарных областей, принадлежащих одному классу эквивалентности, и содержащая конических точек, эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих серий:*

- *конечная серия областей, состоящая из обобщённых областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $A'_1$ , а именно, три области с непустой свободной границей, склеенные из двух экземпляров  $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$ ,  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ ,  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$  и две области без свободной границы  $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$  и  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$ ;*
- *конечная серия областей, состоящая из обобщённых областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $A'_0$ , а именно, три области, склеенные из двух экземпляров*

$\Delta_\beta(A'_0)_c$ ,  $\Delta_\beta(A'_0)_y$ ,  $\Delta_\beta(A'_0)_{cy}$  и две области  $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + (A'_0)_c^2)$ ,  $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2A'_0)$ , склеенные из четырех экземпляров области  $A'_0$ ;

- обобщённая область без свободной границы  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}$ , склеенная из двух экземпляров  $A'_2$  путём склейки вдоль всех границ;
- обобщённая область без свободной границы  $\Delta_\beta(A_1)_{2y}$ , склеенная из двух экземпляров  $A_1$  путём склейки вдоль всех границ;
- бесконечная серия областей, состоящая из обобщённых областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $A_0$ , а именно, область, склеенная из двух экземпляров  $\Delta_\beta(A_0)_{2y}$  и две бесконечных подсерии областей  $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0)$  и  $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + (A_0)_y^2)$ ;
- бесконечная серия областей, состоящая из обобщённых областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $B_k$ , а именно, две серии областей  $\Delta_\beta(B_k)_y^2$  и  $\Delta_\beta(B_k)_{2y}^2$ ;
- бесконечная серия областей, состоящая из обобщённых областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $B'_k$ , а именно, три бесконечных подсерии областей  $\Delta_\beta(B'_k)_{yx}^2$ ,  $\Delta_\beta(B'_k)_y^2$  и  $\Delta_\beta(B'_k)_x^2$ ;
- бесконечная серия областей, состоящая из обобщённых областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $B''_k$ , а именно, две подсерии областей  $\Delta_\beta(B''_k)_x^2$  и  $\Delta_\beta(B''_k)_{2x}^2$ .

При этом области, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

Примеры обобщённых областей с коническими точками, склеенных из областей серии  $B$  изображены на рисунке 2.8.

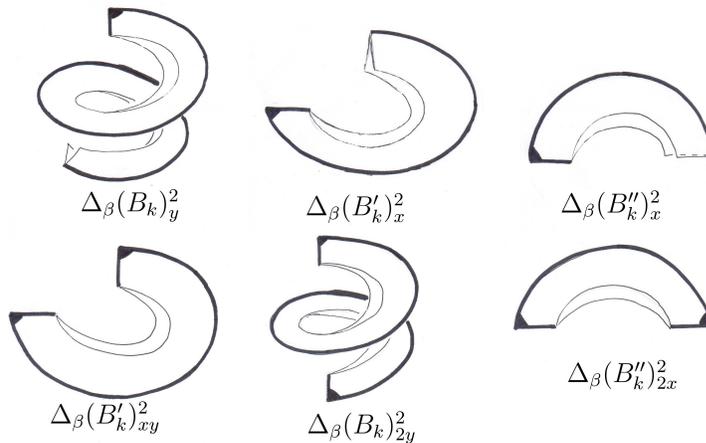


Рис. 2.8: Примеры обобщённых областей с коническими точками, склеенных из областей-лент серии  $B$ . На рисунке жирным выделены ребра склейки и окрестности конических точек.

*Доказательство.* Рассмотрим обобщённую область  $\Delta$ , которая склеена из нескольких экземпляров элементарной области  $\Omega$ .

Сразу заметим, что в этом случае элементарная область  $\Omega$  не может быть эквивалентна областям без углов – это области  $A_2$  (ограничена эллипсом) и области серии  $C$  (бесконечная серия неодносвязных элементарных областей).

Разобьём все остальные элементарные области на классы по количеству углов.

Для областей  $A_1$  и  $A'_2$  существует единственный вариант склейки в область с коническими точками так как эти области содержат всего два граничных сегмента и при склейке происходит образование сразу двух конических точек.

Пусть обобщённая область  $\Delta$ , содержащая конические точки, склеена из элементарных областей, эквивалентных  $A'_1$ . Элементарная область  $A'_1$  имеет три угла. Один из них обязан образовывать коническую точку. Зафиксируем угол, лежащий на оси  $Oy$ . Склеим пару областей  $A'_1$  вдоль дуги эллипса и вертикального сегмента. Если склеить полученную область вдоль горизонтального сегмента, то получим область, принадлежащую первой серии. Иначе, получим область  $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$ . Аналогично, если фиксировать угол, лежащий на оси  $Ox$ , то получим область  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ . Осталось рассмотреть случай, когда конической точкой будет точка в начале координат. Тогда у полученной области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$  существует два строго выпуклых сегмента. При склейке вдоль них двух экземпляров  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$  получаем область  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$  без границы (т.е. к ней уже ничего приклеить нельзя).

Рассмотрим обобщённые области с коническими точками, склеенные из элементарных областей  $A'_0$ . Коническая точка может быть образована склейкой пары экземпляров одного из двух углов этой области – центрального и лежащего на оси  $Oy$ . Если присутствуют оба – то область эквивалентна  $\Delta_\beta(A'_0)_{cy}^2$ . Рассмотрим область  $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$  склеенную из пары областей  $A'_0$  с конической точкой типа  $y$ . К этой области нельзя приклеить ни одного экземпляра  $A'_0$ , так как остались лишь прямолинейные и невыпуклые сегменты. В области  $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$  есть два эллиптических сегмента, которые могут быть ребрами склейки при добавлении либо пары областей  $\Delta_\alpha(2A'_0)$  (тогда в полученной области будет по прежнему одна коническая точка), либо второго экземпляра  $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$  (полученная область будет содержать уже две конические точки).

Обобщённые области, состоящие из элементарных областей серии  $B$ , в качестве одной из склеек обязательно содержат склейку вдоль выпуклого эллиптического сегмента. В этом случае, обобщённые области с коническими точками естественно делятся на два типа – по количеству конических точек. Заметим, что эти конические точки имеют тип  $y$ , если область  $B$  эквивалентна  $B_k$ , типы  $c$  и  $y$ , если область  $B$  эквивалентна области  $B'_k$  и типы  $c$ , если область  $B$  эквивалентна  $B''_k$ .

Пусть обобщённая область  $\Delta$ , содержащая конические точки, состоит из элементарных областей, эквивалентных  $A_0$ . Обобщённая область  $\Delta_\beta(A_0)_y^2$ , склеенная с образованием одной конической точки, имеет в качестве возможного сегмента дальнейшей склейки пару выпуклых эллиптических сегментов. Если их склеить друг с другом, то полученная область будет содержать две конических точки. Если оставить эти сегменты не склеенными, то к области  $\Delta_\beta(A_0)_y^2$  можно приклеить обобщённую область  $\Delta_\alpha(2A_0)$ . Полученная в результате описанной склейки область опять будет иметь два эллиптических сегмента в составе свободной границы, вследствие чего эту процедуру можно повторить многократно. Вторым вариантом склейки является приклейка вдоль двух эллиптических сегментов ещё одного экземпляра области  $\Delta_\beta(A_0)_y^2$ . Таким образом, получаем две последних серии, различающихся количеством конических точек.

□

**Классификация областей, содержащих конические точки, состоящих из областей, принадлежащих различным классам эквивалентности**

**Предложение 2.3.4.** *Любая обобщённая область  $\Delta$ , склеенная из элементарных областей различных классов эквивалентности и содержащая конические точки, эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих серий:*

- обобщённая область  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$ ;
- бесконечная серия областей  $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0)$ ;
- бесконечная серия областей с одной конической точкой, а именно, четыре подсерии вида  $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0 + 2B_0)$ ,  $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + 2B_0)$ ,  $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0 + 2A'_0)$  и  $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + 2A'_0)$  получающиеся приклеивкой к двойной гиперболической ленте из  $2k$  экземпляров  $A_0$  обобщённой области ( $\Delta_\beta(A_0)_y^2$  или  $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$ ) с конической точкой с одного конца и пары элементарных областей с другого конца (области  $\Delta_\alpha(2B_0)$  или области  $\Delta_\alpha(2A'_0)$ );
- бесконечная серия областей с двумя коническими точками, а именно, две подсерии вида  $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2kA_0 + (A'_0)_c^2)$  и  $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + (A'_0)_c^2)$  получающиеся приклеивкой к двойной гиперболической ленте из  $2k$  экземпляров  $A_0$  обобщённой области с конической точкой с обоих концов ( $\Delta_\beta(A_0)_y^2$  или  $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$ ).

*При этом области, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.*

*Доказательство.* Для начала заметим следующий факт – любая элементарная область однозначно определена, если известна пара дуг границы, сходящихся в некоторой вершине излома границы области. Таким образом, если обобщённая область  $\Delta$  содержит конические точки, то в качестве подобласти она содержит одну из областей, описанных в утверждении 2.3.3 – обобщённых областей, состоящих из элементарных областей одного класса эквивалентности. Поэтому для того чтобы описать произвольную обобщённую область  $\Delta$ , склеенную из элементарных областей различных классов эквивалентности, необходимо описать возможные склейки подобласти  $\tilde{\Delta}$ , склеенной из областей одного класса эквивалентности  $\Omega$ , с различными элементарными областями. Напомним, что по определению приклеивка новых элементарных областей возможна лишь вдоль эллиптических сегментов.

Таким образом, область  $\tilde{\Delta}$  должна иметь свободную границу, причем в её составе обязательно должны находиться выпуклые эллиптически сегменты (т.к. иначе никаких элементарных областей к этой обобщённой области приклеить уже нельзя).

Пусть  $\Omega$  эквивалентна  $A'_1$ . В этом случае возможной областью для склейки (см. таблицу сегментов из доказательства утверждения 2.3.2) является область  $B'_1$ , в качестве области  $\tilde{\Delta}$  подходит только область  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ , в результате получится область  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$ .

Пусть  $\Omega$  эквивалентна  $A_0$  или  $A'_0$ . Соответствующие им обобщённые области  $\tilde{\Delta}$  эквивалентны  $\Delta_\beta(A_0)_y^2$  или  $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$ . К этим обобщённым областям можно приклеить либо пару областей  $A_0$ , либо пару областей  $B_0$  (пара областей склеена вдоль выпуклого гиперболического или вертикального сегмента). При добавлении пары областей, эквивалентных  $A_0$  к области  $\tilde{\Delta}$  у новой области остаётся свободной такая же пара эллиптических сегментов границы, таким образом, склейку можно повторить. В результате, область  $\Delta$  можно представить как склеенную из трёх

кусков – область  $\Delta_\beta(A_0)_y^2$  или  $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$ ,  $k$  пар областей  $A_0$  (возможно,  $k = 0$ ) и области  $\Delta'$ , которая склеена из пары элементарных областей так, чтобы в часть свободной границы входили выпуклые дуги двух эллипсов. По классификации выше, получаем, что область  $\Delta'$ , не содержащая конических точек, эквивалентна либо паре областей  $B_0$  либо паре областей  $A'_0$ , склеенных вдоль выпуклого гиперболического или вертикального сегмента. В этом случае в полученной области  $\Delta$  существует только одна коническая точка. Область  $\Delta'$ , содержащая конические точки, эквивалентна либо области  $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$  либо области  $\Delta_\beta(A_0)_y^2$ . Тогда область  $\Delta$  будет иметь две конические точки.

На этом список допустимых обобщенных областей  $\tilde{\Delta}$ , как легко видеть, исчерпан. Следовательно, утверждение полностью доказано. □

**Следствие 2.3.5.** *Любая обобщенная область содержит не более трех конических точек, причем все случаи реализуются.*

# Глава 3

## Топология изоэнергетического многообразия.

В дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  бильярда в некоторой области это поверхность уровня функции  $|v| = 1$  в многообразии  $M^4$ .

### 3.1 Классификация изоэнергетических 3-поверхностей бильярдов в компактной области без конических точек.

#### 3.1.1 Бильiardная область гомеоморфна кольцу.

**Предложение 3.1.1.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  бильярда в любой плоской области  $\Omega$ , ограниченной двумя гладкими кривыми, гомеоморфна прямому произведению  $S^1 \times S^2$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим естественную проекцию  $h : Q^3 \rightarrow \Omega$  изоэнергетической 3-поверхности на бильiardную область.

Пусть плоская область  $\Omega$  ограничена двумя гладкими кривыми  $l_1$  и  $l_2$ . Очевидно, что между кривыми  $l_1$  и  $l_2$  существует гладкая гомотопия  $\phi$ , следовательно, область между ними заполнить непересекающимися кривыми вида  $\phi(x, t), t \in [0; 1]$  – здесь  $\phi(x, t)$  это точка кривой  $l_1$  при  $t = 0$  и кривой  $l_2$  при  $t = 1$ . При  $0 < t < 1$  точка  $\phi(x, t)$  может быть оснащена целой окружностью векторов скорости, поэтому прообраз  $h^{-1}(\phi(x, t)), t \in (0, 1)$  в  $Q^3$  гомеоморфен открытому цилиндру. Если точка  $\phi(x, t)$  лежит на кривых  $l_1$  и  $l_2$ , т.е. при  $t = 0$  и  $t = 1$  то, вследствие закона отражения, она может быть оснащена векторами скорости, множество которых в этой точке гомеоморфно отрезку. Поэтому прообраз любой кривой  $\phi(x, t), x \in l, t \in [0; 1]$ , оснащенный векторами скорости, гомеоморфен цилиндру, у которого две граничные окружности заклеены в отрезки, т.е. двумерной сфере  $S^2$ . Так как кривые  $l_1$  и  $l_2$  гомеоморфны окружности  $S^1$ , то многообразиие  $Q^3$  будет гомеоморфно прямому произведению  $S^1 \times S^2$ . Предложение доказано.  $\square$

**Следствие 3.1.2.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  бильярда в областях-кольцах  $C_k, \Delta_\alpha(2C_k,)$   $\Delta_\alpha(kA_0)^2$  прямому произведению  $S^1 \times S^2$ .*

*Доказательство.* Это утверждение может быть доказано аналогично доказательству утверждения 3.1.1. Кривые  $l_1$  и  $l_2$ , ограничивающие такую область, состоят из  $k$  дуг, лежащих на некотором (фиксированном) эллипсе (в случае областей  $C_k$  и  $\Delta_\alpha(2C_k)$ ) или некоторой (фиксированной) дуге (фиксированной) гиперболы (в случае области  $\Delta_\alpha(kA_0)^2$ ). Обозначим параметр

квадрики, на которой лежат дуги кривой  $l_i$ , через  $\lambda_i$ . Для области  $\Delta_\alpha(2C_k)$  обозначим через  $\tilde{\lambda}$  параметр  $\lambda$  на котором лежит эллиптический сегмент склейки. В качестве гомотопии  $\phi$  можно взять непрерывное изменение параметра  $\lambda$  софокусного семейства, для области  $C_k$  непрерывно меняющегося от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ , для области  $\Delta_\alpha(2C_k)$  непрерывно возрастающего от  $\lambda_1$  до  $\tilde{\lambda}$  и непрерывно убывающего от  $\tilde{\lambda}$  до  $\lambda_2$ , для области  $\Delta_\alpha(kA_0)^2$  непрерывно меняющегося от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ , в случае, если части дуг кривых  $l_1$  и  $l_2$  лежат по одну сторону от кривой  $Oy$ , и непрерывно возрастающего от  $\lambda_1$  до  $a$  и непрерывно убывающего от  $a$  до  $\lambda_2$ , в случае, если части дуг кривых  $l_1$  и  $l_2$  лежат по различные стороны от кривой  $Oy$ . Очевидно, что при этом изменении дуга  $l_\lambda$  заметает всю область. Далее доказательство можно повторить.  $\square$

### 3.1.2 Биллиардная область гомеоморфна диску или сфере.

В статье Е.Гуткина [38] упомянут следующий факт – если плоская односвязная область  $\Omega$  ограничена некоторой гладкой кривой, то изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  биллиардной системы, определённой на такой области гомеоморфно трёхмерной сфере  $S^3$ . Ниже мы доказываем это факт, а также обобщаем его на случай локально-плоской односвязной области.

**Предложение 3.1.3.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  биллиарда в любой плоской односвязной области  $\Omega$ , ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой, углы излома которой составляют  $\frac{\pi}{2}$ , гомеоморфна сфере  $S^3$ .*

*Доказательство.* Докажем утверждение в случае, когда кривая  $\gamma$ , ограничивающая область  $\Omega$ , является гладкой. Рассмотрим естественную проекцию  $h : Q^3 \rightarrow \Omega$ . Разрежем многообразие  $Q^3$  на два куска следующим образом. Рассмотрим гладкую связную несамопересекающуюся кривую  $l$  строго внутри области  $\Omega$ . Очевидно, что такая кривая гомотопна кривой  $\gamma$ . Прообраз  $h^{-1}(l)$  кривой  $l$  в 3-поверхности  $Q^3$  гомеоморфен тору. Разрежем изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  по этому тору. Оно распадётся на два куска. Докажем, что каждый из них гомеоморфен полноторию.

“Внешний” кусок многообразия  $Q^3$  образован прообразами точек, расположенными между кривыми  $l$  и  $\gamma$ . Напомним, что между кривыми  $l$  и  $\gamma$  существует гомотопия  $\phi$ , следовательно, область между ними заполнить непересекающимися кривыми вида  $\phi(x, t)$ ,  $x \in l, t \in [0; 1]$ . При  $0 \leq t < 1$  точка  $\phi(x, t)$  может быть оснащена целой окружностью векторов скорости, поэтому прообразом всех таких точек в изоэнергетическом многообразии  $Q^3$  будет цилиндр. При  $t = 1$ , т.е. когда точка  $\phi(x, t)$  лежит на границе области  $\Omega$  она может быть оснащена только отрезком точек, вследствие закона отражения. Поэтому прообразом любой кривой  $\phi(x, t)$ ,  $x \in l, t \in [0; 1]$  будет диск. Таким образом, “внешний” кусок многообразия  $Q^3$  гомеоморфен полноторию, образованному прямым произведением кривой  $l$  и прообраза одной из гомотопных друг другу кривых  $\phi(x, t)$ ,  $x \in l, t \in [0; 1]$ . В качестве стягивающегося цикла может быть выбрана прообраз точки некоторой фиксированной кривой  $\phi(x, t)$ ,  $x \in l, t \in [0; 1]$ . На границе полнотория этот цикл будет соответствовать некоторой точке кривой  $l$ , оснащённой единичными векторами скорости. При этом сама кривая  $l$ , оснащённая в каждой точке некоторым вектором (например, вектором  $(1, 0)$ ), будет являться осью этого полнотория.

“Внутренний” кусок многообразия  $Q^3$  образован прообразами точек, расположенными внутри кривой  $l$ . Его можно описать следующим образом – каждую точку области  $\Omega$ , расположенную внутри кривой  $l$  можно оснастить окружностью точек. Так как область внутри  $l$ , очевидно,

связна, то “внутренний” кусок многообразия  $Q^3$  гомеоморфен прямому произведению диска (области внутри кривой  $l$ ) на окружность единичных векторов скорости. При этом стягивающимся циклом является сама кривая  $l$ , будучи оснащенной в каждой точке вектором скорости  $(1, 0)$ . Единичная окружность векторов, которым оснащена произвольная точка кривой  $l$ , очевидно, не может быть стянута по “внутреннему” куску многообразия  $Q^3$ .

Таким образом, склейка на граничном торе  $T^2$  склеивает исчезающий цикл одного полнотория с осью другого полнотория. Результатом этой склейки, как хорошо известно, является многообразие, гомеоморфное  $S^3$ .

Пусть теперь кривая  $\gamma$  не гладкая, а имеет  $n$  углов  $A_i = \frac{\pi}{2}$ ,  $i \in \{1..n\}$ . Фиксируем некоторое достаточно малое  $\varepsilon > 0$ . Гладко аппроксимируем кусочно-гладкую кривую  $\gamma$  гладкой кривой  $\tilde{\gamma}$  такой что, кривая она совпадает с кривой  $\gamma$  всюду, кроме  $\varepsilon$ -окрестностей углов  $A_i$  кривой  $\gamma$ . Плоскую область, ограниченную кривой  $\tilde{\gamma}$  обозначим через  $\tilde{\Omega}$ . Изоэнергетическая поверхность  $\tilde{Q}^3$  для бильярда в области, ограниченной кривой  $\tilde{\gamma}$  гомеоморфна, как уже было доказано,  $S^3$ . Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность угла  $A_i$  кривой  $\gamma$ . Граница этой  $\varepsilon$  окрестности – это кривая  $m_i$ , концы которой лежат на различных сторонах угла  $A_i$ . Кривая  $m_i$  лежит как в области  $\Omega$ , так и в области  $\tilde{\Omega}$ . Прообраз кривой  $m_i$  при отображении  $h$  в изоэнергетических многообразиях  $Q^3$  и  $\tilde{Q}^3$  гомеоморфна сфере, а прообраз части области  $\tilde{\Omega}$ , находящейся по ту же сторону от кривой  $m_i$ , что и угол  $A_i$  области  $\Omega$ , гомеоморфен трехмерному диску.

Рассмотрим прообраз части области  $\Omega$ , ограниченной кривой  $m_i$  и содержащей угол  $A_i$ . Обозначим часть области  $\Omega$ , ограниченную кривой  $m_i$  и содержащей угол, через  $\Omega_{A_i}$ . Докажем, что этот прообраз гомеоморфен трехмерному диску. Рассмотрим стягивание  $f_{A_i}(m_i, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $f_{A_i}(m_i, 0) = m_i$  кривой  $m_i$  в вершину угла  $A_i$ . Причем в любой момент времени  $t < 1$  концы кривой  $f_{A_i}(m_i, t)$  лежат на различных сторонах угла  $A_i$ . Тогда прообразы  $h^{-1}(f_{A_i}(m_i, t))$  гомеоморфны сферам, стягивающимся в отрезок – прообраз вершины угла при отображении  $h$ . Таким образом, весь прообраз  $h^{-1}(\Omega_{A_i})$  гомеоморфен диску.

Заменим в изоэнергетической поверхности  $\tilde{Q}^3$  все прообразы частей области  $\tilde{\Omega}$ , каждая из которых находится по ту же сторону от кривой  $m_i$ , что и угол  $A_i$  области  $\Omega$ , на трехмерные диски  $h^{-1}(\Omega_{A_i})$ . С одной стороны, такая замена не меняет топологию многообразия – трехмерной сферы  $S^3$ . С другой стороны, в результате было получено изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  бильярда в области  $\Omega$ .

Предложение доказано. □

**Замечание 9.** Заметим, что точки кривой  $\gamma$ , будучи оснащены единичными векторами скорости, будут гомеоморфны кольцу, только если кривая  $\gamma$  является гладкой. Пусть кривая  $\gamma$  имеет точку излома, образуя угол равный  $\frac{\pi}{2}$ . Локально окрестность точки излома  $A$  кривой  $\gamma$  состоит из двух подкривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Будем считать, что кривая  $\gamma_1$  расположена вертикально, а кривая  $\gamma_2$  горизонтально. Оснастим каждую точку этих кривых векторами скорости. При этом кривую  $\gamma_1$  оснастим векторами, направленными не левее касательной к кривой  $\gamma_1$ , а кривую  $\gamma_2$  векторами, направленными не ниже касательной к кривой  $\gamma_2$ . Остальные вектора, которыми могут быть оснащены кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , мы не принимаем во внимание вследствие закона отражения. В точке излома  $A$  происходит “двойное отражение”, а именно, точка может быть оснащена векторами, направленными не левее касательной в точке  $A$  к кривой  $\gamma_1$  и не ниже касательной к кривой  $\gamma_2$ . Таким образом, отрезок, лежащий в прообразе любой неугловой точки кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  “складывается пополам”. Однако, как легко понять, сам прообраз точек кривой  $\gamma$  гомотопически эквивалентен окружности, которая получается в результате стягивания любого отрезка в прообразе каждой точки.

**Замечание 10.** Несложно убедиться в том, что фундаментальная группа изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для бильярда в плоской области  $\Omega$ , ограниченной кусочно-гладкой кривой, тривиальна. Элементы фундаментальной группы это петли в области  $\Omega$ , оснащенные векторным полем. Понятно, что любая петля в области  $\Omega$  является стягиваемой и может быть продеформирована в окружность. Препятствием для стягивания оснащенной векторами окружности является индекс векторного поля вдоль неё. Однако наличие бильярдного закона на границе позволяет “занулить” этот индекс (см. рис. 3.1).

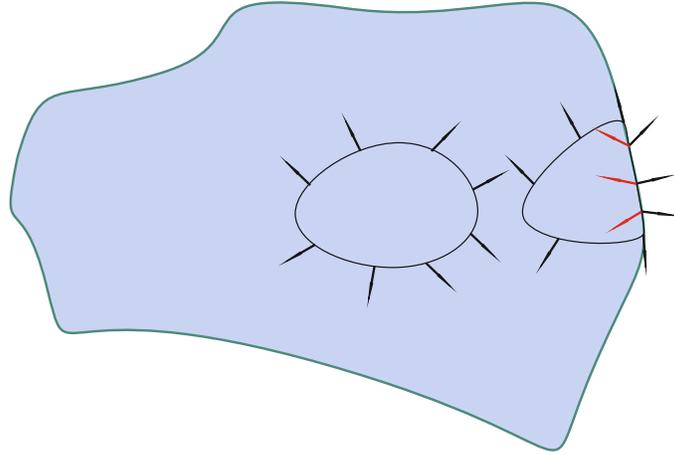


Рис. 3.1: На рисунке видно, как окружность с векторным полем, имеющим индекс 1 может быть продеформирована в окружность с нулевым индексом векторного поля. При вытягивании части области на границу мы можем заменить вектора (черные) на им эквивалентные (красные) воспользовавшись бильярдным законом. Очевидно, что индекс векторного поля вдоль окружности, оснащенной красными векторами на границе области и черными внутри будет нулевой.

**Следствие 3.1.4.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  бильярда в обобщенной области  $\Omega$  в односвязной области без конических точек гомеоморфна  $S^3$ .*

*Доказательство.* Пусть даны две односвязные элементарные области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , склеивающиеся по общему эллиптическому сегменту границы  $l$ , который является дугой эллипса т.е. гомеоморфен отрезку. Изоэнергетические поверхности  $Q^3$  для бильярда в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  по предыдущему предложению 3.1.3 гомеоморфны сферам  $S^3$ . Переход к обобщенному бильярду в обобщенной области, полученной склейкой областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  вдоль сегмента границы  $l$ , задаёт на изоэнергетических многообразиях  $Q^3$  для бильярда в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  следующие преобразования.

В начале необходимо сделать разрез вдоль точек, проекции которых при отображении  $Q^3$  на область  $\Omega_i$  переходят в эллиптический сегмент  $l$ . Так как сегмент  $l$  гомеоморфен отрезку, то до разреза все точки, оснащенные векторами скорости (склеенные по бильярдному закону), будут гомеоморфны диску, а после разреза (после отмены бильярдного закона) – двумерной сфере  $S^2$ , так как внутренние точки отрезка оснащаются окружностью векторов скорости, а концевые точки – по прежнему лишь отрезком векторов. Склейка, которую задаёт обобщенный

бильярдный закон, склеивает два разрезанных  $Q^3$  по этим сферам разреза, в результате чего получается прямая сумма  $S^3 \# S^3$ , как известно, гомеоморфная  $Q^3$ .

Для случая бильярда в области  $\Delta_\alpha(A_2 + C_2)$  можно провести аналогичное доказательство, рассмотрев область  $\Delta_\alpha(A_2 + C_2)$  как результат склейки двух областей  $\Delta_\alpha(A'_2 + B''_2)$ , где в качестве отрезка  $l$  будет выступать горизонтальный отрезок, состоящий из двух граничных сегментов области  $B''_2$  и граничного сегмента области  $A'_2$ . □

**Следствие 3.1.5.** *Изоэнергетические поверхности бильярдного движения в областях  $\Omega$  и  $\Omega + \Omega'$  гомеоморфны, если область  $\Omega'$  односвязна и приклейка её к области  $\Omega$  происходит без образования конических точек вдоль граничного сегмента, гомеоморфного отрезку.*

## 3.2 Классификация изоэнергетических многообразий для бильярдов в компактной области, содержащей конические точки.

### 3.2.1 Бильярдная область гомеоморфна диску.

Бильярдная область содержит одну коническую точку.

**Предложение 3.2.1.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  бильярда в обобщённой области  $\Omega$  с одной конической точкой гомеоморфна  $\mathbb{R}P^3$ .*

*Доказательство.* Из классификации обобщенных областей следует, что бильярдная область с одной конической точкой гомеоморфна диску. Докажем утверждение для области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ . Данная область эквивалентна области, полученной склейкой двух одинаковых областей  $A'_1$ , каждая из которых является четвертинкой области  $A_2$ , ограниченной эллипсом. Склейка происходит вдоль отрезков границы, лежащих на осях  $Ox$  и  $Oy$ , которые делят область  $A_2$  на четыре части. В результате образуется одна коническая точка типа  $c$ .

Рассмотрим изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  бильярда в области  $A_2$ , гомеоморфное трёхмерной сфере  $S^3$  согласно предложению 3.1.2. Запишем координаты каждой точки этой сферы как  $(x, y, v, w)$ , где  $(x, y)$  – координаты материальной точки,  $(v, w)$  – координаты её вектора скорости. Определим на этом множестве склейку противоположных точек – склеим  $(x, y, v, w)$  и  $(-x, -y, -v, -w)$ . Результатом будет, очевидно,  $\mathbb{R}P^3$ . Покажем, что с другой стороны, в результате этой склейки получится изоэнергетическое многообразие бильярда в обобщённой области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ . Для этого рассмотрим точки, расположенные не ниже оси  $Ox$ . У каждой точки, расположенной строго выше оси уже есть дубликат – точка, расположенная ниже, поэтому точки ниже оси  $Ox$  можно не рассматривать. Осталось склеить точки, расположенные строго на оси  $Ox$ . Каждая точка вида  $(x, 0, v, w)$  склеивается с точкой вида  $(-x, 0, -v, -w)$ . Отразим левую половину точек направо относительно оси  $Oy$ . Тогда точка  $(-x, 0, -v, -w)$  перейдёт в точку  $(x, 0, v, -w)$ . Но склейка точек  $(x, 0, v, w)$  и  $(x, 0, v, -w)$  это именно та склейка на ребре излома, которую мы определяли для обобщенного бильярдного движения. В результате такой склейки получается изоэнергетическое многообразие бильярдной системы в обобщённой области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ . Утверждение доказано. □

**Замечание 11.** Заметим, что фундаментальная группа многообразия  $\mathbb{R}P^3$  нетривиальна. Возникает естественный вопрос – как выглядит образующая фундаментальной группы  $\mathbb{Z}_2$  изоэнергетической поверхности бильярда в обобщенной области с одной конической точкой? Такая область, согласно классификации, гомеоморфна диску. Рассмотрим граничную окружность этого диска и оснастим её касательными векторами скорости. В случае, когда граница не гладкая, оснащение можно дополнить, добавив вектора, которым оснащены углы области. Такая оснащенная окружность будет гомеоморфна некоторой нестягиваемой петле в  $Q^3$ . Попробовав стянуть это петлю через коническую точку мы натолкнёмся на препятствие. Однако, если взять эту петлю дважды, то можно показать, что её уже можно стянуть. В самом деле, такая петля гомотопически эквивалентна оснащенной кривой, оснащенной касательными векторами скорости, один конец которой находится в конической точке, а другой – на границе области, причем можно считать, что эта кривая перпендикулярна границе. Заметим, что такая кривая в  $Q^3$  гомотопически эквивалентна двум обходам конической точки – соответствующим двум направлениям вдоль граничной окружности области  $\Omega$ . Таким образом, взяв кривую дважды, мы сможем “снять” её с конической точки и получить кривую в области  $\Omega$ , которая ограничивает область без конической точки, и оснащенную касательными векторами скорости. Воспользовавшись законом отражения на границе, мы можем обратить часть касательных векторов и занулить индекс векторного поля на этой кривой (см. рис. 3.1). Это приведёт к тому, что кривая стянется в точку в многообразии  $Q^3$ .

**Бильярдная область содержит две конических точки.**

**Предложение 3.2.2.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  для бильярда в обобщённой области  $\Omega$ , гомеоморфной диску и содержащей две конические точки, гомеоморфна связной сумме  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ .*

*Доказательство.* Докажем это утверждение для обобщённой области  $\Delta_\beta(A_0)_{2y}^2$ . Эта бильярдная область может быть получена в результате склейки двух обобщенных областей  $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$  с одной конической точкой вдоль участка границы, расположенного на оси  $Ox$ . Рассмотрим в изоэнергетическом многообразии  $Q^3$  бильярдной системы в области  $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$  точки, расположенные на оси  $Ox$ . Координаты этих точек могут быть записаны в виде  $(x, 0, v, w)$ , где без ограничения общности можно положить  $w \geq 0$ . При фиксированном  $w < 1$ , множество точек  $(x, 0, v, w)$  гомеоморфно окружности – на границе и на ребре излома, идущем по оси  $Oy$ , точки  $(x, 0, v, w)$  и  $(x, 0, -v, w)$  склеиваются по законам отражения, а во всех остальных точках  $(x, 0)$  определены два вектора скорости  $(\pm\sqrt{1-w^2}, w)$ . Множество точек  $(x, 0, 0, 1)$ , очевидно, образует отрезок (при этом  $w = 1$ ). Получаем, что концентрические окружности при  $w < 1$  стягиваются на отрезок  $w = 1$ , в результате получается двумерный диск  $D_+^2$ . Точки  $(x, 0, \pm 1, 0)$  соответствуют бильярдному движению вдоль оси  $Ox$  и образуют граничную окружность диска  $D_+^2$  (при этом  $w = 0$ ).

