МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

САЙЕД АХМЕД КАМИЛЬ ЭЛЬ МАХИ

УДК 513.83

ОБЪЕМЫ ОРБИТ ПРИСОЕДИНЕННОГО ДЕЙСТВИЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

01.01.04 - геометрия и топология

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор А.Т.Фоменко

Москва - 1986

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы были доказаны глубокие общие теоремы существования глобально минимальных поверхностей с заданными граничными условиями. Общая теорема существования, т.е. решение проблемы Плато в классе всех многообразий с данной границей, доказана А.Т.Фоменко [20], [22]. Затем, опираясь на созданную А.Т.Фоменко теорию минимизации стратифицированного объема, Дао Чонг Тхи доказал теорему существования минимальной поверхности в каждом гомотопическом классе [5], [6]. Теоремы существования различных вариационных задач были получены также на языке различных версий теории потоков, см. [21]. В терминах интегральных потоков теорема существования глобально минимальной поверхности с заданной границей доказана, например, в книге Федерера [28]. Аналогичные теоремы существования потока минимальной массы в данном гомологическом классе доказаны Альмгреном [27] и др.

Большое значение имеют конкретные примеры минимальных поверхностей. Система уравнений, описывающих такие поверхности, является сложной нелинейной системой уравнений в частных производных, для построения явных решений которой общих алгоритмов нет. В настоящее время есть три эффективных практических метода для доказательства глобальной минимальности конкретных поверхностей в римановом многообразии.

Общий метод был разработан А.Т.Фоменко в [17], [18], [19], [21] и заключался в явном вычислении точной нижней грани значений объемов замкнутых нестягиваемых минимальных поверхностей в римановом многообразии. В том случае, когда объем какой-либо поверхности оказывался равным этому числу, поверхность автоматически оказывалась глобально минимальной. Этим методом А.Т.Фоменко получил богатые серии глобально минимальных подмногообразий в группах Ли и симметрических пространствах, см. [17], [18], [19], [21].

Другой метод связан с так называемыми формами калибровки, т.е. с такими дифференциальными формами φ степени p на римановом многообразии M^n, что $d\varphi = 0$ и $\varphi|_V \leq vol|_V$ для любого p - мерного подпространства V в касательном пространстве $T_x M^n$ к многообразию M^n. Формы калибровки использовались в работах Федерера, Саймонса, А.Т.Фоменко, Дао Чонг Тхи, Харви и Лоусона и др. см, например, [5], [29].

Применение этой методики для доказательства минимальности конкретных поверхностей можно найти, например, в работе Ле Хонг Ван [9] и в работе Тасаки [34].

Третий метод проверки минимальности связан с рассмотрением минимальных поверхностей, инвариантных относительно некоторой группы симметрий (эквивариантная задача Плато). В работе Сяна и Лоусона [31] показано, что $\mathfrak{h}$ - инвариантное подмногообразие X в многообразии M^n локально минимально относительно всех достаточно малых вариаций в том и только в том случае, когда оно является локально минимальным лишь по отношению ко всем достаточно малым эквивариантным вариациям, т.е. инвариантным относительно действия той же группы. Итак, для проверки локальной минимальности (в смысле равенства нулю средней кривизны $H = 0$) $\mathfrak{h}$ - инвариантной поверхности достаточно убедиться, что она минимальна относительно $\mathfrak{h}$ - инвариантных возмущений. Это позволяет редуцировать задачу нахождения $\mathfrak{h}$ - инвариантных минимальных поверхностей к аналогичной задаче в пространстве орбит $M/\mathfrak{h}$, см. [31]. Этот же прием позволяет находить и глобально минимальные поверхности.

Итак, пусть M^n - риманово многообразие, на котором действует группа изометрий $I(M^n)$. Рассмотрим подгруппу $H \subset I_0(M^n)$, где $I_0(M^n)$ - связная компонента единицы в группе Ли $I(M^n)$. Для описания локально минимальных $(H=0)$ главных орбит $H(x)$ группы Ли H в многообразии M^n надо поступить следующим образом : на пространстве $\widetilde{M}$ главных орбит вычисляем функцию объема $v(x)$ орбит, находим её критические точки, т.е. такие точки, в которых $\operatorname{grad} v(x)=0$. Эти точки соответствуют главным орбитам, являющимся локально минимальными подмногообразиями в многообразии M^n , т.е. их средняя кривизна обращается в нуль.

