

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

на правах рукописи
УДК 514.853

Федосеев Денис Александрович

**Конфигурационные многообразия обобщенной
задачи Бертрана и гамильтоновы системы**

01.01.04 — геометрия и топология

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
Академик А.Т. Фоменко
Доцент Е.А. Кудрявцева

Москва – 2015

Оглавление

1	Введение	3
1.1	История вопроса и классические результаты	5
1.2	Необходимые определения	16
1.3	Постановка обобщенной задачи Бертрана	20
1.4	Описание результатов	21
2	Обобщенная задача Бертрана на многообразиях вращения без экваторов	31
2.1	Формулировка основных результатов	31
2.1.1	Решение обобщенной задачи Бертрана	31
2.1.2	Геометрия и классификация поверхностей Бертрана	35
2.2	Доказательство основных утверждений	45
2.2.1	Вспомогательные утверждения	45
2.2.2	Частный случай: конус	48
2.2.3	Общий случай движения в центральном поле сил	50
3	Обобщенная задача Бертрана на многообразиях вращения с экваторами	58
3.1	Принцип Мопертюи и некоторые вспомогательные утверждения	59
3.1.1	Принцип Мопертюи и вполне бертрановы многообразия	59
3.1.2	Некоторые свойства вполне бертрановых пар	61
3.2	Классификация вполне бертрановых пар	69
3.3	Случай цилиндра	77
3.4	Классификация устойчиво бертрановых пар	79
3.5	Обоснование диаграммы включения классов замыкающих потенциалов	80

4	Некоторые геометрические и аналитические свойства многообразий Бертрана с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$	83
4.1	Реализуемость многообразий Бертрана	83
4.1.1	Глобальная реализуемость римановых многообразий Бертрана	84
4.1.2	Локальная реализуемость римановых многообразий Бертрана	88
4.2	Явный вид метрики	93
5	Гамильтоновы системы	95
5.1	Некоторые определения	95
5.2	Гамильтоновы системы на многообразиях вращения	97
5.3	Пополненные бифуркационные диаграммы натуральных механических систем на многообразиях Бертрана	99
	Список литературы	113

Глава 1

Введение

Обратная задача динамики в области небесной механики впервые была сформулирована французским математиком Ж. Бертраном в 1873 году. Он задался вопросом, каким должен быть закон притяжения планеты звездой, если все траектории ее движения (при условии не слишком большой начальной скорости) — замкнутые кривые. Задача ставилась для движения в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , но, поскольку притягивающий потенциал полагался центральным, естественным образом индуцировалась на движение в плоскости. Эта задача (на самом деле, с некоторыми дополнительными техническими условиями на существование и свойства замкнутых траекторий) была успешно решена самим Ж. Бертраном в работе [1] (см. также английский перевод [2]).

В силу естественности поставленной задачи, за оригинальной работой Бертрانا последовали различные попытки ее обобщения. В качестве двух направлений обобщения следует выделить изменение требований на начальные условия, порождающие замкнутые траектории, на существование траекторий с определенными свойствами (иными словами, поиск потенциалов с различными свойствами, такие потенциалы в дальнейшем будут именоваться *бертрановыми потенциалами различных классов*) и рассмотрение различных многообразий вращения в качестве конфигурационного многообразия задачи. Иными словами, рассмотрение иных классов потенциалов и конфигурационных многообразий задачи. Среди ученых, занимавшихся обобщением задачи Бертрана, следует выделить Г. Кёнигса, Х. Либмана, Г. Дарбу, В. Перлика, М. Сантопрете и других.

Наиболее полное решение обобщенной задачи Бертрана на многообразиях без экваторов (частичный ответ на которую был ранее получен в

работах Дарбу [4, 5, 8] и Сантопрете [11]) удалось получить В. Перлику [9], а затем О.А. Загрядскому, Е.А. Кудрявцевой и автору в 2011 году в работе [34]. При этом задача Бертрана на многообразиях с экваторами оставалась не до конца решенной. Существенное продвижение в ее решении произошло в 2014 году, когда в работе [37] удалось построить полную классификацию пар Бертрана для вполне замыкающих и устойчиво замыкающих центральных потенциалов (см. определения 1.12, 1.11).

Кроме того, был получен ряд результатов о геометрии конфигурационных многообразий обобщенной задачи Бертрана (работы [35, 36]) и о свойствах отображения момента и бифуркационных диаграмм, возникающих при анализе натуральных гамильтоновых систем на этих многообразиях (движение в поле осцилляторного потенциала, движение в поле гравитационного потенциала), см. работу автора [40]. В этом аспекте данные системы особенно интересны, поскольку предоставляют естественный и простой пример систем с некомпактными слоями Лиувилля и их нетривиальными перестройками, для которых пока почти нет общей классификационной теории (см. работу [41]).

Настоящая работа имеет следующую структуру. Во введении дается история задачи Бертрана, вводятся необходимые определения, приводится строгая постановка обобщенной задачи Бертрана в той форме, решению которой посвящена настоящая работа, и формулируются основные полученные результаты. Глава 2 посвящена решению поставленной задачи для случая отсутствия экваторов у конфигурационных многообразий. В частности, дается классификация бертрановых пар пяти классов и описывается их геометрия. В главе 3 решается задача Бертрана на многообразиях с экваторами для случая вполне замыкающих и устойчиво замыкающих потенциалов. Для этого в §3.1 приводится формулировка принципа Мопертюи и доказывается ряд вспомогательных утверждений. В §3.2 доказывается классификационная теорема для вполне бертрановых пар. В §3.3 рассматривается задача Бертрана на цилиндре. В §3.4 дается решение обобщенной задачи Бертрана для устойчиво замыкающих потенциалов. Глава 4 посвящена геометрическим и аналитическим свойствам многообразий Бертрана. А именно, в §4.1 доказывается теорема о реализуемости многообразий Бертрана в виде поверхностей вращения, вложенных в \mathbb{R}^3 , а в §4.2 формулируется теорема о явном виде бертрановых метрик. Глава 5 посвящена изучению натуральных механических систем на многообразиях Бертрана с бертрановыми потенциалами как интегрируемых гамильтоновых систем. В §5.1 даются необходимые

определения, §5.2 посвящен общим свойствам гамильтоновых систем на многообразиях вращения, в §5.3 построены бифуркационные диаграммы для систем на многообразиях, классификация которых была получена в главе 2.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задачи и неоценимую помощь на всех этапах написания работы. Автор благодарен своему научному руководителю доценту Е.А. Кудрявцевой за многочисленные плодотворные дискуссии и ценные замечания и комментарии к работе, а также А.В. Болсинову, А.А. Ошемкову, А.С. Мищенко, И.Х. Сабитову, В.О. Мантурову и О.А. Загрядскому за полезные обсуждения задачи. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за поддержку и царящую на кафедре творческую атмосферу.

1.1 История вопроса и классические результаты

Задача, сейчас носящая название “задача Бертрана”, была впервые поставлена Ж. Бертраном в 1873 году в работе [1]. Задача формулировалась следующим образом: *найти закон силы притяжения, если она зависит только от расстояния и заставляет свою точку приложения описывать замкнутую кривую, каковы бы ни были начальные условия, если только начальная скорость точки меньше некоторого предела.* Иначе можно сказать, что классическая задача Бертрана — это обратная задача динамики на плоскости (поиск закона сил по известным свойствам траекторий) в частном случае центральной потенциальной силы и замкнутости всех ограниченных траекторий. Следует отметить, что задача возникла из небесной механики, а потому ставилась для движения в трехмерном евклидовом пространстве, но в силу центральности искомой силы индуцируется на плоскость.

В той же работе (имеется также английский перевод [2]) Бертран дал решение поставленной задачи: он доказал, что существует только два (с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной константы) потенциала с искомыми свойствами, причем это в точности ньюто-

новский (то есть гравитационный) и гуковский (то есть осцилляторный) потенциалы, которым соответствуют силы (записанные в естественных полярных координатах на плоскости) $-\frac{G}{r^2}$ и $-kr$, а уравнения движения точки имеют вид $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\frac{G}{r^3}\vec{r}$ либо $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -k\vec{r}$, где $\vec{r} = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ – радиус-вектор точки (планеты); $r = |\vec{r}|$, $G = \text{const} > 0$, $k = \text{const} > 0$. Впрочем, как было недавно установлено, доказательство Бертрана требовало существенно более сильных условий на потенциал, нежели “все ограниченные траектории замкнуты” (см. теорему 1.5 и обсуждение после нее); выяснилось, что задача была решена для так называемых *сильно замыкающих потенциалов* (см. определение 1.12), которые характеризуются требованием, чтобы каждая круговая орбита являлась сильно устойчивой. Однако, как показывает один из результатов настоящей работы (см. теорему 2.1), ответ, полученный Бертраном, верен и для задачи в изначальной постановке.

Была также поставлена и решена сходная задача (Г. Кёнигс [3]): *Зная, что сила, вызывающая движение планеты вокруг Солнца, зависит только от расстояния и такова, что она заставляет свою точку приложения описывать алгебраическую кривую, каковы бы ни были начальные условия, причем существуют ограниченные неособые некруговые орбиты, найти закон этой силы.*

Ответ на задачу Кенигса оказался таким же, как и для задачи Бертрана. Первая задача была решена Ж.Бертраном и Г. Дарбу [1, 4], см. также [4, 5]. Вторая решена Г. Кёнигсом [3].

Говоря более строго, в работе [1] Ж. Бертраном была сформулирована и доказана следующая теорема (в действительности, при дополнительном предположении о том, что центральный потенциал является сильно замыкающим, см. определение 1.12).

Теорема 1.1 (Ж. Бертран, 1873 [1]). *В евклидовом пространстве существуют ровно 2 закона притяжения с аналитическим центральным потенциалом, при которых всякая траектория точки P , движущейся вокруг неподвижной точки O (при условии, что координаты начального положения точки и компоненты её начальной скорости не пропорциональны и начальная скорость точки меньше некоторого предела, зависящего от начального положения точки P), является замкнутой, причем необязательно несамопересекающейся. Этими законами являются закон Ньютона с силой притяжения $F_1 = -\frac{G}{r^2}$ и закон Гука с силой притяжения $F_2 = -kr$, где $G > 0$, $k > 0$. Для закона сил F_β*

неособые (т.е. не содержащиеся в прямой, проходящей через притягивающий центр) ограниченные некруговые орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi_\beta = 2\pi/\beta$, $\beta = 1, 2$.

Причем в случае обоих потенциалов (ньютоновского, т.е. гравитационного, $V_1(r) = -\frac{G}{r}$ и гукковского, т.е. осцилляторного, $V_2(r) = k\frac{r^2}{2}$) геометрический вид орбит один и тот же: это конические сечения, а в случае замкнутых орбит — эллипсы с фокусом или центром в точке притяжения.

Рассуждения, содержащиеся в работах [1, 6, 7], основаны на следующем техническом утверждении, вытекающем из работы [1], которое мы будем называть технической теоремой Бертрана.

Теорема 1.2 (Ж. Бертран [1], техническая теорема). *Рассмотрим однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений $\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z = \frac{1}{K^2}\Psi(z)$ на луче $z > 0$ с параметром $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где $\Psi = \Psi(z)$ — аналитическая функция, такая что $\Psi(z) > 0$. (Функция $\frac{1}{K^2}\Psi(z)$ называется силовой или функцией внешних сил, а функция $-z$ — центробежной силой или внутренней силой). Функцию $\Psi(z)$ назовем рационально замыкающей, если (i) для всех K все ограниченные непостоянные решения $z = z(\varphi)$ являются периодическими функциями с периодами, соизмеримыми с 2π , (ii) всякая точка $z > 0$ является невырожденным устойчивым положением равновесия уравнения при $|K| = \sqrt{\Psi(z)}/z$. Существуют две и только две рационально замыкающие функции Ψ с точностью до мультипликативной константы: $\Psi(z) = \frac{A}{z^{\beta^2-1}}$, где $\beta \in \{1, 2\}$, $A > 0$ — произвольная мультипликативная константа. При этом все ограниченные непостоянные решения являются периодическими функциями с минимальным положительным периодом $\Phi = 2\pi/\beta$.*

В действительности, теорема 1.2 и некоторые ограничения в ней на функцию $\Psi(z)$ и мультипликативную константу A (а именно: $\Psi(z) > 0$, $A > 0$) не были явно сформулированы в [1], однако именно при этих ограничениях эта теорема доказана в [1]. Теорема 1.2 является в некотором смысле переформулировкой теоремы 1.1: здесь $z = \frac{1}{r}$, функция $z(\varphi)$ характеризует зависимость $r(\varphi)$ расстояния от угла, $2\pi/\beta$ — периодичность которой (при рациональном $\beta > 0$) отвечает за замкнутость траектории движения точки, а функция $-\Psi(z)$ есть производная от потенциала $V(\frac{1}{z})$ по переменной $z = z(r)$.

В дальнейшем 1–параметрическое семейство дифференциальных уравнений вида $\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z = \frac{1}{K^2}\Psi(z)$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, будем называть *семейством уравнений Бертрана*. Из теоремы 1.2 следует, что если уравнения орбит точки $z(\varphi)$ образуют семейство уравнений Бертрана, где K — значение интеграла кинетического момента, то из условия замкнутости ограниченных орбит (и существования таких орбит) следует, что потенциал $V(r)$ имеет один из двух определенных видов (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант).

Определение 1.3. Константу $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ назовем *постоянной Бертрана*, если неособые ограниченные орбиты являются графиками периодической функции $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi = 2\pi/\beta$.

В теоремах 1.1, 1.2 имеем $\beta \in \{1, 2\}$; $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ в теореме 2.1; $\beta = 2/\mu$ в теореме 2.3.

Замечание 1.4. Вообще говоря, идею замкнутости траекторий можно несколько расширить. Если в условии (i) теоремы 1.2 потребовать соизмеримость всех периодов с числом $2\pi/\xi$ (вместо 2π) при некотором $\xi > 0$, получим определение $2\pi/\xi$ -замыкающей функции. Как показывают доказательства технической теоремы 1.2 в работах [1, 7], ее утверждение останется верным, если в условии (i) потребовать лишь попарную соизмеримость периодов (вместо соизмеримости с 2π). Поэтому при иррациональном ξ не существует ни одной $2\pi/\xi$ -замыкающей функции Ψ . Отсюда следует обобщение теоремы 1.1 Бертрана на случай всех (не обязательно рациональных) конусов (см. следствие 2.2), а также обобщение теоремы Либмана [6] на случай всех (не обязательно рациональных) “вещественных разветвленных накрытий” проколотой полусферы и проколотой плоскости Лобачевского (см. теорему 2.1 при $c \neq 0$).

Динамика и геометрия движения на римановых многообразиях вращения (т.е. допускающих действие окружности изометриями) в поле центрального потенциала многократно и плодотворно рассматривалась. Так, аналог ньютоновской силы как величины, обратной площади сферы радиуса r , для пространства H^3 предложил ещё Н.И. Лобачевский [13] и Я. Больяи [14]. В 1860 г. П. Серре в работе [15] определил аналог гравитационного потенциала на сфере и решил задачу Кеплера на ней. В 1870 г. Ф. Шеринг написал аналитическое выражение для потенциала Ньютона

на H^3 [16]. В 1873 г. Р. Липшиц рассмотрел движение тела в центральном поле на сфере S^2 со стандартной метрикой, однако вместо потенциала $-\frac{1}{\operatorname{tg} r}$ он рассмотрел потенциал $-\frac{1}{\sin r}$. Он нашел общее решение этой задачи в эллиптических функциях [17]. В 1885 г. В. Киллинг обобщил законы Кеплера на сферу S^3 , оснащенную стандартной метрикой [18]. Подобно Лобачевскому и Больяи, он рассматривал силу притяжения как величину, обратную площади двумерной сферы радиуса r в S^3 . В следующем году эти результаты были заново получены К. Нейманом [19]. В работе [18] В. Киллинг также доказал, что переменные в задаче Кеплера с двумя притягивающими центрами на сфере S^n со стандартной метрикой разделяются, что влечёт интегрируемость задачи. В 1902 г. Г. Либман [6, 7] перенёс эти результаты на H^3 .

В 1940-х годах этот вопрос рассматривался в рамках теории относительности, а именно решалась квантово-механическая одночастичная спектральная задача для ньютоновского потенциала на сфере S^3 Э. Шрёдингером и Стивенсоном, на H^3 Инфельдом и Шильдом. В 1980-х годах центральные потенциалы в рамках теории относительности на S^3 , H^3 , S^n исследовались Ю.А. Курочкиным, В.С. Отчиком, А.А. Богушем, Г. Лимоном. В 1994 году В.В. Козлов переоткрыл законы Кеплера для пространств постоянной секционной кривизны [20]. В этом же году он вместе с Ю.Н. Фёдоровым установил интегрируемость классического движения одной частицы по сфере S^n в поле, создаваемом гукковскими потенциалами, расположенными в $2(n + 1)$ точках пересечения сферы с координатными осями.

Что касается обратной задачи динамики, то в силу естественности поставленной Бертраном задачи, за его работой последовали её различные обобщения. В первую очередь были рассмотрены обобщения в смысле изучения других конфигурационных многообразий задачи — замена плоскости на другие многообразия вращения. Упомянутым выше Г. Либманом задача Бертрана была решена в 1903 году на полусферах и плоскостях Лобачевского, причем ответ оказался прежним: искомыми потенциалами оказались гравитационный и осцилляторный. Обобщение результатов на случай n -мерной сферы S^n было получено П. Хиггсом в 1979 году [21], а частный случай для S^3 — Я.Е. Славяновским в 1980; ответ оказался аналогичным. Перечисленные результаты многократно переоткрывались. Так, к примеру, в 1992 году результат Либмана для задачи на полусфере был заново получен В.В. Козловым и А.О. Хариным [22].

Первый результат, связанный не с изучением потенциалов на данной поверхности, но с поиском пар “многообразие – центральный потенциал с заданными свойствами замыкания траекторий”, принадлежит Дарбу (1877, [5], а затем 1886, [4]). Анализ его работы (необходимый, поскольку, как и в случае с первоначальной работой Бертрана, в действительности доказанное не вполне совпадает с формулировкой теоремы) показывает, что из его (промежуточных) вычислений следует классификация бертрановых пар, в которых конфигурационным многообразием является риманово многообразие вращения (не обязательно вложенной в \mathbb{R}^3) без экваторов, а центральный потенциал — сильно замыкающий (см. теорему 1.5 ниже). В качестве (ошибочного) окончательного результата Дарбу сформулировал (ошибочную) классификацию поверхностей вращения (реализуемых вложение в \mathbb{R}^3) без экваторов, допускающих такие потенциалы, однако она оказалась неполной, так как содержала лишь многообразия вращения с $\mu = 1$ (см. теоремы 2.1, 2.3); и потому в его (ошибочную) классификацию не попали поверхности постоянной отрицательной кривизны.

В дальнейшем будем рассматривать многообразия $S \approx (a, b) \times S^1$ с римановой метрикой

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2, \quad (r, \varphi \bmod 2\pi) \in (a, b) \times S^1, \quad (1.1.1)$$

где $f = f(r)$ — бесконечно гладкая и положительная функция на интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Из работы Г. Дарбу [5] 1877 г. (см. также [8, 9]) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.5 (Г. Дарбу [5, 8], пары поверхность-потенциал Бертрана). *Пусть на поверхности S с римановой метрикой (1.1.1) задан центральный потенциал $V = V(r)$, где f, V — функции класса C^∞ , не имеющие критических точек. Потенциал V является сильно замыкающим (см. определение 1.12) в том и только том случае, когда в координатах $(V, \varphi \bmod 2\pi)$ риманова метрика на S имеет хотя бы один из следующих видов:*

$$ds^2 = \frac{A dV^2}{\beta^2(AV^2 - BV + C)^2} + \frac{d\varphi^2}{AV^2 - BV + C}$$

или

$$ds^2 = \frac{A dV^2}{\beta^2(-V - K)^3(A/(-V - K) - BV + C)^2} + \frac{d\varphi^2}{A/(-V - K) - BV + C},$$

где $A, B, C, K \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$ — константы, причем $-2AV + B > 0$ или $-A/(V + K)^2 + B > 0$ соответственно. При этом неособые ограниченные некруговые орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi = 2\pi/\beta$. Поверхности одного вида, отвечающие наборам (β, A, B, C) и $(\beta/\alpha, \alpha^2 A, \alpha^2 B, \alpha^2 C)$ при $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$, локально изометричны друг другу.

В действительности, теорема 1.5 и указанные в ней формулы для римановой метрики, как и ограничения на функции f, V и константы A, B, K , не были явно сформулированы в работах [5, 8] (посвященных в основном реализуемым поверхностям вращения в \mathbb{R}^3 , а не абстрактным поверхностям вращения). Однако именно при этих ограничениях эта теорема фактически доказана в [5, 8]. (Точнее, указанные выше формулы для римановой метрики следуют из формулы (15.17) работы [8] путем подстановки в нее решений (15.10) и (15.11) с учетом соотношения (15.8) и обозначений (15.4), а остальные утверждения теоремы 1.5 следуют из соотношений (15.3) и (15.19) работы [8].)

Следующим продвижением в этой области стала работа В. Перлика [9], который в 1992 году получил классификацию пар Бертрана для многообразий без экваторов и слабо замыкающих центральных потенциалов. Перлик обобщил теорему 1.5 Дарбу (в других обозначениях) на более широкий класс поверхностей и потенциалов: на поверхности класса C^5 без экваторов и слабо замыкающие центральные потенциалы класса C^5 (ослабив условие сильной устойчивости всех круговых орбит до их орбитальной устойчивости), выразив риманову метрику через координаты $(f, \varphi \bmod 2\pi)$ (см. замечание 4.1.3 о связи параметров Дарбу и Перлика). И вновь, хотя в работе [9] результат сформулирован для еще более широкого класса потенциалов, на самом деле он доказан в работе [9] для слабо замыкающих потенциалов и только для них.

Наконец, в 2007 году М. Сантопрете [11] доказал, что на аналитических многообразиях вращения с постоянной гауссовой кривизной без экваторов, вложенных в \mathbb{R}^3 , существует в точности два сильно замыкающих потенциала — гравитационный и осцилляторный, а на всех прочих поверхностях вращения без экваторов существует не более одного сильно замыкающего центрального потенциала и указал вид этого потенциала (осцилляторный). Он также нашел необходимое условие (в действительности являющееся и достаточным) на метрику существования такого потенциала и сформулировал его в виде биквадратного уравне-

ния на постоянную Бертрана $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$, см. определение 1.3. Он доказал следующую теорему:

Теорема 1.6 (М. Сантопрете [11]). *Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — двумерная поверхность вращения с координатами $(r, \varphi \bmod 2\pi) \in (a, b) \times S^1$ с аналитической римановой метрикой (1.1.1), причем функция f не имеет критических точек на (a, b) . Тогда в классе аналитических центральных потенциалов на S :*

1. *существует не более двух (с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант) сильно замыкающих потенциалов;*
2. *их ровно два, если и только если $f''f - (f')^2 = -\xi^2$, где ξ — положительная рациональная константа, причем этими потенциалами являются обобщенный гравитационный $V_1(r)$ и обобщенный осцилляторный $V_2(r)$ потенциалы;*
3. *если потенциал единствен, то $-f''f + (f')^2 =: h$ не константа, и потенциал имеет вид обобщенного осцилляторного потенциала.*

Более того, для любого сильно замыкающего центрального потенциала неособые ограниченные некруговые орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с одним и тем же минимальным положительным периодом $\Phi = 2\pi/\beta$, где β — положительная рациональная константа, зависящая от потенциала и удовлетворяющая биквадратному тождеству $\beta^4 - 5(-f''f + f'^2)\beta^2 - 5ff''f'^2 + 4f''^2f^2 - 3f'''f'f^2 + 4f'^4 = 0$; различным (с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант) потенциалам отвечают различные константы; потенциалу $V_i(r)$ из п. 2 отвечает константа $\beta_i = i\xi$, $i = 1, 2$.

Замечание 1.7. Для поверхности вращения с метрикой (1.1.1) скалярная кривизна Римана R вычисляется по формуле $R/2 = c := -f''/f$, причем c — гауссова кривизна поверхности в случае вложимости поверхности в \mathbb{R}^3 (см. также следствие 2.9(C)). Поэтому $h' = -f'''f + f''f' = f^2c'$, где $h := -f''f + (f')^2$. Иными словами, выполнение условия 2 теоремы 1.6 Сантопрете влечет постоянство гауссовой кривизны поверхности S . Описание всех абстрактных поверхностей вращения постоянной скалярной кривизны и без экваторов получается из леммы 2.16 и замечания 2.17.

Замечание 1.8. Следует отметить, что в работе [11] Сантопрете не формулировал условие отсутствия у функции f критических точек, а вместо сильно замыкающих потенциалов рассматривал замыкающие потенциалы. Также он не формулировал п. 3 и последнее утверждение теоремы в виде отдельных утверждений. Однако эти утверждения следуют из его работы, и именно такие условия необходимы для проведения его доказательства. Часть “если” пункта 2 теоремы 1.6 легко следует из теорем Бертрана и Либмана [7, 6], а пп. 1, 2 (часть “только если”) и 3 легко следуют из последнего утверждения теоремы, поскольку $h := -f''f + f'^2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2)/5$, где β_i — корни биквадратного уравнения, данного выше, а если h не равно константе, то может существовать не более одного постоянного корня β . Отметим, что биквадратное уравнение из теоремы 1.6 имеет вид $\beta^4 - 5\beta^2h + 3ff'h' + 4h^2 = 0$ и превращается в биквадратное уравнение Тикочинского [23] в случае метрик постоянной кривизны (см. замечание 1.7).

Кроме того, теорема 1.6 рассматривает лишь поверхности, вложенные в \mathbb{R}^3 как поверхности вращения, что накладывает определенные условия на функцию $f(r)$. А именно, для вложимости поверхности с метрикой (1.1.1) в \mathbb{R}^3 как поверхности вращения необходимо, чтобы $|f'(r)| \leq 1$ (и достаточно, чтобы $|f'(r)| < 1$). В силу (2.1.1) в условиях второго пункта теоремы 1.6 это неравенство равносильно неравенству $|\xi| \leq 1$, если $c \geq 0$ (см. замечание 1.7) и $\inf f = 0$ (например, когда интервал (a, b) максимален); неравенству $|\xi| \leq \min\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{-c}(b-r_0))}, \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{-c}(a-r_0))}\right\}$, если $c < 0$.

Подробный обзор истории задачи Бертрана и ее обобщений может быть найден, например, в книге А.В. Щепетилова [12].

В диссертации рассмотрено более широкое обобщение задачи Бертрана. А именно, варьируется не только конфигурационное многообразие задачи, как было у Дарбу и Перлика, но и рассматриваются различные наборы требований на потенциал (т.е. вводится несколько классов замыкающих потенциалов, см. определение 1.12): изучена задача Бертрана не только для сильно замыкающих (как у Дарбу), слабо замыкающих (Перлик) и замыкающих (оригинальная формулировка Бертрана), но и для локально, полулокально, вполне и устойчиво замыкающих потенциалов, которые ранее не рассматривались (теоремы 2.1 и 2.3). На рис. 1.1 наглядно показано, как связаны между собой эти классы потенциалов, причем диаграмма точна в том смысле, что все изображенные на

диаграмме “области” непусты кроме, быть может, области “ $1 \setminus 3$ ” (см. утверждение 3.13). Как видно, класс локально замыкающих потенциалов является самым общим из рассматриваемых — все прочие потенциалы также являются локально замыкающими. Самыми узкими классами являются сильно замыкающий (для которого результаты были получены Бертраном и Дарбу) и вполне замыкающий. Отметим, что диаграмма включений классов потенциалов на рис. 1.1 не является тривиальным следствием определений этих классов. Из определения классов нетрудно следует лишь “грубая” диаграмма на рис. 1.2 (диаграмма нестрогих включений классов), см. замечание 1.14(a). Включение “ $3 \subseteq 1$ ”, скорее всего, является строгим, но для решения этого вопроса не достаточно результатов настоящей работы.



Рис. 1.1: Диаграмма включений классов замыкающих потенциалов

Важно отметить, что в случае поиска многообразий, на которых существуют вполне и устойчиво замыкающие потенциалы, удалось отказаться от условия отсутствия экваторов, которое существенно использовалось в ранее доказанных теоремах в этой области (см. теорему Дарбу 1.5 и обсуждение после нее). В обоих случаях — поиск пар “многообразии вращения без экваторов – замыкающий (сильно, слабо, локально или полулокально замыкающий) гладкий центральный потенциал” и “многообразии вращения – вполне/устойчиво замыкающий гладкий центральный потенциал” получена полная классификация как многообразий, так

и потенциалов, которые вновь оказываются гравитационным и осцилляторным, причем на части многообразий оба они являются бертрановыми, а на прочих бертрановым является лишь осцилляторный потенциал (теоремы 3.8 и 3.12).

Как было сказано выше, далеко не все многообразия Бертрана могут быть вложены в \mathbb{R}^3 с сохранением инвариантности относительно действия группы вращений. Однако ранее никто не задавался вопросом, какие же из бертрановых многообразий (то есть многообразий вращения, на которых существует бертрановый потенциал в одном из рассматриваемых смыслов) могут быть реализованы в \mathbb{R}^3 — целиком (глобально) или в окрестности какой-то параллели (локально). В диссертации этот вопрос рассмотрен и доказано, какие из многообразий Бертрана могут быть реализованы — как глобально, так и локально (теоремы 4.1 и 4.8). В частности, этот результат наглядно демонстрирует, каких многообразий не хватало в классификации Дарбу в решении задачи Бертрана для сильно замыкающих потенциалов.

Движение в поле гладкого центрального потенциала по многообразию вращения является, очевидно, натуральной механической системой, обладающей дополнительными первыми интегралами. В силу этих соображений естественной задачей является изучение интегрируемости этих систем, а в случае положительного результата — построение инвариантов классификационной теории Фоменко–Цишанга. Рассмотрением интегрируемых “бертрановых динамических систем” — движения по многообразию Бертрана в поле замыкающего (в одном из смыслов) центрального потенциала — занимался, например, М. Сантопрете. Исследование показывает, однако, что бертранова система не всегда является интегрируемой по Лиувиллю (см. опр. 5.3), поскольку её гамильтоновы потоки не всегда полны. Тем не менее, понятия бифуркационной диаграммы, отображения момента и слоения Лиувилля все равно оказываются осмысленными. В диссертации построены бифуркационные диаграммы для всех бертрановых систем с конфигурационным многообразием без экваторов и исследованы свойства отображения момента и слоения Лиувилля, в частности, исследовано количество и компактность прообраза точек в каждой камере образа отображения момента (теоремы 5.4 и 5.5). Оказывается, что такие системы предоставляют простой и естественный пример интегрируемых систем с некомпактными слоями сло-

ения Лиувилля. Следует отметить, что в отличие от компактного случая, для которого существует исчерпывающая классификационная теория Фоменко–Цишанга (подробно изложенная, например, в [39]), перестройки некомпактных слоев на сегодняшний день остаются малоизученными. Перестройки, возникающие в случае многообразий Бертрана, поддаются описанию и классификации (что сделано в диссертации), а потому данные системы можно рассматривать как простой и наглядный пример, полезный при построении общей теории классификации систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля.

1.2 Необходимые определения

Введем ряд определений, необходимых для формулировки теорем и изложения их доказательств.

Под *траекторией* будем понимать решение $\vec{r}(t)$ уравнения движения, определенное на максимальном по включению интервале $(t_0, t_1) \subset \mathbb{R}^1$, под *орбитой* — образ этого отображения $O = \{\vec{r} = \vec{r}(t) \mid t \in (t_0, t_1)\} \subset S$, под *фазовой траекторией* — функцию $(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$ со значениями в касательном пространстве TS , а под *фазовой орбитой* — ее образ $\tilde{O} = \{(\vec{r} = \vec{r}(t), \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)) \mid t \in (t_0, t_1)\} \subset TS$.

Определение 1.9. (а) Орбита точки, движущейся по поверхности S с римановой метрикой 1.1.1 по закону сил, заданному центральным (т.е. зависящим только от r) потенциалом $V(r)$, называется *круговой*, если она совпадает с орбитой действия группы вращений. Траектория называется *круговой*, если соответствующая ей орбита является круговой. Круговую орбиту назовем *сильно устойчивой*, если на ней функция $V(r) + \frac{K_0^2}{2f^2(r)}$, называемая *эффективным потенциалом*, имеет невырожденный локальный минимум при некотором $K_0 \neq 0$.

Замкнутую орбиту назовем *орбитально устойчивой*, если отвечающая ей фазовая траектория орбитально устойчива для ограничения системы на множество уровня кинетического момента, содержащее эту траекторию.

(б) Траектория называется *ограниченной*, если она определена на всей оси времени $t \in \mathbb{R}^1$, и ее образ содержится в некотором компакте $[r_1, r_2] \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$. Орбита называется *ограниченной*, если соответствующая ей траектория ограничена.

(с) Траекторию (и соответствующую орбиту) назовем *особой*, если значение интеграла кинетического момента K на этой траектории равно 0, т.е. $\varphi = \text{const}$.

Замечание 1.10. (а) Пусть имеется двумерная поверхность S с метрикой (1.1.1), где $f(r)$ — гладкая функция, и центральный гладкий потенциал $V(r)$ на ней. Проверка показывает, что окружность $\{r_0\} \times S^1$ является круговой орбитой тогда и только тогда, когда r_0 является критической точкой эффективного потенциала $V(r) + \frac{K_0^2}{2f^2(r)}$, где K_0 — значение интеграла кинетического момента на соответствующей траектории. Заметим сразу, что $f > 0$. Пусть теперь $f'(r_0)$ и $V'(r_0)$ имеют одинаковый знак или одновременно равны нулю. Получаем, что в этом и только в этом случае окружность $\{r_0\} \times S^1$ является круговой орбитой, причем значение кинетического момента на соответствующей траектории равно $K_0 = \pm \sqrt{\frac{V'(r_0)}{f'(r_0)}} f^3(r_0)$ или любое $K_0 \neq 0$ соответственно.

(б) Окружность $\{r\} \times S^1$ является сильно устойчивой круговой орбитой тогда и только тогда, когда она является круговой орбитой и соответствующая фазовая орбита является боттовским критическим множеством локальных минимумов ограничения интеграла энергии на поверхность уровня интеграла кинетического момента в фазовом пространстве. Поэтому сильно устойчивые круговые орбиты орбитально устойчивы.

Заметим, что если траектория неограничена в смысле определения 1.9(b), то планета “выходит на край поверхности”.

Введем следующие классы центральных потенциалов на абстрактных поверхностях вращения.

Определение 1.11. Круговую орбиту назовем *почти устойчивой*, если в любой ее окрестности содержится неособая ограниченная некруговая орбита (см. определение 1.9).

Определение 1.12. Пусть $V(r)$ — центральный потенциал на поверхности S с метрикой (1.1.1). Будем называть его *замыкающим*, если

(\exists) существует неособая ограниченная некруговая орбита γ в S ;

(\forall) всякая неособая ограниченная орбита в S замкнута.

В этом случае будем называть риманово многообразие (S, ds^2) и пару (ds^2, V) — *бертрановыми*.