Разрежем изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  бильярда в области  $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$  по двумерному диску  $D_+^2$ , который образуют точки, расположенные на оси  $Ox$ . Для этого каждую точку  $(x, 0, v, w)$ , где  $w \geq 0$  надо дополнить точкой  $(x, 0, v, -w)$ . Все точки, для которых  $w \leq 0$ , также образуют диск, который обозначим через  $D_-^2$ . Будучи склеенными вдоль общей окружности  $w = 0$  эти диски образуют двумерную сферу  $S^2$ .

Сделаем аналогичную операцию с изоэнергетическим многообразием  $Q^3$  бильярда системы во втором экземпляре области  $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$ , расположенным для удобства, ниже оси  $Ox$ . Для того чтобы получить изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  бильярда в обобщённой области  $\Delta_\beta(A_0)_{2y}^2$

необходимо склеить разрезанные изоэнергетические многообразия  $Q^3$  для областей  $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$  вдоль полученных сфер разреза. Результатом будет, по определению, прямая сумма исходных многообразий  $Q^3$ , которые, по предыдущему утверждению, гомеоморфны  $\mathbb{R}P^3$ .

□

# Глава 4

## Лиувиллева классификация эллипτικο-гиперболических биллиардов.

### 4.1 Слоение Лиувилля: вычисление молекулы Фоменко.

#### 4.1.1 Особые и неособые уровни интеграла.

Допуская некоторую вольность речи, мы всюду далее будем говорить об элементарных областях как о подмножествах плоскости (подразумевая под этим образы простейших элементарных областей, из которых состоит рассматриваемая элементарная область, при их изометричных вложениях в плоскость, согласованных на общих граничных сегментах).

**Определение 4.1.1.** Фиксируем элементарную область  $\Omega$  и рассмотрим эллипτικο-гиперболический биллиард в ней. Граница области  $\Omega$  образована сегментами эллипсов и гипербол семейства (1.1). Рассмотрим те сегменты границы, которые лежат на невырожденных эллипсах и гиперболах и являются выпуклыми по отношению к области  $\Omega$ . Обозначим через  $\min_i$  и  $\max_j$  значения параметра  $\Lambda$ , на которых лежат соответственно выпуклые эллиптические и гиперболические сегменты границы области  $\Omega$ . Если область  $\Omega$  имеет непустое пересечение с прямой  $Oy$ , то дополним набор  $\max_j$  значением  $a$ .

Тогда назовем *особыми* следующие значения интеграла  $\Lambda$ :

- (локально) минимальные значения интеграла  $\Lambda = \min_i$ ,
- седловое значение интеграла  $\Lambda = b$ ,
- (локально) максимальные значения интеграла  $\Lambda = \max_j$ .

Все остальные значения интеграла  $\Lambda$  для области  $\Delta$  назовем *неособыми*.

Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла  $\Lambda$ .

Упорядочим особые значения интеграла  $\Lambda$ :  $0 \leq \min_1 \leq \min_2 \leq \dots \leq \min_n < b < \max_1 \leq \dots \leq \max_m \leq a$ , где через  $n$  и  $m$  обозначено количество (локально) минимальных и (локально) максимальных значений интеграла  $\Lambda$  соответственно. Заметим, что число  $n$  принимает значения 1 или 2 (например,  $n = 2$  для области, эквивалентной  $A_0$ ), а число  $m$  принимает значения 1, 2 или 3 (например,  $m = 3$  для области, эквивалентной  $B_2$ ).

При минимальном значении интеграла  $\Lambda = \min_i$ , каждому выпуклому эллиптическому сегменту границы области  $\Omega$ , лежащему на эллипсе с параметром  $\min_i$ , соответствуют траектории, которые представляют собой не кусочно-прямолинейные движения, а движения вдоль дуг эллипса с параметром  $\min_i$ . В многообразии  $Q^3$  эти траектории являются объединением нескольких окружностей (одной или двух). Так как эти сегменты являются выпуклыми, то других траекторий на этом уровне интеграла, отражающихся от частей границы, соответствующих значению интеграла  $\Lambda = \min_i$  нет. Все другие траектории (если они существуют), как будет показано далее, лежат на торах.

При седловом значении интеграла  $\Lambda = b$  траектории обладают следующим свойством: касательные к ним поочередно проходят через фокусы семейства (1.1) (фокус меняется при отражении траектории от границы области).

При максимальном значении интеграла  $\Lambda = \max_j < a$ , каждому выпуклому гиперболическому сегменту границы области  $\Omega$ , лежащему на гиперболе с параметром  $\max_j$ , соответствуют траектории, которые представляют собой не кусочно-прямолинейные движения, а движения вдоль дуг гиперболы с параметром  $\max_j$ . В многообразии  $Q^3$  эти траектории являются объединением нескольких окружностей. Все другие траектории (если они существуют), как будет показано далее, лежат на торах. При  $\Lambda = \max_j = a$  все траектории представляют собой вертикальные движения вдоль оси ординат. В многообразии  $Q^3$  эти траектории также являются объединением нескольких окружностей.

**Определение 4.1.2.** Траектории бильярдного движения в (элементарной) области  $\Omega$ , целиком лежащие на дугах квадрик с параметрами  $\min_i$  и  $\max_j$ , а также траектории, лежащие на седловом уровне интеграла  $\Lambda = b$  назовём *особыми*.

#### 4.1.2 Теорема Лиувилля для эллиптико-гиперболического бильярда: эллиптические значения интеграла.

Опишем неособые поверхности уровня интеграла  $\Lambda$  в изоэнергетическом многообразии  $Q^3$ , и покажем, что они гомеоморфны несвязному объединению нескольких торов.

**Предложение 4.1.1.** Для всех неособых значений  $\lambda < b$  поверхность уровня интеграла  $\Lambda = \lambda$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  динамической системы бильярда в элементарной области  $\Omega$  гомеоморфна объединению торов. Для значений  $\lambda = \min_i$  поверхность уровня интеграла состоит из нескольких особых траекторий и, быть может, пустого, объединения торов, на которых лежат траектории, не отражающиеся от выпуклого сегмента границы области  $\Omega$ , лежащего на эллипсе с параметром  $\min_i$ .

**Определение 4.1.3.** Торы, соответствующие уровням интеграла  $\lambda < b$  назовем *эллиптическими*, так как касательные к траекториям бильярда на этом уровне касаются эллипса семейства (1.1) с параметром  $\lambda$ .

*Доказательство.* Вырежем из элементарной области  $\Omega$  область, лежащую внутри интегрального эллипса (область, в которую не проектируются точки, лежащие на этом уровне интеграла), и обозначим результат через  $\tilde{\Omega}$ . Многообразие  $\tilde{\Omega}$  это в точности результат естественной проекции поверхности уровня интеграла  $\Lambda = \lambda$  на область  $\Omega$ . В состав  $\tilde{\Omega}$  входит несколько элементарных областей и, быть может, несколько дуг эллипсов в том случае, если  $\lambda = \min_i$  при некотором  $i$ . В дальнейших рассуждениях под  $\tilde{\Omega}$  мы будем подразумевать именно двумерную часть полученного многообразия, так как дугам эллипса соответствуют особые траектории-окружности.

Фиксируем некоторую связную часть  $\tilde{\Omega}_i$  и обозначим её через  $\tilde{\Omega}_i$ , где  $i$  это номер этой части.

В каждой внутренней точке  $x$  области  $\tilde{\Omega}_i$  определены четыре вектора скорости  $v_i$ ,  $i \in \{1..4\}$ , так, что  $(x, v_i)$  лежит на соответствующем уровне интеграла. Вектора скорости  $v_i$  будем различать по направлению обхода вокруг интегрального эллипса (по или против часовой стрелки) и по направлению к интегральному эллипсу или от него. Тогда обозначим экземпляры области, оснащенные векторами скорости следующим образом:  $(\tilde{\Omega}_i, v_1)$  – вектора скорости направлены по часовой стрелке к интегральному эллипсу,  $(\tilde{\Omega}_i, v_2)$  – вектора скорости направлены по часовой стрелке от интегрального эллипса,  $(\tilde{\Omega}_i, v_3)$  – вектора скорости направлены против часовой стрелки от интегрального эллипса,  $(\tilde{\Omega}_i, v_4)$  – вектора скорости направлены против часовой стрелки к интегральному эллипсу. Заметим, что согласно закону отражения на эллиптических сегментах границы склеиваются  $(\tilde{\Omega}_i, v_1)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_2)$  и  $(\tilde{\Omega}_i, v_3)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_4)$ , а на дугах гипербол и прямолинейных сегментах границы (отметим, что все прямолинейные сегменты лежат на дугах вырожденных гипербол)  $(\tilde{\Omega}_i, v_1)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_4)$  и  $(\tilde{\Omega}_i, v_2)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_3)$ . На интегральном эллипсе вектора  $v_1$  и  $v_2$ , а также  $v_3$  и  $v_4$  тождественно совпадают. Поэтому в тех случаях, когда  $\tilde{\Omega}_i$  представляет собой четырёхугольник (это верно для всех области, кроме  $A_2$  и области типа  $C$ ) уровень интеграла гомеоморфен четырём четырехугольникам, склеенным по соотношениям выше, и, как легко видеть, представляет собой тор. В случае областей  $A_2$  и областей типа  $C$  область  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_i$  не имеет на границе дуг гипербол и прямолинейных отрезков и разбивается на две компоненты связности – с векторами  $v_1$  и  $v_2$ , направленными по часовой стрелке, и векторами  $v_3$  и  $v_4$ , направленными против часовой стрелки. В результате торов будет два.  $\square$

### 4.1.3 Теорема Лиувилля для эллипτικο-гиперболического бильярда: гиперболические значения интеграла.

**Предложение 4.1.2.** *Для всех неособых значений  $b < \lambda$  поверхность уровня интеграла  $\Lambda = \lambda$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  динамической системы бильярда в элементарной области  $\Omega$  гомеоморфна объединению торов. Для значений  $\lambda = \max_j$  поверхность уровня интегралов состоит из нескольких особых траекторий и, быть может пустого, объединения торов, на которых лежат траектории, не отражающиеся от выпуклого сегмента границы области  $\Omega$ , лежащего на гиперболе с параметром  $\max_j$ .*

**Определение 4.1.4.** Торы, соответствующие уровням интеграла  $b < \lambda$  назовем *гиперболическими*, так как касательные к траекториям бильярда на этом уровне касаются ветвей гиперболы семейства (1.1) с параметром  $\lambda$ .

*Доказательство.* предложения 4.1.2 почти дословно повторяет доказательство утверждения 4.1.1.  $\square$

### 4.1.4 Особые уровни интеграла. Описание их окрестности в терминах атомов-бифуркаций.

**Предложение 4.1.3.** *Прообраз  $\Lambda^{-1}([b - \varepsilon, b + \varepsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы бильярда в элементарной области  $\Omega$  при достаточно малом значении  $\varepsilon > 0$  гомеоморфен следующим трёммерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трёхмерные):*

- атом  $B$  для областей  $A_2, A_0$ ;

- атом  $A^*$  для области  $A_1$ ;
- атом  $D_n$  для области  $C_n$ ;
- атом  $B_n$  для  $B_n, B'_{n+1}, B''_{n+2}$  где  $n > 0$ ;
- произведение тора на отрезок для областей  $A'_2, A'_1, A'_0, B_0, B'_1$  и  $B''_2$ .

*Доказательство.* Пусть элементарная область  $\Omega$  не содержит фокусов и все точки пересечения с фокальной прямой находятся между фокусами. Тогда эта область эквивалентна  $A_0$  или  $A'_0$ .

Рассмотрим интервал  $(f_1, f_2)$  фокальной прямой, расположенный между фокусами  $f_1$  и  $f_2$ . Пусть  $s = [s_1, s_2] \in (f_1, f_2)$  отрезок, такой что гипербола, принадлежащая софокусному семейству (1.1), и проходящая через точку  $x_0 \in s$ , имеет непустое пересечение с областью  $\Omega$ . Оснастим каждую точку  $x_0 \in s$  двумя единичными векторами скорости  $w$ , направленным горизонтально к правому и левому фокусам. Рассмотрим дугу  $h_\lambda$  гиперболы  $h_\lambda$  семейства (1.1), проходящую через эту точку. Зафиксируем вектор скорости в точке  $x_0 \in s$  и оснастим дугу гиперболы сонаправлено этому вектору. А именно, если этот вектор был направлен вправо, то оснастим точки гиперболы векторами  $v_1$  и  $v_2$  направленным соответственно к правому фокусу и от левого фокуса (такие гиперболы назовем “правыми”). Если же вектор был направлен влево, то оснастим гиперболу векторами  $v_3$  и  $v_4$ , направленными от правого фокуса и к левому фокусу соответственно (такие гиперболы назовем “левыми”). На граничных дугах эллипсов области  $\Omega$  по закону отражения имеем  $(x, v_1) \sim (x, v_2)$  (соответственно  $(x, v_3) \sim (x, v_4)$ ). Если же точка  $x_0 \in s$  лежит на гиперболическом сегменте границы области, то по закону отражения, она может быть оснащена одним вектором скорости (или двумя эквивалентными друг другу векторами). В этом случае, вектора, направленные вправо и влево, которыми оснащается гипербола  $h_\lambda$ , проходящая через такую точку  $x_0$  (в этом случае дуга гиперболы  $h_\lambda$  совпадает с сегментом границы области) склеиваются друг с другом по закону отражения:  $(x, v_1) \sim (x, v_4)$  и  $(x, v_2) \sim (x, v_3)$ . Таким образом “правые” дуги гиперболы склеиваются с “левыми” дугами. Следовательно, прообраз  $\Lambda^{-1}(b)$  представляет собой прямое произведение окружности (прообраз отрезка  $s$ ) на восьмёрку (случай области  $A_0$ ) или окружность (случай области  $A'_0$ ). Рассмотрим прообраз в  $Q^3$  каждой оснащенной “правой” или “левой” дуги гиперболы при  $\Lambda \in ([-\varepsilon + b, b + \varepsilon])$ . Тогда при  $\lambda < b$  концы дуг гипербол  $h_\lambda$ , лежащие в проекции уровня интеграла  $\Lambda$ , расположены на интегральном эллипсе. Вследствие закона отражения, каждая такая дуга гиперболы, оснащенная подходящими векторами скорости, будет гомеоморфна некоторой окружности в  $Q^3$ . При  $\lambda < b$  при оснащении дуги гиперболы векторами скорости (вправо или влево) получаем окружность. Таким образом, если оснащать каждую дугу гиперболы  $h_\lambda$ , лежащую в области  $\Omega$  векторами скорости, направленными вправо (или влево), так чтобы точки этой гиперболы лежали бы в прообразе  $\Lambda^{-1}([-\varepsilon + b, b + \varepsilon])$ , то все такие точки образуют плоский атом  $B$  в случае области  $A_0$  и произведение окружности на отрезок для области  $A'_0$ .

Пусть теперь элементарная область  $\Omega$  эквивалентна области  $C_n$ . Рассмотрим эллипсы, на которых лежат дуги границы области  $C_n$ . Обозначим параметры этих эллипсов через  $\lambda_1 < \lambda_2$ , а соответствующие эллиптические граничные сегменты через  $e_{\lambda_1}$  и  $e_{\lambda_2}$ . Рассмотрим непрерывную деформацию  $e_\lambda$  в классе квадрик семейства (1.1), переводящую сегмент  $e_{\lambda_1}$  в сегмент  $e_{\lambda_2}$ . При этом гомеоморфная окружности кривая  $e_\lambda$  целиком лежит на дугах эллипса с параметром  $\lambda$ . Рассмотрим оснащение каждой кривой  $e_\lambda$  векторами скорости. Пусть значение интеграла  $\Lambda = b$ . Тогда вектора, которыми может быть оснащена точка  $x$  кривой  $e_\lambda$ , направлены к фокусам или от них. Рассмотрим вектора, направленные от фокусов. Каждая точка кривой  $e_\lambda$ ,

лежащая на фокальной прямой, оснащается одним вектором скорости, а точка, не лежащая на фокальной прямой – двумя (к правому и левому фокусам соответственно). Близких векторов, таких что точки кривой  $e_\lambda$  лежат на уровне интеграла  $\Lambda \in [-\varepsilon + b, b + \varepsilon]$ , в каждой точке по прежнему будет два – при этом точки, лежащие на фокальной прямой либо не входят в проекцию интеграла  $\Lambda$  на область  $C_n$  (при  $\Lambda > b$ ) либо оснащаются двумя векторами скорости (при  $\Lambda < b$ ). На каждом уровне интеграла  $\Lambda > b$ , оснащенные точки кривой  $e_\lambda$  образуют  $n$  окружностей – по числу отрезков, на которые распадается эта дуга при вырезании из области  $C_n$  внутренности интегрального эллипса. На каждом уровне интеграла  $\Lambda < b$  оснащенные точки кривой  $e_\lambda$  образуют две окружности – одна окружность соответствует векторам, направленным от интегрального эллипса, а другая – векторам, направленным в интегральному эллипсу. Таким образом, точки кривой  $e_\lambda$ , оснащенные векторами  $v$ , направленными к фокусам, так что каждая пара (точка, вектор) принадлежит уровню интеграла  $\Lambda \in [-\varepsilon + b, b + \varepsilon]$ , образуют двумерный атом  $D_n$ , соответствующий перестройке двух окружностей ( $\Lambda < b$ ), в  $n$  окружностей ( $\Lambda > b$ ), причем на особом слое лежат  $n$  критических точек (точки, лежащие на фокальной прямой). Аналогично образуют атом  $D_n$  точки кривой  $e_\lambda$ , оснащенные векторами  $v$ , направленными от фокусов. При  $\lambda = \lambda_1$  и при  $\lambda = \lambda_2$  вследствие закона отражения происходит склейка векторов, направленных к фокусам и векторов, направленных от фокусов. В результате полный прообраз  $\Lambda^{-1}([-\varepsilon + b, b + \varepsilon])$  будет гомеоморфен трехмерному атому  $D_n$ .

Пусть теперь область  $\Omega$  эквивалентна области-ленте серии  $B$ . В этом случае в качестве заполняющих область кривых можно рассмотреть дуги кривых  $e_\lambda$ , рассмотренных выше. Таким образом получится, что точки  $x$  дуги кривой  $e_\lambda$ , оснащенные векторами  $v$ , направленными к фокусам, так что  $\Lambda(x, v) \in [-\varepsilon + b, b + \varepsilon]$ , образуют двумерный атом  $B_n$ , соответствующий перестройке одной окружности ( $\Lambda < b$ ), в  $n + 1$  окружностей ( $\Lambda > b$ ), причем на особом слое лежат  $n$  критических точек (количество точек дуги кривой  $e_\lambda$ , лежащих на фокальной прямой). В результате аналогичной конструкции получаем атомы  $B_n$  или, если  $n = 0$  или  $\Omega$  эквивалентна  $B'_1$  или  $B''_2$ , прямое произведение тора на отрезок.

Пусть элементарная область  $\Omega$  эквивалентна области  $A'_1$ . Будем считать, что горизонтальный сегмент границы этой области это отрезок  $[h, e]$ , где точка  $(h, 0)$  лежит на граничной гиперболы, а точка  $(e, 0)$  на граничном эллипсе, причем  $e > h$ . Дуги  $h_\lambda$  софокусных гипербол  $h_\lambda$  гипербол, принадлежащие семейству 1.1, попавшие в область  $A'_1$ , не пересекаются, а их объединение при  $\lambda < b$  заполняет область  $\Omega$  без горизонтального отрезка  $[f_2, e]$ .

Как уже было показано, если оснащать каждую точку  $x$  дуги  $h_\lambda$  гиперболы  $h_\lambda$ , лежащую в области векторами скорости  $v$ , направленными вправо (или влево), так чтобы точки этой гиперболы лежали бы в прообразе  $\Lambda(x, v) \in [-\varepsilon + b, b + \varepsilon]$ , то множество всех таких точек будет гомеоморфно прямому произведению окружности, лежащей на слое  $\Lambda = \lambda \in [-\varepsilon + b, b + \varepsilon]$ , на отрезок  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ . Рассмотрим теперь точки, лежащие на горизонтальном отрезке.

Прообраз этого отрезка, лежащий на особом слое интеграла  $\Lambda = b$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  гомеоморфен окружности. В самом деле, в прообразе фокуса лежат точки вида  $(f_2, 0, w_1, w_2)$ , где  $(w_1, w_2)$  – это единичный вектор скорости, без ограничения общности направленный вверх т.е.  $w_1^2 + w_2^2 = 1$  и  $w_2 \geq 0$ . Значит, прообраз фокуса можно запараметризовать значением  $w_1 \in [-1, 1]$ . Прообраз полуинтервала  $(f_2, a]$  – это интервал. Каждая точка полуинтервала кроме точки  $(a, 0)$  оснащена парой векторов  $(\pm 1, 0)$ , а точка  $(a, 0)$  по закону отражения на данном уровне интеграла может быть оснащена лишь одним вектором. Склеивая отрезок и интервал по граничным точкам, получаем окружность. Будем называть её правой фокусной окружностью. Правая фокусная окружность с одной стороны является пределом окружностей, лежащих на каждом уровне интеграла  $\Lambda < b$  в прообразе отрезка  $[l, e]$ , где  $l > x_f$  (точка  $(e, 0)$

лежит на интегральном эллипсе), а с другой стороны пределом окружностей, лежащих на каждом уровне интеграла  $\Lambda > b$  в прообразе дуги интегральной гиперболы.

Покажем, как именно на уровне интеграла  $\Lambda = b$  точки, лежащие на дугах невырожденных гипербол, переходят в правую фокусную окружность. Устремим оснащенную единичными векторами скорости дугу  $h_\lambda$  к правому фокусному отрезку т.е. устремим  $\lambda$  к  $b$ . При  $\lambda$  достаточно близких к  $b$  при движении точки  $x$  по дуге  $h_\lambda$  вектор скорости  $v_1$  (напомним, что он направлен к правому фокусу), которым оснащена точка  $x$ , совершает почти полный оборот на  $\pi$  – на отрезке между фокусами он направлен вправо, а на границе направлен почти горизонтально влево, поворачиваясь по часовой стрелке при стремлении точки  $x$  к границе области. Если же оснастить точку  $x$  дуги  $h_\lambda$  вектором скорости  $v_2$  (он направлен от левого фокуса), то при стремлении  $x$  к границе области, вектор скорости  $v_2$  повернётся на небольшой угол против часовой стрелки. В пределе при стремлении дуги  $h_\lambda$ , оснащенной векторами  $v_1$ , к горизонтальному отрезку часть дуги перейдёт в фокус, оснащенный векторами скорости, а часть дуги – в часть отрезка  $[x_f, e]$ , оснащенного векторами скорости, направленными влево. Дуга  $h_\lambda$ , оснащенная векторами скорости  $v_2$  в пределе целиком перейдёт в часть отрезка  $[x_f, e]$ , оснащенного векторами скорости, направленными вправо.

Так как область  $\Omega$  эквивалентна  $A'_1$ , то с одного конца полученные цилиндры – прообразы дуг невырожденных гипербол, лежащих внутри области  $A'_1$  – склеиваются вдоль фокусной окружности, а с другой – вследствие закона отражения. Таким образом, прообраз особого слоя – это тор, на котором можно выделить цикл типа  $(1, 1)$ , который соответствует движению вдоль горизонтальной границы области. На рисунке 4.1.4 показан особый слой интеграла  $\Lambda = b$  для бильярда в области  $A'_1$ .

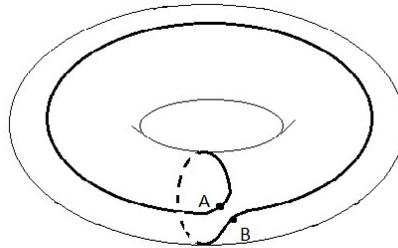


Рис. 4.1: Особый слой интеграла  $\Lambda = b$  для бильярда в области  $A'_1$ . Точки A и B – это точки, лежащие в фокусах, оснащенные векторами скорости, направленными горизонтально. Жирным выделена особая окружность этого слоя.

Пусть элементарная область  $\Omega$  эквивалентна элементарной области вида  $A_1$  или  $A_2$ . Можно считать, что эллиптические сегменты границы этих областей лежат на эллипсе с параметром  $a$ . Проведём построение, аналогичное построению выше для областей  $A'_1$  или  $A'_2$ . При этом будем говорить, что дуги  $h_\lambda$  гипербол  $h_\lambda$  состоят из двух дуг – верхней  $h_\lambda^u$  (расположенной в верхней полуплоскости  $y > 0$ ) и нижней  $h_\lambda^d$  (расположенной в нижней полуплоскости  $y < 0$ ). Множество точек  $x$ , принадлежащих объединению дуг  $h_\lambda^u$  и  $h_\lambda^d$ , и оснащенных векторами скорости  $v$ , такими что значение интеграла  $\Lambda(x, v) \in [-\varepsilon + b, b + \varepsilon]$ , как показано выше, гомеоморфно плоскому атому  $B$ , где особый слой – восьмерка – образован точками, лежащими на уровне интеграла  $\Lambda = b$ .

Рассмотрим точки, лежащие на особом слое  $\Lambda = b$ . Прообраз отрезка  $[f_2, a]$ , лежащий на особом слое  $\Lambda = b$ , гомеоморфен результату склейки окружности (прообраз фокуса) и отрезка (образованного точками отрезка  $[f_2, a]$ , оснащенных векторами скорости  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$ ), где

граничные точки отрезка (точки  $(f_2, 0)$ , оснащенные векторами  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$ ) отождествлены с двумя точками окружности. Устремим теперь  $\lambda$  к  $b$  и покажем, как восьмерка переходит в прообраз отрезка  $[f_2, a]$ . Дуга  $h_\lambda^u$ , оснащенная векторами  $v_1$  при стремлении  $\lambda$  к  $b$  переходит в фокус, оснащенный векторами, направленными вниз, и отрезок  $[f_2, a]$ , оснащенный векторами, направленными вправо. Далее, дуга  $h_\lambda^d$ , оснащенная векторами  $v_3$  при стремлении  $\lambda$  к  $b$  переходит в фокус, оснащенный векторами, направленными вниз, и отрезок  $[f_2, a]$ , оснащенный векторами, направленными вправо. Таким образом, пределы у этих дуг совпадают. Разбирая оставшиеся пары дуг, приходим к выводу что при склейке дуг  $h_\lambda$ , оснащенных векторами  $v_1$  и  $v_2$ , и дуг  $h_\lambda$ , оснащенных векторами  $v_3$  и  $v_4$ , происходит “перекрутка”, при которой оснащенные верхние дуги  $h_\lambda^u$  склеиваются с оснащенными нижними дугами  $h_\lambda^d$ . На рисунке 4.2 показано, как локально на особом слое 3-атома  $B$  выглядят прообразы дуг  $h_\lambda$  и прообраз фокуса, оснащенный векторами скорости.

Если область  $\Omega$  эквивалентна элементарной области  $A_2$ , то “перекруток” будет две (по одной в каждом фокусе) и особый слой совпадёт с особым слоем атома  $B$ . Если же  $\Omega$  эквивалентна элементарной области  $A_1$  то когда дуга  $h_\lambda$  в определенный момент совпадёт с границей области: верхние дуги склеятся с верхними, а нижние с нижними (как на границе происходит склейка в особом слое для бильярда в области  $A_0$ ), вследствие чего второй “перекрутки” не произойдёт. В результате получим нечетное число “перекруток” и особый слой будет гомеоморфен особому слою атома  $A^*$ .

Предложение полностью доказано. □

## 4.2 Вычисление инварианта Фоменко-Цишанга.

**Предложение 4.2.1.** А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко. [4.3][11]

1. Молекула  $A-A$  всегда задаёт 3-многообразие, склеенное из двух полноторий. Каждое из этих полноторий стандартным образом расслоено на 2-торы, что и задаёт слоение всего 3-многообразия на торы Ливуилля. Это слоение имеет ровно два особых слоя – окружности, являющиеся осями полноторий.
2. Молекула  $A-A$  с меткой  $r = 0$  задаёт трёхмерную сферу  $S^3$ .
3. Молекула  $A-A$  с меткой  $r = \frac{1}{2}$  задаёт трёхмерное проективное пространство  $\mathbb{R}P^3$ .
4. Молекула  $A-A$  с меткой  $r = \infty$  задаёт прямое произведение  $S^1 \times S^2$ .
5. Молекула  $A-A$  с меткой  $r = \frac{q}{p}$ , где  $q < p$  и  $p \geq 3$ , задаёт линзовое пространство  $L_{p,q}$ .

**Теорема 4.1.** Инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула  $W^*$ , описывающая топологию слоения Ливуилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для бильярдного движения в элементарной области  $\Omega$ , имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ , если область  $\Omega$  не содержит (внутри области или на границе) отрезков фокальной прямой, т.е. если область  $\Omega$  эквивалентна  $A'_0, A'_1, A'_2, B_0, B'_1$  или  $B''_2$ . Если область  $\Omega$  содержит отрезки фокальной прямой, то молекула имеет указанный в таблице вид (см. рис. 4.2).

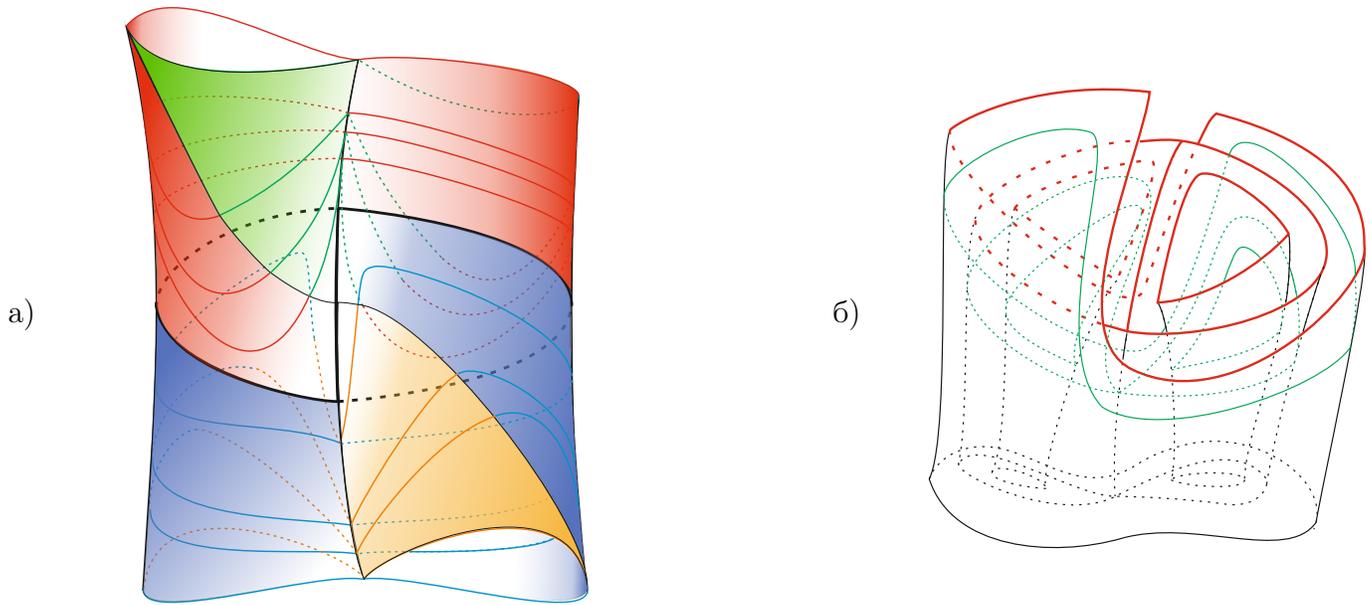


Рис. 4.2: На рисунке а) изображена часть особого слоя атома  $B$ , описывающего бифуркацию на уровне интеграла  $\Lambda = b$  изоэнергетической 3-поверхности биллиарда в области  $A_2$  (ограниченной эллипсом), точки которой проектируются в точки области  $A_2$ , расположенные вблизи правого фокуса. Жирным изображены точки, проекции которых лежат на отрезке фокальной прямой между правым фокусом и границей области  $A_2$ . На этом особом слое цветом отмечены точки, проекции которых лежат на дугах  $h_\lambda$  софокусных гипербол. Красным цветом изображены точки дуг гипербол, оснащенных векторами скорости  $v_1$ , направленными к правому фокусу, зелёным цветом – точки дуг гипербол, оснащенных векторами  $v_2$ , направленными от левого фокуса, синим цветом – точки дуг гипербол, оснащенных векторами  $v_3$ , направленными от правого фокуса, оранжевым цветом – точки дуг гипербол, оснащенных векторами  $v_4$ , направленными к левому фокусу. Слева от особой окружности изображены точки, проекции которых лежат на дугах гипербол, расположенных выше оси  $Ox$  (для точек, оснащенных векторами  $v_1$  и  $v_2$ ) и ниже оси  $Ox$  (для точек, оснащенных векторами  $v_3$  и  $v_4$ ). На рисунке б) изображена часть атома  $B$ : жирным красным изображены точки, проекции которых лежат на отрезке фокальной прямой между правым фокусом и границей области  $A_2$ , в том числе точки, которые лежат на интегральной гиперболе (на части внешнего, гиперболического, тора) и точки, лежащие на интегральных эллипсах (на частях внутренних, эллиптических торов). Зелёным цветом изображено сечение атома  $B$ , образованного точками, лежащими на дуге некоторой гиперболы, софокусной с граничным эллипсом области  $A_2$ .