Потенциал $V(r)$ будем называть *локально замыкающим*, если

$(\exists)^{\text{loc}}$ существует сильно устойчивая круговая орбита $\{r_0\} \times S^1$ в S ;

$(\forall)^{\text{loc}}$ для всякой сильно устойчивой круговой орбиты $\{r_0\} \times S^1$ в S существует $\varepsilon > 0$, такое что всякая неособая ограниченная орбита, целиком лежащая в кольце $[r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon] \times S^1$ и имеющая уровень кинетического момента в интервале $(K_0 - \varepsilon, K_0 + \varepsilon)$, является замкнутой, где K_0 — значение кинетического момента на соответствующей круговой траектории.

В этом случае будем называть риманово многообразие (S, ds^2) и пару (ds^2, V) — *локально бертрановыми*.

Потенциал $V(r)$ будем называть *полулокально замыкающим*, если выполнены условия (\exists) , $(\forall)^{\text{loc}}$ и следующее условие:

$(\forall)^{\text{s-loc}}$ любая неособая ограниченная орбита в кольце $U = [a', b'] \times S^1$ с уровнем кинетического момента \hat{K} является замкнутой, где $a' := \inf r|_{\gamma}$, $b' := \sup r|_{\gamma}$, γ — некоторая ограниченная орбита из (\exists) , \hat{K} — значение кинетического момента на ней.

В этом случае будем называть риманово многообразие (S, ds^2) и пару (ds^2, V) — *полулокально бертрановыми*.

Потенциал $V(r)$ назовем *сильно* (соответственно *слабо* или *устойчиво*) *замыкающим*, если выполнено условие $(\forall)^{\text{loc}}$ (соответственно его аналог для всякой орбитально устойчивой или почти устойчивой круговой орбиты) и следующее условие, налагаемое в работах [1], [5, 4, 8] и [11] (соответственно [9]): любая окружность $\{r\} \times S^1$ является сильно устойчивой (соответственно орбитально устойчивой или почти устойчивой) круговой орбитой. В этом случае риманово многообразие (S, ds^2) и пару (ds^2, V) назовем *сильно бертрановыми* (соответственно *слабо бертрановыми*, *устойчиво бертрановыми*).

Потенциал $V(r)$ будем называть *вполне замыкающим*, если все неособые орбиты замкнуты, в этом случае будем называть риманово многообразие (S, ds^2) и пару (ds^2, V) — *вполне бертрановыми*.

Если все неособые геодезические замкнуты (т.е. постоянный потенциал $V_0 = \text{const}$ является вполне замыкающим), то риманову метрику вращения ds^2 на S назовем *метрикой Таннери*, а риманово многообразие (S, ds^2) — *многообразием Таннери* [29, гл. 4, теорема 4.13].

Нетрудно показывается, что всякая круговая орбита, являющаяся сильно устойчивой (определение 1.9) или орбитально устойчивой, почти устойчива (определение 1.11). Поэтому любой сильно замыкающий и любой слабо замыкающий (определение 1.12) центральные потенциалы являются устойчиво замыкающими.

Определение 1.13. Параллель $\{r_0\} \times S^1$, где $r_0 \in (a, b)$, называется *экватором*, если $f'(r_0) = 0$. Граничная параллель $\{r_0\} \times S^1 \subset \partial S$, где $r_0 \in \{a, b\}$, называется *полюсом* (соответственно *абсолют*), если $\lim_{r \rightarrow r_0} f(r) = 0$ (соответственно $\lim_{r \rightarrow r_0} f(r) = +\infty$). Риманово многообразие вращения с двумя полюсами назовем *сферичным* [11, §II, definition 1]. Сферичное многообразие с одним экватором и неизометричными “северной” и “южной” полусферами назовем *грушевидным*.

Замечание 1.14. (а) Очевидно, что любой вполне замыкающий центральный потенциал $V(r)$ является замыкающим, а любой замыкающий — полулокально замыкающим; любой слабо замыкающий является устойчиво замыкающим, а любой устойчиво замыкающий — полулокально замыкающим. Нетрудно также показывается (см. теорему 2.7(A)), что любой сильно замыкающий потенциал является слабо замыкающим, и любой полулокально замыкающий — локально замыкающим, причем существует сильно устойчивая круговая орбита $\{r = r_0\}$, на которой значение интеграла кинетического момента K совпадает с $K|_\gamma$ для неособой ограниченной некруговой траектории γ из (\exists) . Тем самым, первые пять потенциалов из определения 1.12 являются локально замыкающими (без предположения об отсутствии на поверхности экваторов, см. ниже).

Таким образом, имеет место диаграмма нестрогих включений замыкающих потенциалов, изображенная на рис. 1.2. На самом деле, верно более точное утверждение 3.13, дающее диаграмму строгих включений, изображенную на рис. 1.1.

(b) Мы покажем (теоремы 2.1, 2.3, 2.7(B)), что если поверхность не имеет *экваторов* (т.е. таких окружностей $\{r\} \times S^1$, что $f'(r) = 0$), то первые пять понятий замыкающего потенциала $V(r)$ (см. определение 1.12) равносильны, причем тройка $(f(r), V(r), \beta)$ имеет определенный вид (см. теорему 1.5 или теоремы 2.1, 2.3): либо вид $(\xi f_{c,0}(\pm(r - r_0)), V_{c,0,i}(\pm(r - r_0)), i\xi)$ для некоторых $i \in \{1, 2\}$, $c \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$, либо вид $(f_{c,d}(\pm(r - r_0))/\mu, V_{c,d,2}(\pm(r - r_0)), 2/\mu)$ для некоторых $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$, где $\{\xi f_{c,0}(r)\}$ и $\{f_{c,d}(r)/\mu\}$ — двухпараметрическое и трехпараметрическое семейства функций, определяющие соот-

ветствующие семейства римановых многообразий вращения (поверхности Бертрана первого и второго типов, состоящие из одной или двух связных компонент). Здесь $\{V_{c,0,1}(r)\}$ и $\{V_{c,d,2}(r)\}$ — соответствующие семейства замыкающих центральных потенциалов с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант, $\xi, c, d, \mu \in \mathbb{R}$ — параметры семейств (см. таблицу 2.1), $\beta = 2\pi/\Phi$ — постоянная Бертрана.

(с) В отличие от теорем 1.1 и 1.5 Бертрана и Дарбу (а также теоремы Перлика [9]), в наших определениях замыкающего, локально или полулокально замыкающего потенциала не требуется, чтобы все окружности $\{r\} \times S^1$ являлись сильно устойчивыми (или орбитально устойчивыми) круговыми орбитами. Лишь в одном определении требуется существование хотя бы одной такой окружности.



Рис. 1.2: Диаграмма нестрогих включений классов замыкающих потенциалов

1.3 Постановка обобщенной задачи Бертрана

Определим *обобщенную задачу Бертрана*. Она является определенным частным случаем общей обратной задачи динамики (задачи нахождения закона сил по известным свойствам траекторий движения). В качестве

конфигурационного многообразия задачи возьмем *абстрактную поверхность вращения*, т.е. двумерное многообразие $S \approx (a, b) \times S^1$ с римановой метрикой 1.1.1. Отметим, что доказанные ниже теоремы остаются справедливыми и для более низких классов гладкости функции f .

Рассмотрим систему на этом многообразии, состоящую из неподвижного притягивающего центра (“Солнца”) и притягиваемой точки (“планеты”). Обобщенная задача Бертрана заключается в поиске пар (S, V) “многообразии вращения – центральный потенциал”, причем на искомый центральный потенциал накладываются определенные требования, связанные с замкнутостью некоторого множества траекторий движения точки по многообразию S в поле этого потенциала. Набор этих требований определяет *класс* обобщенной задачи Бертрана. Так, в настоящей работе решается обобщенная задача Бертрана для замыкающих, локально замыкающих, полулокально замыкающих, сильно и слабо замыкающих потенциалов на многообразиях без экваторов и для вполне замыкающих и устойчиво замыкающих потенциалов на многообразиях вращения без наложения условия на наличие экваторов (см. определение 1.12 классов бертрановых потенциалов).

1.4 Описание результатов

В настоящей работе получены следующие результаты по решению обобщенной задачи Бертрана, сформулированной в параграфе “Постановка обобщенной задачи Бертрана” введения, и исследованию аналитических и геометрических свойств ее конфигурационных многообразий и натуральных гамильтоновых систем на них.

1. Решена задача классификации пар Бертрана для случая многообразий вращения без экваторов и классов замыкающих, локально замыкающих, полулокально замыкающих, сильно замыкающих и слабо замыкающих потенциалов (см. определение 1.12). А именно, доказано, что на многообразиях вращения с метриками из трехпараметрического семейства $ds_{\mu,c,d}^2$, где $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{Q}_+$ (см. рис. 2.1) потенциалы пяти перечисленных классов совпадают, при этом на многообразиях с метриками $ds_{c,0,\mu}^2$, построенными в настоящей работе, таких потенциалов в точности два, а на прочих многообразиях семейства (для ненулевого параметра d) потенциал единствен. Более того, в первом случае потенциалами яв-

ляется обобщенный гравитационный и обобщенный осцилляторный, а во втором — только обобщенный осцилляторный. На иных многообразиях вращения без экваторов не существует потенциалов рассмотренных пяти классов. Более точно, доказаны следующие теоремы.

Первая соответствует случаю $d = 0$:

Теорема А (теорема 2.1). Пусть дана гладкая двумерная поверхность S , диффеоморфная $(a, b) \times S^1$, снабженная римановой метрикой (1.1.1) (т.е. абстрактная поверхность вращения). Пусть функция f удовлетворяет тождеству $f''f - (f')^2 = -\xi^2$, где $\xi > 0$ рационально, т.е. f имеет один из следующих видов:

$$f(r) = \xi f_c(r - \alpha) := \begin{cases} \pm \xi(r - r_0), & c = 0, \\ \frac{\xi}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}(r - r_0)), & c > 0, \\ \pm \frac{\xi}{\sqrt{-c}} \operatorname{sh}(\sqrt{-c}(r - r_0)), & c < 0, \end{cases}$$

где c — половина скалярной кривизны Римана этой поверхности; в данном случае кривизна постоянна; $2\pi\xi$ — полный угол в конической точке поверхности (центре поля). Пусть, далее, функция $f'(r)$ не имеет нулей на интервале (a, b) . Тогда в классе центральных потенциалов на S существуют два и только два (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) полулокально замыкающих (соответственно локально замыкающих, замыкающих, сильно или слабо замыкающих) потенциала $V_1(r)$, $V_2(r)$.

Случаю $d \neq 0$ соответствует следующее утверждение:

Теорема В (теорема 2.3). Пусть дана гладкая двумерная поверхность S , диффеоморфная $(a, b) \times S^1$, снабженная римановой метрикой (1.1.1). Пусть функция f не удовлетворяет тождеству $f''f - (f')^2 = -\xi^2$ ни для какого рационального $\xi > 0$, и пусть функция $f(r)$ не имеет критических точек на (a, b) . Тогда существует не более одного полулокально замыкающего (соответственно локально замыкающего, замыкающего, сильно или слабо замыкающего) центрального потенциала (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант). При этом потенциал ровно один (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: существует гладкая функция $\theta = \theta(r)$ без нулей на (a, b) , такая

что $\theta'(r) > 0$ и риманова метрика в координатах $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$ имеет вид

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2})}, \quad (1.4.1)$$

где μ — положительная рациональная константа, d — ненулевая константа, а c — произвольная вещественная константа.

При этом функция $\theta(r)$ и тройка чисел (μ, c, d) единственны (если существуют), и замыкающий потенциал будет являться обобщенным осцилляторным, т.е. иметь вид $V_2(r) = \frac{A}{2\theta^2(r)} + B$, где $A, B \in \mathbb{R}$, $A(\theta^4(r) + d) > 0$. Соответствующие неособые некруговые ограниченные орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi = \pi\mu$. На фазовой траектории, отвечающей круговой орбите $\{r\} \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$, значение кинетического момента K равно $K = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{A}{\theta^4(r)+d}}$; граничная окружность $\{r_0\} \times S^1$, на которой достигается $\inf f(r)$ (т.е. $\sup A|\theta(r)|$), является притягивающим центром поля с замыкающим потенциалом V_2 (т.е. на ней достигается $\inf V_2(r)$).

В качестве следствия исследован частный случай задачи Бертрана на конусах: доказано следствие 2.2.

Кроме того, подробно изучены геометрические свойства полученных многообразий и их бифуркации при изменении параметров (c, d) — утверждение 2.9 и комментарий 2.10. Показано, что все многообразия Бертрана (т.е. двумерные римановы многообразия вращения, на которых существуют “бертрановы” потенциалы, см. определение 1.12) без экваторов образуют трехпараметрическое семейство $ds_{c,d,\mu}^2$ (см. (2.1.3)) и могут быть описаны следующим образом (при $\mu = 1$). На прямой $\{d = 0\}$ расположены многообразия постоянной кривизны: проколотые полусферы при $c > 0$, евклидова плоскость при $c = 0$ и плоскости Лобачевского при $c < 0$. Полуплоскости $\{d > 0\}$ отвечают “полубесконечные” многообразия вращения. Полуплоскость $\{d < 0\}$ делится на две части левой ветвью параболы $c^2 + 4d = 0$ (см. рис. 2.1). В области справа от параболы находятся “грушевидные” многообразия с экватором, которые следует рассматривать как пары многообразий вращения без экваторов, каждое из которых является многообразием Бертрана и попарно эти многообразия являются аналитическим продолжением одно другого. Наконец, слева от параболы находится семейство пар полубесконечных многооб-

разий, получаемых из грушевидных устремлением радиуса экватора к бесконечности и “разведением” половин.

Изменение параметра μ ведет к переходу от “базисного” многообразия к некоторому определенному разветвленному накрытию над ним.

2. Решена обобщенная задача Бертрана в случае вполне замыкающих (теорема 3.8) и устойчиво замыкающих (теорема 3.12) потенциалов на произвольных многообразиях вращения (с экваторами или без них). Доказано, что в обоих случаях не возникает новых многообразий, помимо полученных в теореме 2.3. При этом “грушевидные” многообразия, которые при изучении задачи Бертрана на многообразиях без экваторов рассматривались как пары многообразий, в данном случае целиком являются многообразиями Бертрана. Более точно, доказано, что все устойчиво бертрановы многообразия являются многообразиями без экваторов (и их семейство совпадает с семейством всех бертрановых многообразий без экваторов), а для вполне бертрановых пар справедлива следующая теорема:

Теорема С (теорема 3.8). *Вполне бертрановы многообразия вращения (S, ds^2) , где $S = (a, b) \times S^1$, вместе с вполне замыкающими центральными потенциалами V на S (определение 1.12), с точностью до сопряженности пар (ds^2, V) образуют пять семейств:*

(i) *сферичные (определение 1.13) “сферообразные” (т.е. постоянной положительной кривизны) 2-мерные римановы многообразия вращения (образующие 2-параметрическое семейство, содержащее 1-параметрическое семейство круглых сфер с выколотыми полюсами) с гравитационным потенциалом на них (см. [34] или теорему 2.1),*

(ii) *“рациональные” конусы с плоской метрикой (образующие 1-параметрическое семейство, содержащее проколотую евклидову плоскость) с осцилляторным потенциалом на них (см. [34, §2.1, следствие 1] или следствие 2.2),*

(iii) *“северные полусферы” многообразий из п.(i) с осцилляторным потенциалом на них (см. [34] или теорему 2.1),*

(iv) *грушевидные (определение 1.13) 2-мерные римановы многообразия вращения из [34] (образующие 3-параметрическое семейство) с осцилляторным потенциалом на них, где знак потенциала таков, что “основной” полюс является притягивающим, а “дополнительный” — отталкивающим (см. [34, §2.2, формула (5)] или теорему 2.3),*

(v) все многообразия Таннери (определение 1.12), классифицированные в [29, гл. 4, теорема 4.13] (см. также (3.1.2) и (3.1.4) далее), включающие многообразия из пп. (i, iv) и образующие “функционально-двупараметрическое” семейство (параметры которого суть два вещественных числа и нечетная гладкая функция $h : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ с точностью до замены $h \rightarrow -h$, см. (3.1.2) далее), являющиеся (в силу леммы 3.4(d) далее) либо сферичными и сферообразными ($h \equiv 0$), либо грушевидными ($h \not\equiv 0$), с постоянным потенциалом на них.

Любые две вполне бертрановы пары (ds^2, V) , принадлежащие либо разным семействам, либо одному семейству с разными наборами параметров, не сопряжены. Римановы многообразия семейств (i) и (iv) составляют часть римановых многообразий семейства (v). Любые два римановы многообразия, принадлежащие либо разным семействам (ii, iii, v), либо одному семейству (i–v) с разными наборами параметров, не изометричны.

Кроме того, доказано, что на цилиндрах не существует замыкающих потенциалов, причем в любом “поясе” между максимумом и минимумом координаты “широты” любой замкнутой некруговой орбиты существуют как незамкнутые неособые ограниченные орбиты, так и бесконечное число замкнутых и попарно негомотопных орбит.

3. Исследованы геометрические свойства многообразий Бертрана, а именно, показано, какие из многообразий с метриками $ds_{c,d,\mu}^2$ являются поверхностями вращения, т.е. могут быть вложены в \mathbb{R}^3 с сохранением инвариантности относительно действия группы вращений. Доказаны следующие две теоремы о реализуемости многообразий целиком и о реализуемости некоторого максимального подмногообразия (“пояса”):

Теорема D (Глобальная реализуемость, теорема 4.1). *Верны следующие утверждения о реализуемости римановых многообразий Бертрана $(I_{k,c,d} \times S^1, ds_{\mu,c,d}^2)$ целиком:*

- 1) *Дополнительное многообразие не реализуемо никогда;*
- 2) *Основное многообразие реализуемо тогда и только тогда, когда соответствующая тройка параметров (μ, c, d) принадлежит следующим областям: $\{\mu \geq 2, c \geq -2\sqrt{-d}, d \leq 0\} \cup \{1 \leq \mu < 2, c \geq -2\sqrt{-d}\sqrt{h(\mu)}, d \leq 0\}$, где $h \in \text{Homeo}^+((0, +\infty), \mathbb{R})$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм интервалов, определенный формулой $h(\mu) := \frac{(\mu^2-1)(8+\mu^2)^2}{27\mu^4}$.*

Теорема Е (Локальная реализуемость, теорема 4.8). *Риманово многообразие Бертрана $(I_{k,c,d} \times S^1, ds_{\mu,c,d}^2)$ реализуемо целиком в виде поверхности вращения в \mathbb{R}^3 тогда и только тогда, когда оно является основным ($k = 1$) и тройка параметров (μ, c, d) принадлежит области, указанной в предыдущей теореме. Для остальных значений k , $(\mu, c, d) \in \mathbb{R}^3$, $\mu > 0$, верны следующие утверждения о локальной реализуемости многообразий Бертрана:*

0) Пусть $d = c = 0$, $0 < \mu < 1$. Риманово многообразие нереализуемо даже локально (т.е. любая окрестность любой параллели нереализуема).

1) Пусть $d = 0$, $c > 0$, $\mu < 1$. Реализуема часть многообразия, примыкающая к экватору $\{0\} \times S^1$.

2) Пусть $d = 0$, $c < 0$. При $\mu \leq 1$ многообразие нереализуемо даже локально. При $\mu > 1$ реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$.

3) Пусть $d > 0$, $c \leq 0$. При $\mu > 1$ реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$; при $\mu \leq 1$ поверхность нереализуема даже локально.

4) Пусть $d > 0$, $c > 0$. При $\mu \geq 1$ реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$; целиком риманово многообразие никогда не реализуемо. При $0 < \mu < 1$, $-\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$ реализуем “поясок” в окрестности параллели $\{-\sqrt{x_0}\} \times S^1$, отвечающей локальному минимуму $x_0 > 0$ функции $z(x)$, края которого никогда не достигают граничных параллелей (т.е. полюса и абсолюта) многообразия Бертрана. Наконец, при $0 < \mu < 1$, $-\frac{c^2}{4t} \geq h(\mu)$ многообразие Бертрана нереализуемо даже локально.

5) Пусть $d < 0$, $c < -2\sqrt{-d}$. При $0 < \mu \leq 1$ ни основное, ни дополнительное многообразие нереализуемо даже локально. При $1 < \mu$, $-\frac{c^2}{4t} \geq h(\mu)$ реализуема часть основного многообразия Бертрана, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$. При $\mu > 1$, $-\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$ у основного многообразия реализуема часть, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$, а у дополнительного реализуем “пояс” вокруг параллели $\{-\sqrt{x_0}\} \times S^1$, отвечающей локально-

му минимуму $x_0 > 0$ функции $z(x)$.

6) Пусть $d < 0, c = -2\sqrt{-d}$. При $\mu \leq 1$ ни основное, ни дополнительное многообразия нереализуемы даже локально. При $\mu \in (1, 2)$ реализуема часть основного многообразия Бертрана, прилегающая к абсолюту $\{+\infty\} \times S^1$. При $\mu = 2$ реализуемо все основное многообразие. При $\mu > 2$ реализуемо все основное многообразие и окрестность абсолюта $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$ дополнительного.

7) Пусть $d < 0, c > -2\sqrt{-d}$. При $0 < \mu < 1$ и у основного, и у дополнительного многообразия реализуемы части, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. При $c \geq 0, \mu \geq 1$ основное многообразие Бертрана реализуемо целиком, а у дополнительного реализуема часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. При $c < 0, \mu = 1$ и у основного, и у дополнительного многообразия реализуема часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$; при $\mu > 1, -\frac{c^2}{4t} > h(\mu)$ реализуемы часть основного многообразия, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$, часть дополнительного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$, и часть основного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$; при $\mu > 1 - \frac{c^2}{4t} \leq h(\mu)$ основное многообразие реализуемо целиком, а у дополнительного — часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$.

В каждом из случаев указанная реализуемая часть многообразия Бертрана максимальна в следующем смысле: любая окрестность любой параллели, не содержащейся в указанной части, не реализуема в виде поверхности вращения в \mathbb{R}^3 .

Более того, в каждом из случаев границей реализуемой части многообразия Бертрана, прилегающей к полюсу либо абсолюту, является параллель, отвечающая ближайшему к полюсу (абсолюту) корню по θ уравнения $(\theta^4 + d)^2 - \mu^2\theta^4(\theta^4 + c\theta^2 - d) = 0$; границами реализуемого "пояса" вокруг определенной параллели $\{\theta_0\} \times S^1$ являются параллели, отвечающие корням этого уравнения, ближайшим к θ_0 .

4. Изучены натуральные механические системы на бертрановых многообразиях без экваторов, полученных в предыдущих главах. Рассматривается два типа систем: движение в поле осцилляторного и движение в поле гравитационного потенциала (гравитационный потенциал изучается только для многообразий, для которых он является бертрановым).

Для этих систем показано, что они являются гамильтоновыми системами с набором дополнительных интегралов (хотя и не всегда интегрируемы по Лиувиллю), показана функциональная независимость интегралов, изучено отображение момента, в частности вычислены границы его образа, исследованы бифуркационные диаграммы и установлено количество и компактность слоев слоения Лиувилля в прообразе каждой точки образа отображения момента. Более точно, доказаны следующие теоремы:

Теорема F (Движение в поле осцилляторного потенциала, теорема 5.4). *Для натуральных механических систем, описывающих движения в поле осцилляторного потенциала $V(r) = \frac{A}{\theta^2}$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,d} = I_{k,c,d} \times S^1$ с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$ справедливы следующие утверждения об отображении момента, дополненной бифуркационной диаграмме и слоях слоения Лиувилля:*

(i) *в случае сфер и конусов ($\{d = 0, c \geq 0\}$) дополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг бифуркационной диаграммы, каждая из которых запараметризована в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\infty, 0)$, примыкающих к точке $(0, 0)$ на плоскости (K, E) ; прообраз любой точки которых является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; и луча $\{K = 0, E \geq 0\}$, прообраз каждой точки которого пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу объединением дуг бифуркационной диаграммы и $\{(0, 0)\}$, прообразом каждой ее внутренней точки является один компактный слой слоения Лиувилля (см. рис. 5.1);*

(ii) *в случае полубесконечных поверхностей и плоскости Лобачевского ($\{d > 0\} \cup \{d = 0, c < 0\}$) дополненная бифуркационная диаграмма состоит из пары симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ “сплошных” дуг, каждая из которых запараметризована в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\infty, -\sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4d}}{2}})$, прообраз любой точки которых является окружностью, образованной критическими точками ранга 1, пары горизонтальных “пунктирных” лучей (включающих концы), прообраз которых пуст, горизонтального “пунктирного” интервала, соединяющего верхние концы сплошных кривых, в прообразе каждой точки которого лежит один некомпактный слой слоения Лиувилля, а так-*

же луча $\{K = 0, E \geq 0\}$, прообраз каждой точки которого пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу объединением $\{(0, 0)\}$, сплошных дуг и пунктирных лучей; прообразом каждой его внутренней точки, лежащей выше прямой, содержащей пунктирные лучи, или на пунктирном интервале, является один некомпактный слой слоения Лиувилля, а прообразом любой точки ниже этой прямой — один компактный слой (см. рис. 5.2);

(iii) в случае пар полубесконечных поверхностей $\{d < 0, c \leq -2\sqrt{-d}\}$ пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля для основного многообразия устроены так же, как и в случае полубесконечных поверхностей, а для дополнительного многообразия пополненная бифуркационная диаграмма состоит из трех пар симметричных дуг: пары “сплошных” и двух пар “пунктирных” (включающих концы) и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; “сплошные” дуги запараметризованы в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\sqrt{\frac{-c-\sqrt{c^2+4d}}{2}}, 0)$, прообраз любой их точки является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; образ отображения момента — область, ограниченная снизу сплошными дугами и пунктирными лучами, с вершинами в концах сплошных дуг; прообразом каждой точки внутри криволинейных треугольников, образованных сплошными и пунктирными дугами, является один компактный слой слоения Лиувилля, прообразом прочих внутренних точек образа является один некомпактный слой, а прообраз граничных точек, находящихся на пунктирных дугах, пуст (см. рис. 5.3);

(iv) в случае грушевидных поверхностей $\{d < 0, c > -2\sqrt{-d}\}$ пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично предыдущему случаю, однако сплошные дуги пополненной бифуркационной диаграммы параметризованы в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\infty, -\sqrt[4]{-d})$ для основной поверхности и $\theta \in (-\sqrt[4]{-d}, 0)$ для дополнительной поверхности и устроены следующим образом: их верхние концы, соответствующие значению параметра $\theta \rightarrow -\sqrt[4]{-d}$, устремляются к бесконечности по обеим координатам, и горизонтальные пунктирные дуги отсутствуют (см. рис. 5.4 и 5.5).

Теорема G (Движение в поле гравитационного потенциала, теорема

5.5). Для натуральных динамических систем движения в поле гравитационного потенциала $V(r) = -A|\theta(r)|$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,0} = I_{k,c,0} \times S^1$ с метрикой $ds_{\mu,c,0}^2$ справедливы следующие утверждения об отображении момента и пополненной бифуркационной диаграмме:

(i) в случае конусов ($\{c = 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг, каждая из которых запараметризована в виде (5.2.2) параметром $r \in (0, +\infty)$, причем каждая из них имеет в качестве асимптот прямые $\{K = 0\}$ и $\{E = 0\}$ на плоскости (K, E) , прообраз любой ее точки является окружностью, состоящей из критических точек ранга 1, “пунктирной прямой” $\{E = 0\}$ и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы, прообраз любой внутренней точки, лежащей ниже прямой $\{E = 0\}$, является компактный слой слоения Лиувилля, а прообраз точек выше и на этой прямой — некомпактным слоем (см. рис. 5.6);

(ii) в случае проколотых полусфер и их “рациональных накрытий” ($\{c > 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг, каждая из которых запараметризована в виде (5.2.2) параметром $r \in (0, \pi/2)$, причем прямая $\{K = 0\}$ является их асимптотой, прообраз любой их точки является окружностью, состоящей из критических точек ранга 1, и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы, прообразом любой внутренней точки является компактным слоем слоения Лиувилля (см. рис. 5.7);

(iii) в случае проколотых плоскостей Лобачевского и их “рациональных накрытий” ($\{c < 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично случаю конусов (см. рис. 5.8).

Глава 2

Обобщенная задача Бертрана на многообразиях вращения без экваторов

В этом разделе будет полностью решена обобщенная задача Бертрана для классов замыкающих, локально, полулокально, сильно и слабо замыкающих потенциалов в предположении отсутствия экваторов у конфигурационного многообразия системы. Другими словами, в предположении, что $f'(r) \neq 0$ на интервале (a, b) .

2.1 Формулировка основных результатов

2.1.1 Решение обобщенной задачи Бертрана

Теорема 2.1. (*C^∞ -гладкая теорема для поверхностей Бертрана первого типа*) Пусть дана гладкая двумерная поверхность S , диффеоморфная $(a, b) \times S^1$, снабженная римановой метрикой (1.1.1) (т.е. абстрактная поверхность вращения). Пусть функция f удовлетворяет тождеству $f''f - (f')^2 = -\xi^2$, где $\xi > 0$ рационально, т.е. f имеет

один из следующих видов:

$$f(r) = \xi f_c(r - \alpha) := \begin{cases} \pm \xi(r - r_0), & c = 0, \\ \frac{\xi}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}(r - r_0)), & c > 0, \\ \pm \frac{\xi}{\sqrt{-c}} \operatorname{sh}(\sqrt{-c}(r - r_0)), & c < 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

где c — половина скалярной кривизны Римана этой поверхности; в данном случае кривизна постоянна; $2\pi\xi$ — полный угол в конической точке поверхности (центре поля). Пусть, далее, функция $f'(r)$ не имеет нулей на интервале (a, b) . Тогда в классе центральных потенциалов на S существуют два и только два (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) полулокально замыкающих (соответственно локально замыкающих, замыкающих, сильно или слабо замыкающих) потенциала $V_1(r)$, $V_2(r)$.

Эти замыкающие потенциалы являются обобщенными гравитационным $V_1(r)$ и осцилляторным $V_2(r)$, т.е. имеют вид

$V_i(r) = (-1)^i A |\theta(r)|^{2-i^2} / i + B$, $i = 1, 2$, где $A > 0$, B — некоторые константы, $\theta(r) = -\frac{f'(r)}{f(r)} = \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{f^2(r)} - c}$. Соответствующие потенциалу $V_i(r)$ неособые некруговые ограниченные орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi_i = \frac{2\pi}{i\xi}$, $i = 1, 2$. При этом на фазовой траектории, отвечающей круговой орбите $\{r\} \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$, значение кинетического момента K равно $K_i = \pm \xi \sqrt{\frac{A_i}{|\theta(r)|^{i^2}}}$, $i = 1, 2$. Граничная окружность $\{\hat{r}\} \times S^1$, на которой достигается $\inf f(r)$ (т.е. $\sup |\Theta(r)|$), является притягивающим центром поля с замыкающим потенциалом $V_i(r)$ (т.е. на ней достигается $\inf V_i(r)$).

Пусть $\xi = \frac{p}{q}$. Тогда q -листное накрытие \tilde{S} всякой такой поверхности S может быть представлено как разветвленное p -листное накрытие (с одной или двумя точками ветвления) одной из трех “базисных” поверхностей: евклидова плоскость, сфера, плоскость Лобачевского. Здесь накрывающее пространство \tilde{S} определено следующим свойством: это такое разветвленное накрытие минимальной степени, которое локально изометрично накрывает проколотую плоскость (соответственно сферу, плоскость Лобачевского).

В виде иллюстрации подробно рассмотрим частный случай теоремы 2.1: случай конуса (т.е. $c = 0$), не обязательно вложенного в трехмерное объемлющее пространство в виде поверхности вращения (т.е. не обязательно $\xi \leq 1$).

Следствие 2.2. (*C^∞ -гладкие замыкающие центральные потенциалы на конусах*) Пусть задан стандартный конус $S \approx (0, +\infty) \times S^1$ с римановой метрикой

$$ds^2 = dr^2 + \xi^2 r^2 d\varphi^2, \quad (r, \varphi \bmod 2\pi) \in (0, +\infty) \times S^1, \quad (2.1.2)$$

где $\xi > 0$, т.е. угол при вершине конуса равен $2\pi\xi$. Если ξ не является рациональным, то не существует замыкающих (соответственно локально, полулокально, сильно или слабо замыкающих) центральных потенциалов на рассматриваемом конусе. Если ξ рационально, то существует два и только два (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) замыкающих (соответственно локально, полулокально, сильно или слабо замыкающих) центральных потенциалов на конусе: гравитационный и осцилляторный потенциалы $V_i(r) = (-1)^i A r^{i^2-2} / i + B$, $i = 1, 2$, где $A > 0$, B — произвольные константы. Соответствующие неособые некруговые ограниченные орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi_i = 2\pi / (i\xi)$. Вершина конуса $\{0\} \times S^1$ является притягивающим центром поля для каждого потенциала V_1, V_2 .

В частном случае сильно замыкающих аналитических потенциалов теорема 2.1 и следствие 2.2 вытекают из усиления технической теоремы 1.2 Бертрана (см. замечание 1.4), а при дополнительном условии $\xi \leq 1$ — из теоремы 1.6 Сантопрете.

Теорема 2.3. (*C^∞ — гладкая теорема для поверхностей Бертрана второго типа*) Пусть дана гладкая двумерная поверхность S , диффеоморфная $(a, b) \times S^1$, снабженная римановой метрикой (1.1.1). Пусть функция f не удовлетворяет тождеству $f''f - (f')^2 = -\xi^2$ ни для какого рационального $\xi > 0$, и пусть функция $f(r)$ не имеет критических точек на (a, b) . Тогда существует не более одного полулокально замыкающего (соответственно локально замыкающего, замыкающего, сильно или слабо замыкающего) центрального потенциала (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант). При этом потенциал ровно один (с точностью до аддитивной и мультипликативной

констант) тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: существует гладкая функция $\theta = \theta(r)$ без нулей на (a, b) , такая что $\theta'(r) > 0$ и риманова метрика в координатах $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$ имеет вид

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2})}, \quad (2.1.3)$$

где μ — положительная рациональная константа, d — ненулевая константа, а c — произвольная вещественная константа.

При этом функция $\theta(r)$ и тройка чисел (μ, c, d) единственны (если существуют), и замыкающий потенциал будет являться обобщенным осцилляторным, т.е. иметь вид $V_2(r) = \frac{A}{2\theta^2(r)} + B$, где $A, B \in \mathbb{R}$, $A(\theta^4(r) + d) > 0$. Соответствующие неособые некруговые ограниченные орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi = \pi\mu$. На фазовой траектории, отвечающей круговой орбите $\{r\} \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$, значение кинетического момента K равно $K = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{A}{\theta^4(r) + d}}$; граничная окружность $\{r_0\} \times S^1$, на которой достигается $\inf f(r)$ (т.е. $\sup A|\theta(r)|$), является притягивающим центром поля с замыкающим потенциалом V_2 (т.е. на ней достигается $\inf V_2(r)$).

Замечание 2.4. Отметим, что каждая из теорем 2.1, 2.3, а так же 2.7 (см. далее) предполагает лишь C^∞ -гладкость (а не обязательно аналитичность) функций $f(r), V(r)$, и включает в себя пять утверждений:

- 1) описание замыкающих центральных потенциалов,
- 2) описание полулокально замыкающих центральных потенциалов,
- 3) описание локально замыкающих центральных потенциалов,
- 4) описание сильно замыкающих центральных потенциалов,
- 5) описание слабо замыкающих центральных потенциалов.

В условии теорем 2.1, 2.3 и 2.7 все пять классов потенциалов совпадают для абстрактных поверхностей вращения без экваторов (см. замечание 1.14(b)). В теоремах 2.1, 2.3 и 2.7 данной работы (как и в [1], [5, 4, 8], [9], [11]) не рассматриваются поверхности с экваторами, например, цилиндр. Предположение об отсутствии экваторов существенно, так как

все поверхности вращения с замкнутыми геодезическими (т.е. поверхности Таннери [29, теорема 4.13]) обладают замыкающим центральным потенциалом, равным константе. См. также главу 3 настоящей работы, в котором решена задача Бертрана без условия на экваторы для двух классов потенциалов. Можно показать, что при отсутствии экваторов условие (2.1.3) при $c, d \in \mathbb{R}$, как условие на функцию f , равносильно биквадратному уравнению из теоремы 1.6 Сантопрете на постоянную Бертрана $\beta := 2\pi/\Phi = i/\mu$, зависящую от типа сильно замыкающего потенциала V_i , $i = 1, 2$.

Замечание 2.5. Если в теореме 2.3 положить $d = 0$, $\mu = \frac{1}{\xi}$, то соответствующие поверхности в действительности совпадут с поверхностями, описанными в теореме 2.1, а потенциал — с осцилляторным потенциалом $V_2(r)$. Пары поверхность-потенциал из теорем 2.1 и 2.3, очевидно, совпадают с парами из теоремы 1.5 Дарбу. Трехпараметрическое семейство пар $(f_{\beta,K}(r), V_{K,G}(r))$ из работы Перлика [9] совпадает с описанным в теореме 2.1 семейством для гравитационного потенциала с мультипликативной константой $A_1 = \xi/2$, где $\beta := \xi$, $K := -c\mu^2$, $G := -2B$ — параметры семейства в [9]. Четырехпараметрическое семейство пар $(f_{\beta,D,K}(r), V_{D,K,G}(r))$ из работы Перлика [9] совпадает с описанным в теореме 2.3 семейством (при любом $d \in \mathbb{R}$) для мультипликативной константы $A_2 = \pm 1/(2\mu^2)$, где $\beta := 2/\mu$, $D := \mu^2 c$, $K := -4\mu^4 d$, $G := -2B$ — параметры семейства в [9].

2.1.2 Геометрия и классификация поверхностей Бертрана

Ниже мы построим единое семейство максимальных аналитических (вообще говоря, несвязных) поверхностей, содержащих в себе любую из поверхностей, описанных в теоремах 2.1 и 2.3, и изучим геометрию и классификацию этих поверхностей.

Рассмотрим семейство функций $Q_{c,d}(\theta) := \theta^2 + c - d\theta^{-2}$, $c, d \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$I_{c,d} := \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta < 0, Q_{c,d}(\theta) > 0, Q'_{c,d}(\theta) \neq 0\} =: \bigcup_{k=1}^{k_{c,d}} I_{c,d,k},$$

где $I_{c,d,k} = (\theta_{c,d,k, \min}, \theta_{c,d,k, \max}) \subset I_{c,d}$ — максимальный по включению интервал, k — номер интервала, $k_{c,d}$ — количество интервалов, т.е. $k_{c,d} := 1$

при $d \geq 0$ и $k_{c,d} := 2$ при $d < 0$. Пусть $r_{c,d}(\theta) = \int \frac{d\theta}{Q_{c,d}(\theta)}$ — некоторая первообразная в области $I_{c,d}$.

Замечание 2.6. Функции $r_{c,d}(\theta)$ и максимальные интервалы $I_{c,d,k}$ в зависимости от $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ могут быть заданы явными формулами. А именно, обозначим $\Delta = \Delta(c, d) := c^2 + 4d$. Касающиеся друг друга прямая $\{d = 0\}$ и парабола $\{\Delta = 0\}$ разбивают плоскость \mathbb{R}^2 на следующие подмножества: области $\Omega_1 = \{\Delta > 0, d < 0 < c\}$, $\Omega_2 = \{d > 0\}$, $\Omega_3 = \{c < 0, d < 0 < \Delta\}$, $\Omega_4 = \{\Delta < 0\}$, кривые $\ell_1 = \{d = 0 < c\}$, $\ell_2 = \{c < 0 = d\}$, $\ell_3 = \{c < 0 = \Delta\}$, $\ell_4 = \{\Delta = 0 < c\}$ и точку $\{(0, 0)\}$ (см. рис. 2.1). В области $\overline{\Omega}_i$ через $x_i = x_i(c, d)$ и $y_i = y_i(c, d)$, $(c, d) \in \overline{\Omega}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, обозначим следующие функции:

$$x_1 := \sqrt{\frac{c - \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad x_2 = x_3 := \sqrt{\frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad x_4 := \sqrt{\frac{\sqrt{-d}}{2} - \frac{c}{4}},$$

$$y_1 = y_2 := \sqrt{\frac{c + \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad y_3 := \sqrt{\frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad y_4 := \sqrt{\frac{\sqrt{-d}}{2} + \frac{c}{4}}.$$

Тогда функция $r_{c,d}(\theta)$ может быть задана следующими формулами:

$$r_{c,d}(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{\theta}, & (c, d) = (0, 0), \\ \frac{1}{y_1^2 - x_1^2} \left(-x_1 \operatorname{arctg} \frac{\theta}{x_1} + y_1 \operatorname{arctg} \frac{\theta}{y_1} \right), & (c, d) \in \Omega_1, \\ \frac{1}{y_1} \operatorname{arctg} \frac{\theta}{y_1}, & (c, d) \in \ell_1, \\ \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \left(\frac{x_2}{2} \ln \left| \frac{\theta - x_2}{\theta + x_2} \right| + y_2 \operatorname{arctg} \frac{\theta}{y_2} \right), & (c, d) \in \Omega_2, \\ \frac{1}{2x_2} \ln \left| \frac{\theta - x_2}{\theta + x_2} \right|, & (c, d) \in \ell_2, \\ \frac{1}{x_3^2 - y_3^2} \left(\frac{x_3}{2} \ln \left| \frac{\theta - x_3}{\theta + x_3} \right| - \frac{y_3}{2} \ln \left| \frac{\theta - y_3}{\theta + y_3} \right| \right), & (c, d) \in \Omega_3, \\ -\frac{1}{2} \frac{\theta}{\theta^2 - x_3^2} - \frac{1}{4x_3} \ln \left| \frac{\theta + x_3}{\theta - x_3} \right|, & (c, d) \in \ell_3, \\ \frac{1}{4y_4} \left(\operatorname{arctg} \frac{\theta + x_4}{y_4} + \operatorname{arctg} \frac{\theta - x_4}{y_4} - \frac{1}{2} \ln \frac{(\theta + x_4)^2 + y_4^2}{(\theta - x_4)^2 + y_4^2} \right), & (c, d) \in \Omega_4, \\ \frac{1}{2y_4} \operatorname{arctg} \frac{\theta}{y_4} - \frac{1}{2} \frac{\theta}{\theta^2 + y_4^2}, & (c, d) \in \ell_4. \end{cases}$$

Интервалы $I_{c,d,k}$, на которых задана функция $r_{c,d}(\theta)$, имеют вид

$$I_{c,d} = \bigcup_{k=1}^{k_{c,d}} I_{c,d,k} := \begin{cases} (-\infty, 0), & (c, d) \in \{(0, 0)\} \cup \ell_1; \\ (-\infty, -x_3), & (c, d) \in \Omega_2 \cup \ell_2; \\ (-\infty, -x_3) \cup (-y_3, 0), & (c, d) \in \Omega_3 \cup \ell_3; \\ (-\infty, -\sqrt[4]{-d}) \cup (-\sqrt[4]{-d}, 0), & (c, d) \in \ell_3 \cup \Omega_4 \cup \ell_4 \cup \Omega_1. \end{cases}$$

Зависимость этих интервалов от $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \{1, k_{c,d}\}$ показана на рис. 2.2 и в таблице 2.1, вместе с множеством значений функции $r_{c,d}|_{I_{c,d,k}}$.

По построению каждая из функций $r_{c,d}|_{I_{c,d,k}} : I_{c,d,k} \rightarrow r_{c,d}(I_{c,d,k})$ строго монотонна, а потому имеет обратную функцию, которую обозначим через $\theta_{c,d,k} = \theta_{c,d,k}(r)$. Итак, функция $\theta_{c,d,k} : r_{c,d}(I_{c,d,k}) \rightarrow I_{c,d,k}$ такова, что $\theta_{c,d,k}(r_{c,d}(\theta)) \equiv \theta$. Рассмотрим трехпараметрическое семейство абстрактных поверхностей вращения $S_{c,d} = \bigcup_{k=1}^{k_{c,d}} S_{c,d,k}$ с римановыми мет-

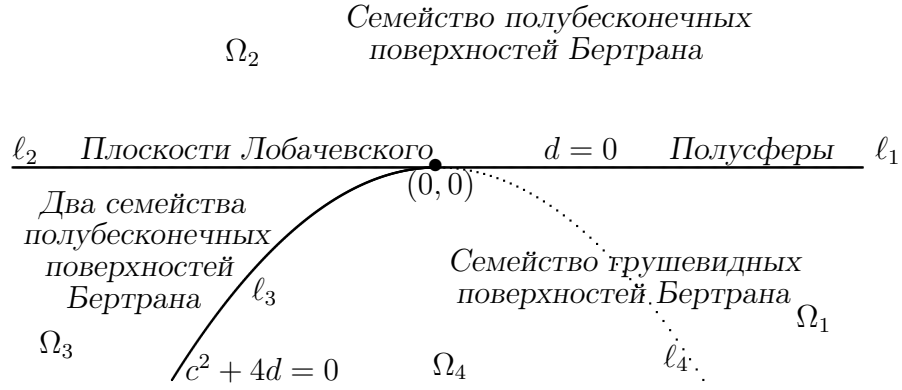


Рис. 2.1: Плоскость параметров $\mathbb{R}^2(c, d)$, разбитая на подмножества: области, кривые и точку (на дуге ℓ_4 нет бифуркации семейства)

риками $ds_{\mu,c,d}^2$, где

$$S_{c,d,k} = r_{c,d}(I_{c,d,k}) \times S^1, \quad ds_{\mu,c,d}^2|_{S_{c,d,k}} = dr^2 + \frac{1}{\mu^2} f_{c,d,k}^2(r) d\varphi^2, \quad (2.1.4)$$

$$S_{c,d} \approx I_{c,d} \times S^1, \quad ds_{\mu,c,d}^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2})},$$

где $c, d \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ — параметры, $k \in \{1, k_{c,d}\}$, $f_{c,d,k}(r) := \frac{1}{\sqrt{Q_{c,d}(\theta_{c,d,k}(r))}}$. Эта поверхность состоит из $k_{c,d}$ связных компонент. Первую связную компоненту ($k = 1$) назовем *основной*, вторую ($k = 2$ при $d < 0$) — *дополнительной*, а семейство (2.1.4) — *семейством (максимальных) поверхностей Бертрана*.

Пусть $\gamma = \gamma(\phi) = (c_\phi, d_\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ — некоторая, не обязательно непрерывная, кривая в \mathbb{R}^2 , пересекающая всякое множество вида $\{(\lambda c, \lambda^2 d) \mid \lambda > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ в единственной точке. Например, образ кривой $\gamma = \gamma(\phi)$ может являться объединением двух прямых $\mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ и трех точек $\{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$.

Теорема 2.7. Пусть дана двумерная поверхность S , диффеоморфная $(a, b) \times S^1$, снабженная C^∞ -гладкой римановой метрикой (1.1.1).

(А) Любой C^∞ -гладкий замыкающий центральный потенциал является полулокально замыкающим, любой сильно замыкающий — слабо

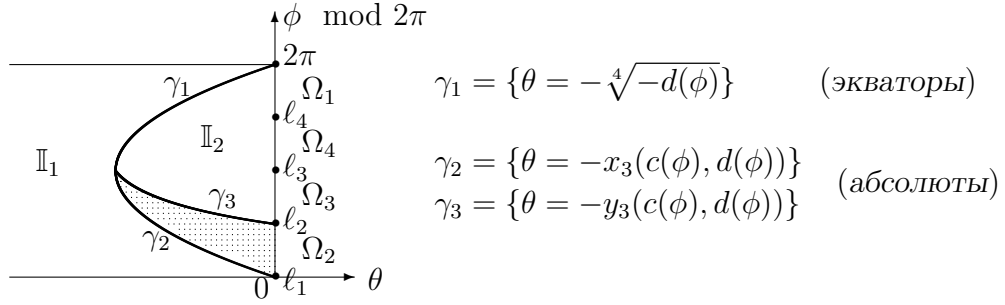


Рис. 2.2: Объединения интервалов $\mathbb{I}_k := \cup_{\phi} I_{c(\phi), d(\phi), k} \times \{\phi\}$ для семейств поверхностей Бертрана $S_{c(\phi), d(\phi), k}$ ($k = 1, 2$), где $(c(\phi), d(\phi)) := 8(\sqrt{2} \cos(\phi + \pi/4), \sqrt{2} \sin(\phi + \pi/4) - 1)$

замыкающим, любой слабо замыкающий — полулокально замыкающим, а любой полулокально замыкающий — локально замыкающим.

(В) Пусть $f(r)$ не имеет критических точек на (a, b) . Тогда любой C^∞ -гладкий локально замыкающий центральный потенциал является замыкающим и сильно замыкающим, и следующие утверждения равносильны:

- (а) на поверхности S имеется замыкающий центральный потенциал $V(r)$;
- (б) существует тройка $(\mu, c, d) \in \mathbb{R}^3$ и функция $\theta = \theta(r)$ без нулей на интервале (a, b) , такие что $\mu \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$ и выполнено (2.1.3), т.е.

$$f(r) = \frac{1}{\mu} f_{c,d,k}(\eta(r - r_0)), \quad \theta(r) = \eta \theta_{c,d,k}(\eta(r - r_0)), \quad r \in (a, b),$$

$$(\eta(a - r_0), \eta(b - r_0)) \subseteq r_{c,d}(I_{c,d,k}) \quad (2.1.5)$$

для некоторых $r_0 \in \mathbb{R}$, $\eta \in \{+, -\}$ и $k \in \{1, k_{c,d}\}$, т.е. поверхность (S, ds^2) изометрично и S^1 -эквивариантно вкладывается в поверхность Бертрана (2.1.4) посредством отображения $(r, \varphi) \mapsto (\eta(r - r_0), \varphi)$;

- (с) существует набор $(\mu, \lambda, \phi, r_0, k)$, такой что $\mu \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $r_0 \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, k_{\gamma(\phi)}\}$, $|\lambda| = 1$ при $\gamma(\phi) = (0, 0)$, причем

функция $f(r)$ имеет вид:

$$f(r) = \frac{1}{\mu|\lambda|} f_{\gamma(\phi),k}(\lambda(r - r_0)), \quad (\lambda(a - r_0), \lambda(b - r_0)) \subseteq r_{\gamma(\phi)}(I_{\gamma(\phi),k}),$$

т.е. поверхность $(S, \lambda^2 ds^2)$, подобная исходной с коэффициентом подобия λ , изометрично и S^1 -эквивариантно вкладывается в поверхность $(S_{\gamma(\phi),k}, ds_{\mu,\gamma(\phi),k}^2)$ посредством отображения $(r, \varphi) \mapsto (\lambda(r - r_0), \varphi)$.

Наборы чисел в (b) и (c) единственны. Наборы (μ, η, r_0, k) из (b) и $(\mu, \lambda/|\lambda|, r_0, k)$ из (c) совпадают. Параметры c, d и функция $\theta(r)$ из (b) связаны с параметрами λ, ϕ из (c) соотношениями $c = \lambda^2 c_\phi, d = \lambda^4 d_\phi, \theta(r) = \lambda \theta_{\gamma(\phi),k}(\lambda(r - r_0))$.

Потенциал $V = V(r)$ из (a) имеет вид $V_i(r) = (-1)^i A_i |\theta(r)|^{2-i^2}/i + B_i$ где $i \in \{1, 2\}$ при $d = 0$, $i = 2$ при $d \neq 0$, $A_i, B_i \in \mathbb{R}$ — любые мультипликативная и аддитивная константы, такие что $A_1 > 0, A_2(\theta^4(r) + d) > 0$.

(C) Отвечающие замыкающему центральному потенциалу V_i неособые некруговые ограниченные орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi_i = 2\pi\mu/i$, где μ то же, что и в (b) и (c), $i = 1, 2$. При этом на фазовой траектории, отвечающей круговой орбите $\{r\} \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$, значение кинетического момента K равно $K_i = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{A_i}{|\theta(r)|^{i^2} + d}}$; граничная окружность $\{\hat{r}\} \times S^1$, на которой достигается $\inf f(r)$ (т.е. $\sup A_i |\theta(r)|$), является притягивающим центром поля с потенциалом V_i (т.е. на ней достигается $\inf V_i(r)$).

Комментарий 2.8. В таблице 2.1 указаны максимальные интервалы $I_{c,d,k}$, в которых принимает значения координата θ на поверхностях Бертрана (2.1.4), и области значений монотонных функций $r_{c,d}(\theta), F_{c,d}(\theta) := f_{c,d,k}(r_{c,d}(\theta)), R_{c,d}(\theta)$ (натуральный параметр на меридиане, радиус параллели при $\mu = 1$, скалярная кривизна). В таблице использованы обозначения $r_{4,1} := (\pi/2 - 1)/(4y_4)$ и

$$r_1 := \frac{\pi}{2} \frac{y_1}{y_1^2 - x_1^2} - \frac{\arctg \sqrt{y_1/x_1}}{y_1 - x_1}, \quad r_4 := \frac{\pi}{8y_4} - \frac{1}{4x_4} \ln \frac{\sqrt{x_4^2 + y_4^2} - x_4}{y_4}.$$

$(c, d) \in \ell_2$	$(c, d) \in \Omega_2$	$(c, d) \in \ell_1$
<p>Плоскость Лобачевского</p> $I_{c,d}$ $r_{c,d}(I_{c,d})$ $F_{c,d}(I_{c,d})$ $R_{c,d}(I_{c,d})$ $\text{sgn } A_2$	<p>Семейство полубесконечных поверхностей Бергмана</p> $I_{c,d}$ $r_{c,d}(I_{c,d})$ $F_{c,d}(I_{c,d})$ $R_{c,d}(I_{c,d})$ $\text{sgn } A$	<p>Полусфера</p> $I_{c,d}$ $r_{c,d}(I_{c,d})$ $F_{c,d}(I_{c,d})$ $R_{c,d}(I_{c,d})$ $\text{sgn } A_2$
$y_2 = y_3 = 0, x_2 = x_3 = \sqrt{-c}$	$x_2 > 0, y_2 > 0$	$x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = \sqrt{c}$
$(c, d) \in \Omega_3$	$(c, d) = (0, 0)$	$(c, d) \in \Omega_1$
<p>Два семейства полубесконечных поверхностей Бергмана</p> $I_{c,d,k}$ $r_{c,d}(I_{c,d,k})$ $F_{c,d}(I_{c,d,k})$ $R_{c,d}(I_{c,d,k})$ $k, \text{sgn } A$	<p>Евклидова плоскость</p> $I_{c,d}$ $r_{c,d}(I_{c,d})$ $F_{c,d}(I_{c,d})$ $R_{c,d}(I_{c,d})$ $k, \text{sgn } A_2$	<p>Семейство грушевидных поверхностей Бергмана</p> $I_{c,d,k}$ $r_{c,d}(I_{c,d,k})$ $F_{c,d}(I_{c,d,k})$ $R_{c,d}(I_{c,d,k})$ $k, \text{sgn } A$
$(-\infty, -x_3)$ $(0, \infty)$ $(0, \infty)$ $(2c, -\frac{2\Delta}{x_3^2})$ $1, +$	$(-\infty, -x_2)$ $(-\frac{\pi y_2}{2\sqrt{\Delta}}, \infty)$ $(0, \infty)$ $(2c, -\frac{2\Delta}{x_2^2})$ $+$	$(-\infty, 0)$ $(-\frac{\pi}{2y_1}, 0)$ $(0, \frac{1}{y_1})$ $2c$ $+$
$(-\infty, -x_3)$ $(-\infty, 0)$ $(\infty, 0)$ $(-\frac{2\Delta}{y_3^2}, \infty)$ $2, -$	$(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$ $(0, \infty)$ 0 $1, +$	$(-\infty, -\sqrt{-d})$ $(-\frac{\pi}{2(x_1+y_1)}, -r_1)$ $(0, \frac{1}{x_1+y_1})$ $(2c, 32y_4^2)$ $1, +$
$0 < y_3 < x_3$		$0 < x_1 < y_1$
$(c, d) \in \ell_3$	$(c, d) \in \Omega_4$	$(c, d) \in \ell_4$
<p>Две полубесконечные поверхности Бергмана</p> $I_{c,d,k}$ $r_{c,d}(I_{c,d,k})$ $F_{c,d}(I_{c,d,k})$ $R_{c,d}(I_{c,d,k})$ $k, \text{sgn } A$	<p>Семейство грушевидных поверхностей Бергмана</p> $I_{c,d,k}$ $r_{c,d}(I_{c,d,k})$ $F_{c,d}(I_{c,d,k})$ $R_{c,d}(I_{c,d,k})$ $k, \text{sgn } A$	<p>Грушевидная поверхность Бергмана</p> $I_{c,d,k}$ $r_{c,d}(I_{c,d,k})$ $F_{c,d}(I_{c,d,k})$ $R_{c,d}(I_{c,d,k})$ $k, \text{sgn } A$
$(-\infty, -y_3)$ $(0, \infty)$ $(0, \infty)$ $(2c, 0)$ $1, +$	$(-\infty, -\sqrt{-d})$ $(-\frac{\pi}{4y_4}, -r_4)$ $(0, \frac{1}{2y_4})$ $(2c, 32y_4^2)$ $1, +$	$(-\infty, -y_4)$ $(-\frac{\pi}{4y_4}, -r_{4,1})$ $(0, \frac{1}{2y_4})$ $(2c, 16c)$ $1, +$
$(-\infty, -y_3)$ $(-\infty, 0)$ $(\infty, 0)$ $(0, \infty)$ $2, -$	$(-\sqrt{-d}, 0)$ $(-r_4, 0)$ $(\frac{1}{2y_4}, 0)$ $(32y_4^2, \infty)$ $2, -$	$(-y_4, 0)$ $(-r_{4,1}, 0)$ $(\frac{1}{2y_4}, 0)$ $(16c, \infty)$ $2, -$
$x_3 = y_3 = x_4 = \sqrt{-c/2}, y_4 = 0$	$x_4 > 0, y_4 > 0$	$x_4 = 0, y_4 = y_1 = x_1 = \sqrt{c/2}$

Таблица 2.1: Интервалы $I_{c,d,k}$ и их образы (см. комментарий 2.8)

Следствие 2.9. (Геометрия поверхностей Бертрана) (А) На любой поверхности Бертрана $(S, ds^2) = (S_{c,d,k}, ds^2_{\mu,c,d})$ (см. (2.1.4)) существует единственная граничная окружность $\{\hat{r}\} \times S^1$, определенная условием $\lim_{r \rightarrow \hat{r}} f(r) = 0$ (т.е. стягивающаяся в точку, называемую полюсом поверхности), причем $\lim_{r \rightarrow \hat{r}} \theta(r) = -\infty$ в случае $k = 1$, и $\lim_{r \rightarrow \hat{r}} \theta(r) = 0$ в случае $k = 2$. В полюсе поверхность имеет коническую особенность с полным углом $2\pi \lim_{r \rightarrow \hat{r}} |f'(r)|$, равным $2\pi/\mu$ при $k = 1$ или ∞ при $k = 2$. Полюс является притягивающим центром для любого замыкающего центрального потенциала.

(В) Поверхность $(S, ds^2) = ((a, b) \times S^1, ds^2) \subset (S_{c,d,k}, ds^2_{\mu,c,d})$ реализуема в \mathbb{R}^3 как поверхность вращения тогда и только тогда, когда $|f'(r)| \leq 1$ всюду на S , где $f'(r) = -(\theta + d\theta^{-3})/(\mu\sqrt{\theta^2 + c - d\theta^{-2}})$. В частности, дополнительная поверхность Бертрана ($k = 2$) всегда нереализуема; при $d \leq 0 \leq c$ основная поверхность Бертрана ($k = 1$) реализуема тогда и только тогда, когда $\mu \geq 1$ (включая стандартную полусферу при $(\mu, c, d) = (1, 1, 0)$ и евклидову плоскость при $(\mu, c, d) = (1, 0, 0)$); при $(c, d) \in \Omega_2 \cup \overline{\Omega_3} \setminus \{(0, 0)\}$ основная поверхность Бертрана ($k = 1$) нереализуема ни при каком μ (включая стандартную плоскость Лобачевского при $(\mu, c, d) = (1, -1, 0)$).

(С) Скалярная кривизна Римана $R = -2f''(r)/f(r) =: R_{c,d}(\theta)$ на поверхности Бертрана (2.1.4) удовлетворяет соотношениям

$$\frac{R_{c,d}(\theta)}{2} = c - \frac{6d}{\theta^2} - \frac{3cd}{\theta^4} + \frac{2d^2}{\theta^6}, \quad \frac{R'_{c,d}(\theta)}{4!} = \frac{d}{\theta^5} \left(\theta^2 + c - \frac{d}{\theta^2} \right) = \frac{d}{\mu^2 f^2 \theta^5},$$

т.е. $R = R(\theta)$ постоянна при $d = 0$, возрастает при $d < 0$, убывает при $d > 0$, и имеет область значений, указанную в таблице 2.1. В частности, $R > 0$ при $d \leq 0 \leq c$ и $(c, d) \neq (0, 0)$, а также при $(c, d) \in \overline{\Omega_4}$ и $k = 2$; $R < 0$ при $c \leq 0 \leq d$ и $(c, d) \neq (0, 0)$, а также при $(c, d) \in \overline{\Omega_3}$ и $k = 1$; R имеет непостоянный знак при остальных (c, d, k) , таких что $(c, d) \neq (0, 0)$.

(D) На любой поверхности вращения или, более общо, на ее N -мерном аналоге, т.е. на римановом многообразии $(a, b) \times S^{N-1}$ с римановой метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$, где $N \in \mathbb{N}$ и через $d\varphi^2$ обозначена стандартная риманова метрика на $(N-1)$ -мерной единичной сфере S^{N-1} , оператор Лапласа-Бельтрами действует на центральные функции $h = h(r)$ по формуле

$$\Delta h(r) = h''(r) + (N-1)h'(r)f'(r)/f(r) = (f^{N-1}(r)h'(r))'/f^{N-1}(r).$$

При $N = 3$ обобщенный гравитационно-кулоновский потенциал $\Theta = \Theta(r)$, определенный условием $\Theta'(r) = 1/f^2(r)$, является гармонической функцией.

Комментарий 2.10. Опишем бифуркации поверхностей Бертрана (2.1.4) при движении пары параметров $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ вокруг начала координат.

(А) При $(c, d) \in \Omega_1 \cup \ell_4 \cup \Omega_4$ поверхность Бертрана состоит из двух связанных компонент, на которых $\theta \in (-\infty, -(-d)^{1/4})$ и $\theta \in (-(-d)^{1/4}, 0)$ соответственно. Эти компоненты являются двумя половинками “грушевидной” аналитической римановой поверхности $(-\infty, 0) \times S^1$, разрезанной по единственному экватору (где $f' = 0$). Грушевидность поверхности вращения означает, что существует единственный экватор, функции r и f монотонны на каждой половинке поверхности вне экватора, принимают значения в конечных интервалах (т.е. поверхность ограничена), причем в каждой половинке есть полюс (т.е. $\inf f = 0$, откуда $\sup f$ достигается на экваторе), и в полюсах поверхность имеет конические особенности с разными полными углами (равными $2\pi/\mu$ и ∞ в основном и дополнительном полюсах соответственно). Соответствующий замыкающий (осцилляторный) потенциал на разных половинках пропорционален одной и той же аналитической функции, однако знаки коэффициентов пропорциональности различны на разных половинках. Для каждого знака потенциала все неособые ограниченные орбиты замкнуты (т.е. на всей поверхности без полюсов потенциал является замыкающим, полулокально и локально замыкающим, но не слабо и не сильно замыкающим). Длина каждой замкнутой геодезической, образованной двумя меридианами, равна $\mu L/2$, а при $\mu \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$ все остальные геодезические замкнуты и проходят через экватор, причем все геодезические кроме экватора и меридианов имеют одну и ту же длину qL , где L — длина экватора, $\mu/2 =: q/p$ — несократимая дробь. Эти грушевидные поверхности являются примерами *поверхностей Таннера* [29, теорема 4.13 и приложение А], т.е. поверхностей вращения, на которых все геодезические замкнуты. При $\mu = 2$ получаем примеры *поверхностей Цолля* [29, следствие 4.16], т.е. поверхностей, на которых все геодезические имеют одну и ту же длину.

При приближении точки $(c, d) \in \Omega_1$ к лучу ℓ_1 дополнительная половинка “исчезает” (вырождается в экватор), а основная превращается в проколотую полусферу (при $\mu = 1$) или в локально изометричную ей поверхность (при произвольном $\mu > 0$). Максимальное аналитическое про-

должение полусферы — сфера — сходна с грушевидными поверхностями, с одним лишь отличием — она симметрична относительно экватора. Так как осцилляторный потенциал равен θ^{-2} , он имеет особенность на экваторе сферы (т.е. при $\theta = 0$), а потому не продолжим на всю сферу. Гравитационный потенциал на “основной” полусфере равен θ , а его аналитическое продолжение на сферу (как и для осцилляторного потенциала на грушевидных поверхностях) является замыкающим, полулокально и локально замыкающим, но не слабо и не сильно замыкающим.

При приближении точки $(c, d) \in \Omega_4$ к дуге ℓ_3 экватор бесконечно удлиняется и отдаляется от полюсов (“превращается в абсолют”), в результате чего половинки “отделяются друг от друга”, и грушевидная поверхность распадается на две полубесконечные поверхности (см. (С) ниже).

(В) При $(c, d) \in \Omega_2$ поверхность связна (т.е. состоит из одной лишь половинки — основной) и *полубесконечна*, т.е. r и f возрастают (как функции друг от друга), причем имеются полюс ($\inf r > -\infty$, $\inf f = 0$) и “абсолют” ($\sup r = \sup f = +\infty$). Тем самым, каждая точка находится на конечном расстоянии от полюса и может быть бесконечно удалена от него. В полюсе поверхность имеет коническую особенность с полным углом $2\pi/\mu$. Все геодезические с $K \neq 0$ незамкнуты, имеют бесконечную длину (в обе стороны).

(С) При $(c, d) \in \Omega_3 \cup \ell_3$ поверхность состоит из двух связных компонент — основной и дополнительной, причем каждая компонента полубесконечна (см. выше), и компоненты друг другу не изометричны (и не подобны), даже локально. В полюсах поверхность имеет конические особенности с разными полными углами (равными $2\pi/\mu$ и ∞ в основном и дополнительном полюсах соответственно). Все геодезические с $K \neq 0$ имеют бесконечную длину.

При приближении точки $(c, d) \in \Omega_3$ к лучу ℓ_2 дополнительная компонента “исчезает”, а основная превращается в проколотую плоскость Лобачевского (при $\mu = 1$) или в локально изометричную ей поверхность (при любом $\mu > 0$).

2.2 Доказательство основных утверждений

2.2.1 Вспомогательные утверждения

Обобщенным семейством уравнений Бертрана назовем однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений $\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + \rho(z) = \frac{1}{K^2} \Psi(z)$ на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ с параметром $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где $\Psi(z)$ и $\rho(z)$ — функции класса C^∞ , определенные на интервале (a, b) . Следующее определение аналогично определению 1.12.

Определение 2.11. Функцию $\Psi = \Psi(z)$ на интервале (a, b) будем называть *закрывающей для функции $\rho = \rho(z)$* (или *ρ -закрывающей*), если

- (\exists) существует значение параметра $K = \hat{K} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, при котором уравнение имеет ограниченное непостоянное решение $\hat{z} = \hat{z}(\varphi)$;
- (\forall) все ограниченные непостоянные решения $z = z(\varphi)$ уравнения со всевозможными значениями параметра K являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами.

Функцию $\Psi(z)$ будем называть *локально закрывающей для функции $\rho(z)$* (или *локально ρ -закрывающей*), если

- (\exists)^{loc} существует значение параметра $K = K_0$, при котором уравнение имеет невырожденное устойчивое положение равновесия $z_0 \in (a, b)$;
- (\forall)^{loc} для любой пары $(K_0, z_0) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (a, b)$, удовлетворяющей условию (\exists)^{loc}, существуют $\varepsilon, \delta > 0$, такие что все ограниченные непостоянные решения $z = z(\varphi)$ уравнений со значениями параметра $K \in (K_0 - \delta, K_0 + \delta)$, такие что $z(\mathbb{R}^1) \subseteq [z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$, являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами.

Функцию $\Psi(z)$ будем называть *полулокально закрывающей для функции $\rho(z)$* (или *полулокально ρ -закрывающей*), если выполнены условия (\exists), (\forall)^{loc} и следующее условие:

- (\forall)^{s-loc} все ограниченные непостоянные решения $z = z(\varphi)$ уравнения при $K = \hat{K}$, такие что $z(\mathbb{R}^1) \subseteq \hat{z}(\mathbb{R}^1)$, являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами, где \hat{K} и $\hat{z} = \hat{z}(\varphi)$ — значение параметра и решение из (\exists).

Функцию $\Psi(z)$ назовем *сильно* (соответственно *слабо*) ρ -замыкающей, если любая точка $z_0 \in (a, b)$ является невырожденным устойчивым (соответственно устойчивым) положением равновесия уравнения при некотором $K = K_0$, зависящем от z_0 , и выполнено условие $(\forall)^{\text{loc}}$ (соответственно его аналог для всякой пары $(K_0, z_0) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (a, b)$, такой что z_0 — устойчивое положение равновесия уравнения при $K = K_0$).

Эти определения не зря имеют названия, схожие с терминами из определения 1.12. Как будет видно из дальнейшего, существование замыкающих функций тесно связано с существованием замыкающих потенциалов, на чем и будет основано доказательство обобщений теоремы Бертрана.

Доказательства теорем 2.1, 2.3, 2.7 основаны на следующем обобщении технической теоремы 1.2 Бертрана, принадлежащей О.А. Загрядскому, путем замен $z(r) - \zeta = -\Theta(r) = -\mu^2\theta(r)$, где $\Theta'(r) = 1/f^2(r)$, $\rho(z(r)) = f'(r)/f(r)$, $\Psi(z) = f^2(r)V'(r) = -dV(r(z))/dz$, $D = \mu^8 d$. Мы также будем использовать хорошо известные предложения 2.13 и 2.14.

Теорема 2.12. (Обобщенная техническая теорема Бертрана)

Рассмотрим однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений $\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + \rho(z) = \frac{1}{K^2}\Psi(z)$ на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ с параметром $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где $\Psi = \Psi(z)$ и $\rho = \rho(z)$ — функции класса C^∞ , определенные на интервале (a, b) . Если Ψ является полулокально ρ -замыкающей (или ρ -замыкающей или сильно или слабо ρ -замыкающей), то она является локально ρ -замыкающей.