### Циклы для бильярда в области $A_0$ .

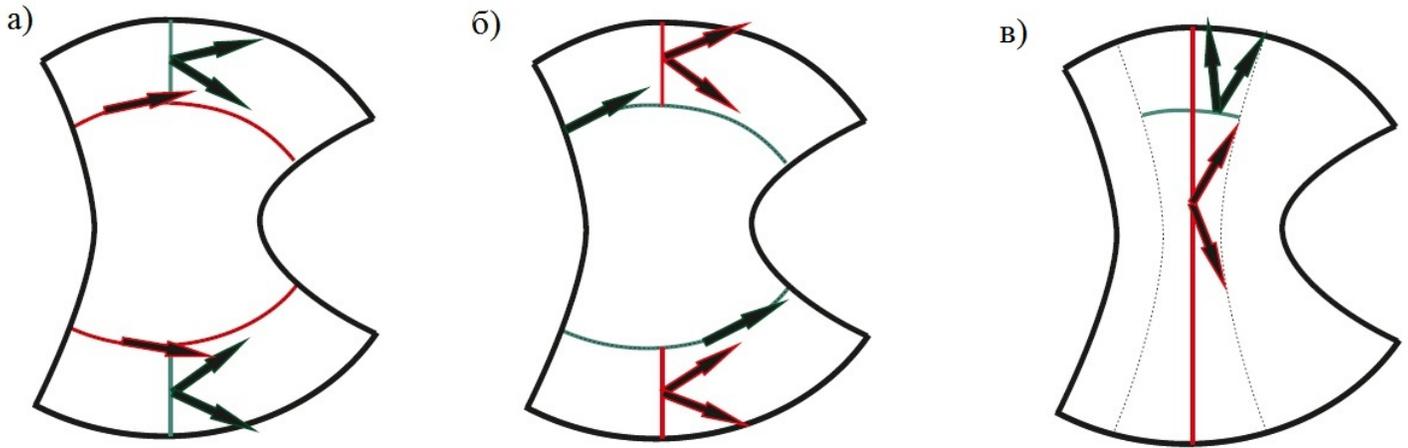


Рис. 4.3: Циклы на торах для области  $A_0$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , а красным циклы  $\mu$ . Пунктиром обозначены интегральные эллипсы и гиперболы. На рисунках а) и б) изображены циклы на эллиптических торах атомов  $A$  и  $B$  соответственно, на рисунке в) – циклы на гиперболическом торе.

Рассмотрим эллиптический тор. Траектории, лежащие на этом торе, касаются некоторого интегрального эллипса. Проекция тора состоит из двух областей, вырезаемых из области  $A_0$  внутренностью интегрального эллипса. В качестве исчезающих циклов  $\lambda$  на граничных торах атома  $A$  можно выбрать дугу некоторой гиперболы, оснащённую подходящими векторами скорости (т.е. такими что оснащенные точки лежат на соответствующем торе). Такая оснащённая дуга представляет собой окружность на рассматриваемом эллиптическом торе. Цикл  $\mu$ , дополняющий выбранный  $\lambda$  до базиса, можно выбрать как дугу интегрального эллипса, лежащую на границе проекции эллиптического тора, оснащённую касательными векторами скорости. Этот же цикл при стремлении тора к атому  $B$  переходит в критическую окружность этого атома и, таким образом, может быть выбран в качестве цикла  $\lambda$  на граничном эллиптическом торе атома  $B$ . Согласованные циклы  $\mu$  на граничных торах атома  $B$  можно выбрать следующим образом. Рассмотрим отрезок, образованный в пересечении области  $A_0$  и осью  $Oy$ . Будучи оснащённым векторами, направленными либо к правому фокусу либо от левого он образует восьмёрку – критический слой двумерного атома  $B$ . Рассмотрим для каждого вектора оснащения его окрестность. В результате получим плоский атом  $B$  – сечение трёхмерного атома. Это сечение высекает изображенные красным цветом на рисунке 4.3б) две окружности на эллиптических торах и на рисунке 4.3в) окружность на гиперболическом торе. Ориентацию выберем сонаправленную с векторами скорости – при направлении вектора вверх туда же направим и вектор скорости кривой, поднимающейся до цикла  $\mu$ . Это правило задаёт согласованную ориентацию на всех циклах  $\mu$  на граничных торах атома  $B$ .

Выбранные (см. рис. 4.3а),б)) циклы показывают, что матрицы склейки на эллиптических торах имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Откуда получаем, что метки  $r = 0, \varepsilon = 1$ .

На рисунке (см. рис. 4.3б) выбраны циклы на гиперболическом торе. Оказывается, эти циклы являются допустимыми базисными циклами  $(\lambda, \mu)$  как на граничных торах атома  $A$ , так и на

граничных торах атома  $B$ . Получаем, что матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (сменили ориентацию цикла  $\lambda$ , чтобы матрица склейки имела бы определитель  $-1$ ). Следовательно, метка  $r = \infty$ . Знак метки  $\varepsilon$  зависит от выбора ориентации многообразия  $Q^3$ , однако мы фиксируем ориентацию, при которой знак  $\varepsilon = 1$ .

### Циклы бильярда в областях серий $B$ и $C$ .

Циклы для бильярда в таких областях выбираются аналогично циклам для области  $A_0$  – все гиперболические сегменты заменяются на эллиптические и наоборот.

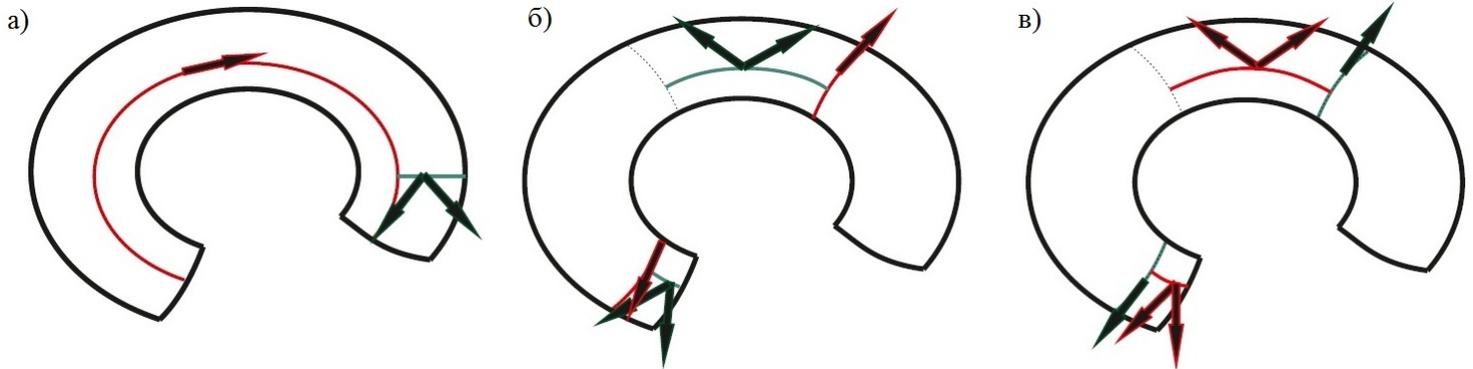


Рис. 4.4: Циклы на торах для серии областей  $B$ , где в качестве примера взята область  $B_2$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , а красным циклы  $\mu$ . Пунктиром обозначены интегральные эллипсы и гиперболы. На рисунке а) изображены циклы на эллиптическом торе, на рисунках б) и в) циклы на гиперболических торах атомов  $A$  и  $B$  соответственно.

Покажем, как выбрать циклы для изоэнергетической поверхности бильярда в области  $B_2$  (4.4). На рисунке 4.4а) выбраны циклы для эллиптического тора. Так как цикл  $\lambda$ , гомеоморфный слою расслоения Зейферта на атоме  $B$ , стягивается в точку на атоме  $A$ , то метка  $r = \infty$ . Знак метки  $\varepsilon$  здесь не определён – он может меняться при смене ориентации многообразия  $Q^3$ .

Выбранные на рисунках 4.4б) и 4.4в) циклы показывают, что матрицы склейки вдоль гиперболических торов имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Напомним, что мы зафиксировали ориентацию циклов  $\mu$  на граничных торах седлового атома. Откуда получаем, что метки  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ .

При этом заметим, что проекции гиперболических торов областей для всех остальных областей серий  $B$ , а также для областей серии  $C$  будут такими же, как проекции торов, изображенных на рисунке 4.4. Циклы на этих торах выбираются точно также как и циклы для гиперболических торов бильярда в области  $B_2$ . Для выбора циклов на эллиптическом торе необходимо “удлиннить” цикл  $\mu$  так, чтобы его проекция на бильярдную область целиком бы лежала на всех дугах интегрального эллипса, входящих в данную область. Матрицы склейки при этом, очевидно, не изменятся.

## 4.2.2 Метки эллиптико-гиперболического биллиарда в области, содержащей фокусы.

### Биллиард в области $A_2$ .

На рисунке 4.5 показан выбор циклов на торах для молекулы, описывающей топологию изоэнергетического многообразия биллиардной системы в области  $A_2$ . В верхнем ряду зелёные циклы при стремлении интегральных эллипсов и гипербол к фокальной прямой, очевидно, переходят в движения вдоль фокального отрезка. Красные циклы  $\mu$  выбраны единым образом – они представляют собой окружности, которые ветвь некоторой гиперболы, оснащенная векторами скорости, направленными вправо, высекает на трёхмерном атоме  $B$ . Именно такие гиперболы были использованы в построении трехмерного атома  $B$ . Зафиксируем на них ориентацию единым образом (например так, чтобы направление ориентации цикла было сонаправлено векторам, которыми оснащена эта дуга гиперболы).

В нижнем ряду зелёные циклы  $\lambda$  при стремлении интегрального эллипса к границе области, а интегральной гиперболы к горизонтальной прямой, стягиваются в точку, тогда как красные циклы  $\mu$  переходят в соответствующие критические минимаксные движения.

Заметим, что на каждом торе циклы  $\mu$  и  $\lambda$  пересекаются в одной точке, т.е. задают на нём базис.

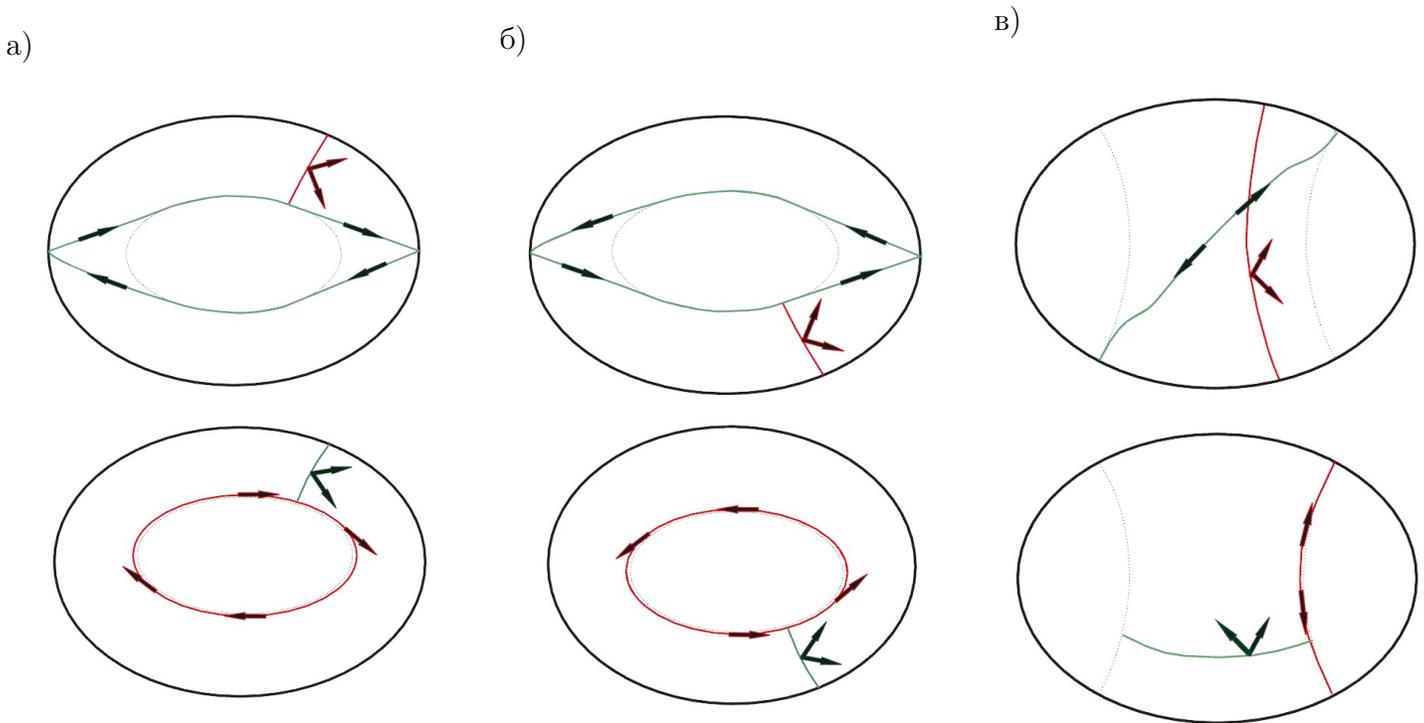


Рис. 4.5: Циклы на торах атомов в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для биллиарда в области  $A_2$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , а красным циклы  $\mu$ . Пунктиром обозначены интегральные эллипсы и гиперболы. На рисунках а) и б) изображены циклы на эллиптических торах, на рисунке в) циклы на гиперболическом торе. В верхнем ряду – циклы на граничных торах седлового атома  $B$ , в нижнем ряду – на граничных торах соответствующих минимаксных атомов  $A$ .

Выпишем матрицы склейки, исходя из выбранных на рисунке 4.5 циклов  $\lambda$  и  $\mu$ . Очевидно,

что на эллиптических ребрах матрица склейки будет иметь вид  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . На гиперболическом ребре матрица склейки принимает вид  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ : определитель матрицы склейки обязан равняться  $-1$ , что приводит к тому что необходимо обратить ориентацию исчезающего цикла  $\lambda$  на торе минимаксного атома, так как ориентация дополнительного цикла  $\mu$  на седловом атоме  $B$  уже фиксирована ранее.

В результате, получаем, что метки на ребрах имеют вид  $r = 0, \varepsilon = 1$ . Метка  $n$  в семье вычисляется следующим образом (напомним, что все рёбра молекулы ориентированы как входящие)  $n = \sum_i [-\frac{\delta_i}{\beta_i}] = [-\frac{0}{1}] + [-\frac{0}{1}] + [-\frac{1}{1}] = -1$ . Будем писать в молекулах  $n = 1$ , подразумевая, что метка  $n = \pm 1$  (она зависит от выбора ориентации многообразия  $Q^3$ ).

### Биллиард в области $A_1$ .

Выберем циклы на граничных торах минимаксных атомов  $A$ . В качестве исчезающих циклов  $\lambda$  можно выбрать оснащенную векторами скорости дугу гиперболы (эллипса), заключенную между интегральным и граничным эллипсом (интегральной или граничной гиперболой). Дополняющий  $\lambda$  до базиса на этом торе цикл  $\mu$  как и раньше можно выбрать взяв дугу интегрального эллипса (интегральной гиперболы) и оснастить её касательными векторами скорости. Эти циклы изображены на рисунке 4.6.

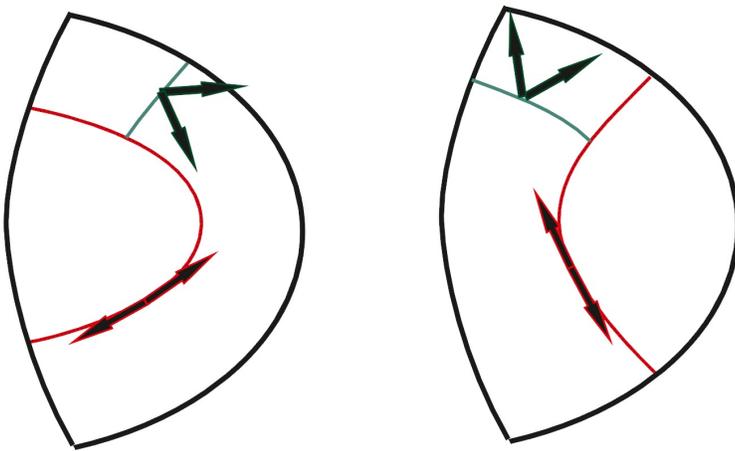


Рис. 4.6: Циклы на граничных торах минимаксных атомов  $A$  для области  $A_1$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , а красным циклы  $\mu$ . Пунктиром обозначены интегральные эллипсы и гиперболы. На рисунке слева изображены циклы на эллиптическом торе, на рисунке справа – на гиперболическом.

Циклы на торах седлового атома  $A^*$  с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами выбираются так. Для начала укажем циклы  $\lambda$  – слои расслоения Зейферта. Они изображены зелёным цветом на рисунке 4.7 ниже. Очевидно, что при стремлении интегральной квадрики к фокальной прямой они перейдут в движения вдоль оси  $Ox$ . Здесь наглядно видно, что циклы  $\lambda$  в пределе будут покрывать критическую траекторию дважды, что показывает, в частности, неориентируемость атома  $A^*$ .

Далее, как и в случае области  $A_2$ , рассмотрим сечение трёхмерного атома  $A^*$  двумерным атомом  $B$ , который образуют точки фиолетовой гиперболы, изображённой на рисунке 4.7, осна-

щённые векторами скорости, направленными вправо. Такие точки распадаются на три цикла  $\hat{\mu}$  – слева изображены два цикла, высекаемые на эллиптическом торе, а справа – цикл, высекаемый на гиперболическом торе. Фиксируем на них ориентацию аналогично тому, как была зафиксирована ориентация на циклах  $\mu$  в случае торов, относящихся к седловому атому  $B$  изоэнергетической поверхности бильярда в области  $A_2$ , ограниченной эллипсом. Для того чтобы с конструировать из циклов  $\hat{\mu}$  настоящие циклы  $\mu$  мы, согласно построению циклов на неориентируемом атоме, из двух циклов на эллиптическом торе выберем один (без ограничения общности верхний), а к половине цикла  $\hat{\mu}$  на гиперболическом торе добавим половину соответствующего цикла  $\lambda$  – слоя расслоения Зейферта. Полученные искомые циклы  $\mu$  изображены в нижнем ряду на рисунке 4.7.

Выпишем матрицы склейки. Очевидно, что на эллиптическом торе матрица склейки принимает вид  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . На гиперболическом торе получаем матрицу  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . В самом деле, без учета знаков матрица имеет определитель 1, что противоречит определению матрицы склейки. Для того чтобы это исправить необходимо изменить ориентацию исчезающего цикла  $\lambda$  (тогда на -1 домножится первый столбец матрицы), так как ориентация цикла  $\mu$  уже фиксирована. Следовательно, необходимо изменить ориентацию исчезающего цикла  $\lambda$  и матрица примет искомый вид.

Тогда метки на ребрах имеют следующие значения  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ . Метка  $n$  в семье вычисляется следующим образом: т.к. все рёбра молекулы ориентированы как входящие, то  $n = \sum_i [-\frac{\delta_i}{\beta_i}] = [-\frac{0}{1}] + [-\frac{1}{1}] = -1$ . Однако при смене ориентации многообразия матрицы склейки поменяются и метка  $n$  примет нулевое значение. Далее в молекулах будем писать  $n = 0$ .  $\square$

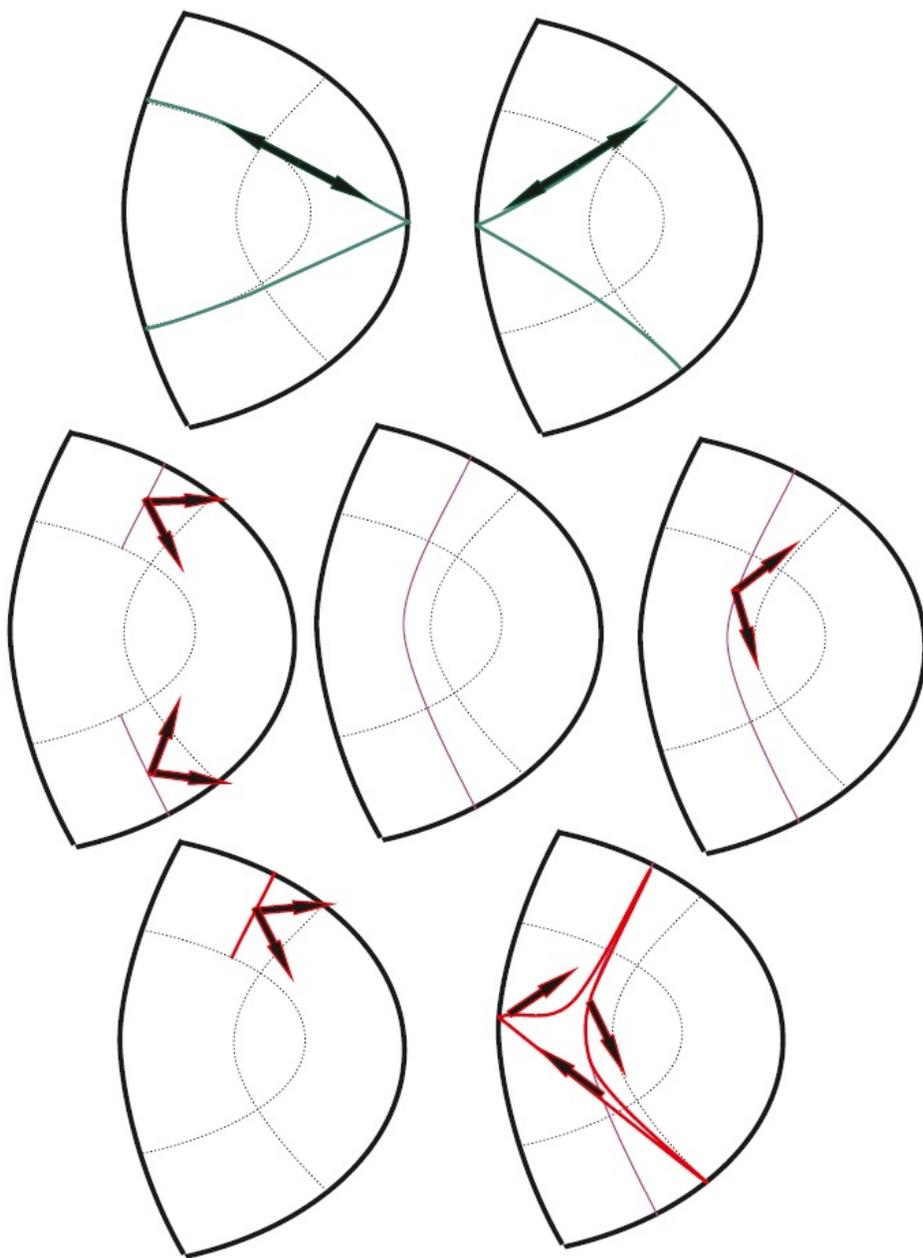


Рис. 4.7: Циклы на граничных торах седлового атома  $A^*$  для области  $A_1$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , а красным циклы  $\mu$ . Пунктиром обозначены интегральные эллипсы и гиперболы. В центре изображена гипербола, которая будучи оснащена векторами, касательными к интегральному эллипсу (слева) или интегральной гиперболе (справа) распадается на циклы  $\hat{\mu}$ . В последнем ряду изображены циклы  $\mu$  допустимой системы координат, получающиеся из циклов  $\hat{\mu}$ : на эллиптическом торе необходимо взять одну из двух окружностей (рисунок слева) или добавить половину цикла  $\lambda$  – слоя расслоения Зейферта (рисунок справа).

## Глава 5

# Лиувиллева классификация бильярдных систем в плоской области, ограниченной дугами софокусных парабол.

Очевидно, что при отражении параболической бильярдной области относительно оси  $Ox$  топология изоэнергетической поверхности  $Q^3$  сохраняется. Однако, отражение относительно оси  $Ox$  фактически представляет собой замену знаков параметров граничных парабол на противоположные. В дальнейшем, будем считать, что граница области  $\Omega$  содержит не более одного выпуклого сегмента параболы с отрицательным значением параметра  $p$ .

**Определение 5.0.1.** Фиксируем параболическую бильярдную область  $\Omega$ . Граница области  $\Omega$  образована дугами парабол семейства (1.2). Рассмотрим те сегменты границы, которые лежат на невырожденных параболах и являются выпуклыми по отношению к области  $\Omega$ . Обозначим через  $p_{min}$  и  $p_{max_i}$  значения параметра  $p$  на которых лежат выпуклые параболические сегменты границы области  $\Omega$  с отрицательными и положительными параметрами  $p$  соответственно. Тогда назовем *особыми* следующие значения интеграла  $p$ :

- минимальное значение интеграла  $p = p_{min}$ ,
- седловое значение интеграла  $p = 0$ ,
- (локально) максимальные значения интеграла  $p = p_{max}$ .

Все остальные значения интеграла  $p$  для области  $\Delta$  назовем *неособыми*.

Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла  $p$ .

Упорядочим особые значения интеграла  $p$ :  $p_{min} < 0 < p_{max_1} \leq p_{max_2}$ .

При минимаксных значениях интеграла  $p = p_{min}$  или  $p = p_{max_2}$  траектории представляют собой не кусочно-прямолинейные движения, а движения вдоль дуг параболы с параметром  $p_{min}$  или  $p_{max_2}$  соответственно. При  $p = p_{max_1}$  траектории разбиваются на два типа – движения вдоль дуг параболы с параметром  $p_{max_1}$  и траектории, лежащие между параболами с параметрами  $p_{max_1}$  и  $p_{max_2}$ . Траектории второго типа лежат на торе, как будет показано ниже. Рассмотрим траекторию, которой соответствует движение вдоль выпуклого сегмента параболы. Если этот граничный сегмент компактен, то на этом уровне интеграла лежит одна траектория, гомеоморфная окружности в многообразии  $Q^3$ . Если этот сегмент представляет собой луч, то

траектория будет гомеоморфна прямой. В случае, если этот граничный сегмент совпадает с параболой, то траектории, соответствующие данному значению интеграла, представляют собой две прямые – движения по параболе в противоположных направлениях.

При седловом значении интеграла  $p = 0$  любая траектория является ломаной, каждое звено которой либо лежит на горизонтальной прямой, либо проходит через фокус семейства (1.2). В некомпактном случае, горизонтальное звено может быть гомеоморфно лучу. В других случаях звенья гомеоморфны отрезкам.

**Определение 5.0.2.** Траектории параболического бильярда в области  $\Omega$ , целиком лежащие на дугах параболы с минимаксными значениями интеграла, а также траектории, лежащие на седловом уровне интеграла  $p = 0$  назовём *особыми*.

## 5.1 Слоение Лиувилля: вычисление молекулы Фоменко-Цишанга для параболического бильярда в компактной области.

**Предложение 5.1.1.** Для всех неособых значений  $p$  поверхность уровня интеграла в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  динамической системы параболического бильярда в компактной области  $\Omega$  гомеоморфна объединению торов. Для особого значения  $p = p_{max_1}$  поверхность уровня интеграла гомеоморфна объединению тора и окружности.

**Определение 5.1.1.** Торы, соответствующие отрицательным значениям интеграла  $p$  назовем *отрицательными*, а положительным значениям интеграла  $p$  назовем *положительными*.

**Предложение 5.1.2.** Прообраз  $p^{-1}([-\varepsilon, +\varepsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы бильярда в элементарной области  $\Omega$  при некотором, достаточно малом значении  $\varepsilon > 0$ , гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям:

- атом  $B$  для области  $\Omega_2$ ;
- атом  $A^*$  для области  $\Omega_1$ ;
- произведение тора на отрезок для областей  $\omega_1, \omega_2, \Omega_3$ .

**Предложение 5.1.3.** Инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула  $W^*$ , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для параболического бильярда в компактной области  $\Omega$  может быть описана следующим образом.

- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\Omega_1$ , молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A^* \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ , метка  $n$  в единственной семье равна 0.
- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\Omega_2$ , молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=\infty, \varepsilon=1} B \rightrightarrows A$ , где метки  $r = 0, \varepsilon = 1$  на правых ребрах.
- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\omega_1, \omega_2$  или  $\Omega_3$ , то молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \varepsilon=1} A$ .

*Доказательство.* Для доказательства утверждений воспользуемся доказательством их аналогов в случае эллиптико-гиперболического бильярда. Заменяем в этих доказательствах эллипсы на параболы с отрицательным значением параметра  $p$ , а гиперболы – на параболы с положительным значением  $p$ . С учетом этих поправок доказательства можно повторить практически дословно. □

## 5.2 Слоение Лиувилля: вычисление аналога молекулы Фоменко для параболического бильярда в некомпактной области.

**Предложение 5.2.1.** *Естественный параметр на траекториях параболической бильiardной системы в некомпактных областях определен на всей числовой прямой, т.е. векторные потоки  $sgradH$  и  $sgradP$  полны.*

*Доказательство.* Любая неминимаксная бильiardная траектория  $s$  является некоторой ломаной. Минимаксные траектории были описаны выше – они представляют собой движения вдоль дуг граничных парабол. Очевидно, что на дуге граничной параболы можно всюду определить значение некоторого вещественного параметра.

Покажем, что любая неминимаксная некомпактная траектория  $s$  разбивается либо в сумму  $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$  конечных звеньев  $a_i$  ломаной  $s$ , либо в последовательную сумму  $s = b_1 + \sum_{i=1}^n a_i + b_2$  бесконечного интервала  $b_1 = (-\infty, t_1)$ , конечной суммы конечных звеньев  $a_i$  и бесконечного интервала  $b_2 = (t_2, \infty)$ .

Без ограничения общности предположим, что некомпактная область  $\Theta$  ограничена некомпактными сегментами парабол с отрицательными значениями интеграла  $p$  и, быть может, ограниченным, сегментом параболы с положительным значением интеграла  $p$  (в этом случае она эквивалентна области  $\Theta_3$  или же  $\Theta_4$ ).

Пусть  $l$  – произвольная прямая. Пересечение области  $\Theta$  и прямой  $l$  может быть следующим:

- отрезок,
- два отрезка,
- отрезок и точка,
- луч.

Последнее возможно тогда и только тогда, когда прямая  $l$  горизонтальна, а область  $\Theta$  эквивалентна области  $\Theta_1$ , ограниченной одной параболой или же  $\theta_1$  – области, ограниченной одной параболой и осью  $Ox$ .

При значении интеграла  $p \neq 0$  любая касательная к интегральной параболы не горизонтальна. Тогда любая неособая бесконечная траектория представляется в виде суммы  $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$  конечных звеньев  $a_i$ .

При значении интеграла  $p = 0$  в случае, если область  $\Theta$  не эквивалентна области  $\Theta_1$  или  $\theta_1$  каждая траектория имеет два типа – это либо траектория, представляющаяся в виде суммы  $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$  конечных звеньев  $a_i$ , либо окружность – траектория вдоль прямой  $Ox$  (такая траектория есть в областях  $\Theta_3$  и  $\theta_2$ ).

Пусть значение интеграла  $p = 0$ , а область  $\Theta$  эквивалентна области  $\Theta_1$  или  $\theta_1$ . Тогда любая траектория распадается в сумму  $s = b_1 + \sum_{i=1}^n a_i + b_2$  бесконечного горизонтального луча  $b_1 = (-\infty, t_1]$ , одного (в случае области  $\Theta_1$ ) или двух (в случае области  $\theta_1$ ) конечных звеньев  $a_i$

и бесконечного горизонтального луча  $b_2 = [t_2, \infty)$ . Если траектория  $s$  проходит вдоль горизонтальной прямой через фокус, то конечные звенья в этом случае будем считать вырожденными.  $\square$

**Предложение 5.2.2.** *Для бильярда в некомпактной области, ограниченной дугами парабол, изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  может быть описана следующей молекулой:*

- $\frac{\bar{A}}{A} \Rightarrow \bar{B} \rightarrow C_\infty$  для области  $\Theta_1$ ; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры, два минимаксных особых слоя, гомеоморфных прямой  $\mathbb{R}$ , а седловая бифуркация описывается атомом  $\bar{B}$ ,
- $\frac{\bar{A}}{A} \Rightarrow B'' \Rightarrow \frac{C_\infty}{C_\infty}$  для области  $\Theta_2$ ; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры, два минимаксных особых слоя, гомеоморфных прямой  $\mathbb{R}$ , а седловая бифуркация описывается атомом  $B''$  с некомпактной базой,
- $\bar{A} \rightarrow B' \Rightarrow \frac{A}{C_\infty}$  для области  $\Theta_3$ ; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры, один минимаксный особый слой, гомеоморфный прямой  $\mathbb{R}$ , один особый минимаксный слой, гомеоморфный окружности  $S^1$ , а седловая бифуркация описывается атомом  $B'$  с некомпактной базой,
- $\bar{A} \rightarrow C_\infty$  для областей  $\Theta_4$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ; многообразие  $Q^3$  расслоено на цилиндры и особый слой, гомеоморфный прямой  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство. Случай области  $\Theta_1$ .* Пусть область  $\Theta_1$  ограничена параболой с параметром  $P < 0$ . Рассмотрим компактную область  $\Omega_1$ , ограниченную параболой с параметрами  $P$  и  $Q$ , причем  $0 < Q$ . Область  $\Theta_1$  может быть получена из области  $\Omega_1$  при переходе к пределу при  $Q \rightarrow \infty$ . При этом со слоями интеграла  $p$  происходят следующие события.

Рассмотрим семейство торов, соответствующих уровню интеграла  $P < p < 0$ . На каждом из этих торов точки, которые при проекции этого тора на область  $\Omega_1$  лежат на дуге параболы с параметром  $Q$ , образуют два параллельных цикла. При стремлении  $Q \rightarrow \infty$  данное семейство торов переходит в два семейства цилиндров, получающихся из них разрезами на каждом торе вдоль этих двух параллельных циклов.

Рассмотрим торы, соответствующие уровню интеграла  $0 < p < Q$ . На каждом из них точки, которые при проекции этого тора на область  $\Omega_1$  лежат на дуге параболы с параметром  $Q$ , образуют один цикл. При стремлении  $Q \rightarrow \infty$  данное семейство торов переходит в семейство цилиндров, получающихся из них разрезом на каждом торе вдоль упомянутого цикла.

Рассмотрим прообраз отрезка  $p^{-1}[-\varepsilon, +\varepsilon]$ . В прообразе дуги с параметром  $Q$  лежит плоский атом  $B$ , а целиком прообраз гомеоморфен 3-атому  $A^*$ . При разрезе 3-атома  $A^*$  вдоль трансверсального сечения плоским атомом  $B$ , получаем некомпактный атом  $\bar{B}$ .

**Случай области  $\Theta_2$ .** Рассмотрим компактную область  $\Omega_2$ , ограниченную дугами парабол с параметрами  $P_1, P_2$  и  $Q$ , причем  $P_1 < P_2 < 0 < Q$ . При переходе к пределу при  $Q \rightarrow \infty$  область  $\Omega_2$  переходит в область  $\Theta_2$ .