Пусть функция ρ не имеет нулей на интервале (a, b) . Тогда в интервале (a, b) классы замыкающих, полулокально замыкающих, локально замыкающих, сильно замыкающих и слабо замыкающих для ρ функций Ψ совпадают, причем существует не более двух замыкающих функций $\Psi(z)$ с точностью до положительной мультипликативной константы и эти функции определяются следующими условиями:

(а) если $\rho'|_{(a,b)} = \text{const} > 0$, то существуют ровно две (с точностью до положительной мультипликативной константы) ρ -замыкающие функции Ψ на (a, b) , а именно $\Psi_i(z) = A_i/\rho^{i^2-1}(z)$, $i = 1, 2$ (т.е. функции, отвечающие обобщенному гравитационному и осцилляторному законам сил на соответствующей поверхности вращения), где $A_i \neq 0$ — произвольная мультипликативная константа, такая что $A_i \rho^i(z) > 0$, причем минимальный положительный период любого ограниченного непостоянного решения равен $\Phi_i = 2\pi/(i\sqrt{\rho})$;

(b) если $\rho|_{(a,b)}$ является рациональной функцией вида $\rho(z) = \frac{(z-\zeta)^4+D}{\mu^2(z-\zeta)^3}$, где $D = \text{const} \neq 0$, $\mu = \text{const} > 0$, $\zeta = \text{const} \notin (a,b)$, то существует единственная (с точностью до положительной мультипликативной константы) ρ -замыкающая функция на (a,b) : $\Psi(z) = \Psi_2(z) = \frac{A}{(z-\zeta)^3}$ (т.е. отвечающая осцилляторному закону сил на соответствующей поверхности вращения), где $A \neq 0$ — произвольная мультипликативная константа, такая что $A((z-\zeta)^4+D) > 0$, причем минимальный положительный период любого ограниченного непостоянного решения равен $\Phi = \pi\mu$;

(c) если $\rho(z)$ не имеет ни одного из указанных выше видов, то не существует ρ -замыкающих функций на (a,b) .

В случаях (a) и (b) каждая точка $z \in (a,b)$ является невырожденным устойчивым положением равновесия уравнения при $K = K_i := \pm\sqrt{A_i/\rho^{i^2}(z)}$, $i = 1, 2$ (в случае (a)) и $K = \pm\mu\sqrt{\frac{A}{(z-\zeta)^4+D}}$ (в случае (b)), а при других значениях параметра K не является положением равновесия.

Отметим, что в теореме 2.12 (в отличие от теоремы 1.2) не требуется аналитичность функций $\Psi_i(z)$ и $\rho(z)$, а постоянная $\mu > 0$ не обязана быть рациональной (поскольку в ней не требуется, чтобы все периоды были соизмеримы с 2π , а требуется лишь попарная соизмеримость периодов, как в замечании 1.4).

Доказательство этой теоремы использует следующие достаточно известные утверждения, доказательства которых даны, например, в [34, §4, предложения 2 и 3].

Предложение 2.13 (см. [34, §4, предложение 2]). Пусть $a < a' < b' < b$ и $E' \in \mathbb{R}$. Тогда следующие условия равносильны:

(a) существует ограниченное решение $z(\varphi)$ уравнения $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$ с уровнем энергии E' , такое что $a' = \inf z(\mathbb{R}^1)$, $b' = \sup z(\mathbb{R}^1)$;

(b) $U(a') = U(b') = E'$ и $U|_{(a',b')} < E'$.

Если $\hat{z} \in \{a', b'\}$ и выполнено условие (a), то соотношения $U'(\hat{z}) \neq 0$ и $\hat{z} \in z(\mathbb{R}^1)$ равносильны.

Предложение 2.14 (см. [34, §4, предложение 3]). Пусть $a < a' < b' < b$, $U(a') = U(b') = E'$, $U|_{(a',b')} < E'$, $E_0 := \min U|_{[a',b']}$. Тогда следующие условия равносильны:

(a) для любого $E \in (E_0, E']$ любое ограниченное решение $z_E(\varphi)$ уравнения $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$ с уровнем энергии E , такое что $z_E(0) \in (a', b')$, периодично;

(b) существует отрезок $[c_1, c_2] \subset (a', b')$, такой что $U'|_{[a', c_1]} < 0$, $U'|_{[c_1, c_2]} = 0$ и $U'|_{(c_2, b']} > 0$.

При выполнении этих условий минимальный положительный период решения $z_E(\varphi)$ равен

$$\Phi(E) = 2 \int_{z_1(E)}^{z_2(E)} \frac{dz}{\sqrt{2E - 2U(z)}},$$

где значения $z_1 = z_1(E) \in [a', c_1]$ и $z_2 = z_2(E) \in (c_2, b']$ определены условиями $U(z_1) = U(z_2) = E$. Функция $\Phi = \Phi(E)$ непрерывна на полуинтервале $(E_0, E']$. Если $U''(c_1) = 0$, то

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Phi(E) = \infty.$$

2.2.2 Частный случай: конус

Согласно следствию 2.2, теорема 1.1 Бертрана обобщается на семейство “рациональных” конусов. Прочие конусы (“иррациональные”) не допускают обобщение теоремы Бертрана. Поясним, какую роль играет условие рациональности константы ξ в условии следствия 2.2. Рассмотрим конструкцию, описанную после теоремы 2.1: разрежем конус S по образующей и развернем. Получим некоторый сектор на евклидовой плоскости. Заметим, что угол при вершине (равный $2\pi\xi$) может быть и больше 2π , в этом случае конус не вложится в \mathbb{R}^3 как поверхность вращения, но следствие 2.2 останется верным. Далее рассмотрим поверхность \tilde{S} , являющуюся одновременно разветвленным накрытием конуса S и разветвленным накрытием евклидовой плоскости, где количество листов любого из накрытий минимально возможное. Поверхность \tilde{S} можно построить следующим образом. Будем накладывать на плоскость сектора, полученные разворотом разрезанного по образующей конуса, каждый следующий поворачивая так, чтобы берег каждого следующего сектора совпал с противоположным берегом предыдущего. Таким образом получим разветвленное накрытие над плоскостью $\tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$. При этом, если конус был “рационален”, т.е. угол при вершине был соизмерим с 2π (иными словами, $\xi \in \mathbb{Q}$, обозначим $\xi = \frac{p}{q}$), то через q шагов построения \tilde{S} берег очередного сектора совпадет с берегом первого сектора; в этом случае прекратим

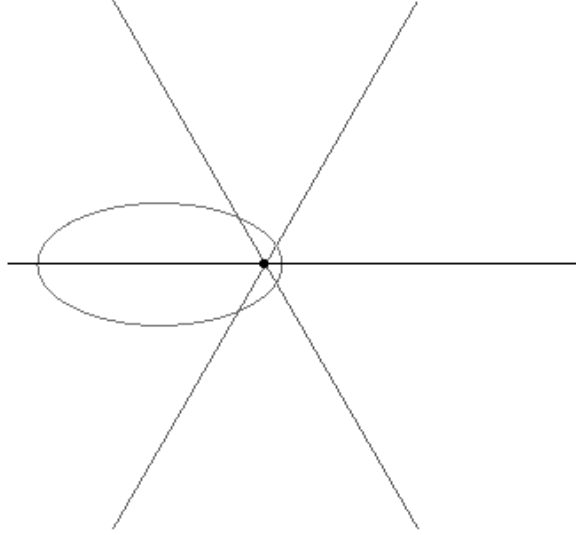


Рис. 2.3: Образ траектории движения по конусу на замощенной плоскости; $\xi = \frac{1}{6}$

процесс построения \tilde{S} и накрытие $\tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ будет p -листным. В противном случае, берега разных секторов никогда не совпадут и накрытие будет бесконечнолистным. Замощенная плоскость и образ траектории движения точки по поверхности \tilde{S} изображены на рис. 2.3.

Таким образом, поверхность \tilde{S} накрывает исходный конус q -листно, если ξ рационально и равно $\frac{p}{q}$, бесконечнолистно в противном случае. Накрытие строится естественным образом: его листами будут сектора, из которых составлена поверхность \tilde{S} ; каждый такой сектор — развертка конуса, поэтому можно определить отображение $\tilde{S} \rightarrow S$, переводящее в точку с координатами (r, φ) на конусе все точки поверхности \tilde{S} , имеющие те же координаты на том секторе, которому принадлежат. Наглядно это может быть представлено следующим образом. Возьмем сектора, полученные разворачиванием разрезанного по образующей конуса, и расположим их над разверткой конуса “друг над другом” — q экземпляров, если ξ рационально, счетное множество в противном случае; противоположные края лежащих друг над другом секторов считаются склеенными. Точки этих секторов — это точки поверхности \tilde{S} , отображение $\tilde{S} \rightarrow S$ за-

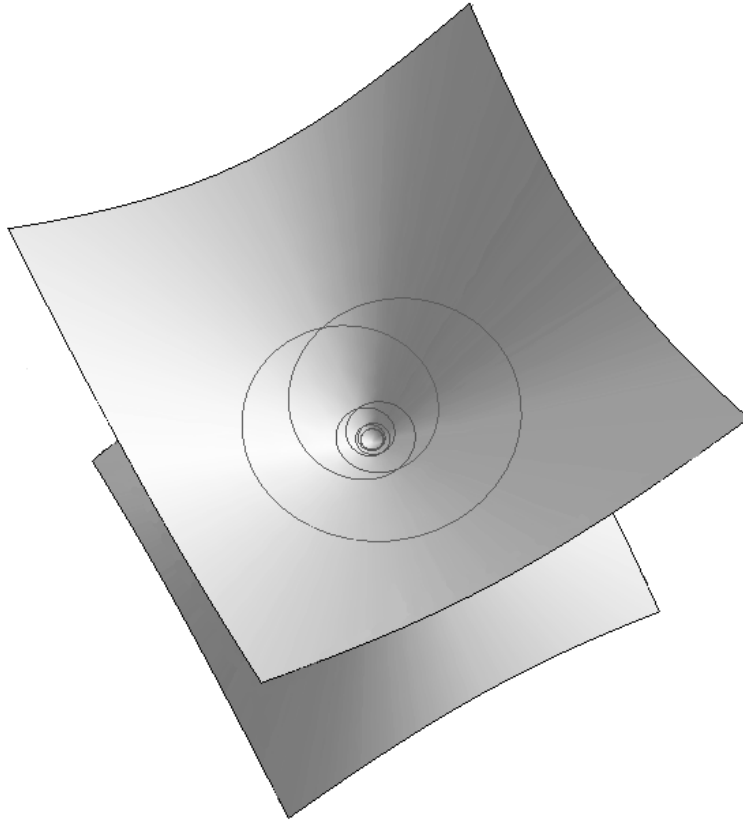


Рис. 2.4: Замкнутая траектория на рациональном конусе; $\xi = \frac{7}{8}$

дается естественной проекцией. Образ траектории движения по конусу на поверхности \tilde{S} , представленной как пояснено выше, продемонстрирован на рис. 2.5. На рис. 2.4 приведен пример замкнутой траектории на “рациональном” конусе, вид сверху.

2.2.3 Общий случай движения в центральном поле сил

Докажем теоремы 2.1 и 2.3.

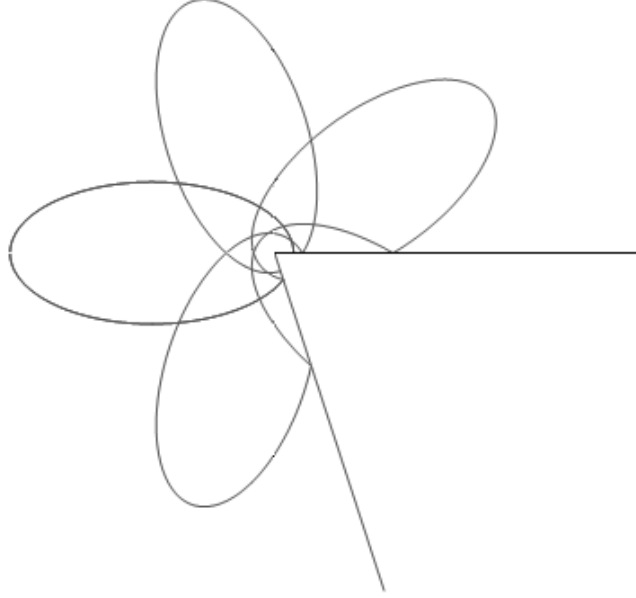


Рис. 2.5: Образ траектории движения по конусу на поверхности \tilde{S} , представленной объединением секторов на плоскости; $\xi = \frac{5}{6}$

Доказательство. Шаг 1. Опишем рассматриваемую систему. Пусть на поверхности $S \approx (a, b) \times S^1$ с координатами $(r, \varphi \bmod 2\pi)$ заданы риманова метрика (1.1.1) и потенциал $V = V(r)$, который зависит только от координаты r . Найдём условие на метрику, являющееся критерием возможности обобщения результата Бертрана на соответствующую систему. Будем обозначать через $(\dot{})$ производную по t , через $()'_r$ — производную по r , а через $()'_\varphi$ — производную по φ .

Шаг 2. Лагранжиан движения имеет вид $L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + f^2(r)\dot{\varphi}^2) - V(r)$, а уравнения Эйлера-Лагранжа выглядят так:

$$f f'_r \dot{\varphi}^2 - V'_r - \ddot{r} = 0, \quad (\dot{\varphi} f^2)' = 0, \quad K := \dot{\varphi} f^2 = \text{const}. \quad (2.2.1)$$

При $K = 0$ движение происходит по прямой $\{\varphi = \text{const}\}$. Пусть далее $K \neq 0$. Поскольку $\dot{\varphi} = \frac{K}{f^2} \neq 0$, на траектории движения $(r(t), \varphi(t))$ можно ввести параметр φ вместо t .

Лемма 2.15. При $K \neq 0$ функция $r = r(\varphi)$, задающая орбиту движения точки по поверхности $S \approx (a, b) \times S^1$ с метрикой (1.1.1) в центральном поле с потенциалом $V(r)$, удовлетворяет следующему тождеству:

$$K^2 \left(-(\Theta \circ r)''_{\varphi\varphi} + \frac{f'_r(r)}{f(r)} \right) = f^2(r) V'_r(r), \quad (2.2.2)$$

где $\Theta = \Theta(r)$ – произвольная функция, такая что $d\Theta(r) = \frac{dr}{f^2(r)}$. То есть, функция $z(\varphi) := -\Theta \circ r(\varphi)$ является решением обобщенного уравнения Бертрана при $\rho(z) = \frac{f'_r(r(z))}{f(r(z))}$, $\Psi(z) = f^2(r) V'_r(r)$.

Доказательство. Производные по t и φ связаны соотношениями

$$\frac{dr}{dt} = \frac{K}{f^2(r)} \frac{dr}{d\varphi} = K \frac{d(\Theta \circ r)}{d\varphi}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{K^2}{f^2(r)} \frac{d^2(\Theta \circ r)}{d\varphi^2},$$

где $d\Theta(r) = \frac{dr}{f^2(r)}$. Первое уравнение в (2.2.1) примет вид

$$-(\Theta \circ r)''_{\varphi\varphi} \frac{K^2}{f^2(r)} + f'_r(r) \frac{K^2}{f^3(r)} = V'_r(r).$$

Или, что эквивалентно, (2.2.2), что и требовалось показать. Лемма доказана.

В силу леммы 2.15 функции $r = r(\varphi)$, задающие движение точки по рассматриваемой поверхности в центральном поле сил, совпадают с решениями уравнений, образующих семейство обобщенных уравнений Бертрана, с параметром K , равным значению кинетического момента на соответствующих траекториях движения, где $z(r) = -\Theta(r)$, $d\Theta(r) = \frac{dr}{f^2(r)}$, $\rho(z) = \frac{f'_r(r(z))}{f(r(z))}$, $\Psi(z) = f^2(r) V'_r(r) = -\frac{d}{dz} V(r(z))$, $\frac{\Psi(z)}{\rho(z)} = \frac{f^3(r(z))}{f'_r(r(z))} V'_r(r(z))$, эффективный потенциал $K^2 U_{2/K^2}(z) = \frac{K^2}{2f^2(r(z))} + V(r(z))$. Отсюда следует, что каждое из условий (\exists) и $(\exists)^{\text{loc}}$ на потенциал $V = V(r)$ (см. определение 1.12) равносильно одноименному условию на функцию $\Psi = \Psi(z)$ (см. определение 2.11); а каждое из условий (\forall) , $(\forall)^{\text{loc}}$ и $(\forall)^{\text{s-loc}}$ на потенциал V равносильно “рациональному аналогу” одноименного условия на функцию Ψ . Здесь рациональный аналог условия на функцию Ψ получается из этого условия заменой требования попарной соизмеримости указанных периодов на (более сильное) требование соизмеримости этих периодов с 2π . Такие ρ -замыкающие функции Ψ назовем *рационально*

ρ -замыкающими. По определению 1.9(a) точка $z_0 = -\Theta(r_0)$ является устойчивым положением равновесия обобщенного уравнения Бертрана при $K = K_0$ тогда и только тогда, когда окружность $\{r_0\} \times S^1$ является сильно устойчивой круговой орбитой, такой что значение интеграла кинетического момента на соответствующей траектории равно K_0 . Значит, потенциал V является замыкающим (соответственно локально, полулокально, сильно или слабо замыкающим) для метрики (1.1.1) тогда и только тогда, когда функция Ψ является рационально ρ -замыкающей (соответственно локально, полулокально, сильно или слабо рационально ρ -замыкающей). В силу обобщенной технической теоремы Бертрана 2.12, для любой поверхности S с римановой метрикой (1.1.1) любой полулокально замыкающий потенциал V является локально замыкающим, а если f не имеет критических точек на (a, b) , то все пять классов замыкающих потенциалов (см. определение 1.12) совпадают и обладают следующими свойствами.

Во-первых, существует не более двух (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) замыкающих центральных потенциалов $V(r)$.

Во-вторых, существование ровно двух (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) замыкающих центральных потенциалов V_1 и V_2 равносильно условию

$$\rho'(z) := \frac{d}{dz} \left(\frac{f'_r(r(z))}{f(r(z))} \right) = \text{const} := \xi^2 > 0 \quad (2.2.3)$$

(что эквивалентно условию $f''_{rr}(r)f(r) - (f'_r(r))^2 = -\xi^2$), где $\xi = \sqrt{\rho'(z)}$ — положительная рациональная константа, отвечающая постоянной Бертрана $\beta_i = i\xi$ ($i = 1, 2$, в зависимости от вида потенциала) из теоремы 2.12. В случае (2.2.3) выполнено $z(r) = \frac{f'_r(r)}{\xi^2 f(r)} + \zeta$. Функция $z(r)$ была определена с точностью до аддитивной константы; для определенности положим $z(r) := \frac{f'_r(r)}{\xi^2 f(r)}$, откуда $\rho(z) = \xi^2 z$, $\Theta(r) = -\frac{f'_r(r)}{\xi^2 f(r)}$. В силу обобщенной технической теоремы 2.12 Бертрана ρ -замыкающие функции имеют вид $\Psi_i(z) = A_i z^{1-i^2}$, $i = 1, 2$, где $A_1 z > 0$, $A_2 > 0$. Отсюда по лемме 2.15 замыкающие потенциалы являются гравитационным и осцилляторным, т.е. имеют вид $V_i(r) = (-\int \Psi_i(z) dz)|_{z=-\Theta(r)} = (-1)^i A |\Theta(r)|^{2-i^2} / i + B$, $i = 1, 2$, где $A > 0$, B — некоторые константы.

В-третьих, существование ровно одного замыкающего центрального потенциала равносильно условию $\rho = -\frac{\Theta}{\mu^2} - D \frac{\Theta^{-3}}{\mu^2}$, где $D \neq 0$ и вы-

полнено $\rho = \frac{f'}{f}$. Интегрирование равенства $\frac{f'}{f} = -\frac{\Theta + D\Theta^{-3}}{\mu^2}$ по Θ дает $\frac{1}{f^2} = \frac{\Theta^2 - D\Theta^{-2} + C}{\mu^2}$, где C — произвольная константа, откуда $f(r) = \mu / \sqrt{\Theta^2(r) + C - D\Theta^{-2}(r)}$. Отсюда ρ -замыкающая функция $\Psi_2(z) = A_2/z^3$, где $A_2(z^4 + D) > 0$. Отсюда замыкающий центральный потенциал $V_2(r) = (-\int \Psi_2(z) dz)|_{z=-\Theta(r)} = A_2|\Theta(r)|^{-2}/2 + B$.

Формулы для периодов Φ_i функций $r = r(\varphi)$, задающих некруговые неособые ограниченные орбиты, и для кинетических моментов K_i , $i = 1, 2$, для круговых орбит являются повторениями формул из теоремы 2.12. Значение кинетического момента K на круговой орбите $\{r\} \times S^1$ находится из соотношений $K^2 = \frac{\Psi(z)}{\rho(z)} = \frac{f^3(r(z))}{f'(r(z))} V'(z)$ (см. теорему 2.12). Притягивающий центр находится там, где потенциал минимален. Знак силы равен $-\text{sgn } V_i'(r) = \text{sgn } \Psi_i(-\Theta(r)) = \text{sgn } ((\Theta^4(r) + D)\Theta(r))$, а потому в притягивающем центре достигается $\sup(\text{sgn } (\Theta^4(r) + D)|\Theta(r)|)$.

Шаг 3. Итак, мы доказали, что выполнение тождества $f''f - (f')^2 = -\xi^2$, где $\xi \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>0}$, равносильно тому, что замыкающих потенциалов ровно два (с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант). Предъявим явный вид функций f , для которых это тождество выполняется.

Лемма 2.16. *Не имеющими нулей решениями уравнения $f''f - (f')^2 = -\xi^2$ при $\xi > 0$ являются следующие функции $f = f(r)$ и только они:*

$$\frac{\xi}{\alpha} \sin(\alpha r + \beta), \quad \pm \frac{\xi}{\alpha} \text{sh}(\alpha r + \beta), \quad \pm \xi r + \beta, \quad (2.2.4)$$

где $\alpha \neq 0$, β — произвольные вещественные константы, и r принадлежит интервалу, в котором $f(r) \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что $f'(r) \neq 0$ в окрестности некоторой точки. Положим $f' = p(f)$. Тогда $f'' = p'p$. Пусть $w = p^2$. Тогда исходное дифференциальное уравнение примет вид $w'f = 2w - 2\xi^2$. Его решением является функция $w = w(f) = C_1 f^2 + \xi^2$. Отсюда получаем: $\pm dr = \frac{df}{\sqrt{C_1 f^2 + \xi^2}}$. В зависимости от знака константы C_1 получаются решения (2.2.4) при $C_1 < 0$, $C_1 > 0$ и $C_1 = 0$ соответственно. Начальные условия $(f(0), f'(0))$ этих решений образуют множество $\{(\frac{\xi}{\alpha} \sin \beta, \xi \cos \beta), (\pm \frac{\xi}{\alpha} \text{sh} \beta, \xi \text{ch} \beta), (\beta, \pm \xi)\} \supset (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Поскольку f является решением дифференциального уравнения II порядка, разрешенного относительно старшей производной, с гладкой правой частью (ввиду $f \neq 0$), то других решений без нулей нет.

Замечание 2.17. Аналогичным образом доказывается, что не имеющими нулей решениями уравнения $f''f - (f')^2 = h = \text{const} \geq 0$ являются функции $f(r) = \frac{\sqrt{h}}{\alpha} \text{ch}(\alpha r + \beta)$ при $h > 0$, $f(r) = \alpha e^{\beta r}$ при $h = 0$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

С учетом замен $\Theta(r) = \mu^2\theta(r)$, $C = \mu^4c$, $D = \mu^8d$ теоремы 2.1 и 2.3, а также формулы для орбит доказаны.

Мы также доказали теорему 2.7(C), равносильность условий (а) и (b) и единственность набора в (b) из теоремы 2.7(B). Равносильность условий (b) и (c) теоремы 2.7(B) следует из соотношений $Q_{c_1, d_1}(\theta) = (1/\lambda^2)Q_{c, d}(\lambda\theta)$, $r_{c_1, d_1}(\theta) = \lambda(r_{c, d}(\lambda\theta) - r_0)$, $(1/\lambda)f_{c_1, d_1, k}(\lambda(r - r_0)) = f_{c, d, k}(r)$ для $c := \lambda^2c_1$, $d := \lambda^4d_1$, $\lambda > 0$.

Докажем включения классов из теоремы 2.7(A). Включение класса слабо замыкающих потенциалов в класс полулокально замыкающих очевидно, как было сказано в замечании 1.14. Включение класса сильно замыкающих потенциалов в слабо замыкающие следует из замечания 1.10 и предложения 2.13 с учетом леммы 2.15. А включение класса полулокально замыкающих потенциалов в класс локально замыкающих нетрудно следует из предложений 2.13 и 2.14 с учетом леммы 2.15.

Следствие 2.9(A),(B),(C) выводится из приводимых в нем формул и таблицы 2.1. Следствие 2.9(D) является известным фактом, относящимся к произвольным поверхностям вращения и их многомерным аналогам.

Замечание 2.18. На одном из докладов, посвященных обобщению задачи Бертрана, А.С. Мищенко задал следующий вопрос: как можно *конструктивно* проверить условие на приводимость метрики вращения к видам, указанным в теоремах 2.1 и 2.3? Вопрос этот важен для понимания эффективности доказанных теорем, поэтому дадим на него ответ, принадлежащий Е. А. Кудрявцевой.

Пусть дана произвольная метрика вращения

$$f_1(s)^2 ds^2 \pm f_2(s)^2 d\varphi^2, \quad (2.2.5)$$

где $\varphi = \varphi \bmod 2\pi$, $f_1(s) > 0$, $f_2(s) > 0$. Перейдем к (натуральному) параметру $r = r(s)$ такому, что $\frac{dr}{ds} = f_1(s)$. В координатах (r, φ) метрика вращения имеет вид

$$dr^2 \pm f(r)^2 d\varphi^2, \quad (2.2.6)$$

где $f(r(s)) = f_2(s)$. Перейдем к параметру $\Theta = \Theta(r)$ такому, что $\frac{d\Theta}{dr} = \frac{1}{f^2(r)}$. В координатах (Θ, φ) метрика вращения имеет вид

$$f^4(r(\Theta))d\Theta^2 \pm f^2(r(\Theta))d\varphi^2.$$

Заметим, что для любой метрики вращения (2.2.5) параметр $r(s)$ определен с точностью до сдвига $r(s) \rightarrow r(s) + r_0$, где r_0 — любая константа, а параметр $\Theta(r)$ — с точностью до сдвига

$$\Theta(r) \rightarrow \Theta(r) - \Theta_0, \quad (2.2.7)$$

где Θ_0 — любая константа.

Введем аналогичный параметр Θ для метрик вращения из теорем 2.1 и 2.3, т.е. для метрик вращения

$$d\theta^2/(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2 \pm d\varphi^2/(\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})), \quad (2.2.8)$$

где $\mu > 0, c, t$ — вещественные константы. Для метрик (2.2.8) имеем

$$1/f(r(\Theta)) = \mu\sqrt{\theta^2 + c - t\theta^{-2}},$$

поэтому

$$\Theta - \Theta_0 = \mu^2\theta \quad (2.2.9)$$

для некоторой вещественной константы Θ_0 .

Из (2.2.7) и (2.2.9) нетрудно выводится равносильность следующих двух условий:

(а) метрика (2.2.6) некоторой заменой $\theta = \theta(r)$ приводится к виду (2.2.8) для некоторых вещественных констант $\mu > 0, c, t$ (т.е. к виду, указанному в теоремах 2.1 и 2.3),

(б) функция $F(\Theta) := 1/f(r(\Theta))$ является аналитической функцией (и даже квадратным корнем из рациональной функции) вида

$$F(\Theta) = \mu\sqrt{(\Theta - \Theta_0)^2/\mu^4 + c - t\mu^4(\Theta - \Theta_0)^{-2}} \quad (2.2.10)$$

для некоторых вещественных констант $\mu > 0, c, t, \Theta_0$.

Отметим, что из формулы (2.2.10) следует, что функция $F^2(\Theta)$ является либо многочленом степени 2 (при $t = 0$), либо рациональной функцией вида $P(Q(\Theta))/Q(\Theta)$, где P и Q — многочлены степени 2, Q есть квадрат линейной функции и $P(0) \neq 0$ (при $t \neq 0$).

Условие (b) равносильно следующему условию:
 (c) функция $F(\Theta) := 1/f(r(\Theta))$ аналитична и имеет вид (2.2.10), где константы $\mu > 0, c, t, \Theta_0$ однозначно выражаются через аналитическое продолжение функции $F(\Theta)$ следующим образом:

$$1/\mu = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} |F(\Theta)/\Theta|,$$

Θ_0 — это либо полюс функции $F(\Theta)$ в случае, когда $F^2(\Theta)$ не является многочленом, либо точка минимума функции $F(\Theta)$ в противном случае,

$$c = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} (F^2(\Theta)/\mu^2 - (\Theta - \Theta_0)^2/\mu^4),$$

$$t = - \lim_{\Theta \rightarrow \Theta_0} (\Theta - \Theta_0)^2 F^2(\Theta)/\mu^6.$$

В силу равносильности условий (a) и (c), условие (c) служит ответом на упомянутый выше вопрос А. С. Мищенко.

Глава 3

Обобщенная задача Бертрана на многообразиях вращения с экваторами

Теоремы, доказанные в предыдущем разделе, существенно использовали отсутствие экваторов у рассматриваемых многообразий. Наличие экватора может существенно “портить” поведение траекторий системы. Так, к примеру, нижняя полусфера с осцилляторным потенциалом является бертрановой парой, но вся сфера с тем же осцилляторным потенциалом не является замыкающей в смысле ни одного из пяти классов, фигурировавших в формулировке теорем 2.1, 2.3. С другой стороны, существование многообразий Таннери, то есть таких многообразий вращения с экваторами, что все геодезические на них замкнуты (см. определение 1.12 и [29]), свидетельствует о непустоте множества многообразий Бертрана (для некоторого класса потенциалов) с экваторами. Оказывается, что для случаев вполне замыкающих и устойчиво замыкающих центральных потенциалов (см. определения 1.12, 1.11), можно полностью классифицировать соответствующие бертрановы пары. Нижеследующие теоремы показывают, что никаких “новых” многообразий (кроме фигурировавших в теоремах 2.1, 2.3 и многообразий Таннери) и потенциалов в этом случае не возникает.

В первую очередь классифицируем вполне бертрановы пары. Для этого нам потребуются некоторые дополнительные наблюдения, которые удобно вывести из *принципа Мопертюи*.

3.1 Принцип Мопертюи и некоторые вспомогательные утверждения

3.1.1 Принцип Мопертюи и вполне бертрановы многообразия

Принцип Мопертюи заключается в следующем (см., например, [24]). Пусть на гладком римановом многообразии (M, g) задана натуральная механическая система с функцией Лагранжа $L = L(x, \dot{x}) = (1/2)g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j - V(x)$, где $x = (x^i)$ — локальные координаты на M , g_{ij} — компоненты метрического тензора, V — гладкая функция (потенциал) на M . Тогда при любом достаточно большом значении $E \in \mathbb{R}$ ($E > \inf V$) все локальные решения $x(t)$ уравнения движения, на которых $\dot{x}(t) \neq 0$ и значение энергии $H = H(x, \dot{x}) = (1/2)g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j + V(x)$ равно E , совпадают (с точностью до перепараметризации) с геодезическими линиями на подмногообразии $M_E := V^{-1}(-\infty, E) \subset M$, снабженном римановой метрикой $(E - V(x))g$.

Применительно к вполне бертрановым многообразиям этим принципом можно воспользоваться так. В качестве риманова многообразия (M, g) возьмем многообразие S с метрикой вращения (1.1.1), а в качестве V — вполне замыкающий центральный потенциал. Из принципа Мопертюи получаем, что на каждом уровне энергии $H = E > \inf V$ неособые траектории совпадают (с точностью до перепараметризации) с неособыми геодезическими нового многообразия $S_E := V^{-1}(-\infty, E) \times S^1 \subset S$ с метрикой вращения

$$ds_E^2 := (E - V(r))ds^2 = (E - V(r))dr^2 + (E - V(r))f^2(r)d\varphi^2. \quad (3.1.1)$$

При этом неособые траектории остаются замкнутыми, а следовательно, риманово многообразие (S_E, ds_E^2) при любом $E > \inf V$ является многообразием Таннери (определение 1.12).

Сферичные многообразия Таннери были классифицированы: доказано (см. [29, гл. 4, теорема 4.13]), что эти многообразия — это в точности такие сферичные римановы многообразия вращения, для которых метрика в некоторых координатах $(\psi = \psi(r), \varphi)$, таких что $\psi : (a, b) \rightarrow (0, \pi)$ — диффеоморфизм и $\psi' > 0$, имеет вид

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{1}{\beta^2} (1 + h(\cos \psi))^2 d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2 \right), \quad (3.1.2)$$

где $h : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ — некоторая нечетная (необязательно монотонная и необязательно сюръективная) функция, $R \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{Q}$ — положительные числа. При этом число β удовлетворяет условию Дарбу [38, стр. 6], [29, гл. 4, теорема 4.11], т.е. $2\pi/\beta$ равно минимальному положительному периоду функций $\psi \circ r = \psi \circ r(\varphi)$, задающих неособые геодезические, отличные от экватора. Отметим, что вид (3.1.2) метрики равносильно виду

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{1}{\beta^2} \left(\frac{dg(\cos \psi)}{d\psi} \right)^2 d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2 \right), \quad (3.1.3)$$

где $g : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$ — такой диффеоморфизм, что $g' < 0$ и $g(-\cos \psi) - g(\cos \psi) = \pi - 2\psi$. При этом $1 + h(x) = -g'(x)\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$.

Итак, из [29, гл. 4, теорема 4.13] и общего принципа Мопертюи, с учетом леммы 3.4(a) ниже, вытекает следующее

Утверждение 3.1. Пусть V — вполне замыкающий центральный потенциал на многообразии вращения (S, ds^2) . Тогда для всякого $E > \inf V$ существует такая замена координат $\psi = \psi_E(r)$, что в координатах (ψ, φ) на S метрика ds_E^2 из (3.1.1) имеет вид (3.1.2) и вид (3.1.3) для некоторых $R = R_E > 0$, рационального $\beta > 0$, равного константе Бертрана (см. лемму 3.4(a) ниже), нечетной функции $h = h_E : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ (необязательно монотонной и необязательно сюръективной) и диффеоморфизма $g = g_E : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$, такого что $g'_E < 0$ и $g_E(-\cos \psi) - g_E(\cos \psi) = \pi - 2\psi$.

Было бы интересно найти явно или охарактеризовать 1-параметрические семейства нечетных функций h_E и диффеоморфизмов g_E , $E > \inf V$, из утверждения 3.1, отвечающие вполне бертрановым парам из примера В(i-iv).

Определение 3.2. Пусть $d\tilde{s}^2 = f_2^2(r)dr^2 + f_1^2(r)d\varphi^2$ — поле неотрицательно определенных квадратичных форм (т.е. обобщенная риманова метрика) на многообразии $S = (a, b) \times S^1$, для некоторых гладких функций $f_1 > 0$, $f_2 \geq 0$ на (a, b) . Предположим, что $d\tilde{s}^2$ обладает аналогом представления (3.1.2) для некоторых диффеоморфизма $\tilde{\psi} : (a, b) \rightarrow (0, \pi)$, $\tilde{\psi}' > 0$, и нечетной гладкой функции $h : (-1, 1) \rightarrow [-1, 1]$. Это равносильно тому, что $d\tilde{s}^2$ обладает аналогом представления (3.1.3) для $\tilde{\psi}$ и некоторой невозрастающей сюръективной гладкой функции $\tilde{g} : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$,

такой что $\tilde{g}(-\cos \tilde{\psi}) - \tilde{g}(\cos \tilde{\psi}) = \pi - 2\tilde{\psi}$. В этом случае $d\tilde{s}^2$ будем называть *обобщенной метрикой Таннери*. Любая метрика Таннери является обобщенной метрикой Таннери в силу леммы 3.4(d) ниже. Отметим, что обобщенная метрика Таннери не является, вообще говоря, римановой метрикой, поскольку она вырождена на параллелях $\{r_0\} \times S^1$, таких что $f_2(r_0) = 0$ (т.е. $\tilde{g}'(\cos \tilde{\psi}(r_0)) = 0$).

Из явных формул (3.1.2) и (3.1.3) (соответственно определения 3.2) следует важное свойство (обобщенных) метрик Таннери, которым мы воспользуемся четыре раза в доказательстве теоремы 3.8 (см. §3.2): если две (обобщенные) сферичные метрики Таннери сопряжены по одну сторону своих экваторов, то они сопряжены всюду.

3.1.2 Некоторые свойства вполне бертрановых пар

Лемма 3.3. (см. [37, §3, лемма 1]) Пусть $V = V(r)$ — вполне замыкающий центральный потенциал на многообразии S с метрикой вращения (1.1.1) (т.е. любая неособая орбита замкнута). Тогда:

(a) при любом $K \neq 0$ эффективный потенциал $U_{\text{эф},K} = U_{\text{эф},K}(r)$ (определение 1.9) имеет единственную критическую точку $r(K) \in (a, b)$, причем $U''_{\text{эф},K}(r(K)) > 0$ (т.е. $\{r(K)\} \times S^1$ — сильно устойчивая круговая орбита) и $\lim_{r \rightarrow s} U_{\text{эф},K}(r) = +\infty$ для любого $s \in \{a, b\}$;

(b) потенциал V на (a, b) либо не убывает, либо не возрастает, либо (для некоторого $r_1 \in (a, b)$) не возрастает на $(a, r_1]$ и не убывает на $[r_1, b)$;

(c) если хотя бы одна круговая орбита является экватором $\{r_0\} \times S^1$, то все круговые орбиты совпадают с этим экватором, а потенциал V не возрастает на $(a, r_0]$ и не убывает на $[r_0, b)$; в частности, для любого $s \in \{a, b\}$ существует предел $\lim_{r \rightarrow s} V(r) =: V(s) \leq +\infty$;

(d) в случае пункта (c) потенциал V постоянен на $(a, r_0]$ или на $[r_0, b)$.

Доказательство. (a) Это следует из предложений 2.13 и 2.14 и замкнутости всех неособых орбит.

(b) В силу (a) предельная функция $V = U_{\text{эф},0}$ обязана иметь следующее свойство: для любых трех точек $x < y < z$ из (a, b) не выполнено $V(x) < V(y) > V(z)$. Отсюда следует требуемый вид V .

(c) Параллель $\{r_0\} \times S^1$ является круговой орбитой тогда и только тогда, когда для некоторого $K_0 \neq 0$ выполнено $U'_{\text{эф},K_0}(r_0) = 0$, т.е. $r_0 =$

$r(K_0)$ (см. (а)). Так как $U''_{\text{eff},K}(r(K)) \neq 0$ в силу (а), то по теореме о неявной функции функция $r(K)$ гладкая и является решением обыкновенного дифференциального уравнения $r'(K) = 2K f'(r(K)) / (f^3(r(K)) U''_{\text{eff},K}(r(K)))$. Если $r_0 = r(K_0)$ и $\{r_0\} \times S^1$ — экватор, то $f'(r_0) = V'(r_0) = 0$ и функция $\tilde{r}(K) := r_0$ тоже является решением. Из совпадения начальных условий $r(K_0) = \tilde{r}(K_0)$ двух решений получаем совпадение решений. Поэтому $r(K) = r_0$ при любом $K \neq 0$.

Так как все круговые орбиты $\{r(K)\} \times S^1$ совпадают с экватором $\{r_0\} \times S^1$, то в силу (а) требуемым свойством потенциала обладает $U_{\text{eff},K}$ при любом $K \neq 0$. Поэтому им обладает и $V = U_{\text{eff},0}$.

(d) Предположим противное. Тогда (в силу (с)) $V(a) > V(r_0) < V(b)$. В силу (а) и (с) (для $K \neq 0$ и $K = 0$ соответственно), при любых E из интервала $V(r_0) < E < \min\{V(a), V(b)\}$ и $|K| < \sup(f(r)\sqrt{2E - 2V(r)})$ множество $U_{\text{eff},K}^{-1}(-\infty, E)$ является непустым интервалом с концами $r_i(E, K) \in (a, b)$, $i = 1, 2$. Так как концы интервала лежат в области (a, b) гладкости функции $U_{\text{eff},K}(r)$, то при всех таких (E, K) интеграл

$$\int_{r_1(E,K)}^{r_2(E,K)} \frac{dr}{f^2(r)\sqrt{2E - 2U_{\text{eff},K}(r)}} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$$

непрерывно зависит от (E, K) , включая $K = 0$. Но в случае $K \neq 0$ этот интеграл равен $\pi/(|K|\beta)$ для некоторой константы $\beta > 0$ (в силу леммы 3.4(а) ниже и ее доказательства), поэтому при $K \rightarrow 0$ он стремится к $+\infty$. Поэтому при $K = 0$ он равен $+\infty$. Значит, $V'(r_1(E, 0)) = 0$ или $V'(r_2(E, 0)) = 0$ для любого E из рассматриваемого интервала. Но это легко приводится к противоречию с дифференцируемостью функции V .

Лемма доказана.

В силу леммы 3.3(а), если (ds^2, V) — вполне бертранова пара (определение 1.12), то при любом $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует единственная круговая орбита $\{r(K)\} \times S^1 \subset S$, и все круговые орбиты сильно устойчивы.

Лемма 3.4. Пусть на многообразии S с метрикой вращения (1.1.1) задан центральный потенциал $V = V(r)$. Предположим, что при любом достаточно большом значении уровня энергии $E \gg 1$ любая неособая некруговая орбита на этом уровне замкнута (например, V — вполне замыкающий потенциал). Тогда:

(а) любая такая орбита однозначно (с точностью до вращения) определяется значением K кинетического момента на соответствующей

траектории, таким что $0 < K^2 < 2 \sup(f^2(r)(E - V(r)))$, и является графиком периодической функции $r = r_{E,K}(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi(E, K) = 2\pi/\beta$ (равным разности “долгот” соседних перицентров орбиты) для некоторой константы $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$, называемой константой Бертрана;

(b) на римановом многообразии (S, ds^2) не более одного экватора, на экваторе $f'' < 0$, существование экватора равносильно существованию неособой ограниченной геодезической; любая такая геодезическая, отличная от экватора, замкнута и является графиком периодической функции $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $2\pi/\beta$, таким же как в (a);

(c) если на (S, ds^2) есть экватор $\{r_0\} \times S^1$ и $\{a\} \times S^1$ — полюс, то (S, ds^2) изометрично вкладывается в многообразие $(0, \pi) \times S^1$ с обобщенной метрикой Таннери $d\tilde{s}^2 = f^2(r_0)(\beta^{-2}(d\tilde{g}(\cos \psi)/d\psi)^2 d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2)$, $\psi \in (0, \pi)$, $\varphi = \varphi \bmod 2\pi \in S^1$ (см. определение 3.2, т.е. $\tilde{g}' \leq 0$ и $\tilde{g}(-\cos \psi) - \tilde{g}(\cos \psi) = \pi - 2\psi$ для любого $\psi \in (0, \pi)$) при помощи диффеоморфизма $\tilde{\psi} \times \text{id}_{S^1} : (a, b) \times S^1 \rightarrow (0, \pi - \psi_1) \times S^1$, где $\tilde{\psi}' > 0$ и $0 \leq \psi_1 < \pi/2$; в частности, если (S, ds^2) сферично, то оно является многообразием Таннери.

(d) Риманово многообразие вращения (S, ds^2) является многообразием Таннери (определение 1.12) тогда и только тогда, когда оно имеет два полюса (т.е. сферично) и единственный экватор $\{r_0\} \times S^1$, и существует константа $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$, удовлетворяющая условию из (a) для потенциала $V \equiv 0$ и такая, что

$$r_2(x) - r_1(x) = \frac{2}{\beta} R \arccos \frac{x}{R} \quad \text{для любого } x \in (0, R], \quad (3.1.4)$$

где $R := f(r_0)$ и $r_i = r_i(x)$, $i = 1, 2$ — функции на $(0, R]$, обратные функциям $f|_{(a, r_0]}$ и $f|_{[r_0, b)}$. В частности, для любого многообразия Таннери выполнено $f''(r_0) = -\beta^2/R$, и метрика Таннери приводится к виду (3.1.2) и (3.1.3).

Доказательство. (a) Пусть $E \geq E_0$, где E_0 достаточно велико. Так как орбита неособая и некруговая, то $K \neq 0$ и $E > \inf U_{\text{эф}, K}$, т.е. $0 < K^2 < 2 \sup((E - V)f^2)$, где $U_{\text{эф}, K}$ — эффективный потенциал (определение 1.9). Так как любая орбита при $K \neq 0$ и $E > \inf U_{\text{эф}, K}$, $E \geq E_0$, ограничена, то при всех таких (E, K) подмножество интервала (a, b) , заданное неравенством $U_{\text{эф}, K}(r) < E$, является интервалом (а значит, орбита единственна с точностью до вращения), его концы (обозначаемые через $r_i(E, K)$,

$i = 1, 2$) принадлежат интервалу (a, b) , $(-1)^i U'_{\text{eff},K}(r_i(E, K)) > 0$, и орбита задается периодической функцией $r = r_{E,K}(\varphi)$ с минимальным положительным периодом

$$\Phi(E, K) = 2|K| \int_{r_1(E,K)}^{r_2(E,K)} \frac{dr}{f^2(r) \sqrt{2E - 2U_{\text{eff},K}(r)}}. \quad (3.1.5)$$

Поскольку орбита замкнута, значение интеграла в (3.1.5) соизмеримо с π . С другой стороны, интеграл в (3.1.5) непрерывно зависит от (E, K) . Но непрерывная функция, принимающая дискретное множество значений, постоянна. Поэтому период (3.1.5) постоянен и равен $\Phi(E, K) = 2\pi/\beta$, где $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ — константа.

(d) Докажем сначала сферичность любой метрики Таннери. Предположим, что ds^2 — метрика Таннери на S . Так как все неособые геодезические замкнуты, то для любого $K > 0$ эффективный потенциал $U_{\text{eff},K}^0 := K^2/(2f^2)$ (для потенциала $V_0 = 0$) обладает свойствами из п.(а). Значит, f имеет единственную критическую точку, причем в ней $f'' < 0$ и $\lim_{r \rightarrow a} f(r) = \lim_{r \rightarrow b} f(r) = 0$. В частности, метрика Таннери всегда сферична и имеет единственный экватор.

В силу [29, гл. 4, теорема 4.13] все сферичные метрики Таннери — это такие метрики вращения, которые приводимы к виду (3.1.2), где константа $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ обладает нужным нам свойством. Простая проверка показывает, что вид (3.1.2) метрики равносильен виду (3.1.3), а вид (3.1.3) равносильен требуемой формуле (3.1.4) ввиду соотношений $R = f(r_0)$ и $(R/\beta)g(\cos \psi) = r_i(R \sin \psi)$ при $(-1)^i(\psi - \pi/2) \in [0, \pi/2)$, $i = 1, 2$.

(b) Для любых $\varepsilon \in [0, 1/E_0]$ и $\varkappa \in (0, \sup(f\sqrt{2 - 2\varepsilon V}))$ положим

$$U_{\text{eff},\varkappa}^\varepsilon(r) := \frac{\varkappa^2}{2f^2(r)(1 - \varepsilon V(r))}, \quad (3.1.6)$$

$$\Psi(\varepsilon, \varkappa) := 2\varkappa \int_{\rho_1(\varepsilon, \varkappa)}^{\rho_2(\varepsilon, \varkappa)} \frac{dr}{f^2(r) \sqrt{1 - \varepsilon V(r)} \sqrt{2 - 2U_{\text{eff},\varkappa}^\varepsilon(r)}}, \quad (3.1.7)$$

где $\rho_i(\varepsilon, \varkappa) \in [a, b]$, $i = 1, 2$ — концы интервала (см. ниже) в (a, b) , задаваемого неравенством $U_{\text{eff},\varkappa}^\varepsilon(r) < 1$. Если $\varepsilon > 0$, то правые части равенств (3.1.5) и (3.1.7) совпадают для $E = 1/\varepsilon$ и $K = \varkappa/\sqrt{\varepsilon}$, т.е. $\Psi(\varepsilon, \varkappa) = \Phi(1/\varepsilon, \varkappa/\sqrt{\varepsilon}) = 2\pi/\beta = \text{const}$ и $\rho_i(\varepsilon, \varkappa) = r_i(1/\varepsilon, \varkappa/\sqrt{\varepsilon}) \in (a, b)$ согласно п.(а) и его доказательству. Правая часть (3.1.7) принимает значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, непрерывна по (ε, \varkappa) во всех точках (ε, \varkappa) , таких

что $\rho_i(\varepsilon, \varkappa) \in (a, b)$, $i = 1, 2$ (например, при $\varepsilon > 0$), и полунепрерывна снизу всюду (включая значение $\varepsilon = 0$). Поэтому при $\varepsilon = 0$ и любом $\varkappa \in (0, \sqrt{2} \sup f)$ имеем

$$\frac{2\pi}{\beta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\varepsilon, \varkappa) \geq \Psi(0, \varkappa) := 2\varkappa \int_{\rho_1(0, \varkappa)}^{\rho_2(0, \varkappa)} \frac{dr}{f^2(r) \sqrt{2 - \varkappa^2/f^2(r)}}, \quad (3.1.8)$$

причем неравенство в (3.1.8) обращается в равенство, если $\rho_i(0, \varkappa) \in (a, b)$, $i = 1, 2$.

Покажем, что при $\varepsilon = 0$ множество, задаваемое неравенством $U_{\text{eff}, \varkappa}^\varepsilon(r) < 1$, действительно является интервалом в (a, b) (при $\varepsilon > 0$ это доказано выше). По условию и принципу Мопертюи, при любом $E \geq E_0$ любая неособая некруговая геодезическая метрики $(1/E)ds_E^2$ замкнута. Поэтому при $\varepsilon = 1/E$ эффективный потенциал (3.1.6), отвечающий метрике $(1/E)ds_E^2$ и нулевому потенциалу, обладает свойствами из леммы 3.3(a). Отсюда заключаем (аналогично доказательству леммы 3.3(b)), что его предел $U_{\text{eff}, \varkappa}^0(r) = \varkappa^2/(2f^2(r))$ обладает свойствами из леммы 3.3(b), т.е. f либо нестрого монотонна на (a, b) , либо не убывает на $(a, r_0]$ и не возрастает на $[r_0, b)$ для некоторого $r_0 \in (a, b)$. Поэтому неравенство $\varkappa^2/f^2(r) < 2$ действительно задает интервал в (a, b) .

Из рассуждений выше, доказанного свойства функции f и конечности интеграла в (3.1.8) следует, что либо (A) $f = \text{const}$, либо (B) $f' > 0$, либо (C) $f' < 0$, либо (D) $f'|_{(a, r_0)} > 0$, $f'|_{(r_0, b)} < 0$ и $f''(r_0) < 0$ для некоторого $r_0 \in (a, b)$. Но случай (A) невозможен, так как противоречит неравенству в (3.1.8) при $\varkappa \rightarrow \sqrt{2}f_0$. В частности, у метрики ds^2 не более одного экватора и на нем $f'' < 0$. Поэтому f монотонна вблизи любого конца интервала (a, b) , и можно положить

$$f(a) := \lim_{r \rightarrow a} f(r), \quad f(b) := \lim_{r \rightarrow b} f(r).$$

Предположим, что существует ограниченная неособая геодезическая метрики ds^2 на S , отличная от экватора (т.е. имеет место случай (D), см. выше). Применяя аналог формулы (3.1.5) к таким геодезическим (т.е. к ограниченным неособым траекториям натуральной механической системы с метрикой ds^2 и нулевым потенциалом), получаем, что число $\Psi(0, \varkappa)$ в (3.1.8) равно минимальному положительному периоду функции $r = r(\varphi)$, задающей такую геодезическую, и $\rho_i(0, \varkappa) \in (a, b)$, $i = 1, 2$ (т.е. $\sqrt{2} \max\{f(a), f(b)\} < \varkappa < \sqrt{2}f(r_0)$), где уровень энергии и значение кинетического момента суть 1 и $\varkappa > 0$. В силу доказанной формулы (3.1.8)

и того, что неравенство в (3.1.8) является равенством, получаем (согласно аналогу критерия Дарбу [38, стр. 6], [29, гл. 4, теорема 4.11]), что все ограниченные геодезические (т.е. со значением кинетического момента $\varkappa \in (\sqrt{2} \max\{f(a), f(b)\}, \sqrt{2}f(r_0)]$, т.е. “достаточно близкие” к экватору) замкнуты, а соответствующая константа Бертрана (см. (а) при $V \equiv 0$) есть β .

(с) Предположим, что метрика ds^2 имеет полюс $\{a\} \times S^1$ и экватор $\{r_0\} \times S^1$, где $a < r_0 < b$. Из (б) следует, что в случае $f(b) = 0$ все неособые геодезические замкнуты, т.е. ds^2 является метрикой Таннери. Пусть далее $f(b) > 0$.

По условию и принципу Мопертюи, при $E \geq E_0$ все неособые геодезические метрики $(1/E)ds_E^2$ замкнуты, т.е. она является метрикой Таннери. Поэтому в силу (д) она имеет единственный экватор $\{r_\varepsilon\} \times S^1$, а соответствующие функции $r_{i,\varepsilon}(x)$, $x \in (0, R_\varepsilon]$, $i = 1, 2$, удовлетворяют соотношению

$$r_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon \sin \psi) - r_{1,\varepsilon}(R_\varepsilon \sin \psi) = \frac{R_\varepsilon}{\beta}(\pi - 2\psi), \quad \psi \in (0, \pi/2], \quad (3.1.9)$$

где $\varepsilon := 1/E$, $f_\varepsilon(r) := f(r)\sqrt{1 - \varepsilon V(r)}$, $R_\varepsilon := f_\varepsilon(r_\varepsilon)$. Здесь константа Бертрана равна β в силу (а) и принципа Мопертюи, а функции $r_{i,\varepsilon}(x)$ определяются условиями $dr_{i,\varepsilon}(f_\varepsilon(r))/dr = \sqrt{1 - \varepsilon V(r)}$ при $(-1)^i(r - r_\varepsilon) > 0$, $i = 1, 2$, и $r_{1,\varepsilon}(R_\varepsilon) = r_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon) := r_\varepsilon$. Из соотношения (3.1.9), с учетом знаков $(-1)^i r'_{i,\varepsilon}(x) < 0$, получаем оценки

$$0 > (-1)^i \frac{d}{d\psi} r_{i,\varepsilon}(R_\varepsilon \sin \psi) > -\frac{2}{\beta} R_\varepsilon, \quad \psi \in (0, \pi/2), \quad i = 1, 2. \quad (3.1.10)$$

Так как $f_\varepsilon(r)$ гладко зависит от пары (ε, r) (включая $\varepsilon = 0$), причем $f'_\varepsilon(r_\varepsilon) = 0$ и $f''_0(r_0) \neq 0$ в силу (б), то по теореме о неявной функции точка $r_\varepsilon \in (a, b)$ гладко зависит от ε (включая $\varepsilon = 0$). Из соотношения (3.1.9) и оценки (3.1.10) при $0 < \varepsilon \leq 1/E_0$ и $i = 1$ получаем (с учетом свойств $f_0 = f$, $f'|_{(a,r_0)} > 0$, $f'|_{(r_0,b)} < 0$ и $r_{i,0}(x) = r_i(x)$, $i = 1, 2$) аналогичные соотношение и оценку при $\varepsilon = 0$:

$$r_2(R \sin \psi) - r_1(R \sin \psi) = \frac{R}{\beta}(\pi - 2\psi), \quad \psi \in (\arcsin \frac{f(b)}{R}, \pi/2] = (\psi_1, \pi/2], \quad (3.1.11)$$

$$0 < \frac{d}{d\psi} r_1(R \sin \psi) \leq \frac{2}{\beta} R, \quad \psi \in (\arcsin \frac{f(a)}{R}, \pi/2) = (0, \pi/2), \quad (3.1.12)$$

где $R := R_0 = f(r_0)$, $\psi_1 := \arcsin(f(b)/R) \in (0, \pi/2)$.

Так как $f'|_{(a,r_0)} > 0$, $f'|_{(r_0,b)} < 0$ и $f''(r_0) \neq 0$, то в силу леммы Морса существует диффеоморфизм $\tilde{\psi} : (a, b) \rightarrow (0, \pi - \psi_1)$, такой что $\tilde{\psi}' > 0$ и $f(r) = R \sin \tilde{\psi}(r)$ для любого $r \in (a, b)$. Поэтому при диффеоморфизме, обратном диффеоморфизму $\tilde{\psi} \times \text{id}_{S^1} : S_1 = (a, b) \times S^1 \rightarrow (0, \pi - \psi_1) \times S^1$, $(r, \varphi) \mapsto (\tilde{\psi}(r), \varphi)$, риманова метрика ds^2 индуцирует риманову метрику на $(0, \pi - \psi_1) \times S^1$ вида

$$\left(\tilde{\psi} \times \text{id}_{S^1}\right)_*^{-1}(ds^2) = R^2 \left(\frac{1}{\beta^2} \left(\frac{dg(\cos \psi)}{d\psi} \right)^2 d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2 \right), \quad (3.1.13)$$

где $g : (-\cos \psi_1, 1) \rightarrow (0, (b-a)\beta/R)$ — некоторый диффеоморфизм, такой что $g' < 0$. Из соотношения (3.1.11) и оценки (3.1.12), с учетом соотношения

$$a + \frac{R}{\beta} g(\cos \tilde{\psi}(r)) = r = r_i(f(r)) = r_i(R \sin \tilde{\psi}(r)), \quad (-1)^i (r - r_0) > 0, \quad i = 1, 2,$$

получаем соотношение и оценку

$$g(-\cos \psi) - g(\cos \psi) = \pi - 2\psi, \quad \psi \in (\psi_1, \pi/2], \quad (3.1.14)$$

$$0 < \frac{d}{d\psi} g(\cos \psi) \leq 2, \quad \psi \in (0, \pi/2). \quad (3.1.15)$$

Продолжим диффеоморфизм $g : (-\cos \psi_1, 1) \rightarrow (0, (b-a)\beta/R)$ до функции $\tilde{g} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ так, чтобы соотношение (3.1.14) для \tilde{g} выполнялось всюду на $(0, \pi/2]$. Тогда продолженная функция \tilde{g} является гладкой (ввиду $0 < \psi_1 < \pi/2$ и гладкости функций g, \cos, \arccos) и удовлетворяет нестрогому неравенству $\tilde{g}' \leq 0$ (в силу $g' < 0$ и (3.1.14), (3.1.15)). Значит, невозрастающая сюръективная гладкая функция $\tilde{g} : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$ определяет обобщенную метрику Таннери $d\tilde{s}^2$ вида (3.1.3), которая при вложении $\tilde{\psi} \times \text{id}_{S^1} : S_1 = (a, b) \times S^1 \rightarrow (0, \psi_1) \times S^1 \subset (0, \pi) \times S^1$, $(r, \varphi) \mapsto (\tilde{\psi}(r), \varphi)$, переходит в метрику ds^2 (в силу (3.1.13)).

Лемма доказана.

Таким образом, по лемме 3.4(b,c) всякое *сферичное* вполне бертраново многообразие является многообразием Таннери и имеет вид “груши” (возможно, симметричной) — многообразия вращения с одним экватором и двумя (выколотыми) полюсами, в которых метрика и потенциал могут иметь особенности.

Лемма 3.5. Пусть на многообразии $S = (a, b) \times S^1$ с метрикой вращения (1.1.1) заданы два центральных потенциала $V_1 = V_1(r)$ и $V_2 = V_2(r)$, гладких на интервалах $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ и (a, b) соответственно. Предположим, что для любого достаточно большого значения уровня энергии $E \gg 1$ две римановы метрики $ds_{i,E}^2$, соответствующие по принципу Мопертюи метрике (1.1.1), потенциалу V_i и уровню энергии E , $i = 1, 2$ (см. (3.1.1)), сопряжены при помощи диффеоморфизма (изометрии), зависящего от E и близкого к тождественному на любом компакте в $(a_1, b_1) \times S^1$. Тогда в любом “поясе” $(a_0, b_0) \times S^1 \subset (a_1, b_1) \times S^1$, не содержащем экваторов метрики (1.1.1), выполнено тождество $V_1 - V_2 = Cf'$, где C — константа (зависящая от “пояса”), $f = f(r)$ — радиус параллели, r — натуральный параметр на меридиане.

Доказательство. При любом $E \gg 1$, по принципу Мопертюи получаем две метрики $(1/E)ds_{i,E}^2 = (1 - \varepsilon V_i(r))(dr^2 + f^2(r)d\varphi^2)$ на многообразиях $S_{i,\varepsilon} := V_i^{-1}(-\infty, E) \times S^1$, $i = 1, 2$, где $\varepsilon := 1/E$. По условию существует изометрия $m_\varepsilon : S_{1,\varepsilon} \rightarrow S_{2,\varepsilon}$ между этими двумя метриками. Значит, выполнены тождества

$$(1 - \varepsilon V_1(r)) f^2(r) = (1 - \varepsilon V_2(m_\varepsilon(r))) f^2(m_\varepsilon(r)), \quad (3.1.16)$$

$$\frac{\partial m_\varepsilon(r)}{\partial r} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon V_1(r)}{1 - \varepsilon V_2(m_\varepsilon(r))}}. \quad (3.1.17)$$

Здесь знак перед корнем $+$, так как изометрия m_ε близка к тождественной.

Равенства (3.1.16) и (3.1.17) верны при $0 < \varepsilon \ll 1$, а также при $\varepsilon = 0$ (т.е. при $E = +\infty$) для тождественной изометрии $m_0(r) = r$. В силу теоремы о неявной функции, зависимость $m_\varepsilon(r)$ от ε — гладкая при $\varepsilon = 0$ и $r \in (a_0, b_0)$. Продифференцировав равенство (3.1.16) по ε при $\varepsilon = 0$, с учетом $m_0(r) = r$, получим:

$$\left. \frac{\partial m_\varepsilon(r)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2} (V_2(r) - V_1(r)) \frac{f(r)}{f'(r)}, \quad r \in (a_0, b_0). \quad (3.1.18)$$

В левых частях равенств (3.1.18) и (3.1.17) мы имеем частные производные (т.е. компоненты дифференциала) функции $m_\varepsilon(r)$ по переменным ε и r . Но дифференциал любой гладкой функции — это замкнутая 1-форма. Запишем условие замкнутости этой 1-формы при $\varepsilon = 0$. То

есть, приравняем производную правой части равенства (3.1.18) по r к производной правой части равенства (3.1.17) по ε (при $\varepsilon = 0$). Получим равенство

$$(V_1(r) - V_2(r))' = (V_1(r) - V_2(r)) \frac{f''(r)}{f'(r)}, \quad r \in (a_0, b_0). \quad (3.1.19)$$

Полное решение уравнения (3.1.19) (с неизвестной функцией $V_1 - V_2$) имеет требуемый вид $V_1 - V_2 = C f'$, где C — произвольная вещественная константа (зависящая от интервала (a_0, b_0)).

Лемма доказана.

3.2 Классификация вполне бертрановых пар

Прежде, чем приступать к доказательству теоремы классификации, приведем ряд примеров бертрановых многообразий, часть из которых уже возникала в предыдущих разделах.

Пример 3.6. (А) Классический пример многообразия Бертрانا (без экваторов) — это проколота евклидова плоскость (отвечающая функции $f(r) = r$ на $S = (0, +\infty) \times S^1$). Все замыкающие центральные потенциалы на ней были найдены Ж. Бертраном [1], это — *гравитационный* $V_1(r) = -A/r + B$ и *осцилляторный* $V_2(r) = Ar^2 + B$ потенциалы, где $A, B \in \mathbb{R}$, $A > 0$ — любые (аддитивная и положительно мультипликативная) константы. Другие известные примеры — это проколотые полу-сфера, плоскость Лобачевского, их “рациональные накрытия” и другие многообразия вращения без экваторов, для которых получены аналоги теоремы Бертрана (обзор этих результатов см., например, в §1.1).

(В) Все максимальные (по включению) многообразия Бертрана без экваторов и отвечающие им пары Бертрана классифицированы (см. главу 2, а также [34] и [9]). А именно: такие римановы многообразия с точностью до изометричности образуют 3-параметрическое семейство, а отвечающие им пары Бертрана — два семейства: 4- и 5-параметрическое. Показано (теорема 2.3), что многообразия Бертрана без экваторов — это в точности такие римановы многообразия вращения без экваторов, для которых метрика в некоторых координатах ($\theta = \theta(r), \varphi = \varphi \bmod 2\pi$) имеет вид

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2})}, \quad (3.2.1)$$

где $c, d \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ — некоторые константы (параметры семейства). Если при этом $d = 0$, то существует ровно два замыкающих центральных потенциала с точностью до аддитивной и положительно мультипликативной констант — это *гравитационный* $V_1 = -A|\theta| + B$ и *осцилляторный* $V_2 = A\theta^{-2} + B$ потенциалы, где $A > 0$; в противном случае потенциал один (*осцилляторный*) и имеет вид $V_2 = A\theta^{-2} + B$, где $A \neq 0$, $\text{sgn } A = \text{sgn } (\theta^4 + d)$; константа Бертрана (см. лемму 3.4(а)) для потенциала V_i равна i/μ , $i = 1, 2$. Реализуемость этих римановых многообразий в виде поверхностей вращения в \mathbb{R}^3 изучена в [35], см. §4.1. Дифференциальное уравнение на $f = f(r)$, решениям которого отвечают такие метрики, получено в [11, 36], см. также §4.2.

Изучим задачу о классификации вполне бертрановых многообразий и вполне бертрановых пар (ds^2, V) .

Пример 3.7. Известны следующие пять семейств вполне бертрановых многообразий, с соответствующими вполне замыкающими центральными потенциалами на них:

(i) сферичные (определение 1.13) “сферообразные” (т.е. постоянной положительной кривизны) 2-мерные римановы многообразия вращения (образующие 2-параметрическое семейство, содержащее 1-параметрическое семейство круглых сфер с выколотыми полюсами) с гравитационным потенциалом на них (см. главу 2 и [34]),

(ii) “рациональные” конусы с плоской метрикой (образующие 1-параметрическое семейство, содержащее проколотую евклидову плоскость) с осцилляторным потенциалом на них [34, §2.1, следствие 1],

(iii) “северные полусферы” многообразий из п.(i) с осцилляторным потенциалом на них (см. главу 2 и [34]),

(iv) грушевидные (определение 1.13) 2-мерные римановы многообразия вращения §2 (см. [34]) (образующие 3-параметрическое семейство) с осцилляторным потенциалом на них, где знак потенциала таков, что “основной” полюс является притягивающим, а “дополнительный” — отталкивающим (см. главу 2 выше),

(v) все многообразия Таннери (определение 1.12), классифицированные в [29, гл. 4, теорема 4.13] (см. также (3.1.2) и (3.1.4) ниже), включающие многообразия из пп.(i,iv) и образующие “функционально-двупараметрическое” семейство (параметры которого суть два вещественных числа и нечетная гладкая функция $h : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ с точностью до замены $h \rightarrow -h$,

см. (3.1.2) ниже), являющиеся (в силу леммы 3.4(d) ниже) либо сферическими и сферообразными ($h \equiv 0$), либо грушевидными ($h \not\equiv 0$), с постоянным потенциалом на них.

Один из параметров каждого семейства (i–v) — это число $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ (константа Бертрана, см. лемму 3.4(a) ниже), которое для семейства (iii) вдвое больше, чем для (i). Другие числовые параметры — это радиус экватора $R > 0$ для семейств (i) и (v), пара чисел $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ со свойствами $d < 0, c > -2\sqrt{-d}$ для семейства (iv) (см. (3.2.1)). Семейства (ii–iv) в действительности образуют единое семейство с параметрами $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, такими что $d \leq 0, c > -2\sqrt{-d}$ или $c = d = 0$, где семействам (ii) и (iii) отвечают случаи $c = d = 0$ и $c > d = 0$ соответственно. Вполне замыкающие центральные потенциалы на любом многообразии из пп.(i–iv) не имеют критических точек и образуют 2-параметрическое семейство, параметрами которого являются произвольные аддитивная и положительно мультипликативная константы, а в случае (v) — 1-параметрическое семейство констант.

Следующая теорема классифицирует вполне бертрановы пары.

Теорема 3.8. *Вполне бертрановы многообразия вращения (S, ds^2) , где $S = (a, b) \times S^1$, вместе с вполне замыкающими центральными потенциалами V на S (определение 1.12), с точностью до сопряженности пар (ds^2, V) образуют пять семейств (i–v) из примера 3.7. Любые две вполне бертрановы пары (ds^2, V) , принадлежащие либо разным семействам, либо одному семейству с разными наборами параметров, не сопряжены. Римановы многообразия семейств (i) и (iv) составляют часть римановых многообразий семейства (v). Любые два римановы многообразия, принадлежащие либо разным семействам (ii, iii, v), либо одному семейству (i–v) с разными наборами параметров, не изометричны.*

Мы также получаем (теорема 3.12) классификацию устойчиво бертрановых пар (определение 1.12), включающих сильно и слабо бертрановы пары (определение 1.12). Это — такие пары Бертрана, для которых всякая параллель является почти устойчивой круговой орбитой (определение 1.11). Мы показываем, что устойчиво бертрановы пары совпадают с полулокально бертрановыми парами без экваторов, которые уже классифицированы (см. пример 3.6(B)).

На многообразии $S \simeq (a, b) \times S^1$ естественно действует окружность S^1 — группа вращений, сохраняющих метрику (1.1.1). Все диффеоморфизмы и замены координат на S , рассматриваемые в настоящей работе, предполагаются S^1 -эквивариантными.

Доказательство. Пусть (ds_1^2, V_1) — произвольная вполне бертранова пара на многообразии $S_1 = (a_1, b_1) \times S^1$. Согласно лемме 3.3(а,в), существует круговая орбита, и все круговые орбиты либо одновременно не являются экваторами, либо совпадают с одним и тем же экватором. Рассмотрим два случая.