Рассмотрим семейство торов, соответствующих уровню интеграла  $P < p < 0$ . На каждом из этих торов точки, которые при проекции этого тора на область  $\Omega_1$  лежат на дуге параболы с параметром  $Q$ , образуют два параллельных цикла. При стремлении  $Q \rightarrow \infty$  данное семейство торов переходит в два семейства цилиндров, получающихся из них разрезами на каждом торе вдоль этих двух параллельных циклов.

Рассмотрим торы, соответствующие уровню интеграла  $0 < p < Q$ . На каждом из них точки, которые при проекции этого тора на область  $\Omega_1$  лежат на дуге параболы с параметром  $Q$ , образуют один цикл. При стремлении  $Q \rightarrow \infty$  каждое семейство торов переходит в семейство цилиндров, получающихся из них разрезом на каждом торе вдоль упомянутого цикла.

Рассмотрим прообраз отрезка  $p^{-1}[-\varepsilon, +\varepsilon]$ . Прообраз каждой граничной дуги области  $\Omega_2$ , лежащей на параболе с параметром  $Q$  гомеоморфен окружности. Более того, эта окружность параллельна оси 3-атома  $B$ , а прообраз при каждом ненулевом фиксированном параметре  $p \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  на торе является слоем расслоения Зейферта. Следовательно, при переходе к пределу  $Q \rightarrow \infty$  из 3-атома  $B$  необходимо удалить два диска, таким образом, что он перейдет в некомпактный 3-атом, гомеоморфный прямому произведению некомпактной базы – атома  $B''$  (см. подробнее рисунок 1.5) на компактный слой – окружность.

**Случай области  $\Theta_3$ .** Рассмотрим компактную область  $\Omega_3$ , ограниченную дугами парабол с параметрами  $P_1, P_2$  и  $Q_1 < Q_2$ , причем  $P_1 < P_2 < 0 < Q_1 < Q_2$ . При переходе к пределу при  $Q_2 \rightarrow \infty$  (при этом  $Q_1 < \infty$ ) область  $\Omega_3$  переходит в область  $\Theta_3$ .

Рассмотрим семейство торов, соответствующих уровню интеграла  $P < p < 0$ . На каждом из этих торов точки, которые при проекции этого тора на область  $\Omega_3$  лежат на дуге параболы с параметром  $Q_2$ , образуют цикл. При стремлении  $Q \rightarrow \infty$  данное семейство торов переходит в семейство цилиндров, получающихся из торов разрезами вдоль упомянутого цикла.

Рассмотрим торы, соответствующие уровню интеграла  $0 < p < Q_2$ . На каждом из них точки, которые при проекции этого тора на область  $\Omega_3$  лежат на дуге параболы с параметром  $Q_2$ , образуют один цикл. При этом при достаточно больших  $Q_2$  точки параболы с таким параметром расположены теперь в проекции лишь одного семейства торов. При стремлении  $Q_2 \rightarrow \infty$  данное семейство торов переходит в семейство цилиндров, получающихся из них разрезом вдоль упомянутого цикла.

Рассмотрим прообраз отрезка  $p^{-1}[-\varepsilon, +\varepsilon]$ . Прообраз граничной дуги области  $\Omega_2$ , лежащей на параболе с параметром  $Q_2$  гомеоморфен окружности. Более того, эта окружность параллельна оси 3-атома  $B$ , а прообраз при каждом ненулевом фиксированном параметре  $p \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  на торе является слоем расслоения Зейферта. Следовательно, при переходе к пределу  $Q_2 \rightarrow \infty$  из 3-атома  $B$  необходимо удалить один диск, таким образом, что он перейдет в некомпактный 3-атом, гомеоморфный прямому произведению некомпактной базы – атома  $B'$  (см. подробнее рисунок 1.5) на компактный слой – окружность.

**Случай областей  $\Theta_4, \theta_1$  и  $\theta_2$**  может быть рассмотрен аналогично предыдущим. В качестве аналога области  $\Theta_4$  необходимо взять область  $\Omega_3$ , а для областей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  области  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно.  $\square$

**Замечание 12.** Биллиарды в рассмотренных некомпактных областях могут быть получены как предел другой динамической системы, а именно, биллиарда в элементарной области, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Как известно, семейство софокусных парабол получается из семейства софокусных гипербол и эллипсов устремлением одного из фокусов к бесконечности. Области, соответствующие при этом областям  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ , это области, ограниченные одним и двумя эллипсами соответственно. Молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля для биллиарда в этих областях вычислены в теореме 4.1. При этом седловые атомы, описывающие топологию окрестности уровня функции  $\Lambda = b$  (соответствующий параболическому  $p = 0$ ) гомеоморфны 3-атомам  $B$  и  $C_2$ . При переходе к пределу и устремлении одного из фокусов на бесконечность, атом  $B$  в молекуле, описывающей биллиардное движение в области, ограниченной эллипсом, не изменяется. Из атома  $C_2$  при этом необходимо вырезать окрестность одной из двух критических окружностей, при этом, как легко видеть, получится атом

$B''$ . Область  $\Theta_3$  может быть получена из эллиптико-гиперболической области  $B_1$ , при этом атом, описывающий соответствующую трёхмерную бифуркацию на особом слое это  $B$ . При устремлении фокуса на бесконечность, очевидно, необходимо удалить окружность точек на особом слое, гомеоморфную критической окружности. Получаем трёхмерный атом  $B'$ .

# Глава 6

## Лиувиллева классификация систем обобщённых билиардов.

### 6.1 Слоение Лиувилля: вычисление молекулы Фоменко.

#### 6.1.1 Особые и неособые уровни интеграла.

**Определение 6.1.1.** Фиксируем обобщённую область  $\Delta$  и рассмотрим в ней обобщённый билиард. Область  $\Delta$  склеена из нескольких элементарных областей  $\Omega_i$ . Граница каждой области  $\Omega_i$  образована сегментами эллипсов и гипербол семейства (1.1). Для каждой области  $\Omega_i$  укажем особые минимаксные значения интеграла согласно определению 4.1.1.

Тогда назовем *особыми* следующие значения интеграла  $\Lambda$  для билиарда в обобщенной области  $\Delta$ :

- (локально) минимальные значения интеграла  $\Lambda = \min_i$ , которые являются минимальными хотя бы в одной элементарной области  $\Omega_i$ ,
- седловое значение интеграла  $\Lambda = b$ ,
- (локально) максимальные значения интеграла  $\Lambda = \max_j$ , которые являются максимальными хотя бы в одной элементарной области  $\Omega_i$ .

Все остальные значения интеграла  $\Lambda$  для области  $\Delta$  назовем *неособыми*.

Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла  $\Lambda$ .

Упорядочим особые значения интеграла  $\Lambda$ :  $0 \leq \min_1 \leq \min_2 \leq \dots \leq \min_n < b < \max_1 \leq \dots \leq \max_m \leq a$ , где через  $n$  и  $m$  обозначено количество (локально) минимальных и (локально) максимальных значений интеграла  $\Lambda$  соответственно.

При минимальном значении интеграла  $\Lambda = \min_i$  каждому выпуклому эллиптическому сегменту границы каждой элементарной области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщенной области  $\Delta$ , и лежащему на эллипсе с параметром  $\min_i$ , соответствуют траектории, которые представляют собой не кусочно-прямолинейные движения, а движения вдоль дуг эллипса с параметром  $\min_i$ . В многообразии  $Q^3$  эти траектории являются объединением нескольких окружностей. Так как эти сегменты являются выпуклыми, то других траекторий на этом уровне интеграла, отражающихся от частей границы, соответствующих значению интеграла  $\min_i$  нет. Все другие траектории (если они существуют), как будет показано далее, лежат на торах.

При седловом значении интеграла  $\Lambda = b$  траектории обладают следующим свойством: касательные к траектории поочерёдно проходят через фокусы семейства (1.1) (фокус меняется при отражении траектории от границы области или же при переходе с одной элементарной области на другую).

При максимальном значении интеграла  $\Lambda = \max_j < a$ , каждому выпуклому гиперболическому сегменту границы каждой элементарной области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщенной области  $\Delta$ , и лежащему на гиперболе с параметром  $\max_j$ , соответствуют траектории, которые представляют собой не кусочно-прямолинейные движения, а движения вдоль дуг гиперболы с параметром  $\max_j$ . В многообразии  $Q^3$  эти траектории являются объединением нескольких окружностей. Все другие траектории (если они существуют), как будет показано далее, лежат на торах. При  $\Lambda = \max_j = a$  все траектории представляют собой вертикальные движения вдоль оси ординат. В многообразии  $Q^3$  эти траектории также являются объединением нескольких окружностей.

**Определение 6.1.2.** Траектории билиардного движения в (элементарной) области  $\Omega$ , целиком лежащие на дугах квадрик с параметрами  $\min_i$  и  $\max_j$ , а также траектории, лежащие на седловом уровне интеграла  $\Lambda = b$  назовём *особыми*.

### 6.1.2 Теорема Лиувилля для обобщённого билиарда: эллиптические значения интеграла.

Опишем неособые поверхности уровня интеграла  $\Lambda$  в изоэнергетическом многообразии  $Q^3$ , и покажем, что они гомеоморфны несвязному объединению нескольких торов.

**Предложение 6.1.1.** Для всех значений  $\Lambda_{\min} < \lambda < b$  поверхность уровня интеграла  $\Lambda = \lambda$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  динамической системы билиарда в обобщённой области гомеоморфна объединению торов.

**Определение 6.1.3.** Торы, соответствующие уровням интеграла  $\Lambda_{\min} < \lambda < b$  назовём *эллиптическими*, так как касательные к траекториям билиарда на этом уровне касаются эллипса семейства (1.1) с параметром  $\lambda$ .

*Доказательство.* Обобщённая область  $\Delta$  склеена из элементарных областей  $\Omega_i$ . Нам известно, что  $\lambda < b$ . Касательные к траекториям билиарда на этом уровне будут касаться некоторого эллипса с параметром  $\lambda$ . Назовём этот эллипс интегральным. Вырежем из каждой элементарной области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщённой области  $\Delta$ , внутренность интегрального эллипса. Полученное многообразие является проекцией уровня интеграла на область  $\Delta$ . В дальнейших рассуждениях под прообразами точек области понимаются прообразы при этой проекции. Фиксируем некоторую компоненту связности этого многообразия и обозначим её через  $\tilde{\Delta}$ . При этом многообразии  $\tilde{\Delta}$  это некоторая элементарная или обобщённая область, склеенная не более чем из четырех элементарных областей  $\tilde{\Omega}_i$ . Если  $\tilde{\Delta}$  это элементарная область, то можно воспользоваться аналогичным утверждением 4.1.1 для элементарных областей. Если же  $\tilde{\Delta}$  – обобщённая область, то опишем её, используя прообразы элементарных областей  $\tilde{\Omega}_i$ . Для этого в каждой области  $\tilde{\Omega}_i$  рассмотрим прообраз для системы билиарда в ней. Он гомеоморфен одному или нескольким торам (см. предложение 4.1.1). Далее, склейка областей  $\tilde{\Omega}_i$  в область  $\tilde{\Delta}$  поднимается до склейки торов – для этого на каждом торе необходимо произвести разрез вдоль точек, проекции которых лежат на ребре склейки. А затем склеить разрезанные торы по новому отношению эквивалентности – обобщённому билиардному закону.

Список  $\tilde{\Delta}$ , являющихся обобщенными областями, конечен и исчерпывается пятью типами, поэтому разобьём дальнейшее доказательство на четыре шага.

**Шаг первый.** Область  $\tilde{\Delta}$  эквивалентна области, склеенной из двух экземпляров элементарной области, принадлежащей серии  $B$  или  $C$ , вдоль выпуклого эллиптического граничного сегмента.

В каждом торе, лежащем в прообразе области  $\tilde{\Omega}_i$ , прообраз ребра склейки, лежащего на эллиптическом граничном сегменте, является некоторым циклом. Результат склейки двух экземпляров разрезанных по одинаковым циклам тором, будет, очевидно, тором.

**Шаг второй.** Область  $\tilde{\Delta}$  эквивалентна области, склеенной из четырех экземпляров элементарной области, принадлежащей серии  $B$ , вдоль дуг выпуклых сегментов границы (эллиптических и гиперболических).

В каждом торе, лежащем в прообразе области  $\tilde{\Omega}_i$ , прообразы ребер склейки, лежащих на эллиптическом и гиперболическом граничных сегментах, являются парой циклов, образующих базис на этом торе. Можно считать, что прообраз ребра склейки, лежащего на эллиптическом граничном сегменте, является циклом  $(1, 0)$ , а прообраз ребра склейки, лежащего на гиперболическом граничном сегменте, является циклом  $(0, 1)$ . Очевидно, что если четыре экземпляра тора сначала разрезать по упомянутым циклам, а потом склеить попарно, то результатом будет тор.

**Шаг третий.** Область  $\tilde{\Delta}$  эквивалентна области, склеенной из двух экземпляров элементарной области, принадлежащей серии  $B$ , вдоль дуг выпуклых сегментов границы (эллиптических и гиперболических) в область с одной конической точкой.

Склеим из прообразов областей  $\tilde{\Omega}_i$  тор, подняв склейку областей  $\Omega$  вдоль гиперболического сегмента границы до склейки двух разрезанных тором вдоль цикла  $(1, 0)$  (см. предыдущий шаг). Разрежем полученный тор по точкам, проекции которых лежат на эллиптическом ребре склейки. Эти точки на данном торе образуют окружность – нетривиальный цикл (по построению). Обозначим вектора скорости, которыми оснащены точки на одном экземпляре области  $B$  через  $v_i$ , а на другом экземпляре области  $B$  через  $w_i$ , сохраняя прежнюю нумерацию (вектора  $v_1$  и  $w_1$  направлены к интегральному эллипсу по часовой стрелке, вектора  $v_2$  и  $w_2$  направлены от интегрального эллипса по часовой стрелке, вектора  $v_3$  и  $w_3$  направлены к интегральному эллипсу против часовой стрелки, вектора  $v_4$  и  $w_4$  направлены от интегрального эллипса против часовой стрелки). Тогда на разрезанном торе граница – это две окружности, каждая из которых разделена на четыре равных части. Одна окружность, обозначим её через  $S_1$ , состоит из точек  $x$ , принадлежащих ребру склейки и последовательно оснащенных следующими векторами  $\{v_1, v_3, w_1, w_3\}$  – каждая из четвертей окружности  $S_1$  оснащена своим типом векторов, которые склеиваются друг с другом в концах эллиптического сегмента либо по закону отражения (например,  $v_1$  и  $v_3$ ), либо по правилу склейки – обобщенному бильярду на гиперболическом ребре склейки (например,  $v_1$  и  $w_3$ ). Все векторы, которыми оснащены точки эллиптического граничного сегмента, составляющие окружность  $S_1$  направлены “внутрь” области  $\tilde{\Delta}$ . Окружность  $S_2$  составляют точки эллиптического граничного сегмента, последовательно оснащенные следующими векторами, направленными “наружу”, а именно векторами  $\{v_2, v_4, w_2, w_4\}$ . В неразрезанном торе эти окружности склеивались по правилу  $(v_1, v_3, w_1, w_3) \sim (v_2, v_4, w_2, w_4)$  соответственно. После окончательной склейки области  $\tilde{\Omega}_i$  в область  $\tilde{\Delta}$ , вдоль эллиптического граничного сегмента, эти окружности будут склеены по следующим правилам  $\{v_1, v_3, w_1, w_3\} \sim \{w_2, w_4, v_2, v_4\}$  соответственно, т.е. фактически с поворотом окружности на  $\pi$ . При этом тор перейдет в тор.

**Шаг четвертый.** Область  $\tilde{\Delta}$  эквивалентна области, склеенной из двух экземпляров элементарной области, принадлежащей серии  $B$ , вдоль двух дуг выпуклых сегментов границы (эллиптических и гиперболических) и одной дуги горизонтального сегмента границы в область с двумя коническими точками.

Склеим из прообразов областей  $\tilde{\Omega}_i$  два тора, подняв склейку областей  $\Omega$  вдоль двух сегментов границы (выпуклого гиперболического и горизонтального) до склейки двух разрезанных торов вдоль двух параллельных циклов. Тогда в прообразе эллиптического ребра склейки лежат две окружности на каждом торе. Склеив два разрезанных тора по двум окружностям, получаем тор. Утверждение доказано.  $\square$

### 6.1.3 Теорема Лиувилля для обобщённого бильярда: гиперболические значения интеграла.

**Предложение 6.1.2.** Для всех значений  $b < \lambda < \Lambda_{max}$  поверхность уровня интеграла  $\Lambda = \lambda$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  динамической системы бильярда в обобщённой области, не содержащей конических точек, гомеоморфна объединению нескольких торов.

**Определение 6.1.4.** Торы, соответствующие уровням интеграла  $b < \lambda < \Lambda_{max}$  назовем гиперболическими, так как касательные к траекториям бильярда на этом уровне касаются ветвей гиперболы семейства (1.1) с параметром  $\lambda$ .

*Доказательство.* предложения 6.1.2 аналогично доказательству утверждения 6.1.1.  $\square$

### 6.1.4 Особые уровни интеграла. Описание их окрестности в терминах атомов-бифуркаций.

**Предложение 6.1.3.** Трёхмерный прообраз  $\Lambda^{-1}([b-\varepsilon, b+\varepsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы бильярда в обобщённой области  $\Delta$ , склеенной из элементарных областей одинаковых типов, и не имеющей конических точек, гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трёхмерные):

- произведение тора на отрезок для “простейших удвоенных” областей вида  $\Delta_\alpha(2\Omega)$ , где элементарная область  $\Omega$  эквивалентна  $A'_0, A'_1, A'_2, B_0, B'_1, B''_2$ ;
- атом  $B$  для областей  $\Delta_\alpha(2A_1), \Delta_\alpha(2C_1)$  и  $\Delta_\alpha(A_0)^2$ ;
- атом  $C_2$  для области  $\Delta_\alpha(2A_2)$ ;
- атом  $B_n$  для областей, склеенных из эллиптических лент  $-\Delta_\alpha(2B_n), \Delta_\alpha(2B'_{n+1})$  и  $\Delta_\alpha(2B''_{n+2})$   $n > 0$  и гиперболических лент  $\Delta_\alpha(nA_0)$ ,  $n > 1$ ;
- атом  $D_n$  для областей, гомеоморфных кольцу, а именно для гиперболических “колец”  $\Delta_\alpha(nA_0)^2$ ,  $n > 1$  и областей, склеенных из эллиптических “колец”  $-\Delta_\alpha(2C_n)$ ,  $n > 1$ ;

*Доказательство.* Пусть область  $\Delta$  эквивалентна области  $\Delta_\alpha(2A_1)$ . Рассмотрим заполнение этой области дугами софокусных эллипсов, в том числе, двумя отрезками вырожденного эллипса. Тогда почти полностью повторяя доказательство 4.1.3 для области  $A_2$  заменой дуг гипербол на дуги эллипсов получаем, что особый слой будет гомеоморфен особому слою атома  $B$ .

Пусть область  $\Delta$  эквивалентна области  $\Delta_\alpha(2C_2)$ . Рассмотрим атом  $C_2$ , описывающий окрестность особого слоя  $\Lambda = b$  для билиардного движения в области  $C_2$ . При построении (см. предложение 4.1.3) особого слоя мы рассматривали заполнение области  $C_2$  дугами софокусных эллипсов, расположенных между граничными эллипсами области  $C_2$ . Рассмотрим объединение таких заполнений двух областей  $\Delta_\alpha(2C_2)$ . В прообразе каждого эллипса лежит особый слой плоского атома  $C_2$ . Разрезав трехмерный атом  $C_2$  вдоль плоского атома  $C_2$  мы получаем прообраз точек, лежащих в одной области  $C_2$ : фактически это будет прямое произведение особого слоя плоского атома  $C_2$  на отрезок, образованный точками, лежащими на отрезке фокальной прямой внутри области (без ограничения общности) справа от фокуса. Два таких отрезка (каждый в своём экземпляре области  $C_2$ ) склеиваются в окружность. Эта склейка продолжается на склейку прямых произведений в результате чего получается прямое произведение особого слоя плоского атома  $C_2$  на окружность. Аналогичную конструкцию можно провести и в случае областей  $\Delta_\alpha(2C_n)$  и  $\Delta_\alpha(2B_n)$ .

Для дальнейшего доказательства этого предложения мы показываем, как меняются прообразы особых слоев из энергетических поверхностей  $Q^3$  билиарда в элементарных областях при склейке этих элементарных областей в обобщенную область. Заметим, что слой интеграла  $\Lambda$  для билиарда в обобщенной области может быть склеен из разрезанных слоев интеграла  $\Lambda$  в элементарных областях, составляющих область  $\Omega$ . На слоях интеграла  $\Lambda$  необходимо сделать разрезы вдоль точек  $x$ , проекции которых лежат на ребрах склейки. Затем произвести склейку разрезанных слоев интеграла  $\Lambda$ , согласно новым правилам склейки – обобщенному билиардному закону. Склейка на неособых эллиптических торах описана в предложении 6.1.1, аналогично может быть описана склейка на гиперболических торах 6.1.2. Здесь покажем как происходит склейка особых слоев интеграла  $\Lambda$ .

Пусть обобщенная область  $\Delta$  эквивалентна области вида  $\Delta_\alpha(2\Omega)$ , где внутренность элементарной области  $\Omega$  не содержит точек фокальной прямой. Рассмотрим торы  $T^u$  и  $T^d$ , которые представляют собой особые слои динамической системы билиарда в элементарной области  $\Omega$  (см. предложение 4.1.3). Разрежем каждый тор по окружности, образованной точками эллиптического сегмента границы – ребра склейки областей  $\Omega$  – оснащенными векторами скорости. Такие окружности образуют циклы на торах  $T^u$  и  $T^d$ . Два разрезанных тора склеиваются вдоль двух граничных окружностей вследствие обобщенного билиардного закона. При этом получается тор.

Пусть область  $\Delta$  эквивалентна области  $\Delta_\alpha(A_0)^2$ . Представим эту область, как результат склейки двух экземпляров области  $A'_0$  вдоль двух граничных сегментов – эллиптического и горизонтального. Рассмотрим торы  $T^u$  и  $T^d$ , которые представляют собой особые слои динамической системы билиарда в области  $A'_0$  (см. предложение 4.1.3). На каждом из торов  $T^u$  и  $T^d$  есть выделенный цикл, образованный точками фокальной прямой, оснащенными векторами скорости, направленными горизонтально. Для начала разрежем каждый тор по окружности, образованной точками эллиптического сегмента границы – ребра склейки областей  $A'_0$  – оснащенными векторами скорости. Два разрезанных тора склеиваются вдоль граничных окружностей вследствие обобщенного билиардного закона, образуя новый тор  $T$ . После склейки выделенные на торах  $T^u$  и  $T^d$  циклы перейдут в два гомологичных цикла на торе  $T$ . Однако точки этих циклов в  $Q^3$  одинаковы. Поэтому выделенные циклы необходимо отождествить друг с другом. В результате такой склейки тор  $T$  перейдет в особый слой атома  $B$ .

Пусть область  $\Delta$  склеена из нескольких экземпляров элементарной области  $A_0$  и не эквивалентна  $\Delta_\alpha(A_0)^2$ . Рассмотрим атом  $B$ , описывающий окрестность особого слоя  $\Lambda = b$  для билиардного движения в области  $A_0$ . Рассмотрим отдельно, как склейка пары областей  $A_0$ ,

обозначенных через  $(A_0)_u$  и  $(A_0)_d$ , продолжается на склейку атомов. Согласно предложению 4.1.3 особый слой атома  $B$  образован прямым произведением восьмерки (особого слоя плоского атома  $B$ ), каждая из которых это оснащенной сонаправленными (вправо или влево) векторами  $v_1$  и  $v_2$  дуг софокусных гипербол, заполняющих область  $A_0$  (вектор  $v_1$  направлен “внутри” экземпляра области  $A_0$ , а вектор  $v_2$  – “наружу”) на окружность. Оснащенный горизонтальными (других нет) векторами скорости отрезок фокальной прямой является особой окружностью особого слоя атома  $B$ . При склейке областей оснащение дуг каждой гиперболы меняется – в точке склейки областей больше не склеиваются точки вида  $(v_1)_u$  и  $(v_2)_u$  (т.е. мы разрезаем особые слои), которые склеиваются с векторами  $(v_2)_d$  и  $(v_1)_d$  соответственно. Это приводит к тому, что особые слои атомов  $B := B_1$  после склейки стали гомеоморфны особым слоям атома  $B_2$ . Продолжая такую операцию на особом слое при последовательной склейке областей  $A_0$  в область  $\Delta$  получаем особый слой либо длинного атома  $B_n$  либо атома  $D_n$ .

Пусть область  $\Delta$  эквивалентна области  $\Delta_\alpha(2A_2)$ . Для описания особого слоя билиардного движения в этой области рассмотрим особые слои билиардного движения в области  $A_2$ . Каждый такой слой представляет собой прямое произведение “восьмерки” и окружности (см. предложение 4.1.3). Склейка двух областей  $A_2$  в область  $\Delta_\alpha(2A_2)$  переводит каждую пару “восьмерок” в особый слой плоского атома  $C_2$  – для этого необходимо сделать два разреза в каждом “ушке”-окружности в каждой “восьмерке” (т.е. разделить  $(x, v_1)_u$  и  $(x, v_2)_u$  и так далее), а затем отождествить у двух получившихся крестов концы  $((x, v_1)_u \sim (x, v_2)_d$  и так далее). Склейка же вдоль дуг вырожденных гипербол также продолжается по непрерывности, позволяя склеить “правые” и “левые” особые слои атома  $C_2$  (аналогично тому как мы склеивали особые слои атома  $B$  – “восьмерки”). Подробнее см. рис. 6.1.

Утверждение доказано. □

**Предложение 6.1.4.** *Трёхмерный прообраз  $\Lambda^{-1}([b - \varepsilon, b + \varepsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы билиарда в обобщенной области  $\Delta$ , склеенной из элементарных областей разных типов и не имеющей конических точек, гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трёхмерные):*

- атом  $B$  для областей  $\Delta_\alpha(A_2 + C_2)$ ,  $\Delta_\alpha(A_0 + B_0)$ ;
- атом  $A^*$  для области  $\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$ ;
- атом  $B_n$  для областей  $\Delta_\alpha(A'_0 + nA_0 + B_0)$ ,  $\Delta_\alpha(nA_0 + B_0)$ ,  $\Delta_\alpha(B_0 + nA_0 + B_0)$  и  $\Delta_\alpha(A'_0 + nA_0 + A'_0)$ ;
- произведение тора на отрезок для областей  $\Delta_\alpha(A'_2 + B''_2)$ ,  $\Delta_\alpha(A'_1 + B'_1)$ ,  $\Delta_\alpha(A'_0 + B_0)$ .

*Доказательство.* Для доказательства этого предложения мы показываем, как меняются прообразы особых слоев изоэнергетических поверхностей  $Q^3$  билиарда в элементарных областях при склейке этих элементарных областей в обобщенную область. Заметим, что слой интеграла  $\Lambda$  для билиарда в обобщенной области может быть склеен из разрезанных слоев интеграла  $\Lambda$  в элементарных областях, составляющих область  $\Omega$ . На слоях интеграла  $\Lambda$  необходимо сделать разрезы вдоль точек  $x$ , проекции которых лежат на ребрах склейки. Затем произвести склейку разрезанных слоев интеграла  $\Lambda$ , согласно новым правилам склейки – обобщенному билиардному закону. Склейка на неособых эллиптических торах описана в предложении 6.1.1, аналогично может быть описана склейка на гиперболических торах 6.1.2. Здесь покажем как происходит склейка особых слоев интеграла  $\Lambda$ .

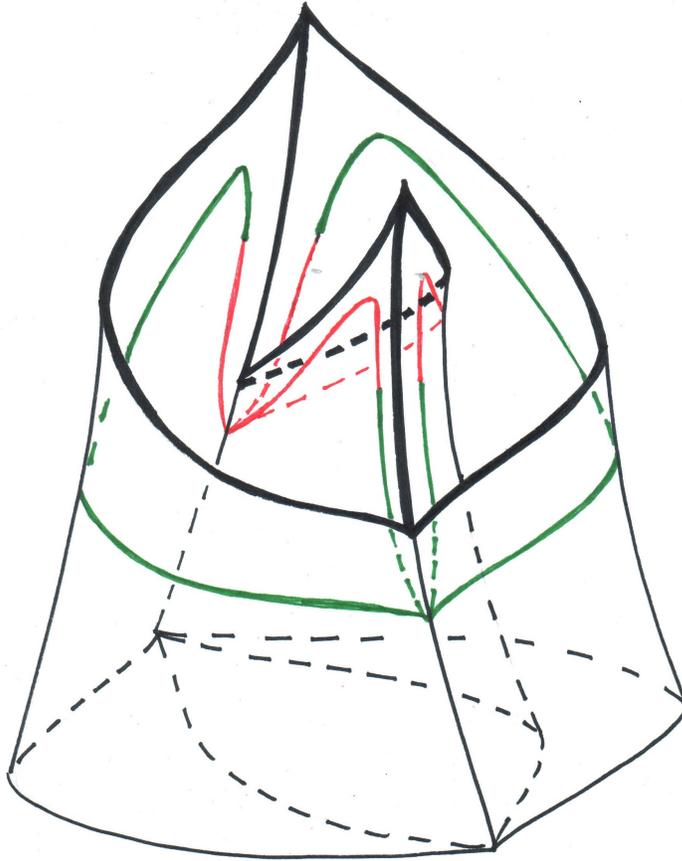


Рис. 6.1: На рисунке изображена часть особого слоя атома  $S_2$  описывающего бифуркацию изоэнергетической 3-поверхности в области  $\Delta_\alpha(2A_2)$ . Жирным изображены точки, проекции которых на билиардную область находятся либо в правых фокусах, либо в отрезках фокальной прямой между правыми фокусами и граничным эллипсом. Цветом изображены точки некоторой софокусной гиперболы, достаточно близкой к отрезку фокальной прямой между правым фокусом и граничным эллипсом (одним и тем же для обеих элементарных областей  $A_2$ , составляющих эту обобщенную область). Зелёным цветом указаны точки, проектирующиеся в дугу этой софокусной гиперболы в верхнем экземпляре  $A_2$ , а красным – точки, проектирующиеся в дугу софокусной гиперболы на нижнем экземпляре  $A_2$ . При этом видно, что все такие точки образуют особый слой плоского атома  $S_2$ .

Пусть область  $\Delta$  эквивалентна области вида  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ , где  $\Omega_1$  эквивалентна  $A_2, A_1, A_0, A'_2, A'_1, A'_0$ , а область  $\Omega_2$  эквивалентна области  $S_2, B_1, B_0, B'_2, B'_1, B_0$  соответственно, т.е. представляет собой область, принадлежащую конечной серии элементарных областей  $A$  и приклеенную к ней полосу из серии  $B$  или кольцо  $S_2$ . Рассмотрим заполнение области серии  $A$  гиперболами и фокусными отрезками (см. предложение 4.1.3). Продолжим заполнение области  $A$  дугами софокусных гипербол на всю область  $\Delta$ , а именно склеив их с дугами гипербол, заполняющих вторую область. Каждой дуге гиперболы заполняющую область серии  $A$  можно поставить в соответствие дугу этой же гиперболы, но уже в области серии  $B$  или  $S_2$ . При этом оснащение дуг гипербол, лежащих в области  $A$  однозначно продолжается до оснащения дуги гиперболы в

области  $B$  или  $C_2$ . Топологически при этом оснащенные дуги не изменятся, т.е. атомы, описывающие топологию бильярда вблизи особого слоя серии  $A$ , и атомы, описывающие топологию бильярда вблизи особого слоя областей вида  $\Delta_\alpha(A + \Omega_2)$ , где  $\Omega_2$  принадлежит серии  $B$  или  $C$ , топологически эквивалентны.

Пусть область  $\Delta$  имеет вид приклеенной к полосе  $nA_0$  одной или двух областей эквивалентных  $A'_0$  или  $B_0$ . Приклейка бесфокусной области эквивалентной  $A'_0$  или  $B_0$  может быть продолжена на склейку прообразов  $\Lambda^{-1}([b - \varepsilon, b + \varepsilon])$  следующим образом. Для области  $nA_0$  трехмерный прообраз  $\Lambda^{-1}([b - \varepsilon, b + \varepsilon])$  представляет собой атом  $B_n$  (см. предложение 6.1.3), а для областей  $A'_0$  и  $B_0$  – произведение тора на отрезок. Разрежем особый слой для бесфокусной области – тор – по окружности, образованной точками граничного эллипса – ребра склейки между данной областью и экземпляром области  $A_0$ , с которым она склеивается. Аналогичный разрез в особом слое для области  $nA_0$  – это разрез граничного “ушка” каждого особого слоя атома  $B_n$  вдоль окружности, гомеоморфной особому слою этого атома. Заклейка каждого разрезанного “ушка” отрезком из прообраза дуги гиперболы семейства (1.2) (такой что объединение этих дуг заполняет всю бесфокусную область) сохраняет атом  $nA_0$ . Фактически, доказательство аналогично доказательству для областей вида  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ , рассмотренных выше.

Утверждение доказано. □

**Предложение 6.1.5.** *Трехмерный прообраз  $\Lambda^{-1}([b - \varepsilon, b + \varepsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы бильярда в обобщенной области  $\Delta$ , содержащей конические точки, гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трехмерные):*

- атом  $B$  для областей  $\Delta_\beta(A'_1)_{2x}^2, \Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2), \Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1), \Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2, \Delta_\beta(A_0)_{2y}^2$ ;
- атом  $A^*$  для областей  $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2, \Delta_\beta(A'_0)_c^2, \Delta_\beta(A'_0)_{cy}^2, \Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2A'_0)$ ;
- атом  $A^{**}$  для областей  $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + (A'_0)_c^2), \Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$ ;
- атом  $B_n$  для областей  $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2nA_0)$  и  $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2n(A_0) + (A_0)_y^2), \Delta_\beta(B_n)_y^2$  и  $\Delta_\beta(B_n)_{2y}^2, \Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2nA_0 + 2B_0), \Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2nA_0 + 2A'_0)$ ;
- атом  $B_n^*$  для областей  $\Delta_\beta(B'_n)_{yx}^2$  и  $\Delta_\beta(B'_n)_{2x}^2, \Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2nA_0), \Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2nA_0 + 2B_0), \Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2nA_0 + 2A'_0), \Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2nA_0 + (A'_0)_c^2)$ ;
- атом  $B_n^{**}$  для областей  $\Delta_\beta(B''_n)_{2x}^2, \Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2nA_0 + (A'_0)_c^2)$ ,
- произведение тора на отрезок для областей  $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$  и  $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$ .