Случай 1 (семейства (i–iv)): указанная круговая орбита не является экватором. Так как эта орбита сильно устойчива по лемме 3.3(а), то в ее максимальной (по включению) связной окрестности $(a_0, b_0) \times S^1 \subset S_1$, не пересекающей экваторов, потенциал V_1 является “локально замыкающим” (определение 1.12). Значит, ограничение пары (ds^2, V) на эту окрестность сопряжено ограничению на некоторый “пояс” $(\hat{a}_0, \hat{b}_0) \times S^1 \subset \hat{S}$ некоторой максимальной (по включению) пары Бертрана $(d\hat{s}^2, \hat{V})$ без экваторов на некотором многообразии $\hat{S} = (\hat{a}, \hat{b}) \times S^1$. Согласно классификации пар Бертрана без экваторов из главы 2 (см. пример 3.6(В)), любое такое риманово многообразие $(\hat{S}, d\hat{s}^2)$ изометрично одной из связных компонент многообразия $\hat{I}_{c,d} \times S^1$ с метрикой (3.2.1) для некоторых констант $c, d \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$, где

$$\hat{I}_{c,d} = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta < 0, \theta^2 + c - d\theta^{-2} > 0, \theta^4 + d \neq 0\}, \quad (3.2.2)$$

а потенциал \hat{V} является осцилляторным или гравитационным при отождествлении \hat{S} с упомянутой компонентой. В частности, эффективный потенциал $\hat{U}_{\text{eff},K}$ на \hat{S} для пары Бертрана $(d\hat{s}^2, \hat{V})$ имеет один из следующих видов:

$$\hat{U}_{\text{eff},K}^2 = \frac{1}{2}K^2\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2}) + A\theta^{-2} + B, \quad \hat{U}_{\text{eff},K}^1 = \frac{1}{2}K^2\mu^2(\theta^2 + c) + A\theta + B \quad (3.2.3)$$

в зависимости от того, является ли потенциал \hat{V} осцилляторным или гравитационным. Так как пара (ds_1^2, V_1) на S_1 — вполне бертранова (по предположению), то в силу леммы 3.3(а) для любого $K \neq 0$ эффективный потенциал $U_{\text{eff},K}$ для этой пары имеет предел $+\infty$ на любой граничной параллели подмногообразия $(a_0, b_0) \times S^1$, отличной от экватора многообразия (S_1, ds_1^2) . Отсюда и из формул (3.2.2), (3.2.3) следует, что $d \leq 0$, “пояс” $(\hat{a}_0, \hat{b}_0) \times S^1$ совпадает со всем многообразием \hat{S} (т.е. $(\hat{a}_0, \hat{b}_0) = (\hat{a}, \hat{b})$), и

одна из граничных параллелей \hat{S} является полюсом ($\theta = -\infty$), а другая — абсолют или “граничным экватором” ($\theta = -(-d)^{1/4}$), и вид пары Бертрана $(d\hat{s}^2, \hat{V})$ без экваторов определяется одним из следующих подслучаев.

Подслучай 1а (семейства (ii,iii)): у исходного вполне бертранова многообразия (S_1, ds_1^2) нет экваторов. Тогда оно совпадает с указанной окрестностью в S_1 (т.е. $(a_0, b_0) = (a_1, b_1)$), вторая граничная параллель бертранова многообразия $(\hat{S}, d\hat{s}^2)$ — это абсолют ($\theta = 0$ при $c = d = 0$) или “граничный экватор” ($\theta = 0$ при $c > d = 0$), пара $(d\hat{s}^2, \hat{V})$ принадлежит семейству (ii) или (iii) соответственно, и все доказано.

Подслучай 1б (семейства (i,iv)): у исходного вполне бертранова многообразия (S_1, ds_1^2) есть экватор. Тогда вторая граничная параллель бертранова многообразия $(\hat{S}, d\hat{s}^2)$ — это “граничный экватор” ($\theta = -(-d)^{1/4}$ при $d \leq 0, c > -2\sqrt{-d}$), которому отвечает (не граничный) экватор исходного риманова многообразия (S_1, ds_1^2) , и потенциал V_1 имеет конечный предел при стремлении к этому экватору. Поэтому пара $(d\hat{s}^2, \hat{V})$ является ограничением одной из пар семейств (i,iv) на (“северную” или “южную”) полусферу, причем одна из граничных параллелей этой полусферы является притягивающим полюсом.

Изучим подслучай 1б. Продолжим пару $(d\hat{s}^2, \hat{V})$ по другую сторону “граничного экватора” так, чтобы продолженная пара $(ds_2^2, V_2 = V_2(r))$ на $S_2 = (a_2, b_2) \times S^1 \supset \hat{S}$ была представима формулами из примера 3.7(B) с расширенной областью определения $I_{c,d} \times S^1$ (содержащей экватор), где

$$I_{c,d} := \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta < 0 < \theta^2 + c - d\theta^{-2}\} \text{ при } d \neq 0 \text{ или } c \leq 0, \quad I_{c,0} := \mathbb{R} \text{ при } c > 0,$$

для некоторого диффеоморфизма $(a_2, b_2) \rightarrow I_{c,d}, r \mapsto \theta = \theta(r)$, т.е. чтобы продолженная пара была сопряжена одной из пар семейств (i,iv). Без ограничения общности считаем, что метрики ds_i^2 на $S_i = (a_i, b_i) \times S^1$ имеют вид

$$ds_i^2 := dr^2 + f_i^2(r)d\varphi^2, \quad i = 1, 2, \quad (3.2.4)$$

причем (ввиду изометричности метрик $ds_1^2|_{(a_0, b_0) \times S^1}$ и $d\hat{s}^2$) упомянутым выше полюсам многообразий (S_i, ds_i^2) отвечает одно и то же значение $a_1 = a_2 =: a$ координаты r (т.е. “широта”), а экваторам — одна и та же “широта” $b_0 = \hat{b}_0 = \hat{b} =: r_0$. Всюду далее f_i, V_i рассматриваются как функции переменной r .

Итак, в рассматриваемом случае исходная пара функций (f_1, V_1) совпадает с парой функций (f_2, V_2) одного из семейств (i,iv) по одну сторону

экватора $\{r_0\} \times S^1$, точнее на $(a, r_0] \times S^1$. Покажем, что пары (f_1, V_1) и (f_2, V_2) совпадают всюду (включая этот экватор и по другую его сторону).

Любая метрика семейств (i,iv) (а потому и ds_2^2) является метрикой Таннери. (В самом деле: любая пара, принадлежащая семействам (i,iv), — бертранова. Все ее неособые орбиты ограничены ввиду $\lim_{r \rightarrow s} \hat{U}_{\text{eff},K}(r) = +\infty$, $s \in \{a_2, b_2\}$ (см. (3.2.3)). Поэтому такая пара является вполне бертрановой. Отсюда и из сферичности любой метрики семейств (i,iv) следует, в силу леммы 3.4(с), что она является метрикой Таннери.) С другой стороны, исходное риманово многообразие (S_1, ds_1^2) имеет полюс $\{a\} \times S^1 \subset \partial S_1$ и экватор $\{r_0\} \times S^1 \subset S_1$, поэтому в силу леммы 3.4(с) оно изометрично вкладывается в многообразие $(0, \pi) \times S^1$ с некоторой обобщенной метрикой Таннери ds_1^2 . Значит, метрика Таннери ds_2^2 и обобщенная метрика Таннери ds_1^2 сопряжены по одну сторону своих экваторов (на $(a, r_0] \times S^1$). Но в силу определения 3.2 две обобщенные метрики Таннери, сопряженные по одну сторону своих экваторов, обязаны быть сопряжены всюду. Поэтому обобщенная метрика Таннери ds_1^2 в действительности является метрикой Таннери (т.е. всюду невырождена), и $S_1 \subset S_2$ (поэтому $b_1 \leq b_2 =: b$) и $f_1 = f_2|_{(a,b_1)}$, т.е. первая метрика из (3.2.4) совпадает с ограничением второй на подмногообразии $(a, b_1) \times S^1 = S_1 \subset S_2 = (a, b) \times S^1$. Положим $f := f_2$.

Осталось доказать совпадение многообразий $S_1 \subset S_2$ и совпадение вполне замыкающих потенциалов V_1 и V_2 всюду на S_1 (а не только по одну сторону экватора $\{r_0\} \times S^1$). В силу принципа Мопертюи и того, что оба потенциала V_i — вполне замыкающие, имеем два 1-параметрических семейства метрик Таннери:

$$\frac{1}{E} ds_{i,E}^2 = \left(1 - \frac{1}{E} V_i(r)\right) (dr^2 + f^2(r) d\varphi^2), \quad i = 1, 2, \quad (3.2.5)$$

на многообразиях $V_i^{-1}(-\infty, E) \times S^1 \subset S_i$ с параметром $E > \inf V_i$, где $S_1 \subset S_2$. Экваторы метрик i -го семейства совпадают (в силу принципа Мопертюи) с круговыми орбитами пары Бертрана (ds_i^2, V_i) , которые при $i = 2$ лежат в области $(a, r_0) \times S^1$ совпадения пар $(ds_1^2, V_1) = (ds_2^2, V_2)$. Поэтому при любом $E \gg 1$ две метрики из (3.2.5) совпадают по одну сторону своего экватора. Но в силу леммы 3.4(d) две метрики Таннери, совпадающие по одну сторону экватора, обязаны быть сопряжены всюду. Значит, для любого $E \gg 1$ две метрики из (3.2.5) всюду сопряжены.

Так как $ds_1^2 = dr^2 + f^2(r) d\varphi^2$ — вполне бертранова метрика на $S_1 =$

$(a, b_1) \times S^1$ с экватором $\{r_0\} \times S^1 \subset S_1$, то в силу леммы 3.4(b) выполнено $f' < 0$ на (r_0, b_1) . Значит, в силу леммы 3.5, на (r_0, b_1) имеем $V_1 - V_2 = Cf'$ для некоторой константы $C \in \mathbb{R}$. Так как по доказанному выше $V_1 - V_2 = 0$ на $(a, r_0]$, а метрика и оба потенциала V_i гладкие, то

$$0 = V_1'(r_0) - V_2'(r_0) = Cf''(r_0).$$

Но, по лемме 3.4(b), $f''(r_0) \neq 0$. Поэтому $C = 0$, т.е. $V_1 = V_2$ всюду на $S_1 = (a, b_1) \times S^1$.

Итак, исходная вполне бертранова пара (ds_1^2, V_1) , заданная на многообразии S_1 , является ограничением вполне бертрановой пары (ds_2^2, V_2) из семейств (i,iv), заданной на многообразии S_2 , на подмногообразии $S_1 \subset S_2$. Так как у каждой пары (ds_i^2, V_i) все неособые орбиты замкнуты (т.е. эта пара вполне бертранова), то в силу леммы 3.3(a) ее эффективный потенциал имеет предел $+\infty$ на обеих граничных параллелях многообразия S_i (при любом $K \neq 0$), $i = 1, 2$. Отсюда получаем, что включение $S_1 \subset S_2$ является равенством, что и требовалось доказать.

Случай 2 (семейство (v)): указанная круговая орбита является экватором, который обозначим через $\{r_0\} \times S^1$. По лемме 3.3(c,d) потенциал V_1 постоянен по одну сторону этого экватора, скажем на $(a_1, r_0] \times S^1$. Значит, в силу леммы 3.3(a), по эту сторону экватора имеется полюс $\{a_1\} \times S^1$. По лемме 3.4(c) наше риманово многообразие (S_1, ds_1^2) изометрично вкладывается в многообразие $(0, \pi) \times S^1$ с некоторой обобщенной метрикой Таннери $d\tilde{s}_1^2$. С другой стороны, в силу принципа Мопертюи и полной бертрановости пары (ds_1^2, V_1) , имеем метрику Таннери $ds_{1,E_0}^2 := (E_0 - V_1(r))ds_1^2$ при $E_0 := V_1(r_0) + 1$ на $V_1^{-1}(-\infty, E_0) \times S^1 \subset S_1$, которая совпадает с метрикой ds_1^2 по одну сторону экватора (точнее, на $(a_1, r_0] \times S^1$). Значит, обобщенная метрика Таннери $d\tilde{s}_1^2$ и метрика Таннери ds_{1,E_0}^2 сопряжены по одну сторону своих экваторов. Но в силу определения 3.2 две обобщенные метрики Таннери, сопряженные по одну сторону своих экваторов, обязаны быть сопряжены всюду. Поэтому обобщенная метрика Таннери $d\tilde{s}_1^2$ в действительности является метрикой Таннери (т.е. всюду невырождена). Итак, наше риманово многообразие (S_1, ds_1^2) содержится в некотором многообразии Таннери $S_2 = (a, b) \times S^1$ с метрикой вида

$$ds_2^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2,$$

где $a := a_1 < b_1 \leq b$ и $ds_1^2 = ds_2^2|_{(a,b_1) \times S^1}$. В частности, пара $(ds_2^2, V_2 := V_1(r_0) = \text{const})$ на многообразии S_2 является вполне бертрановой.

Осталось доказать совпадение многообразий $S_1 \subset S_2$ и совпадение вполне замыкающих потенциалов V_1 и V_2 всюду на S_1 (а не только по одну сторону экватора). В силу принципа Мопертюи и того, что оба потенциала V_i — вполне замыкающие, имеем два 1-параметрических семейства метрик Таннери (3.2.5) на многообразиях $V_i^{-1}(-\infty, E) \times S^1 \subset S_i$ с параметром $E > \inf V_1 = V_1(r_0) = V_2$ в силу леммы 3.3(с). Их экваторы совпадают (в силу принципа Мопертюи) с круговыми орбитами пары Бертрана (ds_i^2, V_i) , которые при $i = 1$ совпадают (в силу предположения и леммы 3.3(с)) с экватором $\{r_0\} \times S^1$ метрики ds_1^2 . Поэтому при любом $E > V_1(r_0)$ две метрики из (3.2.5) совпадают по одну сторону своего экватора $\{r_0\} \times S^1$. Но в силу леммы 3.4(d) две метрики Таннери, совпадающие по одну сторону своего экватора, обязаны быть сопряжены всюду. Значит, для любого $E > V_1(r_0)$ две метрики из (3.2.5) всюду сопряжены.

Дословным повторением предпоследнего абзаца доказательства в случае 1 получаем, что $V_1 = V_2$ всюду на S_1 . Значит, $V_1 = \text{const}$ всюду на S_1 , поэтому (S_1, ds_1^2) — многообразие Таннери. Значит, в силу построения $S_1 = S_2$, что и требовалось доказать.

Первое утверждение теоремы доказано. Докажем остальные утверждения. Из явного вида (3.1.2) метрик Таннери следует, что разным тройкам $(\beta, R, \pm h)$ отвечают неизометричные римановы многообразия семейства (v). Разным постоянным потенциалам на одном римановом многообразии семейства (v) отвечают, очевидно, несопряженные пары Бертрана. Римановы многообразия семейств (ii, iii) не имеют экваторов, а потому неизометричны никаким римановым многообразиям семейства (v). В силу леммы 3.4(с), римановы многообразия семейств (i, iv) являются многообразиями Таннери, т.е. римановыми многообразиями семейства (v). У всех пар Бертрана семейства (v) потенциал — константа, поэтому они не сопряжены никаким парам других семейств. Согласно следствию 2.9(A), римановы многообразия семейств (i—iv) попарно неизометричны. Любая изометрия любого риманова многообразия семейств (ii—iv) в себя переводит любую параллель в себя, а потому разным парам (A, B) отвечают несопряженные пары Бертрана на любом таком римановом многообразии. Если две пары Бертрана семейства (i) сопряжены друг другу, то сопрягающая изометрия переводит притягивающий полюс ($\theta = -\infty$) в себя, а потому переводит любую параллель в себя, поэтому эти пары Бертрана отвечают одной и той же паре (A, B) .

Теорема 3.8 доказана.

Замечание 3.9. Семейства (ii,iii) из теоремы 3.8 и примера 3.7 характеризуются отсутствием экваторов. Семейства (i,iv) характеризуются тем, что все круговые орбиты находятся по одну сторону экватора (по ту, где находится притягивающий полюс, т.е. потенциал принимает меньшие значения) и потенциал — не константа. Семейство (v) характеризуется тем, что все круговые орбиты совпадают с экватором и потенциал — константа. Любая вполне бертранова пара семейств (i–iv) после выкидывания в случаях (i,iv) экватора и полусферы, содержащей отталкивающий полюс, остается бертрановой, а потому присутствует в примере 3.6(B).

3.3 Случай цилиндра

Случай цилиндра, т.е. многообразия вращения $S = (a, b) \times S^1$ с римановой метрикой (1.1.1) при $f(r) = C_f = \text{const}$, стоит особняком, поскольку цилиндр является единственным многообразием, целиком состоящим из экваторов. Для него справедливо следующее утверждение, первая часть которого принадлежит О.А. Загрядскому, а вторая получена совместно с Е.А. Кудрявцевой:

Лемма 3.10. (А) (О.А. Загрядский) *На любом цилиндре не существует замыкающих центральных потенциалов.*

(В) (Е.А. Кудрявцева, Д.А. Федосеев) *Более того, для любого центрального потенциала на цилиндре S и любой замкнутой некруговой неособой орбиты, в “поясе” $[r_1, r_2] \times S^1 \subset S$ существуют как незамкнутые неособые ограниченные орбиты, так и бесконечное число замкнутых и попарно негомотопных орбит, где r_1, r_2 — минимальное и максимальное значения координаты r на исходной замкнутой орбите.*

Доказательство. Пусть $V = V(r)$ — любой центральный потенциал на цилиндре. Предположим, что существует неособая замкнутая орбита, не являющаяся круговой. Обозначим отвечающие данной орбите уровень энергии через \hat{E} , а значение кинетического момента — \hat{K} . Пусть $r_1, r_2 \in (a, b)$ — минимальное и максимальное значения координаты r на данной замкнутой орбите. Значит, r_1, r_2 — это корни уравнения $U_{\text{эф}, \hat{K}}(r) = \hat{E}$, такие что $U_{\text{эф}, \hat{K}}|_{(r_1, r_2)} < \hat{E}$. Любому значению $K \neq 0$ кинетического момента сопоставим уровень энергии $E = E(K) = \hat{E} + (K^2 - \hat{K}^2)/(2C_f^2)$. В частности, $E(\hat{K}) = \hat{E}$ и

$$E(K) - U_{\text{эф}, K}(r) = \hat{E} - U_{\text{эф}, \hat{K}}(r), \quad r \in (a, b), \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.3.1)$$

Так как выполнено (3.3.1), то при любом $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует (единственная с точностью до вращения) ограниченная орбита в “поясе” $[r_1, r_2] \times S^1$, отвечающая уровню энергии $E = E(K)$ и кинетическому моменту K , причем на этой орбите нижняя и верхняя грани координаты r тоже равны r_1, r_2 . Аналогично доказательству леммы 3.4(a) отсюда заключаем, что каждая такая орбита задается периодической функцией $r = r_K(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi(K)$, для которого справедлив аналог формулы (3.1.5).

В условиях настоящей леммы, с учетом (3.3.1), формула (3.1.5) приобретает вид

$$\Phi(K) = 2 \frac{|K|}{C_f^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2E(K) - 2U_{\text{eff},K}(r)}} = \frac{|K|}{|\hat{K}|} \Phi(\hat{K}), \quad (3.3.2)$$

причем период $\Phi(\hat{K})$ соизмерим с 2π ввиду замкнутости исходной орбиты. Следовательно, при изменении значения $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ период $\Phi(K)$ в формуле (3.3.2) изменится и будет несоизмерим с 2π при иррациональном K/\hat{K} , а значит, соответствующая ограниченная орбита в “поясе” $[r_1, r_2] \times S^1$, с уровнем энергии $E(K)$ и кинетическим моментом K не будет замкнутой. Это доказывает (А) и первую часть (В).

Докажем вторую часть (В). При рациональном K/\hat{K} будем иметь $\Phi(K) = 2\pi/\beta(K)$ для некоторого рационального $\beta(K) = |\hat{K}/K|\beta(\hat{K}) = p(K)/q(K) > 0$, где $p(K), q(K) \in \mathbb{N}$ взаимно просты. Поэтому соответствующая орбита в “поясе” $[r_1, r_2] \times S^1$ будет замкнута и гомотопна $q(K)$ -ой степени параметризованной параллели $\varphi \mapsto (r_1, \varphi) \in S$, $\varphi \in S^1$, на цилиндре. Так как для последовательности $K_n = (1 + 1/n)\hat{K}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $K_n \rightarrow \hat{K}$ и $[n/p(\hat{K}), nq(\hat{K})] \ni q(K_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то существует подпоследовательность, для которой соответствующие замкнутые орбиты в “поясе” $[r_1, r_2] \times S^1$ попарно негомотопны на цилиндре.

Лемма доказана.

Замечание 3.11. На самом деле, утверждение (А) леммы 3.10 справедливо для более широкого класса потенциалов. А именно, на цилиндрах не существует *локально замыкающих потенциалов* (определение 1.12). Доказательство этого факта дословно повторяет приведенное доказательство для случая замыкающих потенциалов.

3.4 Классификация устойчиво бертрановых пар

С учетом леммы о цилиндрах 3.10 оказывается возможным полностью классифицировать устойчиво бертрановые пары. А именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 3.12. *На многообразиях вращения с экваторами не существует устойчиво замыкающих центральных потенциалов. Другими словами, любое устойчиво бертраново многообразие вращения (S, ds^2) не имеет экваторов. В частности, следующие классы бертрановых пар (ds^2, V) совпадают: (а) класс сильно бертрановых пар, (б) класс слабо бертрановых пар, (с) класс устойчиво бертрановых пар, (d) класс локально бертрановых пар без экваторов, (е) класс пар (ds^2, V) , у которых метрика вращения ds^2 имеет вид (3.2.1) и не имеет экваторов, а центральный потенциал V является гравитационным или осцилляторным (см. пример 3.6(B)).*

Доказательство. Нужно доказать совпадение классов (а)–(е) пар Бертрана. Включения (а)⊂(б)⊂(с) очевидны. Включения (d)⊂(е)⊂(а) следуют из классификации пар Бертрана без экваторов (см. главу 2). Таким образом, осталось доказать включение (с)⊂(d), т.е. что на любом устойчиво бертрановом многообразии вращения нет экваторов.

Предположим противное, т.е. что на многообразии вращения (S, ds^2) с экваторами существует устойчиво замыкающий центральный потенциал $V = V(r)$. В силу леммы 3.10(A) на многообразии S существует непустой “пояс” $(r_1, r_2) \times S^1$, внутри которого нет экваторов. Возьмем наибольший по включению из таких “поясов” и обозначим его через $\gamma = \gamma_{r_1, r_2}$. Так как на многообразии вращения (S, ds^2) есть экватор, то хотя бы одна из граничных параллелей “пояса” γ содержится внутри S и является экватором. Без ограничения общности можно считать, что таким экватором является параллель $\{r_1\} \times S^1$. Таким образом, $a < r_1 < b$ и $f'(r_1) = 0$.

Так как потенциал $V = V(r)$ — устойчиво замыкающий, то

а) пара $(ds^2|_\gamma, V|_\gamma)$ является бертрановой (и даже устойчиво бертрановой) парой без экваторов;

б) экватор $\{r_1\} \times S^1$ является круговой орбитой для некоторого значения $\hat{K} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ кинетического момента, т.е. $U'_{\text{eff}, \hat{K}}(r_1) = 0$.

Так как $f'(r_1) = 0$ и $U'_{\text{eff},\hat{K}}(r_1) = 0$, то $V'(r_1) = 0$. Но из явного вида (3.2.1) пар Бертрана без экваторов (согласно их классификации в главе 2, теоремы 2.1, 2.3) следует, что существуют константы $c, d \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ и регулярная замена $\theta = \theta(r)$ координаты r на интервале (r_1, r_2) , такие что в координатах $\theta, \varphi = \varphi \pmod{2\pi}$ на “поясе” γ выполнено

$$|\theta'(r)| = \left| \frac{d\theta}{dr} \right| = \theta^2 + c - d\theta^{-2} = \frac{1}{\mu^2 f^2} |_{\gamma}$$

и потенциал $V|_{\gamma}$ является либо гравитационным $V|_{\gamma} = V_1 = -A|\theta| + B$, либо осцилляторным $V|_{\gamma} = V_2 = A\theta^{-2} + B$. Поэтому на “поясе” γ производная потенциала $V = V(r)$ по переменной r имеет вид

$$V'|_{\gamma} = \frac{dV}{dr} |_{\gamma} = \pm(\theta^2 + c - d\theta^{-2}) \frac{dV}{d\theta} = \pm \frac{1}{\mu^2 f^2} \frac{dV}{d\theta}$$

и выполнен один из следующих случаев.

Случай 1: потенциал $V|_{\gamma}$ является гравитационным. Значит, $V'|_{\gamma} = \pm A/(\mu f)^2$. Поэтому условие $\lim_{r \rightarrow r_1} V'(r) = V'(r_1) = 0$ дает $f(r_1) = \lim_{r \rightarrow r_1} f(r) = +\infty$. Но последнее невозможно, так как $r_1 \in (a, b)$ и $0 < f < +\infty$ всюду на (a, b) .

Случай 2: потенциал $V|_{\gamma}$ является осцилляторным. Значит, $V'|_{\gamma} = \pm 2A/(\mu^2 f^2 \theta^3)$. Поэтому условие $\lim_{r \rightarrow r_1} V'(r) = V'(r_1) = 0$ дает либо (А) $\lim_{r \rightarrow r_1} |\theta(r)| < +\infty$ и $f(r_1) = \lim_{r \rightarrow r_1} f(r) = +\infty$, либо (В) $\lim_{r \rightarrow r_1} |\theta(r)| = +\infty$. Но в случае (В) с учетом соотношения $1/f^2 = (\theta^2 + c - d\theta^{-2})\mu^2$ имеем $f(r_1) = \lim_{r \rightarrow r_1} f(r) = 0$. Полученное включение $f(r_1) \in \{0, +\infty\}$ невозможно, так как $r_1 \in (a, b)$ и $0 < f < +\infty$ всюду на (a, b) .

Теорема 3.12 доказана.

3.5 Обоснование диаграммы включения классов замыкающих потенциалов

Теперь мы можем доказать следующее утверждение о диаграмме строгих включений классов замыкающих потенциалов (см. рис. 1.1):

Утверждение 3.13. *Верна диаграмма строгих включений классов замыкающих потенциалов, изображенная на рис. 1.1. Более точно :*

(а) *классы локально и полулокально замыкающих потенциалов совпадают;*

(b) классы сильно, слабо и устойчиво замыкающих потенциалов совпадают;

(c) класс замыкающих потенциалов лежит в классе локально замыкающих потенциалов (и по-видимому не совпадает с ним);

(d) класс вполне замыкающих потенциалов лежит в классе замыкающих потенциалов и не совпадает с ним;

(e) класс устойчиво замыкающих потенциалов лежит в классе замыкающих потенциалов, имеет непустое пересечение с классом вполне замыкающих потенциалов и не совпадает ни с одним из этих двух классов.

Доказательство. Согласно замечанию 1.14(a) верна диаграмма нестрогих включений. Докажем теперь более точные включения классов.

(a) Пусть потенциал локально замыкающий (т.е. верны условия $(\exists)^{\text{loc}}$ и $(\forall)^{\text{loc}}$, см. определение 1.12). Докажем, что он полулокально замыкающий (т.е. верны условия (\exists) , $(\forall)^{\text{loc}}$ и $(\forall)^{\text{s-loc}}$, см. определение 1.12). Требуется доказать выполнение условий (\exists) и $(\forall)^{\text{s-loc}}$.

Имеет место следующее свойство: из условия $(\exists)^{\text{loc}}$ следует условие (\exists) для того же уровня кинетического момента K_0 , что в определении сильно устойчивой круговой орбиты, в любом достаточно малом поясе, содержащем сильно устойчивую круговую орбиту $\{r_0\} \times S^1$ (см. предложение 2.13 и лемму 2.15). Но тогда и $(\forall)^{\text{s-loc}}$ автоматически выполнено, так как следует из $(\forall)^{\text{loc}}$ ввиду того, что по построению ограниченная орбита из (\exists) (а потому и кольцо из $(\forall)^{\text{s-loc}}$) содержится в кольце из $(\forall)^{\text{loc}}$, а уровень кинетического момента из (\exists) (а потому и из $(\forall)^{\text{s-loc}}$) равен K_0 и поэтому содержится в интервале $(K_0 - \varepsilon, K_0 + \varepsilon)$ из $(\forall)^{\text{loc}}$.

(b) следует из теоремы 3.12.

Осталось доказать пункты (c), (d), (e) в части несовпадения рассматриваемых классов и непустоты их пересечений. Докажем это, непосредственно приведя примеры многообразий вращения, на которых существуют соответствующие потенциалы.

(c) Поясним “обоснование” того, что включение классов строгое. В качестве примера можно, видимо, взять любое многообразие вращения, полученное из многообразия из случая (i) или (iv) из перечня в примере 3.7 путем такого его изменения на дополнительной полусфере (т.е.

на полусфере, не содержащей притягивающий центр), при котором не возникнет новых сильно устойчивых круговых орбит (например, путем “малого” возмущения).

(d) В качестве примера возьмем собственный пояс многообразия из случая (i), (iv) или (v) из перечня в примере 3.7, содержащий экватор. Соответствующий потенциал на нем является замыкающим, поскольку в нем содержатся сильно устойчивая орбита, не являющаяся экватором.

(e) Приведенная в доказательстве пункта (d) бертранова пара не является устойчиво бертрановой в силу теоремы 3.12 и существования экватора у данного многообразия. Примерами потенциалов из пересечения классов сильно (а значит и слабо, и устойчиво) замыкающих потенциалов и вполне замыкающих потенциалов могут служить пункты (ii) и (iii) из перечня в примере 3.7.

Пункты (i), (iv), (v) этого перечня дают примеры вполне, но не устойчиво замыкающих потенциалов, так как соответствующие многообразия имеют экваторы. Собственные пояса многообразий из пунктов (ii) и (iii) перечня в примере 3.7 (и соответствующие потенциалы) дают примеры устойчиво, но не вполне замыкающих потенциалов в силу классификации вполне замыкающих потенциалов (см. теорему 3.8).

Таким образом, утверждение доказано.

Глава 4

Некоторые геометрические и аналитические свойства многообразий Бертрана с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$

4.1 Реализуемость многообразий Бертрана

Как было замечено выше, хотя многообразия Бертрана и являются по определению многообразиями вращения, далеко не все из описанных многообразий являются *поверхностями вращения*, иными словами, вкладываются в \mathbb{R}^3 в виде “настоящих” поверхностей вращения, получаемых вращением некоторой профильной кривой вокруг оси OZ . В самом деле, в качестве примера рассмотрим конус с углом при вершине превосходящим 2π , то есть многообразие Бертрана с метрикой $ds_{\mu,0,0}^2$ для подходящего значения рационального параметра μ . Такой конус не может быть вложен в \mathbb{R}^3 в виде поверхности вращения.

В силу этого соображения интересной задачей становится поиск таких троек параметров (c, d, μ) , что отвечающие им многообразия Бертрана с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$ вкладываются в \mathbb{R}^3 как поверхности вращения (иными словами, *реализуются*). Более того, если многообразие не реализуется целиком, имеет смысл поиск максимального по включению реализуемого подмногообразия $(a', b') \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$ (поиск реализуемого “пояса”).

Исчерпывающий ответ на обе поставленные задачи содержится в теоремах из следующих двух разделов.

4.1.1 Глобальная реализуемость римановых многообразий Бертрана

Докажем следующую теорему, анонсированную в следствии 2.9(B) выше:

Теорема 4.1. *Верны следующие утверждения о реализуемости римановых многообразий Бертрана $(I_{k,c,d} \times S^1, ds_{\mu,c,d}^2)$ целиком:*

- 1) *Дополнительное многообразие не реализуемо никогда;*
- 2) *Основное многообразие реализуемо тогда и только тогда, когда соответствующая тройка параметров (μ, c, d) принадлежит следующим областям: $\{\mu \geq 2, c \geq -2\sqrt{-d}, d \leq 0\} \cup \{1 \leq \mu < 2, c \geq -2\sqrt{-d}\sqrt{h(\mu)}, d \leq 0\}$, где $h \in \text{Homeo}^+((0, +\infty), \mathbb{R})$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм интервалов, определенный формулой $h(\mu) := \frac{(\mu^2-1)(8+\mu^2)^2}{27\mu^4}$.*

Рассмотрим по очереди различные области изменения тройки параметров (μ, c, d) и докажем результаты о реализуемости соответствующих многообразий как поверхностей вращения, вложенных в \mathbb{R}^3 .

Многообразие Бертрана $(I_{k,c,d}, ds_{\mu,c,d}^2)$ реализуемо как поверхность вращения, вложенная в трехмерное евклидово пространство, тогда и только тогда, когда на всем интервале изменения $\theta \in I_{k,c,d}$ выполняется неравенство $|f'(r(\theta))| \leq 1$. При этом, поверхность вращения имеет вид $x = f(r) \cos \varphi, y = f(r) \sin \varphi, z = g(r)$, где $g(r) = \pm \int \sqrt{1 - (f'(r))^2} dr$. В случае, когда указанное неравенство выполнено только на подынтервалах $I_i \in I_{k,c,d}$, можно говорить о *локальной реализуемости* данного многообразия Бертрана, см. далее.

В силу равенства

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\theta^2 + c - d\theta^{-2}} = \mu^2 f^2(r). \quad (4.1.1)$$

имеем $f'(r) = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dr} = -\frac{1}{\mu} \frac{\theta + d\theta^{-3}}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^{1/2}}$. Воспользовавшись тем, что в интересующее нас неравенство входит модуль производной f и на области изменения θ функция $\theta^2 + c - d\theta^{-2}$ положительна, получим следующий вид критерия реализуемости многообразия Бертрана:

$$(\theta^4 + d)^2 \leq \mu^2 \theta^4 (\theta^4 + c\theta^2 - d). \quad (4.1.2)$$

Лемма 4.2. *Дополнительное риманово многообразие Бертрана ($k = 2$) не реализуемо ни при каких значениях параметров (μ, c, d) . Более того, никакая окрестность полюса $\{0\} \times S^1$ в дополнительном многообразии не реализуема.*

Доказательство. Дополнительная поверхность Бертрана существует только при $d < 0$. Но точка $\theta = 0$ является корнем правой части неравенства (4.1.2), в то время как при ненулевых значениях параметра d значение левой части неравенства в точке $\theta = 0$ равно $d^2 > 0$. Следовательно, в силу непрерывности, неравенство (4.1.2) нарушается вблизи полюса $\{0\} \times S^1$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Основное многообразие Бертрана ($k = 1$) при $d = 0$ реализуемо тогда и только тогда, когда $\mu \geq 1, c \geq 0$. Более того, при $0 < \mu < 1$ нереализуема любая окрестность полюса $\{-\infty\} \times S^1$; при $\mu = 1, c < 0$ нереализуема любая окрестность любой параллели; при $\mu > 1, c < 0$ нереализуема любая окрестность абсолюта $\{-\sqrt{-c}\} \times S^1$.*

Доказательство. Поскольку интервал изменения θ является подынтервалом луча $(-\infty, 0)$, при $d = 0$ неравенство (4.1.2) приобретает вид

$$\theta^2(\mu^2 - 1) + c\mu^2 \geq 0. \quad (4.1.3)$$

Рассмотрим следующие случаи:

- 1) $\mu < 1$. В этом случае неравенство (4.1.3) нарушается при $\theta \rightarrow -\infty$, и любая окрестность полюса многообразия не реализуема ни при каких значениях c .
- 2) $\mu = 1$. Неравенство (4.1.3) принимает вид $c \geq 0$, поэтому многообразие реализуемо тогда и только тогда, когда $c \geq 0$.
- 3) $\mu > 1$. Во-первых, в этом случае неравенство (4.1.3) всегда выполнено при $c \geq 0$. Докажем, что при отрицательных значениях c оно нарушается. Заметим, что в этом случае неравенство обращается в равенство при $\theta = -\sqrt{\frac{-c\mu^2}{\mu^2-1}} =: \theta_-$ и нарушается при $\theta \in (\theta_-, 0)$. С другой стороны, для рассматриваемых поверхностей интервал изменения θ имеет вид $(-\infty, -\sqrt{-c})$. Таким образом, для реализуемости многообразия необходимо и достаточно, чтобы $\theta_- \geq -\sqrt{-c}$. Вычисление показывает, что последнее неравенство не может быть выполнено ни для каких значений параметра μ . Тем самым лемма доказана.