*Доказательство.* Разобьём доказательство предложения на несколько шагов.

**Шаг первый.** **Области с коническими точками, включающих в себя фокусы семейства границы (1.1).**

Рассмотрим элементарную область  $A_1$ . Напомним, что окрестность особого слоя бильярдной системы в области  $A_1$  описывается атомом  $A^*$ . Этот факт был доказан рассмотрением заполнения области  $A_1$  дугами софокусных гипербол и горизонтальным отрезком с концом в фокусе. В прообразе каждой дуги гиперболы лежат две восьмерки, условно называемыми правыми и левыми (в зависимости от того, в какую сторону направлены вектора скорости), состоящие из двух окружностей, условно называемых верхними (в прообразе – точки лежащие не ниже оси  $Ox$ ) и нижними (в прообразе точки лежащие не выше оси  $Ox$ ). При склейке

восьмерок вдоль фокусного отрезка верхние окружности с направлением вправо склеивались с нижними окружностями с направлением влево, в результате чего образовывалась так называемая “перекрутка”. Вдоль граничной гиперболы верхние окружности склеивались с верхними, а нижние – с нижними, что приводило к тому, что “перекрутка” отсутствовала.

Разрежем особый слой бильярдной системы для области  $A_1$  вдоль оснащенной дуги граничной гиперболы. Определим отображение  $g_h$  из элементарной области  $A_1$  в обобщенную область  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ , которое отождествляет две дуги граничной гиперболы области  $A_1$ , расположенные по разные стороны от оси  $Ox$ . Отметим что, строго говоря, это отображение  $g_h$  не является склейкой в смысле наших определений. Отображение  $g_h$  продолжается до склейки разрезанного особого слоя бильярдной системы для области  $A_1$  следующим образом: восьмерки, проектирующиеся в сегмент гиперболы разреза – теперь уже ребра излома области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$  склеиваются по другому закону, а именно “верхние” окружности направленные вправо склеиваются с “нижними” окружностями, направленными влево. В результате появляется лишняя “перекрутка”, что приводит к тому, что атом  $A^*$  становится атомом  $B$ .

Заметим, что особый слой этого атома  $A^*$  можно описать по другому, рассматривая сечение области  $A_1$  дугами софокусных эллипсов и другим горизонтальным отрезком с концом в фокусе. При этом построение повторяется. Определим отображение  $g_e$  из элементарной области  $A_1$  в обобщенную область  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ , которое отождествляет две дуги граничного эллипса области  $A_1$ , расположенные по разные стороны от оси  $Ox$ . Повторяя рассуждение выше, получаем, что топология особого слоя для бильярда в области  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$  также описывается атомом  $B$ .

Для описания топологии особого слоя интеграла  $\Lambda$  для бильярда в области  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$  воспользуемся расслоением особого слоя для области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$  на “восьмерки”. Эти “восьмерки” необходимо удлинить аналогично тому, как это было сделано для областей в предложении 6.1.4.

Рассмотрим особый слой интеграла  $\Lambda = b$  для бильярда в области  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$  – это особый слой атома  $B$ . Опишем его следующим образом. Точки верхнего экземпляра области  $A'_1$ , не лежащие на границе свободной границе области и на ребрах излома могут быть оснащены четырьмя векторами скорости: вектором  $v_1$ , направленным к правому фокусу,  $v_2$ , направленным от левого фокуса,  $v_3$ , направленным к левому фокусу и  $v_4$  направленным от правого фокуса. Точки же нижнего экземпляра области  $A'_1$  оснастим аналогичными векторами  $w_i$ . Фиксируем точку  $(x, v)$  на особом слое, лежащую на фокальной прямой между фокусом и границей области. Рассмотрим дугу гиперболы семейства (1.1), проходящую через точку  $x$  и оснастим её векторами скорости так, что оснащенная точками дуга гиперболы будет лежать на особом слое. А именно, оснастим дугу гиперболами векторами, сонаправленными с вектором  $v$ : если вектор  $v = (1; 0)$  то оснастим дугу гиперболы векторами  $v_1, v_2, w_1, w_2$ , а если  $v = (-1; 0)$  то оснастим дугу гиперболы векторами  $v_3, v_4, w_3, w_4$ . Тогда дуга гиперболы, оснащенная векторами вправо, будет представлять собой “восьмерку”, окружности которой образованы векторами  $v_1, w_2$  и  $v_2, w_1$ . Гипербола же, оснащенная векторами влево, будет “восьмеркой”, окружности которой образованы векторами  $v_3, w_4$  и  $v_4, w_3$ . При стремлении точки  $x$  к фокусу окружность правой “восьмерки”  $v_1, w_2$  переходит в отрезок особого слоя и фокус, оснащенный векторами “наружу” верхнего экземпляра области  $A'_1$ , а окружность левой “восьмерки”  $v_3, w_4$  переходит в отрезок особого слоя, оснащенного векторами “внутри” нижнего экземпляра области  $A'_1$ . В том случае, когда точка  $x$  лежит в фокусе нам необходимо склеить восьмерки по следующему правилу:  $v_1, w_2 \sim v_3, w_4, v_2, w_1 \sim v_4, w_3$ . Пусть теперь  $x$  принадлежит границе области. Здесь действует закон отражения, согласно которому склеиваются вектора  $v_1 \sim v_3, v_2 \sim v_4, w_1 \sim w_3, w_2 \sim w_4$ , что приводит к тому, что окружности “восьмерок” склеиваются по тому же правилу:  $v_1, w_2 \sim v_3, w_4, v_2, w_1 \sim v_4, w_3$ . В результате получается атом  $B$  (правила совпадают). Если же

мы рассматриваем случай области  $\Delta_\beta(A'_1)_{xyc}^2$ , то тогда при попадании точки  $x$  на ребро излома правила склейки будут иные – а именно склеиваются вектора  $v_1 \sim w_3$ ,  $v_2 \sim w_4$ ,  $w_1 \sim v_3$ ,  $w_2 \sim v_4$ , что приводит к тому что окружности “восьмерок” склеиваются уж по другому правилу:  $v_1, w_2 \sim v_4, w_3, v_2, w_1 \sim v_3, w_4$ . Возникающая таким образом “перекрутка” приводит к тому что особый слой будет совпадать с особым слоем атома  $A^*$ . При переходе от области  $\Delta_\beta(A'_1)_{xyc}^2$  к области  $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$  разрез вдоль фокальной прямой продолжается до разреза каждой “восьмерки” в объединение двух окружностей. В результате, особый слой атома  $A^*$  перейдет в обычный тор.

Область  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$  можно представить как результат склейки двух экземпляров области  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$  вдоль граничной окружности. Заполнение области  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$  дугами оснащенных гипербол естественным образом продолжается до заполнения дугами оснащенных гипербол области  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ . В фокусах правила склейки совпадают, поэтому особый слой для билиярда в области  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$  опять же совпадает с особым слоем атома  $B$ .

Для особого слоя билиярда в области  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$  можно провести построение, аналогичное построению в области  $\Delta_\beta(A'_1)_{2x}^2$ , заменив дуги гипербол на дуги эллипсов.

Рассмотрим обобщенную область  $\Delta_\alpha(2A_2)$ , склеенную из двух экземпляров элементарной области  $A_2$  вдоль эллиптического сегмента. Как доказано ранее, особая поверхность уровня описывается атомом  $C_2$ . Рассмотрим заполнение области  $A_2$  дугами софокусных гипербол, которое продолжается до заполнения области  $\Delta_\alpha(2A_2)$  окружностями – объединениями дуг софокусных гипербол в различных областях  $A_2$  – и двумя отрезками с концами в фокусах. Преобразованием каждой окружности являются два особых слоя плоского атома  $C_2$ : они различаются направлением векторов скорости вправо или влево. Примем следующие обозначения. Фиксируем один из экземпляров  $A_2$ , который для удобства будем называть верхним. Вектора  $v_i$  – это вектора скорости, которыми оснащены отрезки особого слоя атома  $C_2$ , причем в точках верхнего экземпляра области вектора  $v_1$  направлены к правому фокусу (соответственно, в точках нижнего экземпляра эти вектора направлены от левого фокуса вследствие правил склейки), вектора  $v_2$  направлены от левого фокуса, вектора  $v_3$  направлены от правого фокуса, а вектора  $v_4$  – к левому фокусу. На особом слое плоского атома  $C_2$ , соответствующем точкам, оснащенными векторами вправо (векторами  $v_1$  и  $v_2$ ) к внутренней окружности примыкают точки, лежащие на дугах гипербол, расположенных выше оси  $Ox$ , а к внешней – точки, лежащие ниже оси  $Ox$ . На особом слое плоского атома  $C_2$ , соответствующем точкам, оснащенными векторами влево (векторами  $v_3$  и  $v_4$ ) к внутренней окружности примыкают точки лежащие на дугах гипербол, расположенных ниже оси  $Ox$ , а к внешней – точки, лежащие выше оси  $Ox$  (подробнее см. рис. 6.1). Вырежем из области  $\Delta_\alpha(2A_2)$  область  $\Delta_\alpha(2A_1)$  и на окружности разреза, определим склейку, которая переводит область  $\Delta_\alpha(2A_1)$  в область  $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$  склейкой этой окружности в отрезок. При этом происходит склейка особого слоя атома  $C_2$ , соответствующего векторам направленным вправо, с особым слоем атома  $C_2$ , соответствующего векторам направленным влево, при которой “внутренние” окружности одного экземпляра особого слоя атома  $C_2$  склеиваются с “внешними” окружностями другого. Такая перестройка приводит к образованию атома  $A^{**}$ .

### Шаг второй. Области, склеенные из областей серии $B$ .

В этом случае, согласно классификации обобщенных областей, область  $\Delta$  склеена из двух эквивалентных элементарных областей серии  $B$ . Выберем в области  $\Delta$  отрезки фокальной прямой, состоящие из отрезков в составляющих её областях  $B$ . Все такие отрезки разбиваются на два типа. Отрезки первого типа получаются склейкой двух отрезков, каждый из которых лежит в своем экземпляре области  $B$ . В тех случаях, когда область  $\Delta$  имеет коническую точку типа  $x$ , возникают отрезки второго типа – каждый из них является ребром склейки, конец

которого лежит в конической точке типа  $x$ . Обозначим отрезки первого типа в области  $\Delta$  через  $b_i$ , а отрезки второго типа через  $d_i$ . Как было показано в предложении 6.1.1, поверхность уровня интеграла  $\Lambda < b$  является тором. Рассмотрим прообраз отрезков  $b_i$  и  $d_i$  (оснащение их векторами скорости) на достаточно близком к особому слою торе.

При  $\Lambda < b$  на торе Лиувилля в прообразе каждого отрезка  $b_i$  лежат две окружности, которые на торе являются двумя гомологичными нетривиальными циклами: одна из этих окружностей  $s_i^u$  оснащена векторами  $v_1$  (направленных к интегральному эллипсу) и  $v_2$  (направленных от интегрального эллипса), направленными по часовой стрелке, а другая окружность  $s_i^d$  – оснащена направленными против часовой стрелки векторами  $v_3$  (к интегральному эллипсу) и  $v_4$  (от интегрального эллипса). Здесь мы фиксировали направление векторов на некоторой фиксированной области  $B$ , являющейся частью области  $\Delta$ . В прообразе любого отрезка  $d_i$  лежит одна окружность  $S_i$ , а именно, окружность, образованная последовательной склейкой отрезков, оснащенных векторами  $v_1, v_4, v_2, v_3$ , где вектора  $v_1$  и  $v_4$ , а также  $v_2$  и  $v_3$  склеиваются по правилам склейки в конической точке, а вектора  $v_1$  и  $v_3$ , а также  $v_2$  и  $v_4$  склеиваются по закону отражения на свободной границе области.

При стремлении  $\Lambda$  к  $b$  вектора, которыми оснащены отрезки  $b_i$  и  $d_i$ , стремятся к векторам, направленным горизонтально. На торе это означает следующую склейку – пары окружностей  $s_i^u$  и  $s_i^d$  склеиваются друг с другом, что приводит к тому что на торе возникают  $n$  пар гомологичных циклов, которые попарно склеиваются. Таким образом возникает особый слой атома  $B_n$ . Окружность  $S_i$  переходит в окружность, оснащенную всего двумя векторами – вправо и влево. Таким образом, близкая к предельной окружности окружность  $S_i$  накрывает её двулистно. На атоме  $B_n$  это отражается появлением звездочки. Циклы, гомологичные циклам, лежащих в прообразах отрезков  $b_i$  и  $d_i$ , лежат в прообразах отрезков, высекаемых дугами гипербол софокусного семейства. Их оснащение векторами  $v_i$  при  $\Lambda \rightarrow b$  переходит в следующее оснащение – вектора  $v_1$  и  $v_3$  направлены к фокусам (к правому и левому соответственно), а вектора  $v_2$  и  $v_4$  от фокусов (от левого и от правого соответственно). Значит, склейка происходит лишь прообразов отрезков  $b_i$  и  $d_i$ .

### Шаг третий. Области, склеенные из областей серий $A_0, A'_0$ и $B_0$ .

Рассмотрим проекцию  $\Delta$  на плоскость  $Oxy$ . В проекции выберем отрезки фокальной прямой. Рассмотрим связные прообразы этих отрезков в области  $\Delta$ . Эти прообразы бывают двух типов – либо объединение двух отрезков, каждый из которых лежит в своем экземпляре области  $A_0$ , либо отрезки, являющиеся ребрами излома. Обозначим отрезки первого типа в области  $\Delta$  через  $b_i$ , а отрезки второго типа через  $d_i$ . Как было доказано выше, поверхность уровня интеграла  $\Lambda > b$  является тором. Рассмотрим прообраз отрезков  $b_i$  и  $d_i$  на достаточно близком к особому слою торе.

В прообразе каждого отрезка  $b_i$  лежат две окружности, которые на торе являются двумя гомологичными нетривиальными циклами: одна из этих окружностей  $s_i^u$  оснащена векторами направленными вверх, а другая  $s_i^d$  – направленными вниз. В прообразе любого отрезка  $d_i$  лежит одна окружность  $S_i$ .

При стремлении  $\Lambda$  к  $b$  вектора, которыми оснащены отрезки  $b_i$  и  $d_i$ , стремятся к векторам, направленным горизонтально. На торе это означает следующую склейку – пары окружностей  $s_i^u$  и  $s_i^d$  склеиваются друг с другом, а окружность, близкая к окружности  $S_i$ , в пределе накрывает её двулистно.

Следовательно, если в области  $\Delta$  не было отрезков  $d_i$ , то полученный атом – это длинный ориентируемый атом  $B_n$ , иначе в атоме образуются звездочки – по количеству отрезков  $d_i$  в области  $\Delta$ .  $\square$

**Замечание 13.** Заметим, что грубые молекулы, описывающие топологию изоэнергетического многообразия  $Q^3$  для бильярда в обобщенных областях гомеоморфных кольцу (это области  $\Delta_\alpha(2C_n)$  и  $\Delta_\alpha(nA_0)^2$ ), получаются друг из друга заменой интеграла  $\Lambda$  на  $-\Lambda$ . Этот же факт верен для обобщенных областей склеенных из эллиптических лент и областей, склеенных их гиперболических лент. Роль конических точек типа  $x$  для гиперболических лент играют точки типа  $s$ . В дальнейшем, будем называть нижними ребрами молекулы ребра, соответствующие эллиптическим торам для бесфокусных областей, не содержащих отрезка между фокусами (т.е. либо эквивалентных  $\Delta_\alpha(2C_n)$  либо склеенных из эллиптических лент), и соответствующие гиперболическим торам для остальных бесфокусных областей.

Пусть обобщенная область  $\Delta_1$  принадлежит одной из конечных серий. Обозначим через  $\Omega_i$  элементарные области, из которых склеена область  $\Delta_1$ . Заменяем в областях  $\Omega_i$  все эллипсы на гиперболы и наоборот (оставив неподвижным отрезки фокальной прямой, если они входили в границу области). Если в результате мы получили компактную область  $\Delta_2$ , то молекулы, описывающие топологию изоэнергетического многообразия  $Q^3$  для бильярда в областях  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , также получаются друг из друга заменой интеграла  $\Lambda$  на  $-\Lambda$ .

## 6.2 Вычисление меток и построение инварианта Фоменко-Цишанга.

В этом разделе мы докажем две основные теоремы. Теорема 6.1 даёт Лиувиллеву классификацию бильярдов в обобщенных областях, каждая элементарная область в составе которых не содержит фокусов семейства (1.1). Теорема 6.3 завершает классификацию и описывает топологию изоэнергетической поверхности  $Q^3$  бильярда с фокусами.

### 6.2.1 Лиувиллева классификация бильярдов в обобщенных областях, каждая элементарная область в составе которых не содержит фокусов семейства границы.

**Теорема 6.1.** Пусть обобщенная область  $\Delta$  состоит из элементарных областей  $\Omega$ , причем любая элементарная область  $\Omega$  не содержит фокусов. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула  $W^*$ , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  бильярдного движения в такой обобщенной области  $\Delta$ , имеет следующий вид (см. подробнее рис. 6.2):

- молекула содержит одно или два нижних ребра (два ребра, только если область гомеоморфна кольцу), эти ребра бесконечные  $r = \infty$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ;
- если область гомеоморфна кольцу, то бифуркация на уровне интеграла  $\Lambda = b$  описывается атомом  $D_n$ , где  $n$  это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей  $\Omega$ ;
- если область односвязна, то бифуркация на уровне интеграла  $\Lambda = b$  описывается атомом  $B_n$ , где  $n$  это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей  $\Omega$ , причем атом имеет столько звездочек, сколько конических точек типа  $s$  или  $x$  имеет область  $\Delta$  (конические точки типа  $s$  и  $x$  расположены на оси  $Ox$ );

- на верхних ребрах молекулы стоят метки  $r = 0, \varepsilon = 1$  или  $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$ , причем количество дробных меток в молекуле совпадает с количеством конических точек, имеющих тип  $y$ .

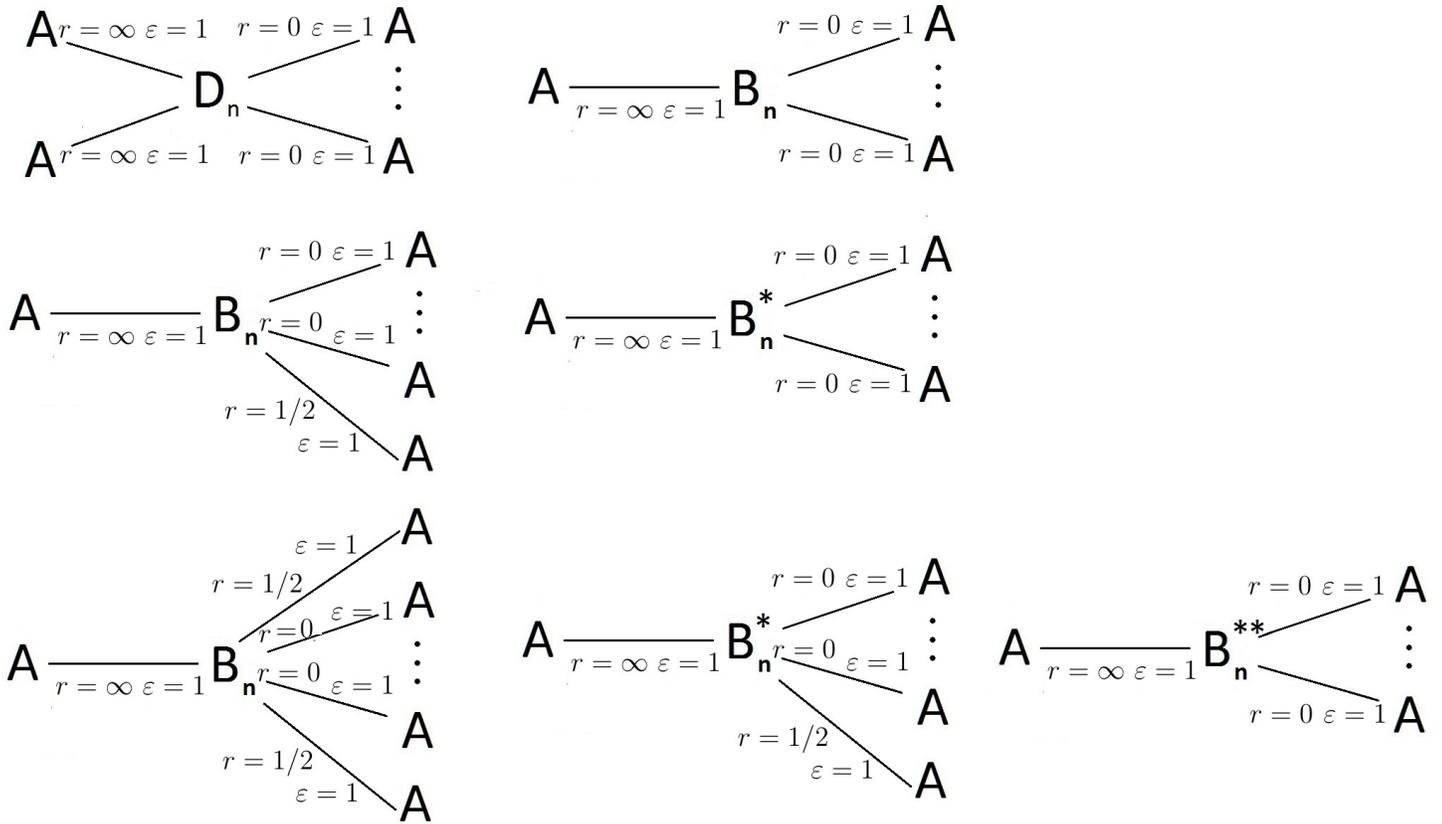


Рис. 6.2: Меченые молекулы, описывающие топологию слоения  $Q^3$  бильярдного движения в обобщенных областях, не содержащих фокусов. В верхнем ряду расположены молекулы для движения в областях без конических точек, во втором – с одной конической точкой, в третьем – с двумя коническими точками.

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 6.2.** (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [11] Лемма 4.8)

Рассмотрим произвольное ребро какой-либо молекулы  $W$ , и пусть  $(\lambda_+, \mu_+)$  и  $(\lambda_-, \mu_-)$  – допустимые системы координат, отвечающие двум атомам, соединенным этим ребром. Будем считать, что все эти циклы лежат на одном и том же торе Лиувилля, в середине ребра. Рассмотрим следующие три важных случая:

- 1) если циклы  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  не пересекаются, т.е. гомологичны на торе, то  $r = \infty$ ;
- 2) если циклы  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  пересекаются ровно в одной точке, то  $r = 0$ ;
- 3) если циклы  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  имеют индекс пересечения 2, то  $r = \frac{1}{2}$ .

Во всех этих трех случаях метка  $\tau$  не зависит от выбора ориентации на многообразии  $Q^3$ , на ребрах молекулы и критических окружностях.

*Доказательство.* Построение грубой молекулы напрямую следует из предыдущего параграфа. Вычислим метки.

**Выбор циклов  $\lambda$ , соответствующих нижним атомам  $A$ .**

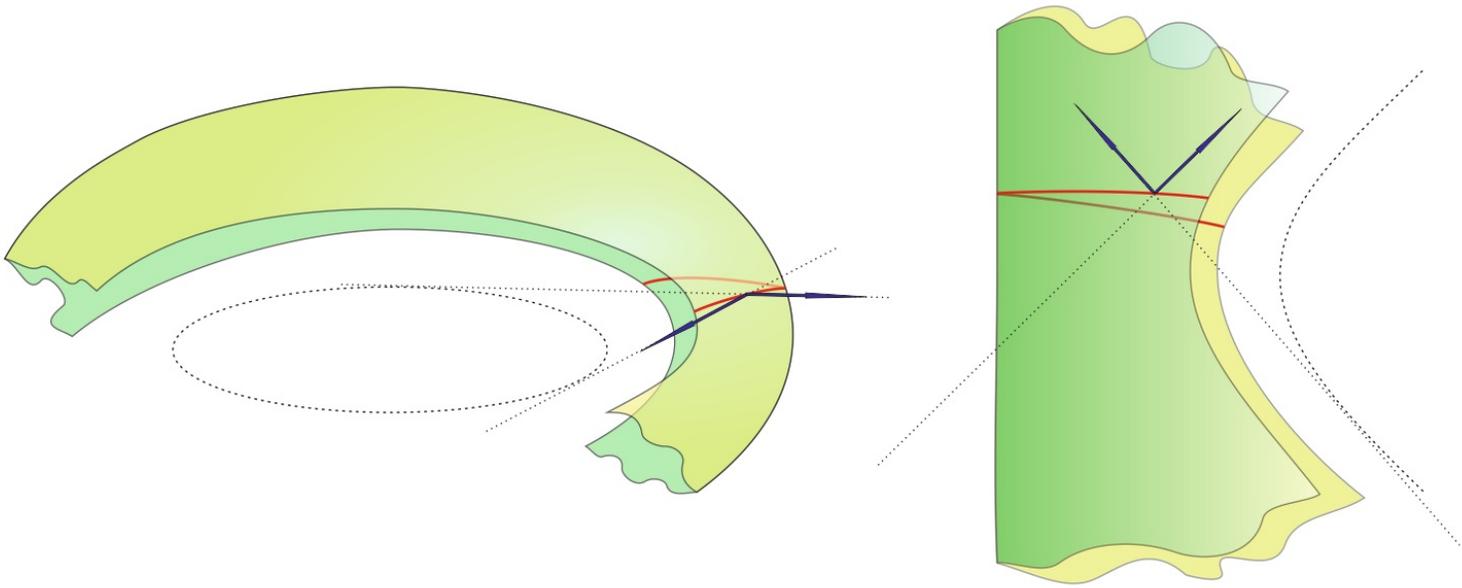


Рис. 6.3: Выбор циклов  $\lambda$  на эллиптических (в случае области  $\Delta$ , склеенной из областей  $B$  и  $C$ ) и гиперболических (в случае области  $\Delta$  склеенной из областей  $A_0$  и  $A'_0$ ) торах Лиувилля. Циклы  $\lambda$  представляют собой отрезок, выделенный красным цветом и оснащенный подходящими векторами скорости, которые выделены синими стрелками. Очевидно, что при стремлении выделенного пунктиром интегрального эллипса или интегральной гиперболы к эллипсам и гиперболам, на которых лежат рёбра склейки, красный отрезок стягивается в точку, поэтому этот цикл является исчезающим циклом  $\lambda$  на минимаксном атоме  $A$ . При стремлении интегральной квадратики к фокальной прямой цикл становится гомеоморфен циклу, соответствующему движению вдоль этой фокальной прямой, т.е. может быть выбран в качестве слоя расслоения Зейферта – цикла  $\lambda$  на седловом атоме.

Пусть  $\Delta$  склеена из областей, содержащих отрезки фокальной прямой, которые не лежат между фокусами, т.е. склеена из областей вида  $B$  или  $C$ . Тогда нижним ребрам молекулы соответствуют торы, траектории которых (или их продолжения), касаются эллипсов. Рассмотрим тор  $T_\lambda$ , траектории которого (или их продолжения) касаются некоторого эллипса. Проекцию этого тора на область  $\Delta$  обозначим через  $\Delta_{e_\lambda}$ . Проекция  $\Delta_{e_\lambda}$  эквивалентна обобщенной области, склеенной либо из областей-лент серии  $B$ , либо из областей-колец серии  $C$ .

Рассмотрим проекцию  $p : \Delta_{e_\lambda} \rightarrow Oxy$ . Выберем в образе  $p(\Delta_{e_\lambda})$  дугу гиперболы  $h_\lambda$  и рассмотрим связную часть её прообраза  $\tilde{h}_\lambda$ . Выберем дугу  $h_\lambda$  таким образом, чтобы  $\tilde{h}_\lambda$  в области  $\Delta_{e_\lambda}$  не являлось ребром излома и не принадлежало свободной границе области  $\Delta_{e_\lambda}$ . Оснастим дугу  $\tilde{h}_\lambda$ . Заметим, что при  $\lambda \rightarrow 0$  область  $\Delta_{e_\lambda}$  стягивается либо на отрезок (если  $\Delta$  склеена из областей-лент) либо на окружность (если  $\Delta$  склеена из областей-колец), при этом кривая  $\tilde{h}_\lambda$  стягивается в точку. Оснастим  $\tilde{h}_\lambda$  векторами скорости  $v$ , так чтобы точки  $(x, v), x \in \tilde{h}_\lambda$  лежали

на торе  $T_\lambda$ . Тогда точки  $(x, v), x \in \tilde{h}_\lambda$  образуют на торе  $T_\lambda$  нетривиальный цикл (см. доказательство предложения 6.1.1). И так как при  $\lambda \rightarrow 0$  отрезок  $\tilde{h}_\lambda$  стягивается в точку, то цикл  $(x, v), x \in \tilde{h}_\lambda$  – это исчезающий цикл  $\lambda$ , соответствующий атому  $A$ .

Заметим, что построенный нами цикл  $\lambda$  является слоем расслоения Зейферта на торе  $T_\lambda$  (см. рис. 6.3). Тогда, т.к. циклы  $\lambda$  совпали, то по лемме 6.2 метки на этом ребре следующие  $r = \infty, \varepsilon = \pm 1$ . Знак метки  $\varepsilon$  зависит от ориентации соответствующего многообразия  $Q^3$ .

Рассмотрим бильярдное движение в обобщенной области  $\Delta$ , которая склеена из областей  $\Omega$ , эквивалентных элементарным областям  $A_0, A'_0, B_0$ . Рассмотрим тор  $T_\lambda$ , траектории которого (или их продолжения) касаются некоторой гиперболы. Проекцию этого тора на область  $\Delta$  обозначим через  $\Delta_{h_\lambda}$ . Проекция  $\Delta_{h_\lambda}$  эквивалентна обобщенной области, склеенной из бесфокусных областей  $A_0, A'_0$  и  $B_0$ .

Рассмотрим проекцию  $p : \Delta_{h_\lambda} \rightarrow Oxy$ . Выберем в образе  $p(\Delta_{h_\lambda})$  дугу эллипса  $e_\lambda$  и рассмотрим связную часть её прообраза  $\tilde{e}_\lambda$ . Выберем дугу  $e_\lambda$  таким образом, чтобы  $\tilde{e}_\lambda$  в области  $\Delta_{h_\lambda}$  не являлось ребром излома и не принадлежало свободной границе области  $\Delta_{h_\lambda}$ . Оснастим дугу  $\tilde{e}_\lambda$ . Заметим, что при  $\lambda \rightarrow b$  область  $\Delta_{h_\lambda}$  стягивается либо на отрезок ( $\Delta$  односвязна) либо на окружность ( $\Delta$  гомеоморфна кольцу), при этом кривая  $\tilde{e}_\lambda$  стягивается в точку. Оснастим  $\tilde{e}_\lambda$  векторами скорости  $v$ , так чтобы точки  $(x, v), x \in \tilde{e}_\lambda$  лежали на торе  $T_\lambda$ . Тогда точки  $(x, v), x \in \tilde{e}_\lambda$  образуют на торе  $T_\lambda$  нетривиальный цикл. И так как при  $\lambda \rightarrow b$  отрезок  $\tilde{e}_\lambda$  стягивается в точку, то цикл  $(x, v), x \in \tilde{e}_\lambda$  – это исчезающий цикл  $\lambda$ . Аналогично, этот цикл  $\lambda$  является слоем расслоения Зейферта и метки на это ребре  $r = \infty, \varepsilon = \pm 1$ .

#### Выбор циклов на верхних ребрах молекулы.

Пусть  $\Delta$  склеена из областей вида  $B$  или  $C$ . Тогда верхним ребрам молекулы соответствуют торы, траектории которых (или их продолжения), касаются гипербол. Рассмотрим тор  $T_\lambda$ , траектории которого (или их продолжения) касаются некоторой гиперболы. Проекцию этого тора на область  $\Delta$  обозначим через  $\Delta_{e_\lambda}$ . Проекция  $\Delta_{e_\lambda}$  эквивалентна либо области  $\Delta_\alpha(2B_0)$  либо  $\Delta_\beta(B_0)_y^2$ . При этом, количество проекций второго вида совпадает с количеством конических точек типа  $y$  в области  $\Delta$ .

В качестве цикла  $\lambda$ , соответствующего седловому атому, возьмем объединение двух отрезков-дуг некоторой гиперболы, каждый из которых лежит в своём экземпляре области  $B_0$ , входящей в состав проекции  $\Delta_{e_\lambda}$ . Эти дуги можно оснастить векторами скорости направленными влево (см. рис. 6.4а). В качестве дуги гиперболы можно выбрать дугу интегральной гиперболы. Тогда вектора оснащения будут касательными векторами. При стремлении интегральной гиперболы к фокальной прямой тор переходит в особый слой седлового атома и выбранный цикл либо переходит в цикл, гомеоморфный особой траектории либо накрывает её двулистно (это происходит в том случае если области  $B_0$ , входящие в проекцию  $\Delta_{e_\lambda}$ , переходят в области серий  $B'$  или  $B''$ , склеенных друг с другом с образованием конической точки типа  $x$ ). Таким образом, выбранный на рисунке 6.4а) красный цикл  $\lambda$  является искомым периодическим циклом – слоем расслоения Зейферта.

Пусть проекция  $\Delta_{e_\lambda}$  эквивалентна области  $\Delta_\alpha(2B_0)$ . Тогда в качестве цикла  $\lambda$  соответствующего атому  $A$  можно взять дугу эллипса, входящую в одну из областей  $B_0$ , оснащенную векторами скорости, направленными вверх (см. рис. 6.4б). Построенные циклы  $\lambda$  пересекаются в одной точке, следовательно, во-первых, они образуют базис на торе, а во-вторых, метка  $r = 0$ . При стремлении  $\lambda \rightarrow a$  выбранный нами слой расслоения Зейферта – цикл  $\lambda$ , соответствующий седловому атому, переходит в критическую окружность атома  $A$ . Следовательно, метка  $\varepsilon$  по определению равна 1.

Пусть проекция  $\Delta_{e_\lambda}$  эквивалентна области  $\Delta_\beta(B_0)_y^2$ . В этом случае необходимо поменять

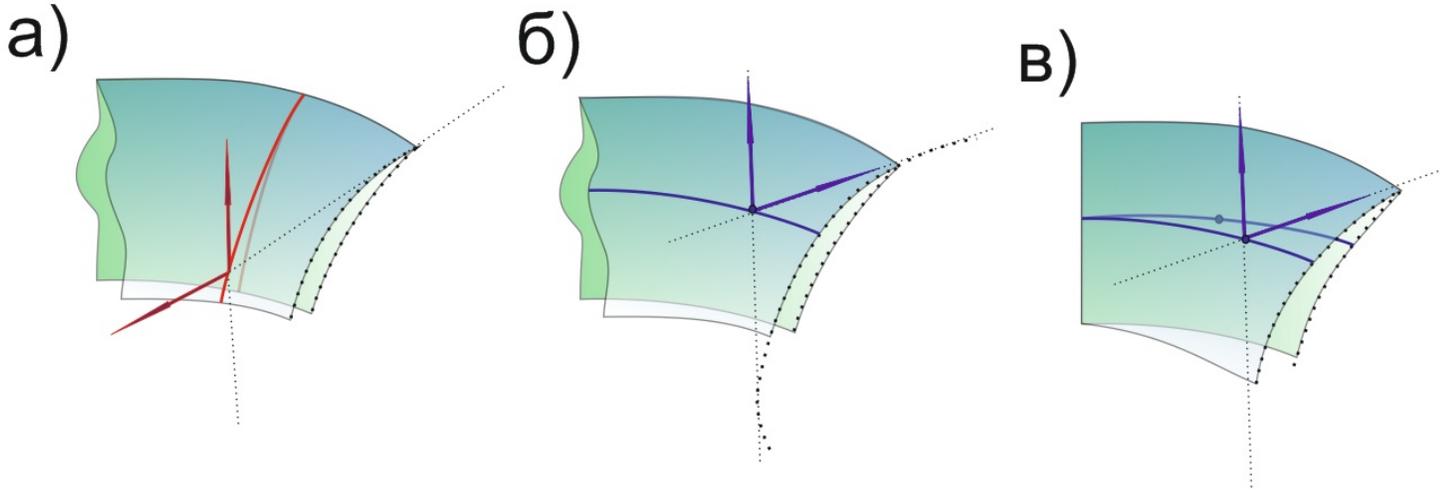


Рис. 6.4: Выбор циклов  $\lambda$  на гиперболическом торе Лиувилля для билиарда в обобщенной области, склеенной из областей серий  $B$  и  $C$ . Жирным пунктиром выделены дуги интегральных гипербол, ограничивающие проекцию тора Лиувилля. Волнистые линии обозначают либо склейку вдоль гиперболических ребер, либо свободную границу, либо дуги интегральных гипербол. На рисунке а) красным изображен периодический цикл  $\lambda$ , соответствующий седловому атому, красными стрелками обозначены вектора скорости. На рисунках б) и в) синим изображены исчезающие цикл  $\lambda$ , соответствующие минимаксному атому  $A$ , синими стрелками обозначены вектора скорости. На рисунке б) проекция тора эквивалентна  $\Delta_\alpha(2B_0)$ , а на рисунке в) проекция тора эквивалентна  $\Delta_\beta(B_0)_y^2$ .

цикл, соответствующий атому  $A$ : возьмём объединение дуг эллипса, входящих в обе области  $B_0$ , оснащенные векторами скорости, направленными вверх (см. рис. 6.4в). Заметим, что красный цикл на рисунке 6.4а) пересекается с синим циклом на рисунке 6.4в) в двух точках (эти точки выделены жирным). Следовательно, метка  $r$  на этом ребре  $r = \frac{1}{2}$ .

При стремлении  $\lambda \rightarrow a$  выбранный нами слой расслоения Зейферта – цикл  $\lambda$ , соответствующий седловому атому, либо переходит в критическую окружность атома  $A$ , либо накрывает её двулистно (это происходит в том случае если области  $B_0$ , входящие в проекцию  $\Delta_{e_\lambda}$ , переходят в области, склеенные друг с другом с образованием конической точки типа  $y$ ). Следовательно, метка  $\epsilon$  по определению равна 1.

Пусть в состав области  $\Delta$  входят элементарные области  $A_0$ ,  $A'_0$  и  $B_0$ . Тогда верхним ребрам молекулы соответствуют торы, траектории которых (или их продолжения), касаются эллипсов. Рассмотрим тор  $T_\lambda$ , траектории которого (или их продолжения) касаются некоторого эллипса. Проекцию этого тора на область  $\Delta$  обозначим через  $\Delta_{e_\lambda}$ . Проекция  $\Delta_{e_\lambda}$  эквивалентна либо областям без конических точек  $B_0$ ,  $\Delta_\alpha(2B_0)$  или  $\Delta_\alpha(2B_0+2B_0)$  либо области  $\Delta_\beta(B_0)_y^2$  с одной конической точкой типа  $y$ . При этом, количество проекций второго вида совпадает с количеством конических точек типа  $y$  в области  $\Delta$ .

В случае, если  $\Delta_{e_\lambda}$  эквивалентна элементарной области  $B_0$ , доказательство повторяет соответствующую часть доказательства для билиардов в элементарных областях.

Пусть  $\Delta_{e_\lambda}$  эквивалентна области  $\Delta_\alpha(2B_0)$ . На рисунках 6.5 а) и в) изображены циклы  $\lambda$ , соответствующие седловому (а) и минимаксному (в) атомам. Видно, что эти циклы пересекаются

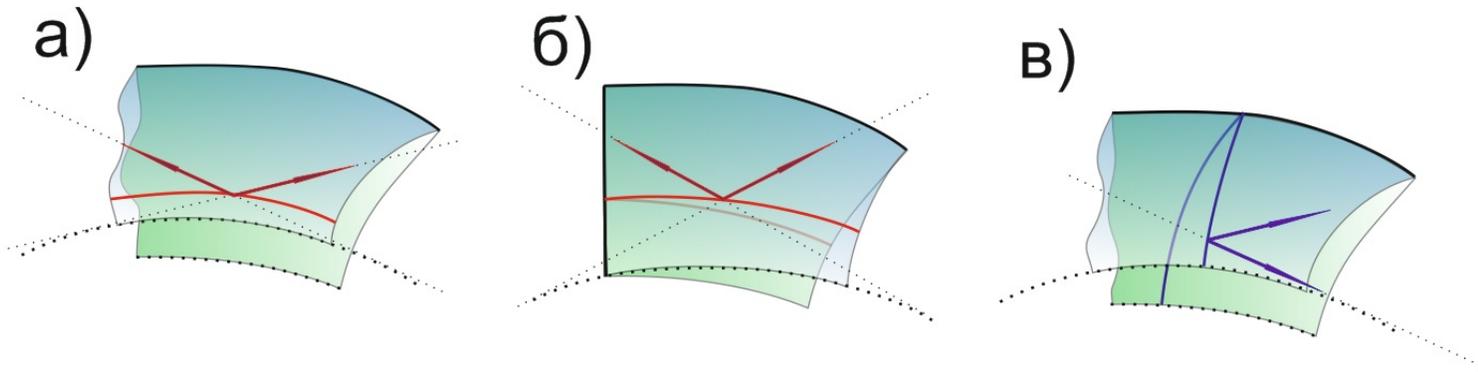


Рис. 6.5: Выбор циклов  $\lambda$  на эллиптическом торе Лиувилля для билиарда в обобщенной области, склеенной из областей  $A_0$  и  $A'_0$ . Жирным пунктиром выделены дуги интегральных эллипсов, ограничивающие проекцию тора Лиувилля. Волнистые линии обозначают либо склейку вдоль гиперболических ребер либо свободную границу. На рисунках а) и б) красным изображены периодические циклы  $\lambda$ , соответствующие седловым атомам, красными стрелками обозначены вектора скорости. На рисунке а) проекция тора эквивалентна области без конических точек, а на рисунке б) проекция тора эквивалентна области с одной конической точкой типа  $y$ . На рисунке в) синим изображен исчезающий цикл  $\lambda$ , соответствующий минимаксному атому  $A$ , синими стрелками обозначены вектора скорости.

в одной точке на одном экземпляре  $B_0$ . Следовательно, метка  $r$  на этом ребре  $r = 0$ .

Пусть  $\Delta_{e\lambda}$  эквивалентна области  $\Delta_\beta(B_0)_y^2$ . На рисунках 6.5 б) и в) изображены циклы  $\lambda$ , соответствующие седловому (б) и минимаксному (в) атомам. Видно, что эти циклы пересекаются в двух точках, каждая из которых лежит на экземпляре  $B_0$ . Следовательно, метка  $r$  на этом ребре  $r = \frac{1}{2}$ .

Пусть  $\Delta_{e\lambda}$  эквивалентна области  $\Delta_\alpha(2B_0 + 2B_0)$ . Такая область склеена из четырех экземпляров элементарной области  $B_0$ . На рисунке 6.5 а) изображен на самом деле лишь один кусок цикла  $\lambda$ , соответствующий седловому атому. Его необходимо продлить подобно циклу на рисунке 6.5 б). Однако продолжение этого цикла будет находится на экземпляре  $B_0$ , склееном вдоль гиперболического сегмента, тогда как исчезающий цикл  $\lambda$ , изображенный на рисунке 6.5 в), лежит на двух экземплярах  $B_0$  склеенных вдоль эллиптического сегмента. Поэтому циклы  $\lambda$  будут по-прежнему пересекаться в одной точке. Следовательно, метка  $r$  на этом ребре  $r = 0$ .

При стремлении параметра интегрального эллипса  $\lambda \rightarrow 0$  выбранные нами слои расслоения Зейферта – циклы  $\lambda$ , соответствующие седловым атомам, либо переходят в критическую окружность атома  $A$ , либо накрывают её двулистно. Следовательно, метка  $\varepsilon$  по определению равна 1.

Теорема полностью доказана. □

### 6.2.2 Лиувиллева классификация билиардов в обобщенных областях, в составе которых есть элементарная область, содержащая фокусы семейства границы.

**Теорема 6.3.** Пусть обобщенная область  $\Delta$  состоит из элементарных областей  $\Omega$ , причем хотя бы одна элементарная область  $\Omega$  содержит (внутри области или же на границе) фо-

кус семейства (1.1). Тогда инварианты Фоменко-Цишанга, – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля билиардного движение в этих обобщенных областях  $\Delta$ , разбиваются на девять неэквивалентных между собой типов. Все они приведены в таблице (рис. 6.6).

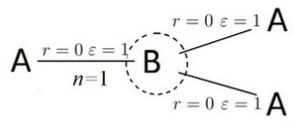
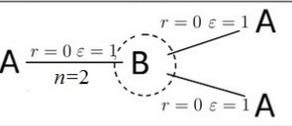
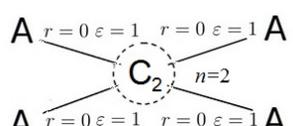
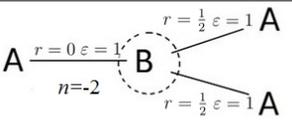
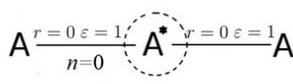
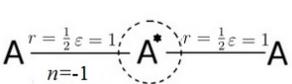
Обобщенная область	Инвариант Фоменко-Цишанга	Обобщенная область	Инвариант Фоменко-Цишанга
$\Delta_\alpha(2A_1)$ $\Delta_\alpha(A_2 + C_1)$		$\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$ $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$	
$\Delta_\alpha(2A_2)$		$\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$	
$\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$		$\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$	
		$\Delta_\beta(A'_1)_{xyc}^2$	

Рис. 6.6: Меченые молекулы, описывающие билиардное движение в обобщенных областях, содержащих фокусы.

*Доказательство.* Пусть обобщенная область  $\Delta$  не содержит конических точек, лежащих на фокальной прямой, и любая область  $\Omega$  в её составе не содержит фокусов кроме как на границе. В этом случае используя предложение находим, что если область не содержит конических точек, следовательно  $Q^3 \simeq S^3$ , откуда молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \epsilon=1} A$ . Если же обобщенная область  $\Delta$  содержит коническую точку типа  $y$ , то из того факта, что  $Q^3 \simeq \mathbb{R}P^3$ , следует, что молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=\frac{1}{2}, \epsilon=1} A$ .

Рассмотрим остальные обобщенные области.

Ориентируем все рёбра молекулы по направлению к седловому атому. Для вычисления меток в каждом случае необходимо выбрать циклы на граничных торах у атомов, образующих молекулу  $W$ . Эти циклы мы будем выбирать следующим образом: предъявим кривую в билиардной области  $\Omega$ , которая лежит в проекции данного тора Лиувилля. И покажем, какими векторами скорости мы оснащаем эту кривую, поднимая её до кривой на торе и на многообразии  $Q^3$ . После вычисления меток, ориентируем рёбра согласно росту функции  $\Lambda$  изменяя метки согласно описанным выше правилам. Согласно замечанию 2 мы в каждом случае будем фиксировать ориентацию дополнительных циклов  $\mu$  на граничных торах седлового атома. Тогда для выбора правильной ориентации цикла  $\lambda$  на граничном торе минимаксного атома  $A$  необходимо будет выбрать ту из них, при которой определитель матрицы склейки на этом ребре будет равен -1.

Все обобщенные области, в составе которых есть элементарная область, содержащая фокусы семейства границы, согласно классификации склеены либо из двух элементарных областей,

либо из четырёх экземпляров элементарной области  $A'_1$ . В последнем случае это означает, что область эквивалентна области  $\Delta_\beta((A'_1)_c)^2 + (A'_1)_c^2$  с двумя коническими точками. Разобьём эти области, следуя классификации, на четыре конечных класса:

1. области с фокусом + область-лента:  $\Delta_\alpha(A_2 + C_2)$  и  $\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$ ,
2. удвоенные области без конических точек  $\Delta_\alpha(2A_2)$  и  $\Delta_\alpha(2A_1)$ ,
3. удвоенные области с коническими точками: склеенные из двух половин эллипса  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$  и  $\Delta_\beta(A'_2)_{2y}^2$ , склеенные из двух четвертей эллипса  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ ,  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ ,  $\Delta_\beta(A'_1)_{xy}^2$  и склеенная из четырех четвертей эллипса область  $\Delta_\beta((A'_1)_c)^2 + (A'_1)_c^2$ ,
4. удвоенная область  $A'_1$  с конической точкой + область-лента:  $\Delta_\beta((A'_1)_c)^2 + C_1$ .

В дальнейшем доказательстве рассматривая область, склеенную из двух экземпляров элементарных областей, фиксируем их и будем называть “верхней” областью и “нижней” областью, при этом будем полагать, что верхняя область содержит хотя бы один фокус семейства (1.1).

**Шаг первый.** Области  $\Delta_\alpha(A_2 + C_2)$  и  $\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$ .

Воспользуемся циклами, выбранными для билиардов в элементарных областях  $A_2$  и  $A_1$  и продлим их в точках, где эти циклы выходят на ребро излома. Рассмотрим кусок дуги подходящей квадрики, быть может вырожденной, лежащей в области-ленте, один конец которой лежит на ребре излома, а другой – на внутренней эллиптической границе ленты  $B_1$  или  $C_2$ . Оснастим его векторами скорости, который склеивались бы на внутренней эллиптической границе области ленты  $B_1$  или  $C_2$ , а на ребре излома склеивались бы с соответствующими векторами цикла, выходящего на ребро излома. Полученный отрезок на торе Лиувилля обозначим через  $l$ .

Рассмотрим ребро молекулы, описывающей топологию билиарда в области  $\Delta_\alpha(A_2 + C_2)$ , и отвечающее за движение по часовой стрелке. В этом случае вектора отрезка  $l$  будут также направлены по часовой стрелке. Обозначим циклы, относящиеся к седловому атому на торе этого ребра через  $(\lambda_h, \mu_h)$ , а аналогичные циклы для области через  $(\widetilde{\lambda}_h, \widetilde{\mu}_h)$ . Обозначим циклы, относящиеся к минимаксному атому на торе этого ребра через  $(\lambda_m, \mu_m)$ , а аналогичные циклы для области через  $(\widetilde{\lambda}_m, \widetilde{\mu}_m)$ . Получаем  $\lambda_h = \widetilde{\lambda}_h + 2l$ ,  $\mu_h = \widetilde{\mu}_h + l$ ,  $\lambda_m = \widetilde{\lambda}_m + l$ ,  $\mu_m = \widetilde{\mu}_m$ . Заметим, что при таком “удлиннении” циклы остаются допустимыми базисами на торе Лиувилля: дополнительные  $l$  в пределе позволяют продолжить  $\lambda_h$  на всю особую траекторию, и замкнуть оборванные рёбрами склейки циклы  $\mu_h$  и  $\lambda_m$ . Матрица склейки  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  на этом ребре уста-

навливает связь между выбранными циклами  $(\widetilde{\lambda}_h, \widetilde{\mu}_h)$  и  $(\widetilde{\lambda}_m, \widetilde{\mu}_m)$  для билиарда в области  $A_2$ . Используя это, вычислим новые матрицы склейки, связывающие  $(\lambda_h, \mu_h)$  и  $(\lambda_m, \mu_m)$ . Получаем

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \widetilde{\lambda}_h + 2l = 2\widetilde{\lambda}_m + \widetilde{\mu}_m + 2l = 2(\lambda_m - l) + \mu_m + 2l = 2\lambda_m + \mu_m, \\ \mu_h &= \widetilde{\mu}_h + l = \widetilde{\lambda}_m + l = \lambda_m - l + l = \lambda_m. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица склейки осталась прежней. Аналогичные рассуждения действуют и на другом эллиптическом ребре.

На гиперболическом ребре получаем:  $\lambda_h = \widetilde{\lambda}_h + 2l$ ,  $\mu_h = \widetilde{\mu}_h + 2l$ ,  $\lambda_m = \widetilde{\lambda}_m$ ,  $\mu_h = \widetilde{\mu}_h + 2l$ . При таком “удлиннении” циклы остаются допустимыми базисами на торе Лиувилля. Матрица склейки на гиперболическом ребре для билиарда в области  $A_2$  имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \widetilde{\lambda}_h + 2l = -\widetilde{\lambda}_m + \widetilde{\mu}_m + 2l = -\lambda_m + \mu_m - 2l + 2l = -\lambda_m + \mu_m, \\ \mu_h &= \widetilde{\mu}_h + 2l = \widetilde{\mu}_m + 2l = \mu_m - 2l + 2l = \mu_m. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица склейки осталась прежней.

Проделаем аналогичное с циклами для билиярда в области  $\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$ .

На эллиптическом ребре получаем следующее:

$$\lambda_h = \widetilde{\lambda}_h + l, \mu_h = \widetilde{\mu}_h + l, \lambda_m = \widetilde{\lambda}_m + l, \mu_h = \widetilde{\mu}_h.$$

Матрица склейки на эллиптическом ребре имеет вид  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Тогда } \lambda_h = \widetilde{\lambda}_h + 2l = 2\widetilde{\lambda}_m + \widetilde{\mu}_m + 2l = 2\lambda_m - 2l + \mu_m + 2l = 2\lambda_m + \mu_m,$$

$$\mu_h = \widetilde{\mu}_h + l = \widetilde{\lambda}_m + l = \lambda_m - l + l = \lambda_m.$$

На гиперболическом ребре получаем:

$$\lambda_h = \widetilde{\lambda}_h + 2l, \mu_h = \widetilde{\mu}_h + 2l, \lambda_m = \widetilde{\lambda}_m, \mu_h = \widetilde{\mu}_h + 2l.$$

Матрица склейки на гиперболическом ребре имеет вид  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Тогда } \lambda_h = \widetilde{\lambda}_h + 2l = -2\widetilde{\lambda}_m + \widetilde{\mu}_m + 2l = -2\lambda_m + \mu_m - 2l + 2l = -2\lambda_m + \mu_m,$$

$$\mu_h = \widetilde{\mu}_h + 2l = -\widetilde{\lambda}_m + \widetilde{\mu}_m + 2l = -\lambda_m + \mu_m - 2l + 2l = -\lambda_m + \mu_m.$$

Матрицы склейки не изменились.

Сохранение матриц склейки приводит к сохранению меток в молекуле, что влечёт за собой то, что молекулы при добавлении к области с фокусом области-ленты не меняется.

**Шаг второй. Удвоенные области  $\Delta_\alpha(2A_2)$  и  $\Delta_\alpha(2A_1)$ .**

На рисунке 6.7 показано как модифицировать циклы для билиярда в элементарной области  $A_2$  таким образом, чтобы они стали циклами для билиярда в области  $\Delta_\alpha(2A_2)$ . В частности, циклы соответствующие седловому атому  $C_2$ , преобразуются так: циклы  $\lambda$  по сути остаются прежними, однако теперь одна половина цикла проходит по верхнему экземпляру области  $A_2$ , а другая – по нижнему. Цикл  $\mu$  на эллиптическом торе удваивается (аналогично тому, как мы удлиняли циклы в предыдущем пункте), а на гиперболическом остаётся неизменным. Циклы соответствующие минимаксным атомам, преобразуются так: цикл  $\lambda$  на эллиптическом торе удваивается (аналогично тому, как мы удлиняли циклы в предыдущем пункте), а на гиперболическом остаётся неизменным. Циклы  $\mu$  на эллиптическом торе сохраняются, а на гиперболическом теперь одна половина цикла проходит по верхнему экземпляру области  $A_2$ , а другая – по нижнему. В результате, на эллиптических ребрах матрицы склейки стали иметь вид:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . На гиперболических ребрах (теперь их уже два) матрица склейки осталась неизменной  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

В результате, получаем, что метки на ребрах имеют вид  $r = 0, \varepsilon = 1$ . Метке в семье вычисляется следующим образом – все рёбра молекулы ориентированы как входящие. Поэтому  $n = \sum_i [-\frac{\delta_i}{\beta_i}] = [-\frac{0}{1}] + [-\frac{0}{1}] + [-\frac{-1}{1}] + [-\frac{1}{1}] = -2$ . Так как при замене ориентации многообразия метка  $n$  меняется, мы зафиксируем ту из них, при которой метка  $n = 2$ .

Циклы 6.8 для билиардного движения в области  $\Delta_\alpha(2A_1)$  строятся аналогично циклам в области  $A_2$ . Теперь, однако, здесь только один эллиптический тор и два гиперболических. Но циклы, на самом деле, получаются из циклов в области  $A_2$  при замене эллипсов на гиперболы и наоборот. В самом деле, проекция интегрального эллипса образует теперь две дуги (подобно тому как в случае области  $A_2$  проекцию гиперболического тора ограничивали две дуги гиперболы), тогда как проекция интегральной гиперболы – это окружность, состоящая из двух половин, каждая из которых расположена на своём экземпляре области  $A_1$ .

Такой тип построения циклов приводит к тому что матрицы склейки также сохраняются.

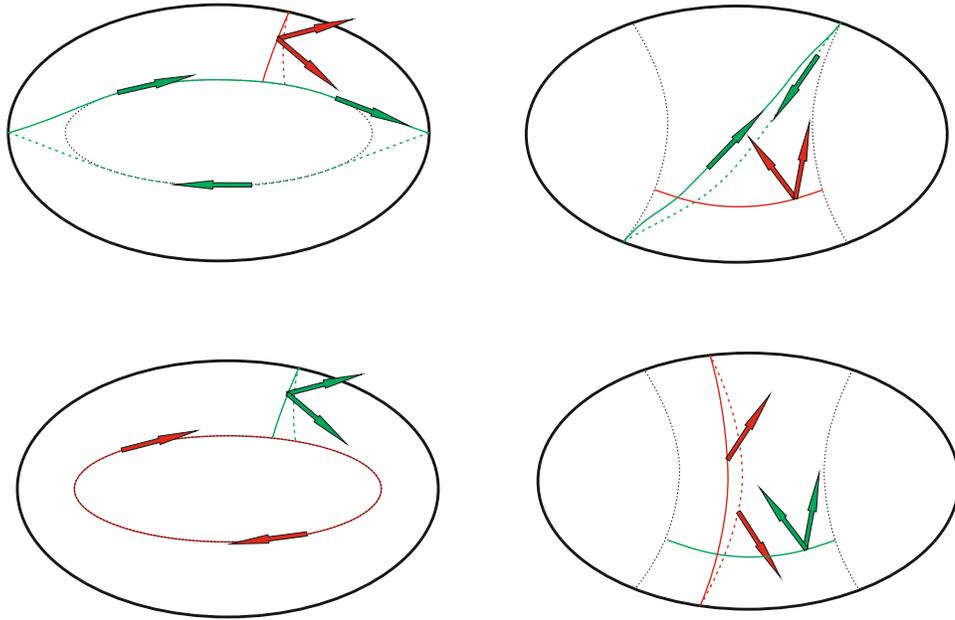


Рис. 6.7: Циклы для билиардного движения в области  $\Delta_\alpha(2A_2)$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ . В верхнем ряду изображены циклы, относящиеся к седловому атому  $C_2$ , в нижнем – к минимаксным атомам  $A$ .

В результате, на гиперболических ребрах матрицы склейки стали иметь вид:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . На эллиптическом ребре матрица склейки  $\begin{pmatrix} - & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

В результате, получаем, что метки на ребрах имеют вид  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ . Метке в семье вычисляется следующим образом – все рёбра молекулы ориентированы как входящие. Поэтому  $n = \sum_i [-\frac{\delta_i}{\beta_i}] = [-\frac{0}{1}] + [-\frac{0}{1}] + [-\frac{1}{1}] = -1$ . Так как при замене ориентации многообразия метка  $n$  меняется, мы зафиксируем ту из них, при которой метка  $n = 1$ .

**Шаг третий. Описание топологии слоения Лиувилля билиардной задачи для удвоенных обобщенных областей с коническими точками, молекулы которых описываются атомами без звездочек, а именно для областей**

$$\Delta_\beta(A'_{2x})^2, \Delta_\beta(A'_{1c})^2, \Delta_\beta(A'_{1x})^2 \text{ и } \Delta_\beta((A'_{1c})^2 + (A'_{1x})^2)$$

Рассмотрим билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A'_{1x})^2$ . Рассмотрим точку на фокальной прямой между фокусами и дугу гиперболы, проходящую через эту точку. Оснастив эту гиперболу векторами скорости, направленными вправо, т.е.  $v_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$ , при достаточно малом  $\epsilon > 0$  получим двумерный атом  $B$ . Граница этого двумерного атома  $B$  – это дуга этой гиперболы, оснащенная векторами вправо, касательными к некоторому эллипсу или некоторой гиперболе. Эти оснащенные дуги можно взять за циклы  $\mu$  на соответствующих торах Лиувилля, так как

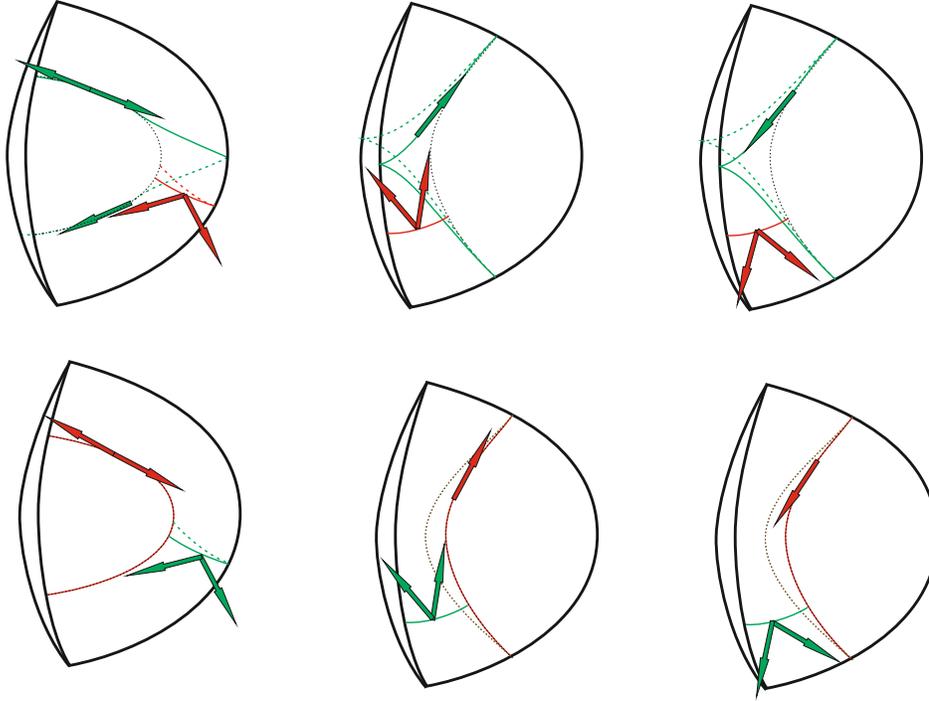


Рис. 6.8: Циклы для билиардного движения в области  $\Delta_\alpha(2A_1)$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ . В верхнем ряду изображены циклы, относящиеся к седловому атому  $B$ , в нижнем – к минимаксным атомам  $A$ .

они связаны условием существования глобального сечения.

На рисунке 6.9 показано, как выбрать остальные циклы на торах Лиувилля. В результате, матрица склейки на нижнем ребре молекулы будет иметь вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , а на верхних  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Из матриц склейки метки восстанавливаются однозначно.

Рассмотрим билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ . Эту область можно рассмотреть как удвоенную область  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ , поэтому выбор циклов можно провести аналогично. Изменим циклы, выбранные нами на торах изоэнергетической поверхности билиарда в области  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ , следующим образом: увеличим в два раза циклы  $\lambda$ , соответствующие атому  $B$  (критическая окружность стала в два раза длиннее), и цикл  $\mu$ , соответствующий нижнему атому  $A$ , а все остальные циклы оставим без изменений (см. рис.6.10). В результате матрицы склейки примут следующий вид:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  на нижнем ребре,  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  на верхних ребрах.

На рисунке 6.14 показано, как выбрать циклы на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ . Эти циклы являются в некотором смысле двойственными к циклам выбранными для билиарда в области  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$  подобно тому как двойственны друг другу циклы для билиарда в областях  $A_2$  и  $\Delta_\alpha(2A_1)$ .

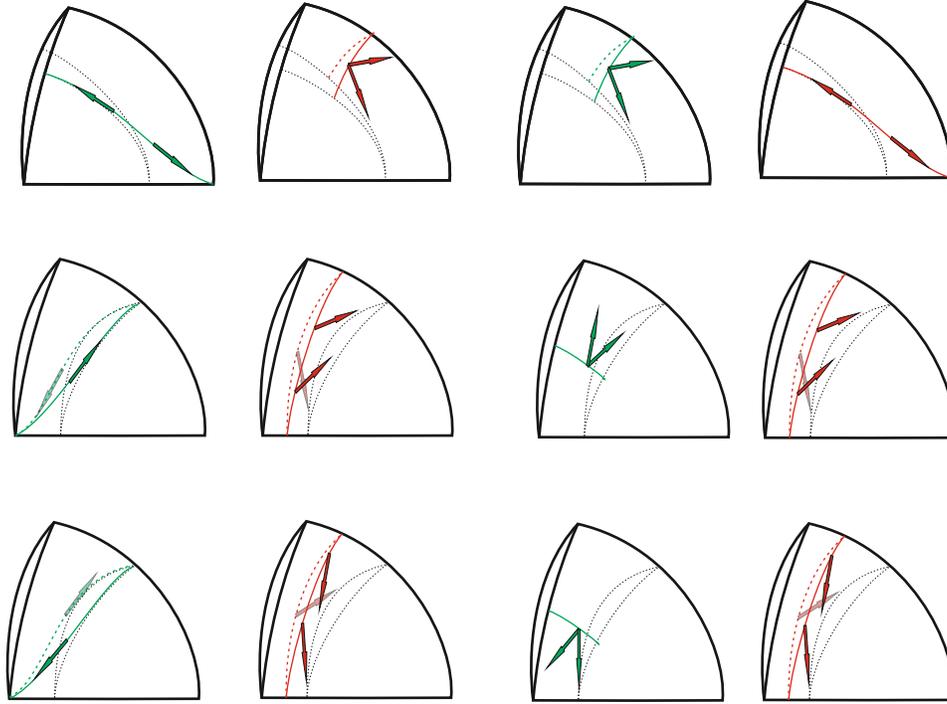


Рис. 6.9: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A'_1)_x$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ . В верхней строке изображены циклы на эллиптическом торе, в двух нижних – на гиперболических торах. В первых двух столбцах изображены циклы, относящиеся к седловому атому  $B$ , в двух последних – к минимаксным атомам  $A$ .

Метки при этом сохраняются.

Для выбора циклов билиарда в области  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$  можно воспользоваться циклами в области  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$  и рассмотреть двойственные циклы, получающиеся друг из друга так же как получаются друг из друга циклы в областях  $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$  и  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ .

**Шаг четвертый. Описание топологии слоения Лиувилля билиардной задачи для обобщенных областей  $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$  и  $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$ .**

Напомним, что циклы  $\mu$ , соответствующие седловым атомам со звездочками, выбираются следующим образом. Выберем циклы  $\hat{\mu}$  также как и в ориентируемом случае – циклы, высекаемые сечением ориентируемого атома – дубля соответствующего неориентируемого. Напомним, что дубль атома  $A^*$  это атом  $B$ , а дубль атома  $A^{**}$  – атом  $C_2$ . Один из этих циклов нужно оставить, а к одному из циклов, соответствующему другому тору, необходимо добавить цикл, кратный циклу  $\lambda$  – слою расслоения Зейферта, так чтобы выполнялось соотношение  $\sum \mu_i = \frac{\sum \hat{\mu}_i + k\lambda}{2}$ , где  $k$  – число звездочек неориентируемого атома. Для выбора циклов  $\hat{\mu}_i$  мы будем также как и в предыдущем случае использовать дуги гипербол.