Лемма 4.4. *Основное многообразие Бертрана при $d > 0$ не реализуемо ни при каких значениях параметров (μ, c, d) . Более того, любая окрестность абсолюта в основном многообразии не реализуема.*

Доказательство. Этот факт основан на том, что правый конец интервала изменения θ при $d > 0$ — это корень уравнения $\theta^2 + c - d\theta^{-2} = 0$. Отсюда следует, что в этой точке правая часть неравенства (4.1.2) обращается в нуль, а левая строго положительна. Следовательно, в силу непрерывности, вблизи правого конца интервала изменения θ неравенство (4.1.2) нарушается и вблизи абсолюта многообразие не может быть реализовано.

Лемма 4.5. *Основное многообразие Бертрана при $d < 0, c < -2\sqrt{-d}$ не реализуемо ни при каких значениях параметра $\mu > 0$. Более того, любая окрестность абсолюта в основном многообразии Бертрана не может быть реализована.*

Доказательство. В рассматриваемой области $\{d < 0, c < -2\sqrt{-d}\}$ правая часть неравенства (4.1.2) имеет нули на луче $(-\infty, 0)$ в точках $\theta_{1,2} = -\sqrt{\frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4d}}{2}}$, при этом θ_1 (отвечающая знаку “+” перед корнем) является концом интервала изменения параметра θ для основного многообразия Бертрана. Заметим далее, что левая часть неравенства положительна всюду на луче $(-\infty, 0)$, за исключением точки $\theta_0 = -\sqrt[4]{-d}$. Отсюда следует, что если $\theta_1 \neq \theta_0$, то вблизи θ_1 правая часть близка к нулю, а левая близка к значению $(\theta_1^4 + d)^2 > 0$. Следовательно, в этом случае вблизи абсолюта $\{\theta_1\} \times S^1$ многообразие не реализуемо ни для какого значения μ . Вычисления показывают, что $\theta_1 > \theta_0$. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Основное многообразие Бертрана при $d < 0, c = -2\sqrt{-d}$ реализуемо как поверхность вращения, вложенное в \mathbb{R}^3 , тогда и только тогда, когда $\mu \geq 2$. Более того, при $0 < \mu \leq 1$ любая окрестность любой параллели не может быть реализована, а при $1 < \mu < 2$ любая окрестность абсолюта в основном многообразии не может быть реализована.*

Доказательство. Для римановых многообразий, соответствующих точкам кривой $\{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid d < 0, c = -2\sqrt{-d}\}$, неравенство (4.1.2) принимает следующий вид:

$$(1 - \mu)\theta^4 + \sqrt{-d}\mu\theta^2 + d \leq 0. \quad (4.1.4)$$

Поскольку в рассматриваемом многообразии $\theta^2 - \sqrt{-d} > 0$, неравенство (4.1.4) может быть переписано в виде

$$(1 - \mu)\theta^2 + \sqrt{-d} \leq 0. \quad (4.1.5)$$

Рассмотрим следующие случаи:

- 1) $\mu < 1$. В этом случае при любом $\theta \in \mathbb{R}$ левая часть неравенства (4.1.5) положительна и неравенство не выполняется. Поэтому вблизи любой параллели $\{\theta_0\} \times S^1$ риманово многообразие нереализуемо.
- 2) $\mu > 1$. Для выполнения неравенства (4.1.5) на всем интервале изменения θ необходимо и достаточно, чтобы отрицательный корень уравнения $(1 - \mu)\theta^2 + \sqrt{-d} = 0$, равный $\theta_- := -\sqrt{\frac{\sqrt{-d}}{\mu-1}}$, был не меньше правого конца интервала изменения θ , то есть точки $\theta_0 = -\sqrt[4]{-d}$. Это неравенство выполняется в точности для всех $\mu \geq 2$. При $1 < \mu < 2$ неравенство (4.1.4) нарушается на подынтервале (θ_-, θ_0) . Лемма доказана.

Лемма 4.7. *Основное многообразие Бертрана при $d < 0, c > -2\sqrt{-d}$ реализуемо в следующих областях изменения параметров и только в них: $\{d < 0, 1 \leq \mu < 2, -2\sqrt{-d} \frac{\sqrt{\mu^2-1}(8+\mu^2)}{3\sqrt{3}\mu^2} \leq c\} \cup \{d < 0, \mu \geq 2, -2\sqrt{-d} < c\}$. Более того, при $0 < \mu < 1$ или $\mu = 1, c < 0$ любая окрестность полюса $\{-\infty\} \times S^1$ не может быть реализована.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что при $0 < \mu < 1$ основное многообразие Бертрана нереализуемо. Рассмотрим функцию $\delta = \delta(\theta) = (\theta^4 + d)^2 - \mu^2\theta^4(\theta^4 + c\theta^2 - d)$. Критерий реализуемости (4.1.2) в терминах функции δ принимает вид $\delta(\theta) \leq 0$. Но заметим, что при $0 < \mu < 1$ $\delta(\theta) \rightarrow +\infty$ при $\theta \rightarrow -\infty$, а значит, неравенство нарушается. Более того, заметим, что при $\mu = 1$ поведение функции $\delta(\theta)$ при $\theta \rightarrow -\infty$ определяется знаком c , а потому при $c < 0, \mu = 1$ многообразие нереализуемо.

Покажем теперь, что при $c \geq 0$ многообразия реализуются при всех $\mu \geq 1$. Для этого вычислим производную

$$\delta'(\theta) = 2\theta^3(4(1 - \mu^2)\theta^4 - 3\mu^2c\theta^2 + 2t(2 + \mu^2)).$$

Заметим, что в концах $a := -\infty$ и $b := -\sqrt[4]{-d}$ интервала $(a, b) = (-\infty, -\sqrt[4]{-d})$ изменения θ выполнены следующие неравенства: $\delta(a) < 0, \delta(b) < 0, \delta'(a) > 0, \delta'(b) > 0$. Это означает, в частности, что если на промежутке (a, b) содержится не более одного корня уравнения $\delta'(\theta) = 0$, то на всем

этом промежутке $\delta(\theta) < 0$. Проверка показывает, что при $c \geq 0$ имеет место именно этот случай.

Наконец, покажем, что при отрицательных значениях c многообразие реализуемо только при $\mu \in [\mu_1, \infty)$. Для этого преобразуем неравенство (4.1.2) и приведем его к следующему эквивалентному виду:

$$\mu^2 c \geq (1 - \mu^2)\theta^2 + \frac{d(2 + \mu^2)}{\theta^2} + \frac{d^2}{\theta^6} =: z(x), \quad x := \theta^2. \quad (4.1.6)$$

Воспользуемся аналогом рассуждения из предыдущего абзаца: вычислим критические точки функции $z(x)$; поскольку на концах интервала неравенство (4.1.6) выполнено, его необходимо и достаточно проверить в критических точках функции $z(x)$. В исследуемом случае x пробегает интервал $(\sqrt{-d}, +\infty)$. Вычисления показывают, что корнями уравнения $z'(x) = 0$ являются точки $\pm\sqrt{-d}$ и $\pm\sqrt{\frac{3t}{1-\mu^2}}$. Рассматриваем только знак плюс перед корнем в силу $x > 0$ в интервале изменения переменной x . Заметим, что первая критическая точка совпадает с концом интервала. Проверка показывает, что вторая положительная критическая точка принадлежит интервалу изменения x , если и только если $|\mu| < 2$. Тем самым показан промежуточный результат: при $\mu \geq 2$ неравенство (4.1.6) выполнено и соответствующее риманово многообразие Бертрана реализуемо.

Остается проверить, какие ограничения на $\mu \in (1, 2)$ накладывает условие $\mu^2 c \geq z\left(\sqrt{\frac{3t}{1-\mu^2}}\right)$. Имеем $z\left(\sqrt{\frac{3t}{1-\mu^2}}\right) = \frac{-2\sqrt{-d(\mu^2-1)}}{3\sqrt{3}} = -2\mu^2\sqrt{-th(\mu)}$. Решая полученное неравенство относительно μ , получаем, что неравенство (4.1.6) выполнено, если и только если $c \geq -2\sqrt{-th(\mu)}$, причем функция $h = h(\mu)$ строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ при $\mu \in (0, \infty)$; $h(1) = 0, h(2) = 1$. Лемма доказана.

Леммы 4.2–4.7 доказывают теорему 4.1.

4.1.2 Локальная реализуемость римановых многообразий Бертрана

В случае, когда многообразие Бертрана не может быть реализуемо целиком, возникает вторая важная задача — поиск максимальных подынтервалов $I_i \subset I_{\mu,c,d}$, таких что риманово многообразие $I_i \times S^1$ с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$ реализуемо как поверхность вращения. Верна следующая теорема:

Теорема 4.8. *Риманово многообразие Бертрана $(I_{k,c,d}, ds_{\mu,c,d}^2)$ реализуемо целиком в виде поверхности вращения в \mathbb{R}^3 тогда и только тогда, когда оно является основным ($k = 1$) и тройка параметров (μ, c, d) принадлежит области, указанной в теореме 4.1. Для остальных значений k , $(\mu, c, d) \in \mathbb{R}^3, \mu > 0$, верны следующие утверждения о локальной реализуемости многообразий Бертрана:*

0) Пусть $d = c = 0, 0 < \mu < 1$. Риманово многообразие нереализуемо даже локально (т.е. любая окрестность любой параллели нереализуема).

1) Пусть $d = 0, c > 0, \mu < 1$. Реализуема часть многообразия, примыкающая к экватору $\{0\} \times S^1$.

2) Пусть $d = 0, c < 0$. При $\mu \leq 1$ многообразие нереализуемо даже локально. При $\mu > 1$ реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$.

3) Пусть $d > 0, c \leq 0$. При $\mu > 1$ реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$; при $\mu \leq 1$ поверхность нереализуема даже локально.

4) Пусть $d > 0, c > 0$. При $\mu \geq 1$ реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$; целиком риманово многообразие никогда не реализуемо. При $0 < \mu < 1, -\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$ реализуем “поясок” в окрестности параллели $\{-\sqrt{x_0}\} \times S^1$, отвечающей локальному минимуму $x_0 > 0$ функции $z(x)$, края которого никогда не достигают граничных параллелей (т.е. полюса и абсолюта) многообразия Бертрана. Наконец, при $0 < \mu < 1, -\frac{c^2}{4t} \geq h(\mu)$ многообразие Бертрана нереализуемо даже локально.

5) Пусть $d < 0, c < -2\sqrt{-d}$. При $0 < \mu \leq 1$ ни основное, ни дополнительное многообразие нереализуемо даже локально. При $1 < \mu, -\frac{c^2}{4t} \geq h(\mu)$ реализуема часть основного многообразия Бертрана, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$. При $\mu > 1, -\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$ у основного многообразия реализуема часть, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$, а у дополнительного реализуем “пояс” вокруг параллели $\{-\sqrt{x_0}\} \times S^1$, отвечающей локальному минимуму $x_0 > 0$ функции $z(x)$.

6) Пусть $d < 0, c = -2\sqrt{-d}$. При $\mu \leq 1$ ни основное, ни дополнительное многообразия нереализуемы даже локально. При $\mu \in (1, 2)$ реализуема часть основного многообразия Бертрана, прилегающая к абсолюту $\{+\infty\} \times S^1$. При $\mu = 2$ реализуемо все основное многообразие. При $\mu > 2$ реализуемо все основное многообразие и окрестность абсолюта $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$ дополнительного.

7) Пусть $d < 0, c > -2\sqrt{-d}$. При $0 < \mu < 1$ и у основного, и у дополнительного многообразия реализуемы части, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. При $c \geq 0, \mu \geq 1$ основное многообразие Бертрана реализуемо целиком, а у дополнительного реализуема часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. При $c < 0, \mu = 1$ и у основного, и у дополнительного многообразия реализуема часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$; при $\mu > 1, -\frac{c^2}{4t} > h(\mu)$ реализуемы часть основного многообразия, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$, часть дополнительного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$, и часть основного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$; при $\mu > 1 - \frac{c^2}{4t} \leq h(\mu)$ основное многообразие реализуемо целиком, а у дополнительного — часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$.

В каждом из случаев указанная реализуемая часть многообразия Бертрана максимальна в следующем смысле: любая окрестность любой параллели, не содержащейся в указанной части, не реализуема в виде поверхности вращения в \mathbb{R}^3 .

Более того, в каждом из случаев границей реализуемой части многообразия Бертрана, прилегающей к полюсу либо абсолюту, является параллель, отвечающая ближайшему к полюсу (абсолюту) корню по θ уравнения $(\theta^4 + d)^2 - \mu^2\theta^4(\theta^4 + c\theta^2 - d) = 0$; границами реализуемого “пояса” вокруг определенной параллели $\{\theta_0\} \times S^1$ являются параллели, отвечающие корням этого уравнения, ближайшим к θ_0 .

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся критерием реализуемости (4.1.2) в форме (4.1.6):

$$\mu^2 c \geq z(x) := (1 - \mu^2)x + \frac{d(2 + \mu^2)}{x} + \frac{d^2}{x^3}, \quad x := \theta^2.$$

Задача сводится к поиску числа точек, принадлежащих интервалу изменения переменной θ (или x), в которых неравенство обращается в ра-

венство, и анализу неравенства на интервалах между этими точками и концами интервала изменения переменной. Для решения этой задачи рассмотрим производную $z'(x)$ правой части неравенства и найдем ее положительные корни. Простые вычисления показывают, что существует следующая зависимость между числом положительных корней $x > 0$ уравнения $z'(x) = 0$ и параметрами d, μ :

	$0 < \mu < 1$	$\mu = 1$	$\mu \in (1, 2)$	$\mu = 2$	$\mu > 2$
$d < 0$	1_-	1	2	1	2
$d = 0$	0	∞ (все значения x)	0	0	0
$d > 0$	1_+	0	0	0	0

Здесь 1_{\pm} означает существование единственного положительного корня x_{\pm} , где $x_+ = \sqrt{\frac{3t}{1-\mu^2}}$, $x_- = \sqrt{-d}$; 1 без индекса означает, что у производной $z'(x)$ имеется единственный положительный корень кратности два.

Рассмотрим области изменения тройки параметров (μ, c, d) с учетом интервала изменения переменной x , соответствующего этим параметрам. Заметим, что области, фигурирующие в теореме 4.1, рассматривать не нужно: в них риманово многообразии Бертрана реализуемо целиком.

1) $d = 0, c = 0, 0 < \mu < 1$. Из графика функции $z(x)$ видно, что в этой области многообразии Бертрана нереализуемо, даже локально.

2) $d = 0, c > 0, 0 < \mu < 1$. В этой области функция $z(x)$ монотонно возрастает, $z(0) = 0, z(+\infty) = +\infty$, поэтому реализуема часть многообразия Бертрана, примыкающая к $\{0\} \times S^1$.

3) $d = 0, c < 0$. В этой области многообразии Бертрана нереализуемо даже локально.

4) $d > 0$. Если $\mu > 1$, $z(x)$ монотонно убывает, и реализуема часть многообразия, примыкающая к $\{+\infty\} \times S^1$; целиком многообразии Бертрана никогда не реализуемо. Если $\mu < 1$, имеется один корень производной $z'(x)$. Поскольку $z(+\infty) = +\infty$ и этот корень не кратный, он доставляет локальный минимум функции $z(x)$. Следует проверить, как изменение параметров влияет на взаимное расположение конца интервала изменения x и этого корня, а также, в каких условиях минимальное значение $z(x)$

на интервале изменения x не превосходит $\mu^2 c$. Вычисления показывают, что это возможно только при $-\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$ (см. лемму 4.7). При этом реализуется “поясок” в окрестности параллели, отвечающей локальному минимуму функции $z(x)$, края которого никогда не достигают концов интервала изменения x . Наконец, при $\mu = 1$ функция $z(x)$ монотонно стремится к $+0$ при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, при $c \leq 0$ многообразие Бертрана нереализуемо даже локально, а при $c > 0$ реализуема его часть, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$.

5) $d < 0, c < -2\sqrt{-d}$. В случае $\mu \leq 1$ вычисления показывают, что неравенство (4.1.6) не выполняется ни при каком x , поэтому при $\mu \leq 1$ поверхность не реализуется даже локально. При $\mu \in (1, 2]$ видно, что прямая $z = c\mu^2$ проходит ниже первого экстремума, равного $z(\sqrt{-d})$, и ниже $z(x_1), z(x_2)$, где $x_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4t}}{2}$ — края основного и дополнительного многообразий Бертрана, что следует из критерия реализуемости в форме (1). Иными словами, реализуема только часть основного многообразия, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$. Наконец, при $\mu > 2$ реализуема часть основного многообразия Бертрана, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$. Дополнительное многообразие реализуемо локально в окрестности параллели, отвечающей второму экстремуму ($\tilde{x} = \frac{-3t}{\mu^2 - 1}$) функции $z(x)$ тогда и только тогда, когда $z(\tilde{x}) > c\mu^2$. Это эквивалентно тому, что $\mu > 1, -\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$.

6) $d < 0, c = -2\sqrt{-d}$. В случае $\mu \leq 1$ неравенство (4.1.6) выполнено в единственной точке $x = \sqrt{-d}$, где оно обращается в равенство. Но точке $x = \sqrt{-d}$ отвечает абсолют минимум риманова многообразия Бертрана, поэтому при $\mu \leq 1$ многообразие нереализуемо даже локально. При $\mu \in (1, 2)$ видно, что прямая $z = c\mu^2$ проходит через первый ($z(\sqrt{-d})$) экстремум, т.е. реализуема только часть основного многообразия, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$. При $\mu = 2$ функция $z(x)$ монотонно убывает, поэтому в данном случае реализуется все основное многообразие. Наконец, при $\mu > 2$ реализуются все основное многообразие Бертрана и часть дополнительного, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$, что следует из того, что прямая $z = c\mu^2$ проходит через первый экстремум, а допустимая область изменения переменной x есть в точности $\mathbb{R}_{>0} \setminus \{\sqrt{-d}\}$.

7) $d < 0, c > -2\sqrt{-d}$. Если $c \geq 0$ и $\mu < 1$, имеется единственный

минимум $z(x)$, в точке $x = \sqrt{-d}$. Вычисления показывают, что в этой области как у основного, так и у дополнительного многообразия реализуема часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. При $\mu > 1$, $-\frac{c^2}{4t} > h(\mu)$ (см. лемму 4.7) реализуема всегда часть основного многообразия, прилегающая к полюсу $\{+\infty\} \times S^1$, часть дополнительного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$, и часть основного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. Во всех прочих случаях основное многообразие Бертрана реализуемо целиком, а у дополнительного реализуема часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$.

Теорема 4.8 доказана.

Следствие 4.9. *Для римановых многообразий Бертрана, указанных в теоремах 1 и 2, реализуемых в виде поверхностей вращения, соответствующие поверхности вращения задаются параметрически в виде $x = \frac{\cos \varphi}{\mu\sqrt{\theta^2+c-d\theta^{-2}}}$, $y = \frac{\sin \varphi}{\mu\sqrt{\theta^2+c-d\theta^{-2}}}$, $z = \tilde{g}(\theta)$, $(\theta, \varphi) \in I_i \times S^1$, где*

$$\tilde{g}(\theta) := \pm \int \frac{\sqrt{\theta^2 + c - d\theta^{-2} - (\theta + d\theta^{-2})^2 \mu^{-2}}}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^{3/2}} d\theta.$$

При этом вдоль граничной параллели $\{\theta_0\} \times S^1$ поверхности $I_i \times S^1$, не являющейся ни полюсом, ни абсолютом, ни экватором (т.е. $\theta_0^2 + c - d\theta_0^{-2} \in \{0, +\infty\}$, $\theta_0^4 + d \neq 0$), поверхность вращения касается плоскости, содержащей эту параллель. Вдоль граничной параллели $\{\theta_0\} \times S^1$, являющейся экватором, поверхность вращения касается цилиндра, содержащего эту параллель.

4.2 Явный вид метрики

Как было показано в разделе 3, римановы многообразия Бертрана без экваторов (т.е. такие, что $f'(r) \neq 0$ на I) — это в точности те многообразия, риманова метрика которых может быть записана в определенном явном виде в некоторых координатах $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$, таких что $\theta = \theta(r)$, причем $\mu = \frac{1}{\beta}$ или $\mu = \frac{2}{\beta}$.

С другой стороны, в работе [11] М. Сантопрете доказал, что функция f , фигурирующая в метрике многообразия Бертрана без экваторов, должна удовлетворять определенному дифференциальному уравнению

(см. (4.2.1) ниже), где β — постоянная Бертрана. Важность этого дифференциального уравнения заключается в том, что при помощи его анализа Сантопрете доказывает, что на таких римановых многообразиях может существовать не более двух центральных бертрановых потенциалов с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант.

Будем говорить, что риманово многообразие вращения с метрикой (1.1.1) имеет *первый тип*, если $ff'' - f'^2 \equiv \text{const}$ (это равносильно постоянству римановой кривизны многообразия), в противном случае будем говорить, что многообразие относится ко *второму типу*.

Совместно с О.А. Загрядским было доказано, что указанные два условия (представимость метрики в определенном виде в некоторых координатах и дифференциальное условие Сантопрете) эквивалентны. А именно, справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства для полноты изложения:

Теорема 4.10. Пусть $S \approx (a, b) \times \mathbb{S}^1$ — двумерное многообразие с координатами $(r, \varphi \bmod 2\pi)$ и римановой метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$, где $f(r)$ — гладкая функция на (a, b) и $f'(r) \neq 0$ на (a, b) . Тогда, если функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\beta^4 - 5(-f''f + f'^2)\beta^2 - 5f''ff'^2 + 4f''^2f^2 - 3f'''f'f^2 + 4f'^2 = 0, \quad (4.2.1)$$

для некоторой константы $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, то это риманово многообразие (S, ds^2) является многообразием Бертрана, т.е. существуют координаты $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$, такие что $\theta = \theta(r)$, в которых метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2})}, \quad (4.2.2)$$

где μ, c и d — некоторые вещественные константы, $\mu > 0$. При этом $\mu \in \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}\}$. Более того, если $ff'' - f'^2 \equiv \text{const}$ (риманово многообразие вращения первого типа), то $ff'' - f'^2 \equiv -\frac{\beta^2}{i^2}$, $\mu = \frac{i}{\beta}$ для $i \in \{1, 2\}$, $d = 0$; если $ff'' - f'^2 \neq \text{const}$ (многообразие второго типа), то $d \neq 0$, $\mu = \frac{2}{\beta}$.

Обратно, для всякого многообразия Бертрана без экваторов (т.е. риманова многообразия с метрикой (4.2.2)) функция $f(r)$, полученная при записи метрики в виде (4.2.2), т.е. такая что $f^2(r(\theta)) = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2})}$, где зависимость $r = r(\theta)$ от θ определяется из равенства $r'(\theta) = (\theta^2 + c - d\theta^{-2})^{-1}$, удовлетворяет уравнению (4.2.1) для константы $\beta := \frac{2}{\mu}$ при $d \neq 0$, для любой константы $\beta \in \{\frac{1}{\mu}, \frac{2}{\mu}\}$ при $d = 0$.

Глава 5

Гамильтоновы системы

5.1 Некоторые определения

Дадим некоторые основные определения теории интегрируемых гамильтоновых систем. Подробная информация о гамильтоновых системах и теории инвариантов Фоменко–Цишанга дана в [39].

Определение 5.1. Симплектической структурой на гладком многообразии M называется дифференциальная 2-форма ω , удовлетворяющая двум условиям:

1. ω замкнута, т.е. $d\omega = 0$,
2. ω невырождена в каждой точке многообразия, т.е. в локальных координатах $\det \Omega(x) \neq 0$, где $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ — матрица формы.

Многообразие M , снабженное симплектической структурой ω , называется *симплектическим* и обозначается (M, ω) . Всякое симплектическое многообразие четномерно. Одним из важных и естественных примеров симплектических многообразий является кокасательное расслоение гладкого многообразия M .

Пусть H — гладкая функция на симплектическом многообразии (M, ω) . Определим для этой функции вектор *косого градиента* $\text{sgrad}H$ из тождества

$$\omega(v, \text{sgrad}H) = v(H), \quad (5.1.1)$$

где v — произвольный касательный вектор, $v(H)$ — производная функции H вдоль v .

Определение 5.2. Векторные поля вида $\text{sgrad}H$ называются гамильтоновыми. Функция H называется гамильтонианом векторного поля $\text{sgrad}H$.

Динамическая система называется гамильтоновой, если она может быть записана в виде $v = \text{sgrad}H$ для некоторого гамильтониана H . Теперь определим понятие *интегрируемой по Лиувиллю* гамильтоновой системы.

Определение 5.3. Гамильтонова система $v = \text{sgrad}H$ на симплектическом многообразии M^{2n} называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n таких, что:

1. f_1, \dots, f_n — первые интегралы v ,
2. они функционально независимы на M , то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,
3. $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых $i \neq j$ (интегралы находятся в инволюции),
4. векторные поля $\text{sgrad}f_i$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Если выполнены только условия 1–3, то гамильтонову систему назовем вполне интегрируемой.

Здесь $\{f, g\}$ обозначает скобку Пуассона гладких функций на симплектическом многообразии, определенную по правилу $\{f, g\} = \omega(\text{sgrad}f, \text{sgrad}g)$. Здесь мы различаем два понятия интегрируемости: *полная интегрируемость* и *полная интегрируемость по Лиувиллю*.

Для вполне интегрируемой гамильтоновой системы $v = \text{sgrad}H$ с независимыми инволютивными интегралами f_1, \dots, f_n на симплектическом многообразии M^{2n} определим гладкое отображение, именуемое *отображением момента*:

$$\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)). \quad (5.1.2)$$

Точки $x \in M^{2n}$, в которых ранг $d\mathcal{F}$ меньше n называются *критическими точками отображения момента*. Образ совокупности критических точек называется *бифуркационной диаграммой*. M^{2n} расслоено на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов f_1, \dots, f_n , такое слоение называется *слоением Лиувилля*. Оно состоит

из регулярных слоев (которые заполняют почти все M) и особых слоев (заполняющих множество меры нуль). Со слоением Лиувилля тесно связано отображение момента и бифуркационная диаграмма. А именно, слой лиувиллева слоения — это связная компонента прообраза точки при отображении момента. При этом бифуркационная диаграмма — это образ особых слоев слоения Лиувилля. Точку $y \in \mathbb{R}^n$ назовем *бифуркационной* для отображения момента $\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, если не существует окрестности U точки y в \mathbb{R}^n такой, что прообразы любых двух точек $y_1, y_2 \in U$ — $\mathcal{F}^{-1}(y_1)$ и $\mathcal{F}^{-1}(y_2)$ гомеоморфны. Объединение бифуркационной диаграммы и множества бифуркационных точек назовем *полной бифуркационной диаграммой*.

В силу этих замечаний изучение образа отображения момента и (полной) бифуркационной диаграммы является важной задачей, необходимой для описания топологии слоения Лиувилля данной гамильтоновой системы и ее классификации (см. [39]).

5.2 Гамильтоновы системы на многообразиях вращения

Простым, наглядным и важным примером гамильтоновых систем могут служить натуральные механические системы на римановых многообразиях вращения. Подобные системы часто возникают в механике, в частности, в задачах небесной динамики.

Рассмотрим двумерное риманово многообразие $S \simeq (a, b) \times S^1$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ в естественных “полярных” координатах $(r, \varphi \bmod 2\pi)$, $r \in (a, b)$, иными словами, многообразии вращения. Оно не предполагается вложимым в трехмерное евклидово пространство в виде поверхности вращения, однако функция $f(r)$ имеет тот же геометрический смысл, что и “радиус параллели как функция от натурального параметра на меридиане” поверхности вращения, вложенной в \mathbb{R}^3 . Эта функция полагается гладкой и не имеющей нулей на интервале (a, b) .

Пусть, далее, на интервале (a, b) задана гладкая функция $V(r)$. Рассмотрим теперь динамическую систему движения точки в потенциальном поле, заданном этой функцией — центральным потенциалом на поверхности вращения. Такая динамическая система (называемая *натуральной механической*) является гамильтоновой системой на касатель-

ном расслоении к многообразию S с координатами $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$, где $p_{(\cdot)}$ обозначает соответствующий обобщенный импульс. Гамильтониан такой системы хорошо известен из механики, он имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r).$$

Система такого вида, вообще говоря, не всегда вполне интегрируема по Лиувиллю. В самом деле, хотя интегралов в инволюции у системы достаточно — одним из первых интегралов является гамильтониан H , а в качестве дополнительного интеграла можно взять, к примеру, p_φ (на самом деле, система допускает большее количество интегралов, что в случае полноты потоков делает ее *суперинтегрируемой*), — но вот соответствующие поля $\text{sgrad} f_i$ могут оказаться неполными. Покажем однако, что в случае многообразий вращения и гладких центральных потенциалов интегралы функционально независимы.

Для этого исследуем матрицу $(\text{grad} H \text{ grad} p_\varphi)^T$. Во-первых, ее ранг может быть не максимальным, когда $p_\varphi = 0$. В этом случае возникают так называемые *точки ранга нуль*; с механической точки зрения эта ситуация означает, что точка движется по меридиану поверхности и стремится к ее краю, на который выйдет за конечное или бесконечное время, т.е. “падает на звезду”. Выясним, при каких еще условиях ранг данной матрицы может падать. Вне множества $\{p_\varphi = 0\}$ имеем

$$\begin{pmatrix} \text{grad} H \\ \text{grad} p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_\varphi^2 f'(r)}{f^3(r)} + V'(r) & 0 & p_r & \frac{p_\varphi}{f^2(r)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие линейной зависимости градиентов в этом случае приобретает вид

$$p_r = 0; \quad -\frac{p_\varphi^2 f'(r)}{f^3(r)} + V'(r) = 0.$$

Первое условие с механической точки зрения подразумевает движение по круговой орбите $r = r_0$. Второе, в силу того, что функция $f(r)$ не имеет нулей на интервале (a, b) по построению конфигурационного многообразия S , может быть переписано в виде

$$p_\varphi^2 f'(r) = V'(r) f^3(r). \quad (5.2.1)$$

Пусть точка r_0 является корнем этого уравнения, причем $f'(r_0) \neq 0$, другими словами, окружность $\{r = r_0\}$ не является экватором многообразия. В таком случае имеется ровно два семейства особых точек ранга 1: $(r_0, \varphi, 0, \pm \sqrt{\frac{V'(r_0)f^3(r_0)}{f'(r_0)}})$; каждому из этих семейств отвечает единственная точка на бифуркационной диаграмме

$$(K(r_0), E(r_0)) = \left(\pm \sqrt{\frac{V'(r_0)f^3(r_0)}{f'(r_0)}}, \frac{V'(r_0)f(r_0)}{2f'(r_0)} + V(r_0) \right) \quad (5.2.2)$$

для отображения момента $\mathcal{F} = (p_\varphi, H) : (T^*S) \setminus \{p_\varphi = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Далее, если r_0 является координатой экватора многообразия S , то r_0 является корнем уравнения (5.2.1) если и только если эта точка является критической для потенциала, т.е. $V'(r_0) = 0$. Тогда уравнение (5.2.1) превращается в тождество. Такой экватор мы будем называть *особым*; ему соответствует целая парабола $(K, \frac{K^2}{2f^2(r_0)} + V(r_0))$ на бифуркационной диаграмме.

Таким образом показано, что гамильтониан H и дополнительный интеграл $F = p_\varphi$ функционально независимы, значит, рассматриваемая натуральная механическая система является вполне интегрируемой (но не обязательно вполне интегрируемой по Лиувиллю, см. определение 5.3).

5.3 Пополненные бифуркационные диаграммы натуральных механических систем на многообразиях Бертрана

Теперь изучим конкретный частный случай гамильтоновых систем на многообразиях вращения: механическую систему на $(T^*S) \setminus \{p_\varphi = 0\}$, где $S = S_{k,c,d} = I_{k,c,d} \times S^1$ — многообразия Бертрана с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$ и осцилляторным потенциалом $V(r) = \frac{A}{\theta^2}$ или гравитационном потенциалом $V(r) = -A|\theta(r)|$. Выше говорилось, что натуральные механические системы на многообразиях вращения не всегда интегрируемы (в смысле применимости теоремы Лиувилля). Как было показано О.А. Загрядским, для некоторых многообразий Бертрана семейства $ds_{\mu,c,d}^2$ это также имеет место. Тем не менее, оказывается, что изучение лиувиллева слоения, а

также бифуркационных диаграмм и отображения момента таких систем остается разумной и интересной задачей.