В случае атома  $A^*$ , описывающего топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности билиарда в области  $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$ , мы имеем три цикла  $\hat{\mu}_i$ : один цикл  $\hat{\mu}_1$ , соответствующий эллиптическому тору, и два цикла  $\hat{\mu}_2$  и  $\hat{\mu}_3$  соответствующих гиперболическому тору. Выберем

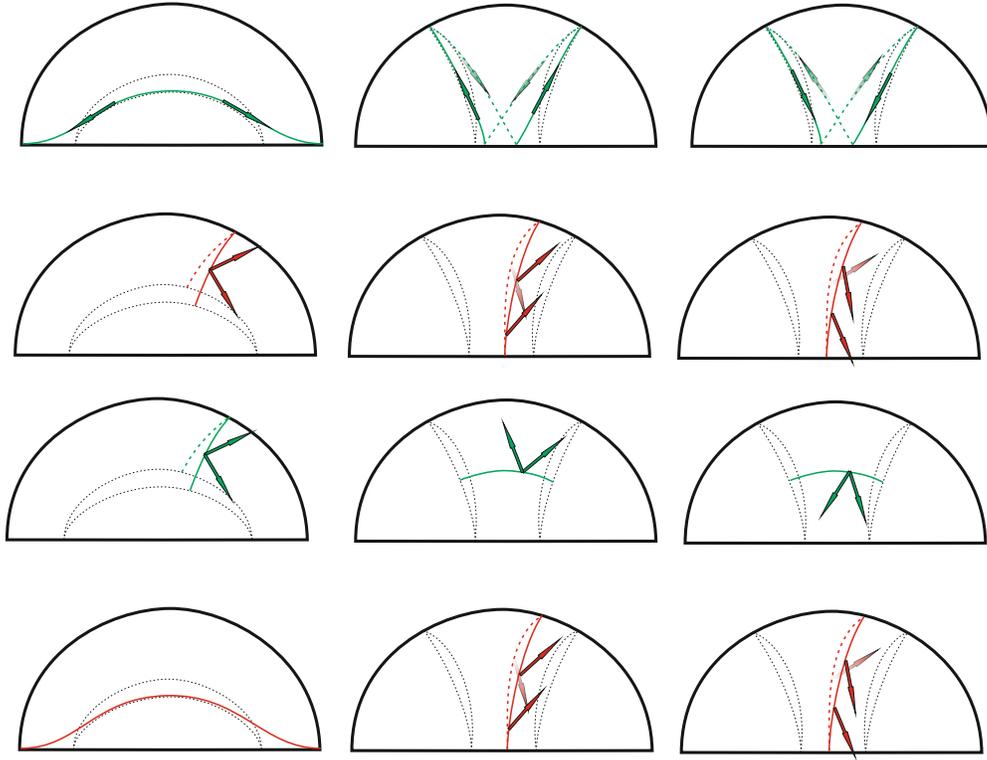


Рис. 6.10: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ . В верхних двух строках изображены циклы, относящиеся к седловому атому  $B$ , в двух нижних – к минимаксным атомам  $A$ . В первом столбце изображены циклы на эллиптическом торе, в двух последних – на гиперболических торах.

цикл  $\mu_1$ , соответствующий седловому атому и лежащий на эллиптическом торе следующим образом  $\mu_1 = \frac{\hat{\mu}_1 + \lambda}{2}$ , а цикл  $\mu_2$ , лежащий на гиперболическом торе выберем равным  $\hat{\mu}_2$ , выкинув цикл  $\hat{\mu}_3$ .

На рисунке 6.12 показано, как выбрать циклы  $\lambda$  – слои расслоения Зейферта, а также  $\lambda$  и  $\mu$ , соответствующих минимаксным атомам  $A$  в случае области  $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$ .

Фиксируем ориентацию циклов  $\hat{\mu}$ . На эллиптическом ребре имеем следующую конструкцию:  $\mu_h = \mu_m, \mu_h = \frac{\lambda_h + \hat{\mu}}{2}$  откуда  $\lambda_h = -\hat{\mu} + 2\mu_m$ . Но  $\hat{\mu} = \lambda_m$ . Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Фиксировав ориентацию на  $\hat{\mu}$  мы фиксировали и ориентацию на  $\mu_h$  и так как она совпала с ориентацией  $\mu_m$  (на котором она фиксирована слоем расслоения Зейферта, т.е. направлением оснащенных векторов), то  $\delta = 1$  в матрице склейки. На гиперболическом ребре матрица склейки имеет тот же вид, т.к. без учета ориентации она имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , но мы фиксировали ориентацию циклов  $\hat{\mu}$  а следовательно и ориентацию циклов  $\mu_h$ .

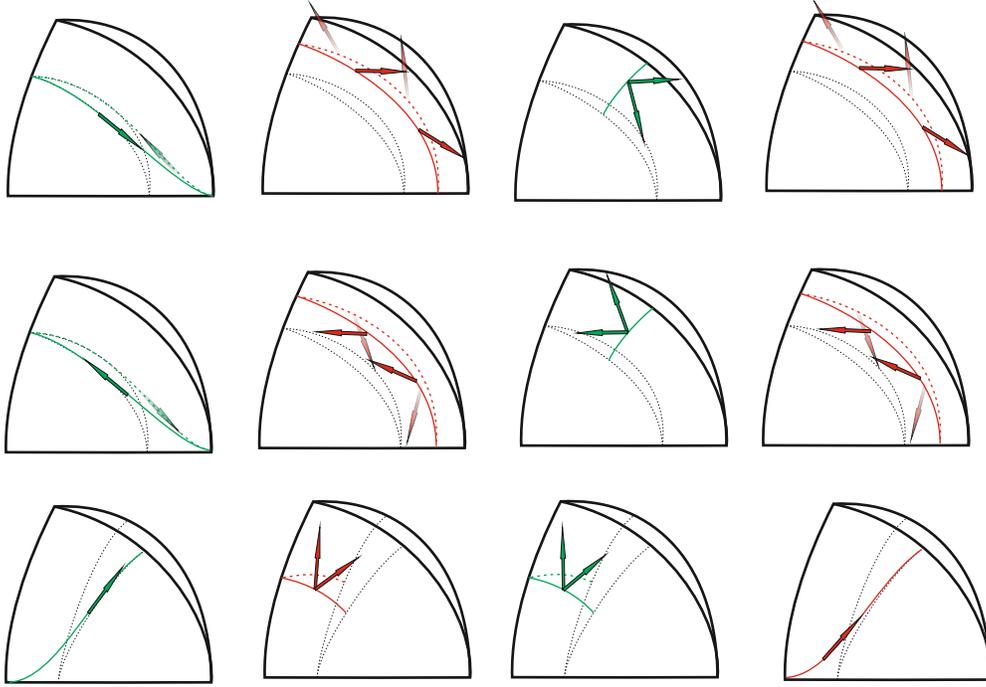


Рис. 6.11: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ . В верхних двух строках изображены циклы на эллиптическом торе, в нижней – на гиперболическом торе. В первых двух столбцах изображены циклы, относящиеся к седловому атому  $B$ , в двух последних – к минимаксным атомам  $A$ .

Получили следующие метки:  $r = -\frac{1}{2}$ ,  $n = -2$ . Изменим теперь ориентацию многообразия так чтобы метки  $r$  приняли бы положительные значения. В этом случае метка  $n$  станет равной  $-1$ .

В случае атома  $A^{**}$ , описывающего топологию слоения Лиувилля билиарда в области  $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$ , мы имеем четыре цикла  $\hat{\mu}_i$ : два цикла  $\hat{\mu}_1$  и  $\hat{\mu}_2$  на эллиптическом торе, и два цикла  $\hat{\mu}_3$  и  $\hat{\mu}_4$  на гиперболическом торе. Выберем цикл  $\mu_1$ , соответствующий седловому атому и лежащий на эллиптическом торе следующим образом  $\mu_1 = \hat{\mu}_1 + \lambda$ , а цикл  $\mu_2$ , лежащий на гиперболическом торе выберем равным  $\hat{\mu}_3$ , выкинув циклы  $\hat{\mu}_2$  и  $\hat{\mu}_4$ .

Для области  $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$  эти циклы изображены на рисунке 6.13

На ребрах молекулы  $A - A^{**} - A$ , описывающей топологию слоения Лиувилля для билиарда в области  $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$ , матрицы склейки имеют следующий вид:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Откуда получаем искомые метки.

**Шаг пятый. Описание топологии слоения Лиувилля билиарда в обобщенной области  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$ .** Для выбора циклов билиарда в области  $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$  воспользуемся уже выбранными циклами для области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$  и удлиним их подобно тому как мы удлиннили циклы на первом шаге. В результате, матрицы склейки останутся прежними.

□

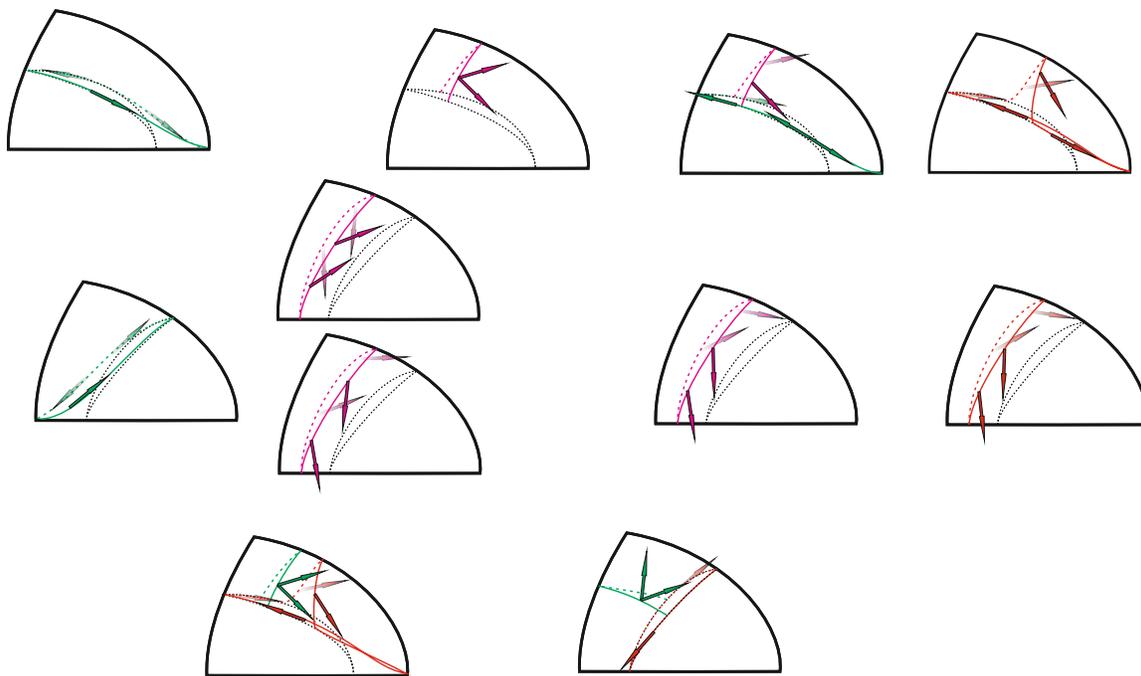


Рис. 6.12: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ , розовым – циклы  $\hat{\mu}$ , связанные существованием глобального сечения (т.е. образующие граничные окружности некоторого плоского атома  $B$  – сечения атома  $A^*$ ). В первой строке изображены циклы на эллиптическом, а во второй строке – на гиперболическом торах, относящиеся к атому  $A^*$ . В последней строке изображены циклы, относящиеся к минимаксным атомам  $A$ .

**Следствие 6.2.1.** При замене одной обобщенной области на её эквивалентную, молекула, описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия  $Q^3$ , сохраняется.

*Доказательство.* напрямую следует из доказательств утверждений выше о построении грубых молекул и теорем 6.1 и 6.3 о вычислении меток.  $\square$

**Замечание 14.** В определениях обобщенной билиардной области мы запретили склейку элементарных областей вдоль выпуклых дуг гипербол, если это не приводит к образованию конических точек.

Пусть две элементарные области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  склеены вдоль выпуклой дуги  $l$  некоторой гиперболы  $h$  без образования конической точки. Тогда переведем гиперболу  $h$  в вертикальную прямую, изменяя её параметр так чтобы он стал равным  $a$ . Такое изменение граничной дуги приводит к тому, что области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  заменяются на им эквивалентные  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$ . Но если их общий сегмент границы это отрезок прямой, то мы можем заменить пару элементарных областей  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  на одну элементарную область  $\tilde{\Omega}$ .

Путём таких замен можно привести обобщенную область, склеенную вдоль выпуклых дуг

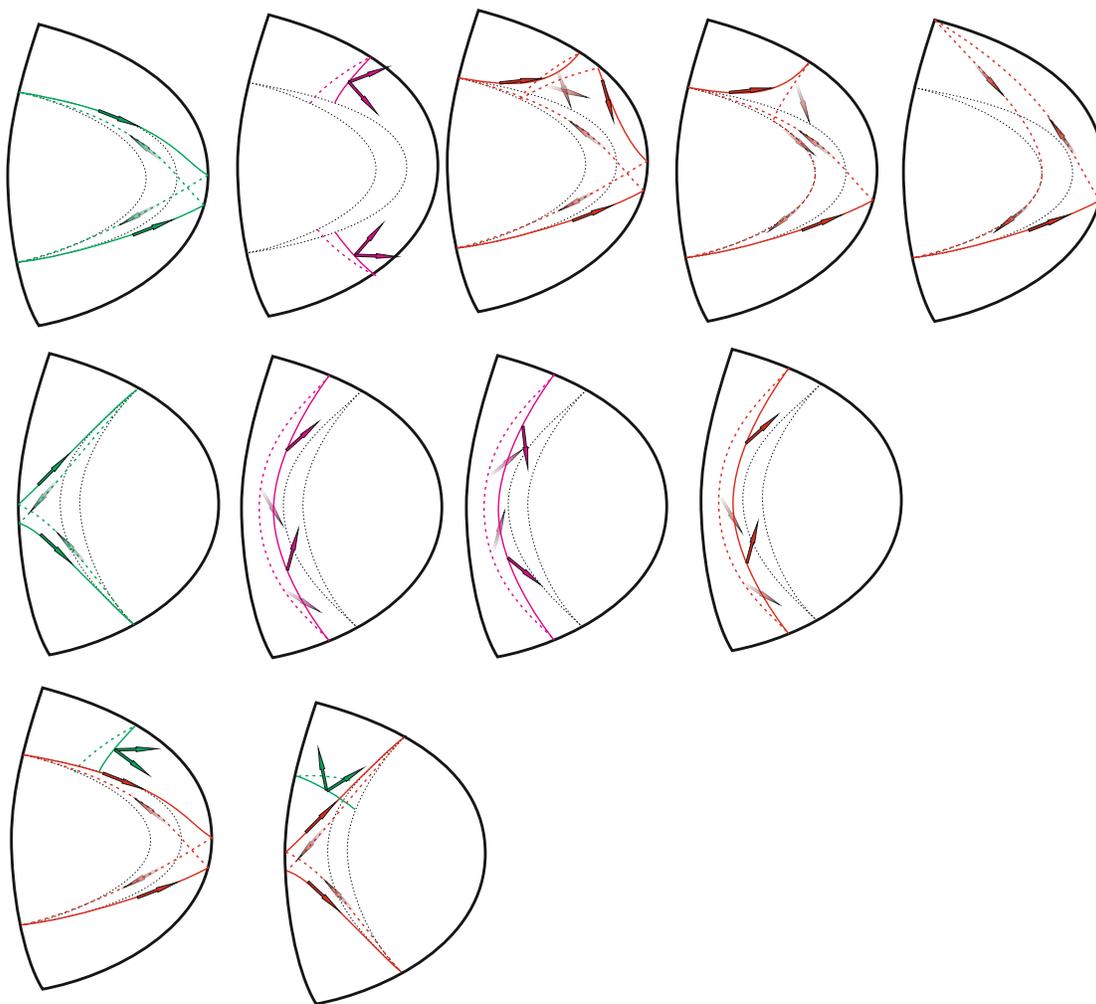


Рис. 6.13: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ , розовым – циклы  $\hat{\mu}$ . В первой строке изображены циклы на эллиптическом торе – цикл  $\lambda$ , два цикла  $\hat{\mu}$ , а на последних трех рисунках – один и тот же цикл  $\mu$  являющийся суммой цикла  $\lambda$  и одного из двух циклов  $\hat{\mu}$ . Во второй строке изображены циклы на гиперболическом торе – цикл  $\lambda$ , два цикла  $\hat{\mu}$ , и цикл  $\mu$  – один из  $\hat{\mu}$ . Наконец, в последней строке изображены циклы, относящиеся к минимаксным атомам  $A$ : в качестве  $\mu$  можно взять уже выбранные циклы  $\lambda$  на торах, относящиеся к атому  $A^{**}$  – видно, что каждый из них пересекается с исчезающим циклом  $\lambda$  всего лишь в одной точке.

эллипсов и гипербол к области, склеенную лишь вдоль дуг эллипсов (и гипербол, если такая склейка позволяет получить конические точки), т.е. свести задачу к уже рассмотренной.

А так как по следствию 6.2.1 отношение эквивалентности сохраняет молекулу – инвариант Лиувиллевой эквивалентности, то билиарды в областях полученные путём склеек вдоль выпуклых дуг эллипсов и гипербол будут лиувиллево эквивалентны классу обобщенных областей

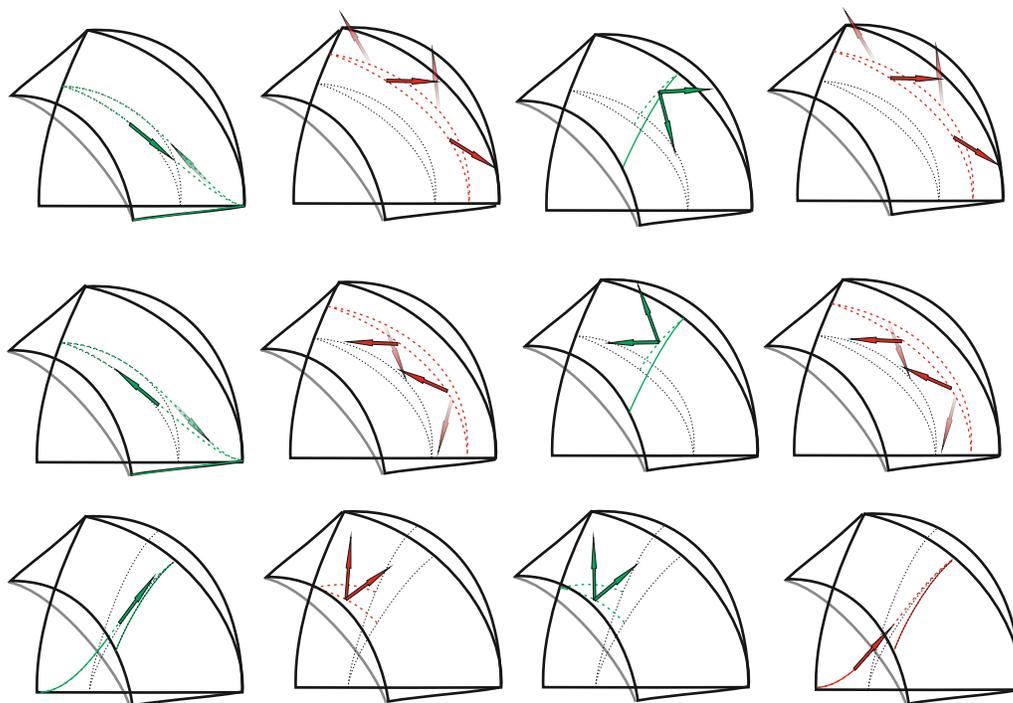


Рис. 6.14: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей бильярдное движение в области  $\Delta_\beta((A'_1)_c)^2 + C_1$ . Циклы выбираются аналогично циклам в области  $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$  и либо выбираются также либо удлиняются на дугу  $l$ . Зелёным цветом выделены циклы  $\lambda$ , красным – циклы  $\mu$ . В верхних двух строках изображены циклы на эллиптическом торе, в нижней – на гиперболическом торе. В первых двух столбцах изображены циклы, относящиеся к седловому атому  $B$ , в двух последних – к минимаксным атомам  $A$ .

рассмотренных в настоящей работе.

# Глава 7

## Биллиарды как модели динамики твёрдого тела.

### 7.1 Задачи динамики твёрдого тела. Известные случаи интегрируемости.

Классические уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие движение твёрдого тела с закреплённой точкой в поле силы тяжести, в системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, имеют следующий вид [30],[31].

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= A\omega \times \omega - Pr \times \nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Фазовые переменные здесь таковы:  $\omega$  – вектора угловой скорости,  $\nu$  – единичный вертикальный вектор. Параметрами системы являются: диагональная матрица  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ , задающая тензор инерции твёрдого тела,  $P$  – вес тела,  $r$  – вектор с началом в неподвижной точке и концом в центре масс тела. Запись  $a \times b$  означает векторное произведение в  $\mathbb{R}^3$ .

Вектор  $A\omega$  имеет смысл кинетического момента твёрдого тела относительно неподвижной точки. Н.Е.Жуковский исследовал задачу о движении твёрдого тела, имеющего полости, целиком заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение [32]. В этом случае кинетический момент тела равен  $A\omega + \lambda$ . Здесь  $\lambda$  – постоянный (в системе координат, связанной с телом) вектор, характеризующий циклические движения жидкости в полостях. Аналогичный вид кинетический момент тела имеет в случае, когда в теле закреплён маховик, ось которого направлена вдоль вектора  $\lambda$ . Такую механическую систему называют гироскатом. Движение гироската в поле силы тяжести, а также некоторые другие задачи механики (см. например, [34]) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \lambda) \times \omega - Pr \times \nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega, \end{aligned} \tag{7.2}$$

частным случаем которой при  $\lambda = 0$  является система (7.1).

Другое обобщение уравнений (7.1) связано с заменой внешнего однородного поля, т.е. силы тяжести, на более сложное. Уравнения движения твёрдого тела с закреплённой точкой в произвольном потенциальном силовом поле были получены Лагранжем. Если это поле имеет ось

симметрии, то её можно считать вертикальной, и уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= A\omega \times \omega + \nu \times \frac{\partial U}{\partial \nu}, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $U(\nu)$  – потенциальная функция, а через  $\frac{\partial U}{\partial \nu}$  обозначен вектор с координатами  $(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3})$ . При  $U = P\langle r, \nu \rangle$  получаем систему уравнений (7.1). Здесь через  $\langle a, b \rangle$  обозначено стандартное евклидово скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^3$ .

Обобщения уравнения (7.2) и (7.3) можно комбинировать, рассматривая движение гиростата в осесимметричном поле и т.п. Наиболее общие уравнения, описывающие различные задачи динамики твердого тела, имеют вид (см., например, книгу М.П.Харламова [33]):

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \kappa) \times \omega + \nu \times \frac{\partial U}{\partial \nu}, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $\kappa(\nu)$  – вектор-функция, компоненты которой являются коэффициентами некоторой замкнутой 2-формы на группе вращений  $SO(3)$ , т.е. формы гироскопических сил. При этом вектор-функция  $\kappa(\nu)$  не произвольна, а имеет вид:

$$\kappa = \lambda + (\Lambda - \operatorname{div} \lambda \cdot E)\nu, \quad (7.5)$$

где  $\lambda(\nu)$  – произвольная вектор-функция,  $\operatorname{div} \lambda = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \nu_3}$ , а  $\Lambda = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu_j}\right)^T$  – транспонированная матрица Якоби. Очевидно, системы (7.1)-(7.3) являются частными случаями общей системы (7.4).

У системы (7.4) всегда существует геометрический интеграл

$$F = \langle \nu, \nu \rangle = 1$$

и интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + U(\nu).$$

Если вектор-функция  $\kappa(\nu)$  имеет вид (7.5), то существует интеграл площадей

$$G = \langle A\omega + \lambda, \nu \rangle.$$

Можно показать (см., например [33]), что уравнения (7.4),(7.5) являются гамильтоновыми на совместных 4-поверхностях уровня геометрического интеграла и интеграла площадей. Более того, уравнения (7.4),(7.5) можно представить в виде уравнений Эйлера для 6-мерной алгебры Ли  $e(3)$  группы движений трехмерного евклидова пространства.

На линейном пространстве  $e(3)^*$  определена скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций  $f$  и  $g$ :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где  $x \in e(3)^*$ , через  $[, ]$  обозначен коммутатор в алгебре Ли  $e(3)$ , а  $d_x f$  и  $d_x g$  – это дифференциалы функций  $f$  и  $g$  в точке  $x$ . Эти дифференциалы принадлежат в действительности алгебре Ли

$e(3)$ б как ковекторы на  $e(3)^*$ , при стандартном отождествлении пространства  $e(3)^{**}$  с алгеброй  $e(3)$ . В естественных координатах

$$S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$$

на пространстве  $e(3)^*$  эта скобка записывается следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = 0, \quad (7.6)$$

где  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , а  $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$ .

Гамильтонова система на пространстве  $e(3)^*$  со скобкой (7.6), т.е. уравнения Эйлера, по определению имеют вид:

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\},$$

где  $H$  – функция на  $e(3)^*$ , называемая гамильтонианом. Вводя векторы

$$S = (S_1, S_2, S_3) \text{ и } R = (R_1, R_2, R_3),$$

эти уравнения можно переписать в виде обобщённых уравнений Кирхгофа:

$$\dot{S} = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right) \times S + \left( \frac{\partial H}{\partial R} \right) \times R, \quad \dot{R} = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right) \times R. \quad (7.7)$$

**Предложение 7.1.1.** *Отображение  $\varphi : \mathbb{R}^6(\omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}^6(S, R)$ , заданное формулами*

$$S = -(A\omega + \lambda), \quad R = \nu, \quad (7.8)$$

*устанавливает изоморфизм системы (7.4), (7.5) и системы (7.7) с гамильтонианом*

$$H = \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3} + U, \quad (7.9)$$

*где параметры  $A_1, A_2, A_3$  и функции  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, U$  берутся из системы (7.4), (7.5), но функции заданы не на пространстве  $\mathbb{R}^3(\nu)$ , а на пространстве  $\mathbb{R}^3(R)$ .*

**Следствие 7.1.2.** *Условие (7.5), налагаемое на вектор-функцию  $\kappa(\nu)$ , равносильно тому, что система уравнений (7.4) эквивалентна системе, задаваемой уравнениями Эйлера на пространстве  $e(3)^*$ , т.е. уравнениями (7.7), с гамильтонианом, квадратичным по переменным  $S$ , то есть с гамильтонианом вида*

$$H = \langle CS, S \rangle + \langle W, S \rangle + V, \quad (7.10)$$

*где  $C$  – постоянная симметричная матрица размера  $3 \times 3$ ,  $W(R)$  – произвольная вектор-функция, и  $V(R)$  – произвольная гладкая функция.*

При построенном отображении (7.8) интегралы  $F = \langle \nu, \nu \rangle$  и  $G = \langle A\omega + \lambda, \nu \rangle$  переходят в инварианты алгебры Ли  $e(3)$ :

$$f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2, \quad f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3,$$

а интеграл энергии  $E = \frac{1}{2}\langle A\omega, \omega \rangle + U(\nu)$  переходит в гамильтониан (7.9). Система (7.7) является гамильтоновой на совместных четырёхмерных поверхностях уровня двух гладких функций, т.е. интегралов  $f_1$  и  $f_2$ :

$$M_{c,g}^4 = \{f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c, f_2 = S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3 = g\}. \quad (7.11)$$

Для почти всех значений  $c$  и  $g$  эти совместные уровни являются неособыми гладкими подмногообразиями в  $e(3)^*$ . В дальнейшем будем считать, что  $c$  и  $g$  являются именно такими регулярными значениями.

Легко видеть, что эти симплектические 4-многообразия  $M_{c,g}^4$  диффеоморфны, при  $c > 0$ , касательному расслоению  $TS^2$  к двумерной сфере  $S^2$ . Симплектическая структура задаётся здесь ограничением скобки Ли-Пуассона на  $TS^2$  из объемлющего 6-мерного пространства  $e(3)^*$ . Поскольку линейное преобразование  $S' = S, R' = \gamma R$ , где  $\gamma = \text{const}$ , очевидно, сохраняет скобку (7.6), мы будем считать в дальнейшем, что всегда  $c = 1$ .

Как уже отмечалось, система уравнений (7.7) с гамильтонианом (7.9) (или эквивалентная система уравнений (7.4),(7.5)) описывает различные задачи динамики твердого тела и некоторые близкие к ней системы.

Начиная с этого момента мы будем рассматривать систему уравнений (7.7) с гамильтонианом (7.9) на симплектическом 4-многообразиях  $M_{1,g}^4 = \{f_1 = 1, f_2 = g\}$  в 6-мерном пространстве  $e(3)^*$ . В каждой физической задаче фазовые переменные и параметры системы приобретают конкретный физический смысл.

Приведём список основных известных сегодня интегрируемых случаев для уравнений (7.7),(7.9) с указанием: кем, когда и для какой задачи этот случай интегрируемости был впервые обнаружен. Для каждого случая указаны гамильтониан  $H$  и дополнительный интеграл  $K$ , функционально независимый с  $H$ . При этом дополнительный интеграл  $K$  может существовать не на всех 4-поверхностях уровня функций  $f_1$  и  $f_2$ , а лишь для некоторых значений постоянной  $g$ .

Случай Эйлера (1750 год). Движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, совпадающей с центром масс твердого тела.

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3}, \quad K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (7.12)$$

Здесь интеграл  $K$  – квадратичный.

Случай Лагранжа (1788 год). Движение тяжелого твердого тела с закреплённой точке и указанным ниже условием симметрии твёрдого тела.

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{2B} + aR_3, \quad K = S_3. \quad (7.13)$$

Здесь интеграл  $K$  – линейный. В этом случае твердое тело имеет ось симметрии, поскольку  $A_1 = A_2 = A$ . При этом закреплённая точка этого тела находится как раз на этой оси.

Случай Ковалевской (1899 год). Движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой и специальными условиями симметрии, указанными ниже.

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{A} + a_1R_1 + a_2R_2, \quad (7.14)$$

$$K = \left( \frac{S_1^2 - S_2^2}{2A} + a_2R_2 - a_1R_1 \right)^2 + \left( \frac{S_1S_2}{A} - a_1R_2 - a_2R_1 \right)^2.$$

Здесь интеграл  $K$ –четвертой степени. В этом случае  $A_1 = A_2 = 2A_3$ , и центр масс тела расположен в плоскости симметрии тела, отвечающей первым двум осям инерции тела, то есть в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Случай Горячева-Чаплыгина (1899 год). Движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой и специальными условиями симметрии, указанными ниже.

$$\begin{aligned} H &= \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{2S_3^2}{A} + a_1R_1 + a_2R^2, \\ K &= S_3(S_1^2 + S_2^2) - AR_3(a_1S_1 + a_2S_2). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Здесь интеграл  $K$ –третьей степени. В этом случае  $A_1 = A_2 = 4A_3$ , и центр масс тела расположен в плоскости симметрии тела, отвечающей первым двум осям инерции тела, то есть в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Здесь скобка Пуассона функций выглядит так:

$$\{H, K\} = (S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3)(a_2S_1 - a_1S_2).$$

Отсюда видно, что функции  $H$  и  $K$  не находятся в инволюции на всех 4-многообразиях  $M_{1,g}^4$ , поэтому система интегрируема лишь на одной специальной 4-поверхности  $\{f_1 = 1, f_2 = 0\}$ , то есть на  $M_{1,0}^4$ . Это – случай так называемой частичной интегрируемости, отвечающей нулевому значению интеграла площадей  $f_2$ .

Случаи интегрируемости допускают интегрируемые обобщения путем добавления гироскопических сил.

Случай Жуковского (1885 год). Движение гиростата в поле силы тяжести.

$$\begin{aligned} H &= \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3}, \\ K &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Здесь интеграл  $K$ –квадратичный. Этот случай является обобщением случая Эйлера. Случай Эйлера получается отсюда, когда все  $\lambda_i$  равны нулю.

Случай Ковалевской-Яхьи (1986 год). Движение гиростата в поле силы тяжести.

$$\begin{aligned} H &= \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{(S_3 + \lambda)^2}{A} + a_1R_1 + a_2R^2, \\ K &= \left( \frac{S_1^2 - S_2^2}{2A} + a_2R_2 - a_1R_1 \right)^2 + \left( \frac{S_1S_2}{A} - a_1R_2 - a_2R_1 \right)^2 - \\ &\quad - \frac{2\lambda}{A^2}(S_3 + 2\lambda)(S_1^2 + S_2^2) + \frac{4\lambda R_3}{A}(a_1S_1 + a_2S_2). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Здесь интеграл  $K$ –четвертой степени. Классический случай Ковалевской получается при  $\lambda = 0$ .

Случай Сретенского (1963 год). Движение гиростата в поле силы тяжести.

$$\begin{aligned} H &= \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{2(S_3 + \lambda)^2}{A} + a_1R_1 + a_2R^2, \\ K &= (S_3 + 2\lambda)(S_1^2 + S_2^2) - AR_3(a_1S_1 + a_2S_2). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Здесь интеграл  $K$ –третьей степени и  $A_1 = A_2 = 4A_3$ . Этот случай является обобщением случая Горячева-Чаплыгина, который получается из него, когда параметр  $\lambda = 0$ .

Как и в случае Горячева-Чаплыгина, система интегрируема лишь на одной 4-поверхности  $\{f_1 = 1, f_2 = 0\}$ .

Случай Клебша (1871 год). Движение твердого тела в жидкости.