Сначала изучим системы с осцилляторным потенциалом. Подставляя выражения для метрики и потенциала рассматриваемой системы в общие формулы (5.2.2), легко видеть, что на плоскости $\mathbb{R}^2(K, E)$ критические (бифуркационные) кривые могут быть записаны в следующем параметрическом виде:

$$K^2(\theta) = \frac{2A}{\mu^2(\theta^4 + d)}, \quad E(\theta) = A \frac{2\theta^2 + c}{\theta^4 + d}. \quad (5.3.1)$$

Для всех многообразий Бертрана функция $H|_{p_\theta=0} =: W$ имеет вид

$$W = W(\theta, K) = \frac{\mu^2 K^2 (\theta^2 + c - d\theta^{-2})}{2} + A\theta^{-2}. \quad (5.3.2)$$

Как следствие, уравнение $W = E$ при $p_\varphi = K$ является биквадратным уравнением относительно θ :

$$\mu^2 K^2 \theta^4 + (\mu^2 K^2 c - 2E)\theta^2 + (2A - d\mu^2 K^2) = 0. \quad (5.3.3)$$

Докажем следующую теорему:

Теорема 5.4. *Для натуральных механических систем, описывающих движения в поле осцилляторного потенциала $V(r) = \frac{A}{\theta^2}$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,d} = I_{k,c,d} \times S^1$ с метрикой $ds_{\mu,c,d}^2$ справедливы следующие утверждения об отображении момента, пополненной бифуркационной диаграмме и слоях слоения Ливилля:*

(i) *в случае сфер и конусов ($\{d = 0, c \geq 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг бифуркационной диаграммы, каждая из которых параметризована в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\infty, 0)$, примыкающих к точке $(0, 0)$ на плоскости (K, E) ; прообраз любой точки которых является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; и луча $\{K = 0, E \geq 0\}$, прообраз каждой точки которого пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу объединением дуг бифуркационной диаграммы и $\{(0, 0)\}$, прообразом каждой ее внутренней точки является один компактный слой слоения Ливилля (см.*

рис. 5.1);

(ii) в случае полубесконечных поверхностей и плоскости Лобачевского ($\{d > 0\} \cup \{d = 0, c < 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из пары симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ “сплошных” дуг, каждая из которых запараметризована в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\infty, -\sqrt{\frac{-c+\sqrt{c^2+4d}}{2}})$, прообраз любой точки которых является окружностью, образованной критическими точками ранга 1, пары горизонтальных “пунктирных” лучей (включающих концы), прообраз которых пусть, горизонтального “пунктирного” интервала, соединяющего верхние концы сплошных кривых, в прообразе каждой точки которого лежит один некомпактный слой слоения Лиувилля, а также луча $\{K = 0, E \geq 0\}$, прообраз каждой точки которого пусть; образ отображения момента — область, ограниченная снизу объединением $\{(0, 0)\}$, сплошных дуг и пунктирных лучей; прообразом каждой его внутренней точки, лежащей выше прямой, содержащей пунктирные лучи, или на пунктирном интервале, является один некомпактный слой слоения Лиувилля, а прообразом любой точки ниже этой прямой — один компактный слой (см. рис. 5.2);

(iii) в случае пар полубесконечных поверхностей ($\{d < 0, c \leq -2\sqrt{-d}\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля для основного многообразия устроены так же, как и в случае полубесконечных поверхностей, а для дополнительного многообразия пополненная бифуркационная диаграмма состоит из трех пар симметричных дуг: пары “сплошных” и двух пар “пунктирных” (включающих концы) и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пусть; “сплошные” дуги запараметризованы в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\sqrt{\frac{-c-\sqrt{c^2+4d}}{2}}, 0)$, прообраз любой их точки является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; образ отображения момента — область, ограниченная снизу сплошными дугами и пунктирными лучами, с вершинами в концах сплошных дуг; прообразом каждой точки внутри криволинейных треугольников, образованных сплошными и пунктирными дугами, является один компактный слой слоения Лиувилля, прообразом прочих внутренних точек образа является один некомпактный слой, а прообраз граничных точек, находящихся на пунктирных дугах, пусть (см. рис. 5.3);

(iv) в случае грушевидных поверхностей ($\{d < 0, c > -2\sqrt{-d}\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично предыдущему случаю, однако сплошные дуги пополненной бифуркационной диаграммы параметризованы в виде (5.3.1) параметром $\theta \in (-\infty, -\sqrt[4]{-d})$ для основной поверхности и $\theta \in (-\sqrt[4]{-d}, 0)$ для дополнительной поверхности и устроены следующим образом: их верхние концы, соответствующие значению параметра $\theta \rightarrow -\sqrt[4]{-d}$, устремляются к бесконечности по обеим координатам, и горизонтальные пунктирные дуги отсутствуют (см. рис. 5.4 и 5.5).

Доказательство. Для доказательства теоремы прежде всего опишем, как устроены слои слоения Лиувилля. В данной задаче прообраз (автоматически внутренней) точки образа отображения момента можно понимать как два экземпляра “пояса” на конфигурационном многообразии (при этом пояс характеризуется тем, что это минимальный по включению пояс, в котором целиком лежит траектория, отвечающая соответствующим значениям интегралов), склеенных по границе. При этом у точек на разных экземплярах пояса, отвечающих одной и той же точке пояса, значения координаты p_r равны по модулю и отличаются знаком, а точкам на границах поясов, — по которым проводится склейка, — отвечает значение $p_r = 0$.

Как мы покажем чуть ниже, граница такого пояса в данной задаче непуста (а следовательно, прообраз связан и является слоем Лиувилля) и состоит из одной или двух компонент, причем при приближении к бифуркационной точке либо одна компонента остается граничной, а другая стремится к краю многообразия, либо обе компоненты границы стремятся к одной и той же компоненте края многообразия, либо компонента границы единственна и стремится к краю многообразия таким образом, что пояс сужается.

Отсюда видно, что для определения прообраза точки (K, E) образа отображения момента, необходимо изучить эффективный потенциал $W(\theta, K)$ из (5.3.2) и число корней уравнения $W(\cdot, K) = E$, т.е. уравнения (5.3.3), для соответствующих значений K и E , попадающих в область изменения переменной θ . Их количество указывает на структуру прообраза точки при отображении момента: в случае двух корней слоем является тор, в случае одного — цилиндр, в случае нуля корней — два цилиндра;

более двух корней у уравнения быть не может в силу его биквадратности и того факта, что область изменения переменной θ всегда является подмножеством луче $(-\infty, 0)$. При этом корни имеют вид

$$\theta_{1,2} = -\sqrt{\frac{2E - \mu^2 K^2 c \pm \sqrt{(\mu^2 K^2 c - 2E)^2 - 4\mu^2 K^2 (2A - d\mu^2 K^2)}}{2\mu^2 K^2}}.$$

Внутренние точки образа отображения момента, в окрестности которых число корней постоянно, не являются бифуркационными. Бифуркационные точки (не обязательно внутренние) в этой задаче можно разделить на два типа: критические бифуркационные точки, в данном случае лежащие на границе образа отображения момента, и некритические бифуркационные точки, в которых меняется топология прообраза.

Кроме того, образ отображения момента устроен следующим образом. Для фиксированного значения первого интеграла K значение интеграла энергии может быть сделано сколь угодно большим выбором значения импульса p_θ . Поэтому, если точка K_0, E_0 принадлежит образу отображения момента, то ему принадлежит и луч $\{K = 0K_0, E \geq E_0\}$. Как следствие, для определения образа отображения момента достаточно найти его нижнюю границу, для чего необходимо найти минимум функции $H = H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi$ по θ (с учетом области изменения переменной) при $p_\theta = 0$ и $p_\varphi = K$ для каждого значения интеграла K .

Теперь рассмотрим по очереди каждое из семейств многообразий Бертрана и докажем для них требуемые утверждения. В дальнейшем через $(\tilde{K}^2(\theta), \tilde{E}(\theta))$ будет обозначаться указанная выше параметризация (5.3.1) бифуркационной кривой: $\tilde{K}^2(\theta) := \frac{2A}{\mu^2(\theta^4+d)}$, $\tilde{E}(\theta) := A\frac{2\theta^2+c}{\theta^4+d}$.

1. *Сферы и конусы:* $\{d = 0, c \geq 0\}$. В этом частном случае область изменения переменной θ есть $(-\infty, 0)$ и бифуркационная кривая имеет вид

$$K^2 = \frac{2A}{\mu^2\theta^4}, \quad E = A\frac{2\theta^2 + c}{\theta^4}.$$

Нижняя граница образа отображения момента совпадает с этой кривой (рис. 5.1). Прообразом внутренней каждой точки образа отображения момента является один тор (компактный слой слоения Лиувилля), а прообразом каждой граничной точки — одна окружность, отвечающая круговой орбите и состоящая из критических точек ранга 1 отображения

момента.

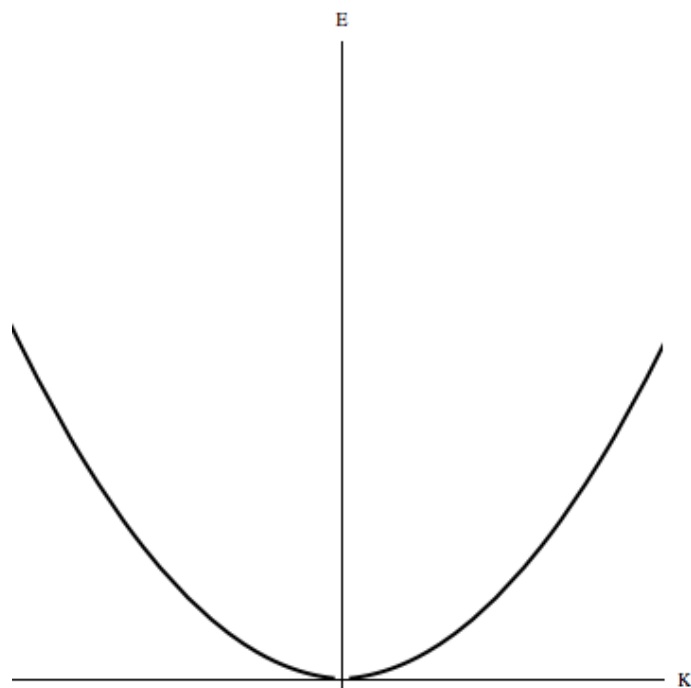


Рис. 5.1: Случай сферы с осцилляторным потенциалом

2. *Полубесконечные поверхности и плоскости Лобачевского:* $\{d > 0\} \cup \{d = 0, c < 0\}$. В данном случае область изменения переменной θ имеет вид $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}\right) =: (-\infty, \theta_0)$.

Обозначим через K_0 предел $\tilde{K}(\theta)$ при $\theta \rightarrow \theta_0$. Для $K^2 < K_0^2$ минимум функции $W|_{K=fix}$ достигается внутри интервала изменения θ , а потому совпадает с точкой особой кривой для соответствующего K . При $K^2 \geq K_0^2$ минимум $W|_{K=fix}$ не достигается, поэтому нижняя граница отображения момента будет образована точками $(K, W(\theta_0, \cdot))$. Тем самым вне полосы $\{-K_0 < K < K_0\}$ нижней границей образа отображения момента является прямая, не включенная в образ, на рис. 5.2 изображенная горизонтальными пунктирными линиями.

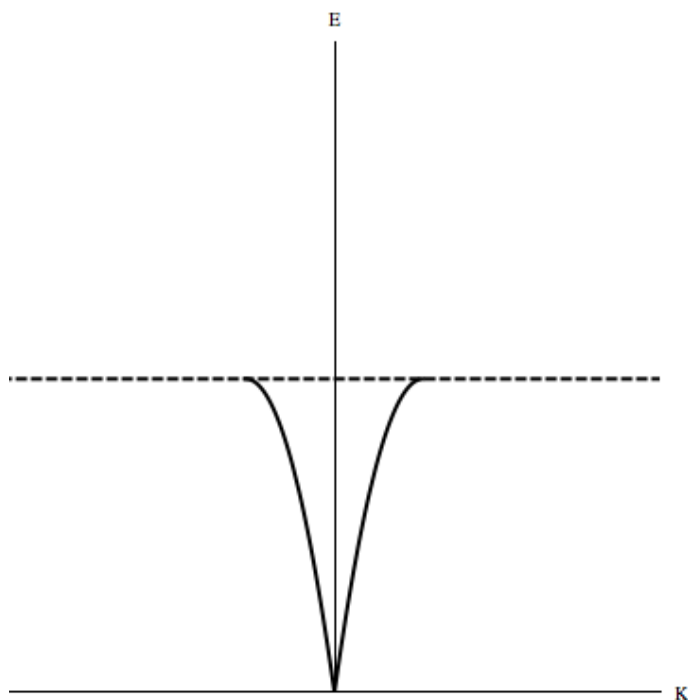


Рис. 5.2: Случай полубесконечной поверхности

Вычисление количества корней уравнения (5.3.3) показывает, что под прямой $\{E = W(\theta_0, K)\}$ в прообразе каждой точки находится один тор, а над этой прямой — один некомпактный слой.

3. *Пары полубесконечных поверхностей:* $\{d < 0, c \leq -2\sqrt{-d}\}$. Область изменения θ состоит из двух непересекающихся интервалов: $\theta \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{-c+\sqrt{c^2+4t}}{2}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{-c-\sqrt{c^2+4t}}{2}}, 0\right) =: (-\infty, \theta_1) \cup (\theta_2, 0)$. В соответствии с обозначениями из главы 2 будем называть многообразие, отвечающее интервалу $(-\infty, \theta_1)$, основным, а интервалу $(\theta_2, 0)$ — дополнительным.

Легко видеть, что в случае основного многообразия вид пополненной бифуркационной диаграммы и свойства слоения Лиувилля совпадают с рассмотренным выше случаем полубесконечных поверхностей. Дополнительное многообразие устроено иначе.

Обозначим через K_0 предел $\tilde{K}(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$, а через K_2 — предел

при $\theta \rightarrow \theta_2$. При $K^2 \in (K_0, K_2)$ нижняя граница образа отображения момента совпадает с бифуркационной кривой, в то время как при $K^2 \geq K_2$ имеем не включенную в образ прямую $\{E = W(\theta_2, K_2)\}$ (на рис. 5.3 изображенную горизонтальным пунктиром); при $K^2 < K_0^2$ функция $W|_{K=fix}$ не ограничена снизу; при $K = \pm K_0$ функция $W|_{K=\pm K_0}$ ограничена снизу значением $\frac{Ac}{d}$, т.е. нижняя граница образа отображения момента совпадает с нижним концом бифуркационной кривой (рис. 5.3).

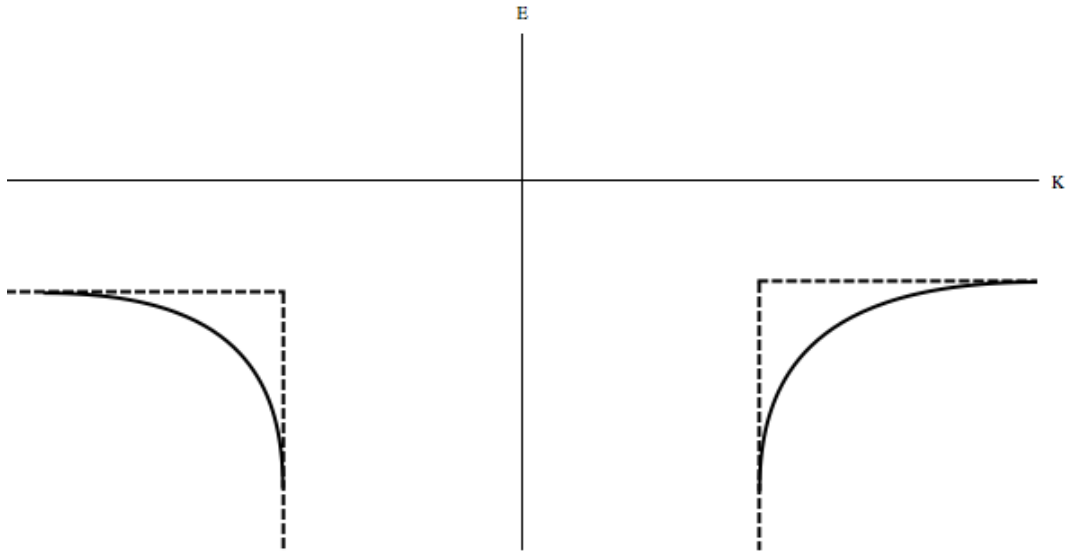


Рис. 5.3: Случай дополнительной полубесконечной поверхности

Исследование корней уравнения (5.3.3) показывает, что в прообразе внутренних точек криволинейных треугольников, образованных бифуркационными кривыми и прямыми $\{E = W(\theta_2)\}$ и $\{K = \pm K_0\}$, находится один тор Лиувилля; в прообразе всех прочих внутренних точек образа отображения момента находится один некомпактный слой.

4. *Грушевидные поверхности:* $\{d < 0, c > -2\sqrt{-d}\}$. Здесь область изменения θ имеет вид $(-\infty, -\sqrt[4]{-d}) \cup (-\sqrt[4]{-d}, 0)$.

Бифуркационная диаграмма в данном случае строится совершенно аналогично предыдущему случаю. Однако вычисление показывает, что концы бифуркационных кривых, отвечающие значению параметра $\theta \rightarrow -\sqrt[4]{-d}$ (отващавшие в предыдущем случае значениям $\theta \rightarrow \theta_1$ и $\theta \rightarrow \theta_2$ на

основном и дополнительном многообразии соответственно), устремляются к бесконечности по обеим координатам. Количество и компактность прообразов определяются так же, как и для пар полубесконечных поверхностей.

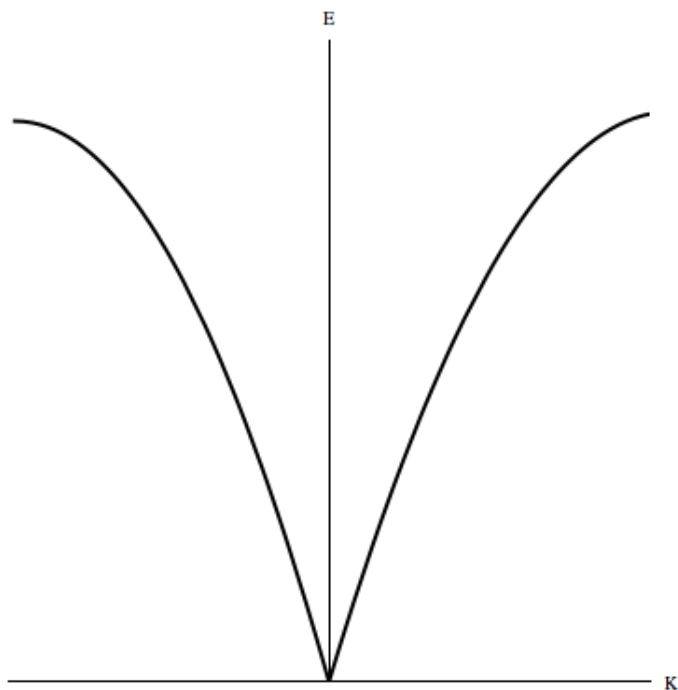


Рис. 5.4: Случай основной части грушевидной поверхности

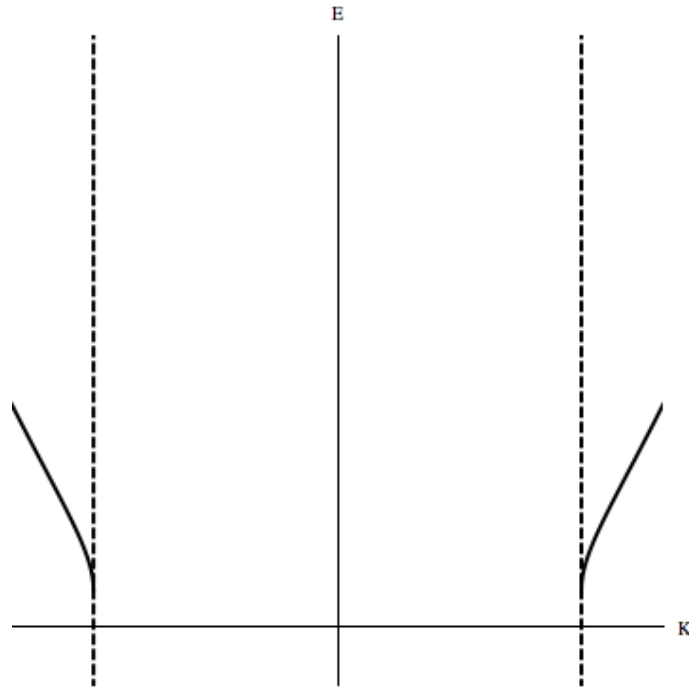


Рис. 5.5: Случай дополнительной части грушевидной поверхности

Тем самым теорема полностью доказана.

Теперь рассмотрим случай гравитационного потенциала. Как было показано выше, гравитационный потенциал является бертрановым только на многообразиях Бертрана с метрикой $ds_{\mu,c,0}^2$, то есть на проколотых полусферах, проколотой плоскости, проколотых плоскостях Лобачевского и описанных ранее рациональных накрытиях над ними. Поэтому изучать будем именно эти системы. Докажем следующую теорему:

Теорема 5.5. *Для натуральных динамических систем движения в поле гравитационного потенциала $V(r) = -A|\theta(r)|$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,0} = I_{k,c,0} \times S^1$ с метрикой $ds_{\mu,c,0}^2$ справедливы следующие утверждения об отображении момента и пополненной бифуркационной диаграмме:*

(i) *в случае конусов ($\{c = 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$*

дуг, каждая из которых запараметризована в виде (5.2.2) параметром $r \in (0, +\infty)$, причем каждая из них имеет в качестве асимптот прямые $\{K = 0\}$ и $\{E = 0\}$ на плоскости (K, E) , прообраз любой ее точки является окружностью, состоящей из критических точек ранга 1, “пунктирной прямой” $\{E = 0\}$ и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы, прообраз любой внутренней точки, лежащей ниже прямой $\{E = 0\}$, является компактный слой слоения Лиувилля, а прообраз точек выше и на этой прямой — некомпактным слоем (см. рис. 5.6);

(ii) в случае проколотых полусфер и их “рациональных накрытий” ($\{c > 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг, каждая из которых запараметризована в виде (5.2.2) параметром $r \in (0, \pi/2)$, причем прямая $\{K = 0\}$ является их асимптотой, прообраз любой их точки является окружностью, состоящей из критических точек ранга 1, и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы, прообразом любой внутренней точки является компактным слоем слоения Лиувилля (см. рис. 5.7);

(iii) в случае проколотых плоскостей Лобачевского и их “рациональных накрытий” ($\{c < 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично случаю конусов (см. рис. 5.8).

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим по очереди каждое из семейств многообразий Бертрана и докажем для них требуемые утверждения. Аналогично рассуждениям в доказательстве предыдущей теоремы, устройство слоения Лиувилля определяется по числу допустимых корней уравнения $W(\theta, K) = E$ для данных значений первых интегралов K и E , причем $W := H_{p\theta=0}$. Но в силу простоты устройства рассматриваемых многообразий, в данном случае их исследование можно провести без использования громоздких общих формул. Чтобы увеличить наглядность рассуждений, ограничимся рассмотрением случая $\mu = 1$, т.е. “базисных” многообразий — проколотых плоскости, полу-

сферы и плоскости Лобачевского, общий случай исследуется аналогично.

1. *Проколота́я плоскость* $\{c = 0\}$. В данном случае метрика может быть записана в виде $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, где область изменения координаты r имеет вид $(0, +\infty)$. Бифуркационные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(K, E)$ параметризуются параметром r следующим образом:

$$\gamma(r) = \left(\pm\sqrt{Ar}, -\frac{A}{2r} \right).$$

Нижняя граница образа отображения момента совпадает с этой кривой (рис. 5.6). Как показывает исследование корней уравнения $W|_{K=fix} = E$, прообразом каждой внутренней точки образа отображения момента при $E < 0$ является один тор (компактный слой слоения Лиувилля); при $E > 0$ прообразом является один цилиндр (некомпактный слой).

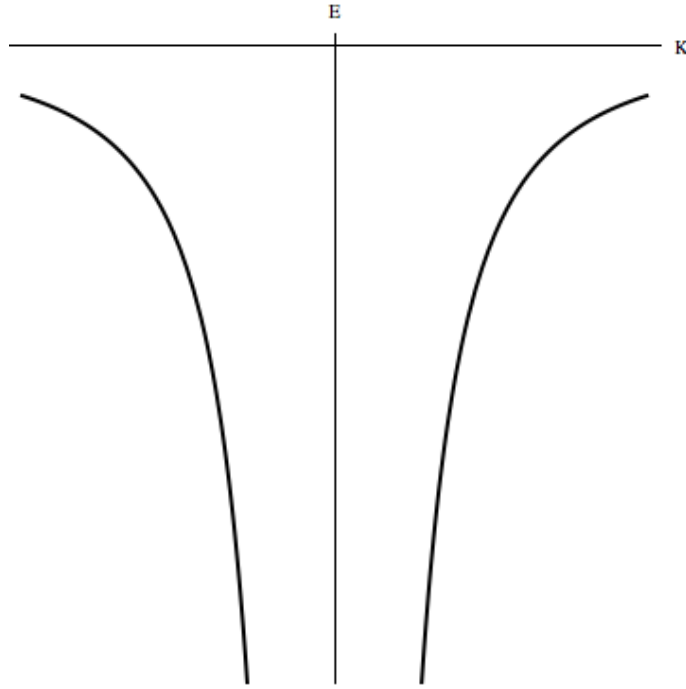


Рис. 5.6: Случай конуса с гравитационным потенциалом

2. *Проколота́я полусфера* $\{c > 0\}$. В данном случае метрика может

быть записана в виде $ds^2 = dr^2 + \sin^2(r)d\varphi^2$, где область изменения координаты r имеет вид $(0, \pi/2)$. Бифуркационные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(K, E)$ параметризуются параметром r следующим образом:

$$\gamma(r) = \left(\pm\sqrt{A \operatorname{tg} r}, -A \operatorname{ctg} 2r \right).$$

Нижняя граница образа отображения момента совпадает с этой кривой (рис. 5.7). Как показывает исследование корней уравнения $W|_{K=fix} = E$, прообраз каждой внутренней точки образа отображения момента при является один тор (компактный слой слоения Лиувилля).

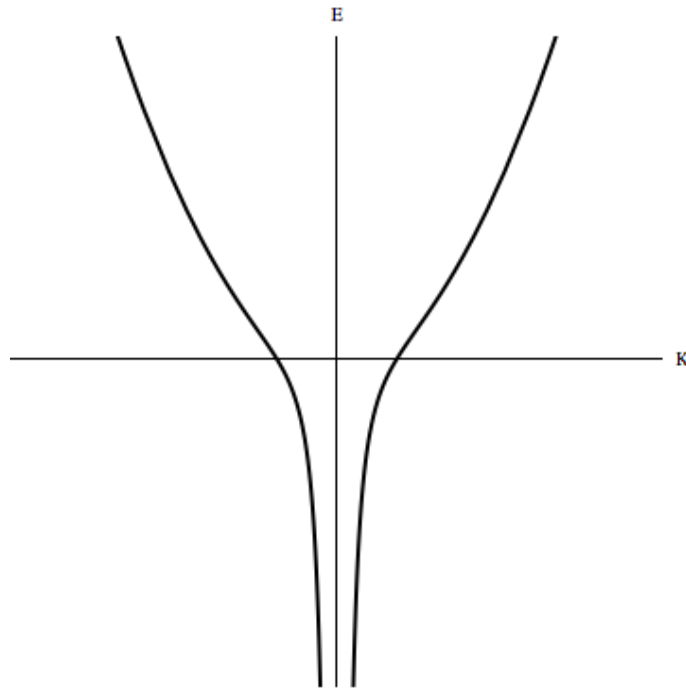


Рис. 5.7: Случай сферы с гравитационным потенциалом

3. *Проколота* плоскость Лобачевского $\{c < 0\}$. В данном случае метрика может быть записана в виде $ds^2 = dr^2 + \operatorname{sh}^2(r)d\varphi^2$, где область изменения координаты r имеет вид $(0, +\infty)$. Бифуркационные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(K, E)$ параметризуются параметром r следующим образом:

$$\gamma(r) = \left(\pm\sqrt{A \operatorname{th} r}, -A \operatorname{cth} 2r \right).$$

Нижняя граница образа отображения момента совпадает с этой кривой (рис. 5.8). Общее устройство бифуркационной диаграммы и образа отображения момента в данном случае такое же, как и у системы на конусе. В частности, как показывает исследование корней уравнения $W|_{K=fix} = E$, прообразом каждой внутренней точки образа отображения момента при $E < 0$ является один тор (компактный слой слоения Лиувилля); при $E \geq 0$ прообраз является цилиндром (некомпактным слоем).

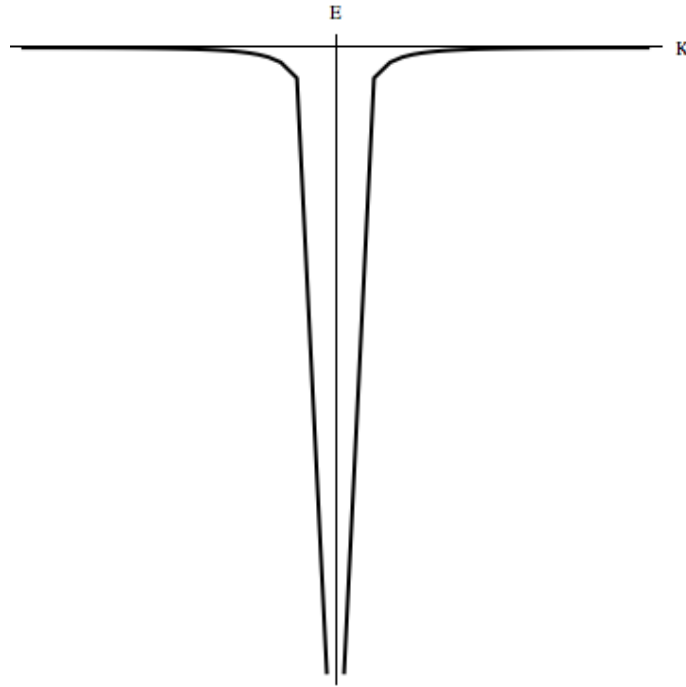


Рис. 5.8: Случай плоскости Лобачевского с гравитационным потенциалом

Замечание 5.6. Отдельно отметим, что в рассмотренной задаче появляются некомпактные слои Лиувилля. С этой точки зрения гамильтоновы системы на многообразиях Бертрана особенно интересны, поскольку если перестройки компактных слоев (торов) полностью известны и для них существует классификационная теория Фоменко–Цишанга, то для некомпактных перестроек общей теории пока нет. В рассмотренных примерах наблюдаются только слои вида “цилиндр”. При этом возникающие перестройки имеют тип “перестройка тора в цилиндр”. Этот случай

возникает в примерах 2, 3, 4 систем с осцилляторным потенциалом (и соответствует внутренним точкам образа отображения момента, лежащим на некритических “пунктирных” кривых, принадлежащих пополненной бифуркационной диаграмме, но не бифуркационной диаграмме) и в примерах 1, 3 систем с гравитационным потенциалом (и соответствует точкам на прямой $\{E = 0\}$).

Заметим в заключение, что перестройки типа “рождение цилиндра” в данном случае возникают исключительно на границе образа отображения момента, не принадлежащей образу (на рисунках изображены пунктиром).

Список литературы

- [1] J. Bertran, “Théorème relatif au mouvement d’un point attiré vers un centre fixe”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **77** (1873), 849–853.
- [2] F. C. Santos, V. Soares, A. C. Tort, “An English translation of Bertrand’s theorem”, *arXiv:0704.2396v1*, 2007.
- [3] G. Koenigs, “Sur les lois de force central fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques”, *Bull. de la Société de France*, **17** (1889), 153–155.
- [4] G. Darboux, “Sur un problème de mécanique”, *T. Despeyroux, Cours de mécanique*, Vol. 2, Note XIV, A. Herman, Paris, 1886, 461–466.
- [5] G. Darboux, “Étude d’une question relative au mouvement d’un point sur une surface de révolution”, *Bulletin de la S. M. F.*, **5** (1877), 100–113.
- [6] H. Liebmann, “Über die Zentralbewegung in der nichteuklidische Geometrie”, *Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse*, **Bd. 55** (1903), 146–153.
- [7] H. Liebmann, “Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum”, *Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse*, **Bd. 54** (1902), 393–423.
- [8] G. Darboux, “Sur une question relative au mouvement d’un point sur une surface de révolution”, *T. Despeyroux, Cours de mécanique*, Vol. 2, Note XV, A. Herman, Paris, 1886, 467–482.
- [9] V. Perlick, “Bertrand spacetimes”, *Class. Quantum Grav.*, **9** (1992), 1009–1021.
- [10] A. Ballesteros, A. Enciso, F.J. Herranz, O. Ragnisco, “Hamiltonian systems admitting a Runge–Lenz vector and an optimal extension of Bertrand’s theorem to curved manifolds”, *Comm. Math. Phys.*, **290:3** (2003), 1033–1049.
- [11] M. Santoprete, “Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution”, *Journal of Math. Phys.*, **49:4** (2008), 042903.

- [12] А. В. Щепетиллов, *Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, ИИКИ, Москва-Ижевск, 2008.
- [13] Н. И. Лобачевский, *Полное собрание сочинений. Сочинения по геометрии*, Т. II, ГИИТЛ, М.–Л., 1949.
- [14] W. Bolyai, J. Bolyai, *Geometrische Untersuchungen*, Teubner, Leipzig, 1913.
- [15] P. Serret, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure*, p. 205, Librairie de Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
- [16] F. Schering, “Die Schwerkraft im Gaussischen Räume”, *Nachr. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*, **15** (1870), 311–321.
- [17] R. Lipshitz, “Extension of the planet-problem to a space of n dimensions and constant integral curvature”, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **12** (1873), 349–370.
- [18] W. Killing, “Die Mechanik in den nicht-Euclidischen Raumformen”, *J. Reine Angew. Math.*, **Bd. 98** (1885), 1–48.
- [19] C. Neumann, “Ausdehnung der Kepler’schen Gesetze auf der Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet”, *Gesellschaft der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse*, **38** (1886), 1–2.
- [20] В. В. Козлов, “О динамике в пространствах постоянной кривизны”, *Классическая динамика в неевклидовых пространствах*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004, 147–158.
- [21] P. W. Higgs, “Dynamical symmetries in a spherical geometry, I”, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **12** (1979), 309–323.
- [22] В. В. Козлов, А. О. Харин, “Задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны”, *Классическая динамика в неевклидовых пространствах*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004, 159–166.
- [23] Y. Tikochinsky, “A simplified proof of Bertrand’s theorem”, *Am. J. Phys.*, **56, No. 12** (1988), 1073–1075.
- [24] А. В. Болсинов, В. В. Козлов, А. Т. Фоменко, “Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Успехи математических наук*, **50, вып.3** (1995), 3–32.
- [25] А. Т. Фоменко, “Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях”, *Функц. анализ и его приложения*, **25, вып.4** (1991), 23–35.
- [26] Т. З. Нгуен, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере”, *Успехи математических наук*, **45, вып.6** (1990), 91–111.
- [27] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его приложения*, **22, вып.4** (1988), 38–51.
- [28] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, “Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия”, *Математический Сборник*, **199, номер 9** (2008), 3–96.

- [29] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.
- [30] V.S. Matveev, *Topological methods in the theory of integrable systems*, Camb. Sci. Publ., Cambridge, 2006.
- [31] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева-Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела”, *Математические заметки*, **56**:2 (1994), 139–142.
- [32] A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, “Application of classification theory for integrable Hamiltonian systems to geodesic flows on 2-sphere and 2-torus and to the description of the topological structure of momentum mapping near singular point”, *J. Math. Sci.*, **78**:5 (1996), 139–142.
- [33] А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия”, *Математический Сборник*, **189**:10 (1998), 5–32.
- [34] О. А. Загрядский, Е. А. Кудрявцева, Д. А. Федосеев, “Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения”, *Математический Сборник*, **203**:8 (2012), 39–78.
- [35] О. А. Загрядский, Д. А. Федосеев, “О глобальной и локальной реализуемости римановых многообразий Бертрана в виде поверхностей вращения”, в печати, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, 2015, № 3.
- [36] О. А. Загрядский, Д. А. Федосеев, “О явном виде метрик Бертрана”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, 2013, № 5, 46–50.
- [37] Е. А. Кудрявцева, Д. А. Федосеев, “Механические системы с замкнутыми орбитами на многообразиях вращения”, *Матем. сб.*, **206**:5 (2015), 107–126.
- [38] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces et les Applications géométriques du Calcul infinitésimal*, Tome 3. Ed. Chelsea (3ème édition 1972). First edition: Paris: Gauthier-Villars, Vol. 1, 2, 3, and 4 (1894 to 1915).
- [39] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, УдГУ, Ижевск, 1999.
- [40] Д. А. Федосеев, “Бифуркационные диаграммы натуральных гамильтоновых систем на многообразиях Бертрана”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, 2015, № 1, 62–65.
- [41] Е. А. Кудрявцева, “Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками”, *Докл. РАН*, **445**:4, 383–385.