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3} + \frac{\varepsilon}{2}(A_1R_1^2 + A_2R_2^2 + A_3R_3^2), \\
 K &= \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - \frac{\varepsilon}{2}(A_2A_3R_1^2 + A_3A_1R_2^2 + A_1A_2R_3^2).
 \end{aligned}
 \tag{7.19}$$

Здесь интеграл  $K$ – квадратичный.

Молекулы  $W$  для основных случаев интегрируемости были первоначально вычислены А.А.Ошемковым [21],[22],[23]. Затем разными авторами были определены числовые метки на этих молекулах, что позволило в итоге вычислить меченые молекулы  $W^*$ . См. А.В.Болсинов [24], П.Й.Топалов [25], А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко [26], [27], О.Е. Орел [28], О.Е.Орел, Ш.Такахаша [29]. П.В. Морозов установил лиувиллеву эквивалентность при некоторых значениях интегралов случаев Клебша [35] и Соколова [36]. В работах Н.С.Славиной [37] с помощью вычисления меченых молекул получена полная Лиувиллева классификация систем случая Ковалевской-Яхьи.

## 7.2 Известные случаи интегрируемости в динамике твёрдого тела, лиувиллево эквивалентные бильярдным системам, ограниченных дугами софокусных квадрик.

Путём сравнения вычисленных инвариантов Фоменко-Цишанга для классических интегрируемых систем динамики твердого тела и интегрируемых бильярдов удаётся установить лиувиллеву эквивалентность этих систем. Подбирая подходящую область, можно промоделировать движение некоторым бильярдом.

Ниже приведены несколько ярких примеров. На рисунках ниже мы указываем бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела, кривые которых разграничивают различные типы изоэнергетических областей  $Q^3$ . Те области на бифуркационных диаграммах, изоэнергетическим поверхностям которых соответствуют инварианты, встречающиеся в бильярдах, выделены различными цветами. Ниже теми же цветами изображены области, бильярды в которых лиувиллево эквивалентны этим  $Q^3$ . Для наглядности рядом с областями приведены сами инварианты.

**Теорема 7.1.** *Следующие случаи динамики твердого тела моделируются (лиувиллево эквивалентны) следующим обобщенным бильярдами:*

- случай Эйлера, см. [11], полностью моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунке 7.1 соответствующих зонам I, II, III энергии  $H$ , соответственно;
- случай Лагранжа, см. [11, 29], моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунках 7.2;

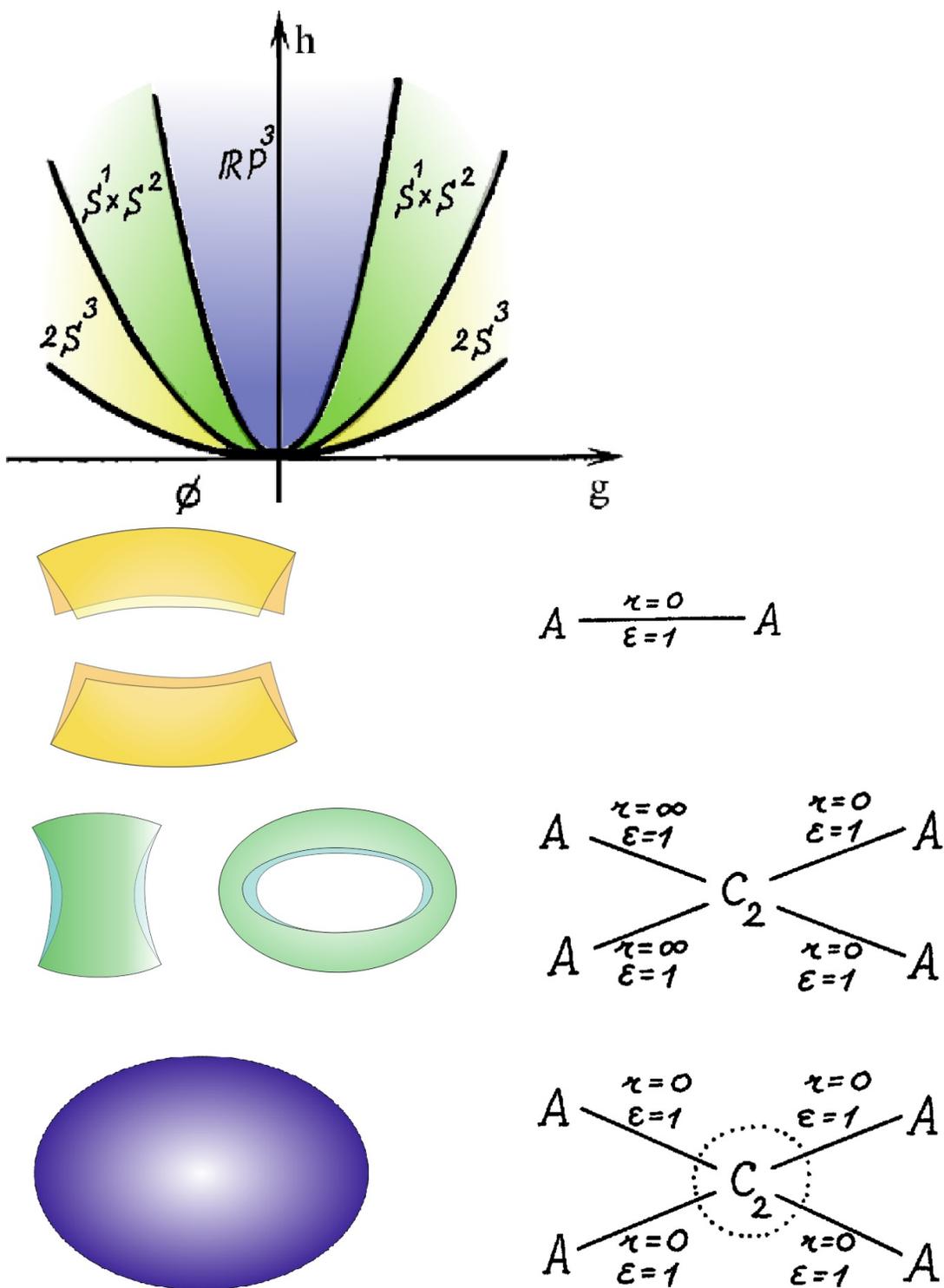
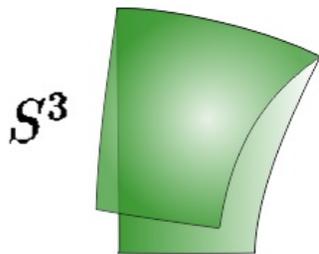
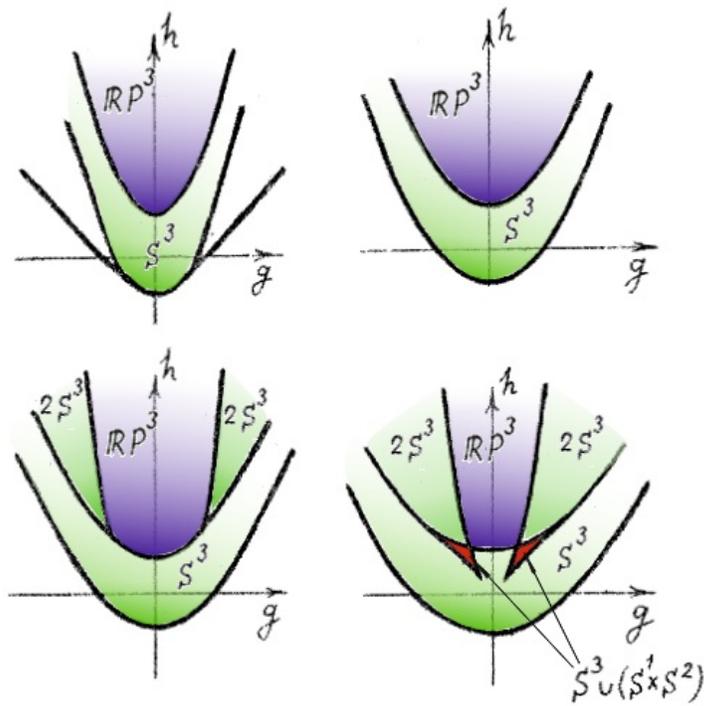
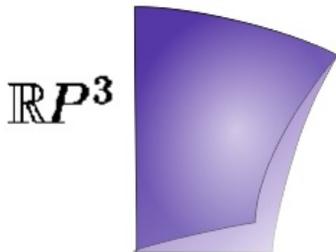


Рис. 7.1: Случай Эйлера удаётся полностью промоделировать обобщенными бильярдами.

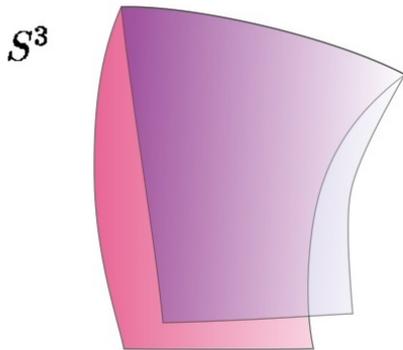
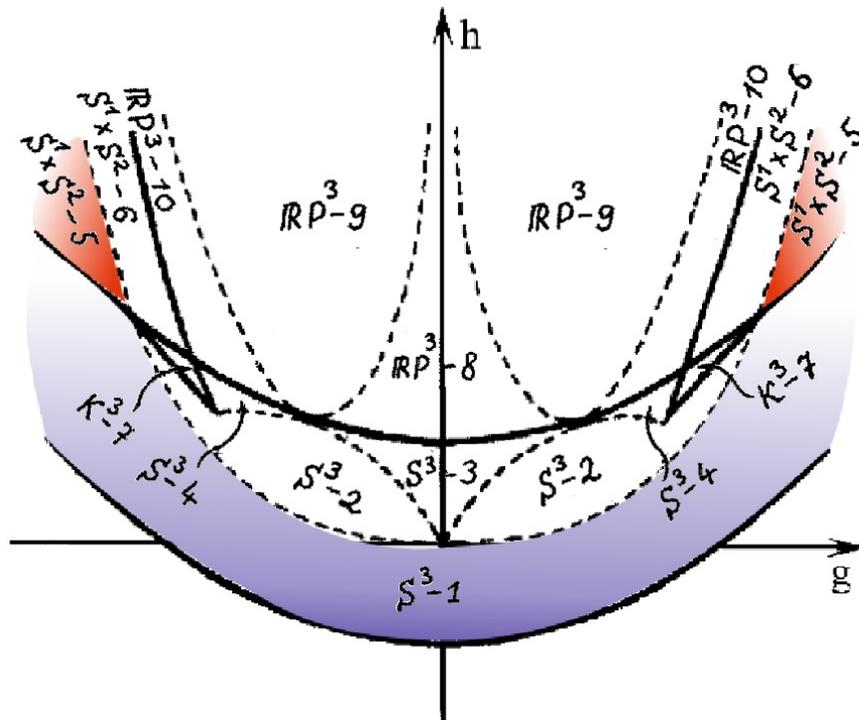


$$A \frac{\kappa = 0}{\varepsilon = 1} A$$

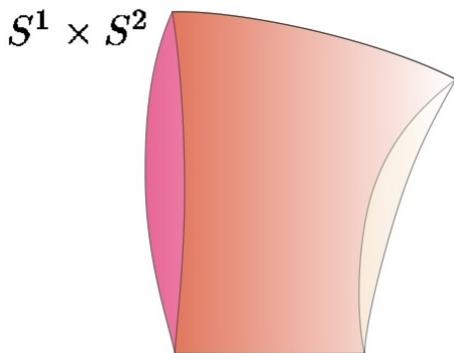


$$A \frac{\kappa = 1/2}{\varepsilon = 1} A$$

Рис. 7.2: Бифуркационные диаграммы случая Лагранжа. Движение на каждой сфере  $S^3$  моделируется бильярдом в зелёной области  $\Delta_\alpha(2A'_0)$ , а на каждом  $\mathbb{R}P^3$  движение можно промоделировать бильярдом в синей области с конической точкой  $\Delta_\beta(A_0)_y^2$ .



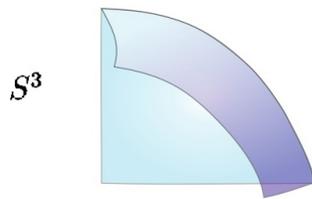
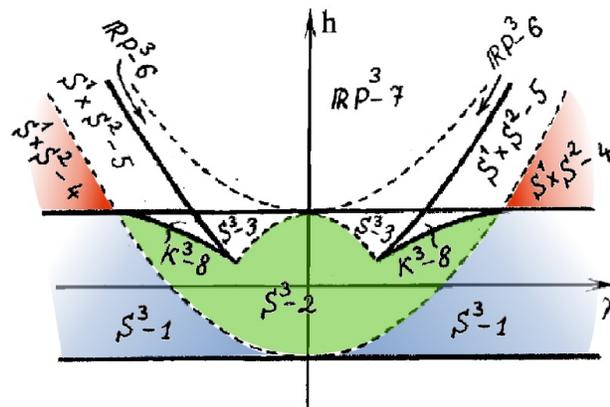
$$A \frac{\kappa=0}{\varepsilon=1} A$$



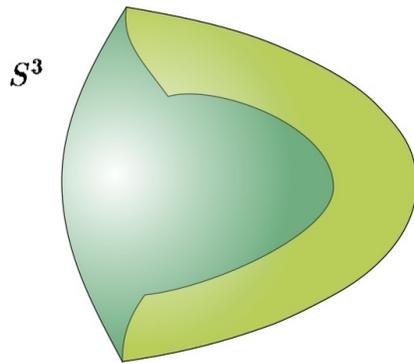
$$A \frac{\kappa=\infty}{\varepsilon=1} B \frac{\kappa=0}{\varepsilon=1} A$$

$$A \frac{\varepsilon=1}{\kappa=\infty}$$

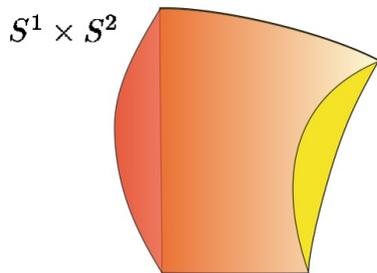
Рис. 7.3: Случай Ковалевской.



$$A \frac{\varepsilon=1}{\kappa=0} A$$



$$A \frac{\kappa=0}{n=0} A^* \frac{\kappa=0}{\kappa=0} A$$



$$A \xrightarrow{\kappa=0} B \begin{cases} \xrightarrow{\kappa=\infty} A \\ \xrightarrow{\kappa=\infty} A \end{cases}$$

Рис. 7.4: Случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского.

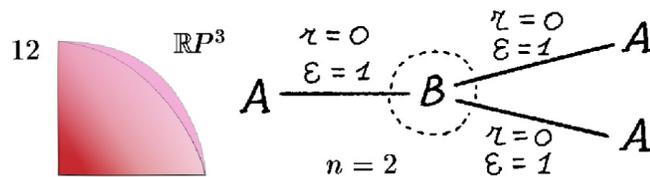
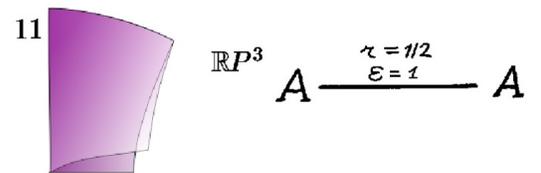
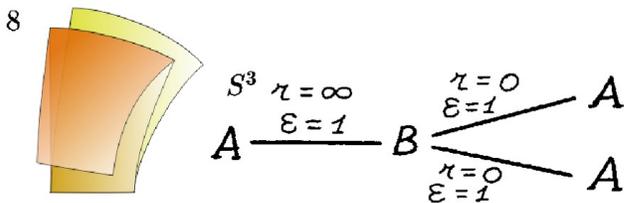
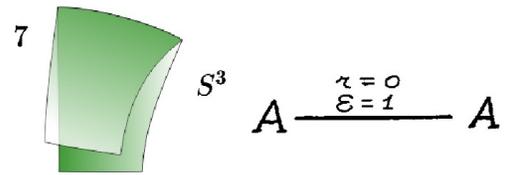
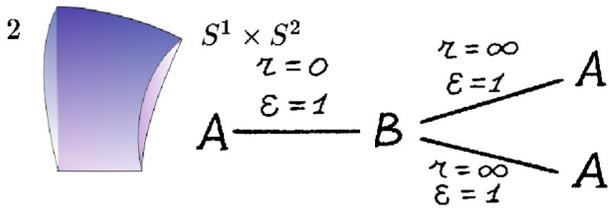
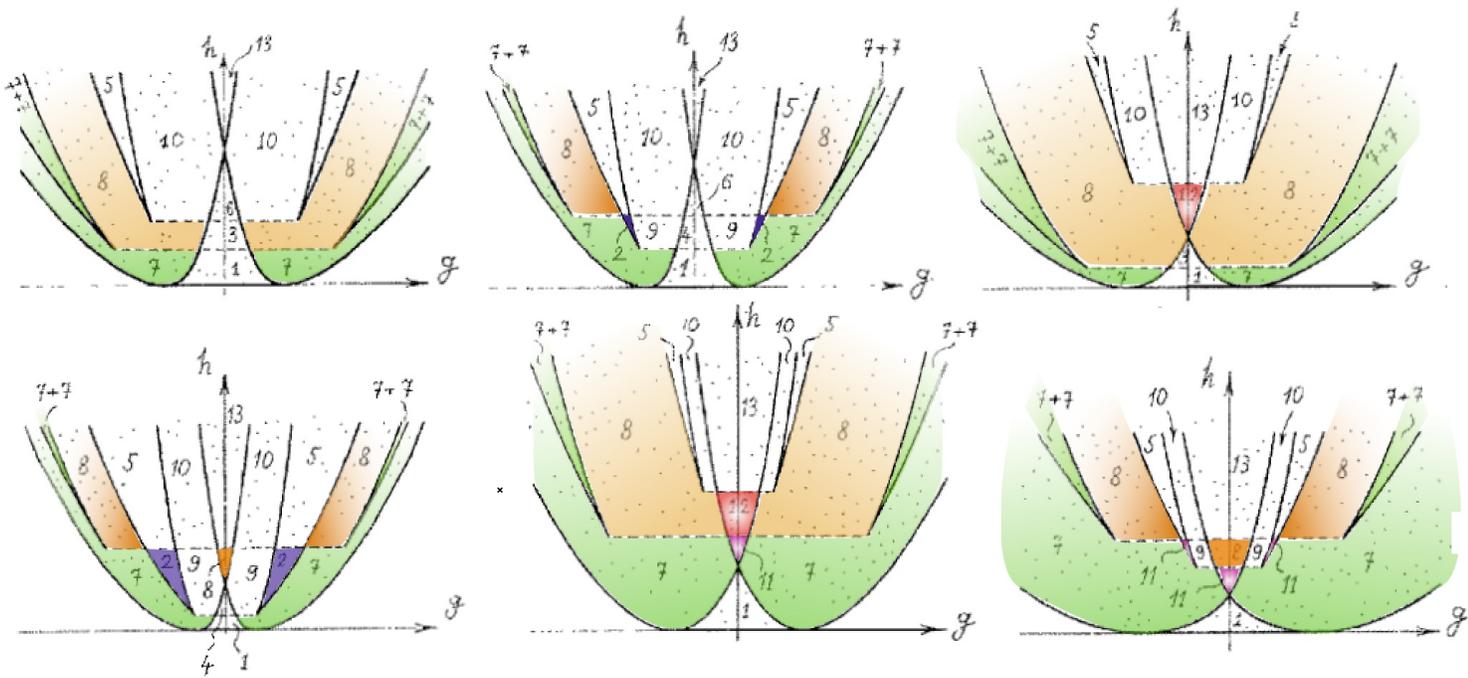


Рис. 7.5: Бифуркационные диаграммы случая Жуковского.

- случай Ковалевской, см. [11], моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунке 7.3;
- случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского, см. [11, 28, 29], моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунках 7.4;
- случай Жуковского, см. [11, 22, 23], моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунках 7.5;
- случай Ковалевской-Яхьи, см. [37], моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунке 7.6;
- случай Клебша, см. [35], моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунке 7.6;
- случай Соколова, см. [36], моделируется бильярдами в обобщенных областях, указанных на рисунке 7.6.

Молекулы показывают, что на самом деле система бильярда не так уж и проста. Относительно простое движение компенсируется тем, что граница усложняет топологию изоэнергетических поверхностей. То есть чем более сложной является топология бильярдного стола, тем более замысловатые траектории бильярда мы получаем. Именно это и позволяет промоделировать столь многие случаи динамики твердого тела – по сути сложность системы движения твердого тела может быть интерпретирована в терминах границы бильярдной области, что имеет один важный плюс – движение бильярдной системы наглядно. На рисунке 7.7 показано как на бильярде можно показать поведение траекторий вблизи критических окружностей.

Обобщенная бильярдная область	Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий бильярд в этой области	Эквивалентные известные случаи интегрируемости для твердого тела
Область, не содержащая конических точек, причем внутренность любой элементарной области её в составе не содержит фокусов.	$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A$	Лагранж (1), Эйлер (1)
Область, содержащая одну коническую точку типа $\gamma$ , причем внутренность любой элементарной области её в составе не содержит фокусов.	$A \xrightarrow[r=1/2 \ \varepsilon=1]{} A$	Лагранж (3), Жуковский (11)
$\Delta_\alpha(A_0)^2, C_1$	$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \nearrow_{r=\infty \ \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=\infty \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Ковалевская (5), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (4), Жуковский (2), Ковалевская-Яхья ( $h_{28}$ )
$B_1, \Delta_\alpha(2B_1), A_0, \Delta_\alpha(A_0 + B_0), \Delta_\alpha(A_0 + A'_0), \Delta_\alpha(B_0 + A_0 + B_0), \Delta_\alpha(A'_0 + A_0 + B_0), \Delta_\alpha(A'_0 + A_0 + A'_0)$	$A \xrightarrow[r=\infty \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \nearrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Жуковский (8)
$A_2, \Delta_\alpha(2A_1), \Delta_\alpha(A_2 + C_2)$	$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \nearrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \text{---}_{n=1} \end{cases}$	Клебш (2), Соколов (B), Ковалевская-Яхья ( $h_{18}$ )
$\Delta_\beta(A'_1)^2, \Delta_\beta((A'_1)^2_c + C_1), \Delta_\beta(A'_1)^2_x$	$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} B \begin{cases} \nearrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \text{---}_{n=2} \end{cases}$	Жуковский (12)
$A_1, \Delta_\alpha(A_1 + B_1)$	$A \xrightarrow[r=0 \ \varepsilon=1]{} A^* \begin{cases} \nearrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \text{---}_{n=0} \end{cases}$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский (2)
$\Delta_\alpha(2A_0)^2, \Delta_\alpha(2C_2)$	$A \begin{cases} \nearrow_{r=\infty \ \varepsilon=1} C_2 \\ \searrow_{r=\infty \ \varepsilon=1} C_2 \end{cases} \begin{cases} \nearrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Эйлер (2), Клебш (10, 12)
$\Delta_\alpha(2A_2)$	$A \begin{cases} \nearrow_{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \\ \searrow_{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \end{cases} \begin{cases} \nearrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=0 \ \varepsilon=1} A \end{cases}$	Эйлер (3), Клебш (5), Соколов (I)

Рис. 7.6:

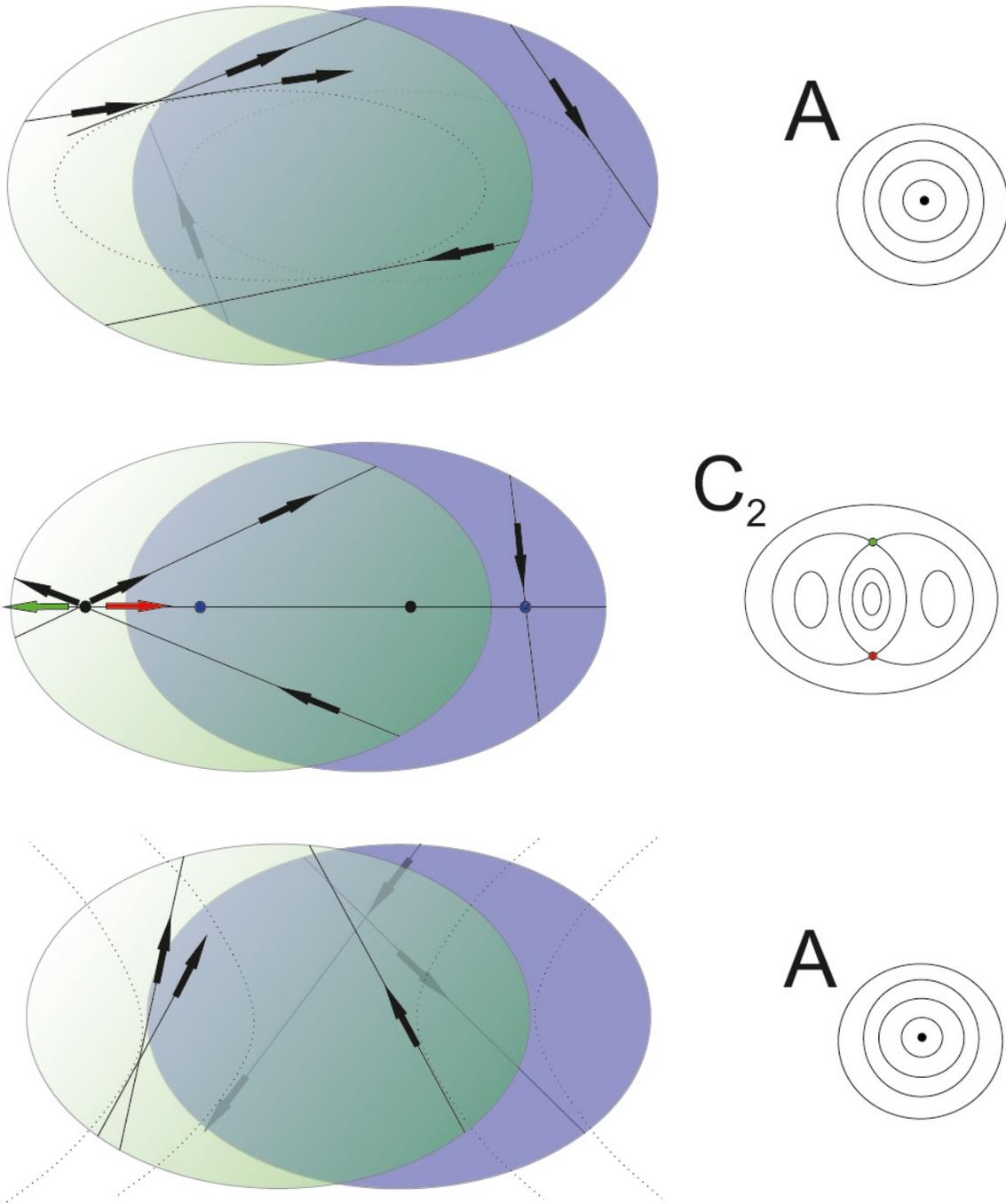


Рис. 7.7: На рисунках изображены траектории, лежащие на особых слоях. Показано, как ведёт себя траектория на особом слое при небольшом изменении начальных данных. Справа показаны плоские атомы, соответствующие трехмерным бифуркациям. В случае седлового атома  $C_2$  показано, что траектория, близкая к одной критической траектории (указанной красной стрелкой), после двух переходов через ребро склейки становится близкой к другой критической траектории (указанной зелёной стрелкой). На минимаксных атомах  $A$  движение устойчиво – небольшое изменение начальных данных не приводит к резкому изменению поведения траектории.

# Заключение

В диссертации получена полная классификация элементарных (плоских) компактных областей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также классификация так называемых обобщенных (локально-плоских) областей, полученных из элементарных склейками вдоль выпуклых эллиптических сегментов и некоторых выпуклых гиперболических сегментов, приводящих к образованию так называемых конических точек. Также проведена классификация плоских областей (в том числе некомпактных), ограниченных дугами софокусных парабол.

Для билиярда в каждой из описанных областей вычислен инвариант лиувиллевой эквивалентности – меченая молекула Фоменко-Цишанга, описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$ , а также вычислена грубая молекула с использованием некомпактных атомов-бифуркаций для билиардов в некомпактных областях.

Как оказалось, некоторые возникающие слоения Лиувилля для билиярда эквивалентны ряду ранее известных слоений Лиувилля, возникающим в случаях интегрируемости Эйлера (все слоения), Лагранжа, Ковалевской, Ковалевской-Яхьи, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Клебша и Соколова, что означает лиувиллеву эквивалентность вышеперечисленных систем системам билиярда при подходящем выборе билиардных областей.

Также удалось обнаружить слоения Лиувилля, которые описываются инвариантами, ранее не встречавшихся в задачах динамики твердого тела, в том числе молекулы, атомы-бифуркации в которых являются новыми и также не встречались ранее.

В качестве новых направлений исследования интегрируемых билиардов стоит отметить следующие.

- Изучение траекторной эквивалентности интегрируемых билиардов системам динамики твердого тела. Для этого необходимо вычислить функцию вращения на ребрах молекул, вычисленных в настоящей работе. В случаях, где лиувиллева эквивалентность уже установлена, сравнить полученные результаты с функциями вращения соответствующих задач динамики твердого тела.
- Изучение топологии билиардов в некомпактных областях, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, в том числе некомпактных обобщенных билиардов.
- Изучение топологии обобщенных билиардов в областях, полученных склейками вдоль невыпуклых участков границ элементарных областей. В тексте диссертации показано, что в этом случае не удастся задать билиардное движение на всех поверхностях уровня дополнительного интеграла – софокусной квадрики. Воспользовавшись результатами диссертации можно, однако, показать, что эти слои будут гомеоморфны особым слоям известных трехмерных атомов-бифуркаций, что позволяет в случае такой не вполне определенной билиардной системы вычислить аналог молекулы Фоменко-Цишанга с метками.

- Изучение топологии интегрируемых билиардов в плоских (а также обобщенных) областях, имеющих углы  $\frac{3\pi}{2}$  на границе. В этом случае билиардное движение нельзя доопределить по непрерывности при попадании материальной точки в вершину угла  $\frac{3\pi}{2}$ . В этом случае на каждом слое необходимо удалить несколько точек, которые при естественной этого слоя на билиардную область переходят в вершину угла  $\frac{3\pi}{2}$ . При этом слои в общем случае будут гомеоморфны не торам, а сферам с несколькими ручками, в которых сделано несколько проколов. Используя результаты диссертации, можно показать, как именно будут устроены слои для каждой области.

# Литература

- [1] С. Л. Табачников, *Геометрия и бильярды*, М.-Ижевск:НИИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011
- [2] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Издательский дом «Удмуртский университет», 1999
- [3] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991
- [4] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., Математический ин-т им.В.А.Стеклова РАН, 2009, 14, 4-5, 479–494
- [5] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, М.; Ижевск НИИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010
- [6] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., М.: Издательство Московского университета, №5(2012), 31–34
- [7] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, №4, 18–27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas Moscow Univ. Math. Bull, 69:4 (2014), 148-158.
- [8] В. В. Фокичева, *Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболой*, Матем. сб., 205:8 (2014), 139-160; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas Sb. Math., 205:8 (2014), 1201-1221.
- [9] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176
- [10] В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела*, ДАН, 465:2(2015), 1-4
- [11] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т.1,2, Ижевск НИИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999
- [12] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем*, Изв. АН СССР 52:2(1988), 378–407,

- [13] А. Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, Успехи матем. наук, **44** №1(265), 1989, 145–173
- [14] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы* Изв. АН СССР, 54:3(1990), 546–575
- [15] А. Т. Fomenko, A. Yu. Konyaev, *New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems*, Topology and its Applications, 159(2012), 1964–1975
- [16] А. Т. Fomenko, A. Yu. Konyaev, *Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems*, Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications Solid Mechanics and Its Applications, 211(2014), 3–21
- [17] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, *Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия*, Математический Сборник, 199:9(2008), 3–96
- [18] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, *Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях*, Доклады РАН, серия: математика, 446:6(2012), 615–617
- [19] V. Lazutkin, *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*, Springer-Verlag. Berlin, 1993
- [20] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.:Наука, 1989
- [21] А. А. Ошемков, *Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на  $SO(4)$* . // УМН, 42:2(1990), 199-200.
- [22] А. А. Ошемков, *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 23, Москва, изд-во МГУ, 1988, 122-132.
- [23] А. А. Oshemkov, A. T. Fomenko. *Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations*. // Advances in Soviet Mathematics, AMS, v. 6, 1991, 67-146.
- [24] A. V. Bolsinov, *Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant*. // In: Advances in Soviet Mathematics, v. 6, AMS, 147-183.
- [25] П. Й. Топалов, *Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела*. // Матем. сборник, 187:3(1996), 143-160.
- [26] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела*. // Доклады РАН, 339:3(1994), 293-296.
- [27] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела*. // Функциональный анализ и его приложения, 29:3(1995), 1-15.

- [28] О. Е. Орел, *Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина*. // Матем. сборник, 186:2(1995), 105-128.
- [29] О. Е. Орел, Ш. Такахаши, *Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева-Чаплыгина методами компьютерного анализа*. // Матем. сборник, 187:1(1996), 95-112.
- [30] В. В. Козлов, *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*. Изд-во МГУ, 1980.
- [31] Ю. А. Архангельский, *Аналитическая динамика твердого тела*. М.: Наука, 1977.
- [32] Я. Е. Жуковский, *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*. В томе 1 «Собрания сочинений». Т. 1,2. Москва, 1949.
- [33] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела*. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.
- [34] М. П. Харламов, *Лекции по динамике твердого тела*. Л.: Изд-во НГУ, 1965.
- [35] П. В. Морозов, *Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша*, Матем. сб., **193**:10 (2002), 113–138
- [36] П. В. Морозов, *Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа*, Матем. сб., **195**:3 (2004), 69–114
- [37] Н. С. Славина, *Классификация системы Ковалевской-Яхьи с точностью до лиувиллевой эквивалентности Доклады РАН, серия: математика 452:3(2013), 252-255*
- [38] Gutkin E., *Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems* // Regul. and Chaotic Dyn., **8**:1(2003), 1–13.