В рамках эквивариантной задачи Плато было построено много интересных примеров минимальных конусов в евклидовых пространствах см. [20] , [21] , [22] , [31] , [32] . В случае коразмерности один получена полная классификация таких минимальных конусов, инвариантных относительно действия связных подгрупп H группы изометрий $I(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Окончательный ответ, завершающий фундаментальные исследования Сяна и Лоусона [31] в коразмерности один, был получен А.Т.Фоменко и А.В.Тыриным [21] . Несколько новых серий примеров инвариантных минимальных конусов коразмерности два в $\mathbb{R}^n$ получены А.О.Ивановым ; эти примеры также найдены в рамках эквивариантной задачи Плато.

В диссертации изучается следующая ситуация. Пусть G - компактная матричная группа Ли, H - её замкнутая подгруппа. Тогда H действует на G присоединенным образом, т.е. $\hat{h}(x)=hxh^{-1}, x\in G, h\in H$. Для нахождения локально минимальных главных орбит надо решить три задачи : а) описать пространство главных орбит этого действия ; б) вычислить функцию объема на полученном пространстве ; в) найти критические точки функции объема на пространстве главных орбит .

Первая задача для случая, когда $\mathfrak{h} = \mathfrak{G}$ решается классической теорией полупростых групп Ли, см. [23]. В этом случае пространство орбит можно отождествить с камерой Вейля.

Задача описания всего пространства $\tilde{\mathfrak{G}}$ главных орбит присоединенного действия подгруппы $\mathfrak{h}$ на группе $\mathfrak{G}$ в диссертации подробно не изучается. В $\tilde{\mathfrak{G}}$ выделено подпространство $\mathfrak{G}^*$, состоящее из орбит,пересекающих некоторый фиксированный максимальный тор $T \subset \mathfrak{G}$, т.е. $\mathfrak{G}^*$ зависит от тора T и подгруппы $\mathfrak{h}$. Задача описания функции объема на $\mathfrak{G}^*$ решается применением так называемого представления среза. Представление среза позволяет полностью описать главные орбиты, причем это делается конструктивно, см. [30], [33].

В некоторых случаях оказывается, что подпространство совпадает с подгруппой $\mathfrak{h}$. Это происходит в том случае, когда тор T группы $\mathfrak{G}$ совпадает с максимальным тором подгруппы $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{G}$. В диссертации изучается локальная минимальность орбит в подпространстве $\mathfrak{G}^*$. Такие орбиты естественно называть $\mathfrak{G}^*$ - минимальными, т.е. они минимальны относительно возмущений, лежащих в $\mathfrak{G}^*$. С точки зрения объемлющего пространства $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ - минимальная орбита может оказаться не минимальной. Однако, всегда верно обратное: любая орбита, минимальная в $\mathfrak{G}$, всегда является $\mathfrak{G}^*$ - минимальной. Если $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{h}$ (см. выше), то $\mathfrak{G}^*$ - минимальная орбита является минимальной в обычном смысле в подгруппе $\mathfrak{h}$.

В случае, когда $\mathfrak{h} = \mathfrak{G}$, вторая задача решается формулой Вейля для интегрирования функций, постоянных на классах сопряженных элементов, см. [23].

И.С.Балинская рассматривала задачу б) для случая, когда пара $(\mathfrak{G}, \mathfrak{h})$ такова, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$ - симметрическое пространство. Она изучила объемы орбит регулярных элементов группы Ли $\mathcal{G}$, которые пересекают некоторый фиксированный максимальный тор в группе Ли $\mathcal{G}$. В этом случае использовалась модификация метода Вейля, предложенная О.В.Мантуровым.

В диссертации задача вычисления функции объема на $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ в общем виде решается для следующих двух естественных метрик на орбитах присоединенного представления : а) метрика Киллинга на алгебре Ли G группы Ли $\mathcal{G}$ путем левых сдвигов разносится по всей группе Ли $\mathcal{G}$, а затем ограничивается на орбиту, б) строится нормальная однородная риманова метрика на орбитах как для однородного пространства с группой преобразований $\mathcal{G}$.

В обоих случаях получены формулы, позволяющие в конкретных примерах получать явные выражения для функции объема, что продемонстрировано на примере таких пар $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, где $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ - симметрическое пространство, в этом случае рассматриваются орбиты сингулярных элементов (напомним, что в случае регулярных элементов ответ получен И.С.Балинской) . Кроме того, явные выражения объема получены для некоторых отдельных примеров пространств Мантурова, т.е. пространств с неприводимым действием стационарной подгруппы, такие пространства иногда называют неприводимыми однородными пространствами. Задача вычисления критических точек функции объема на пространстве $\mathcal{G}^*/\mathcal{H}$ решена для таких пар $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, что $\mathcal{G}$ - простая неособая компактная группа Ли и $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ - симметрическое пространство, ранг $\mathcal{G} = 2$, $\mathcal{G}/\mathcal{H} \neq \mathbb{H}P^1$, где $\mathbb{H}P^1$ - кватернионное проективное пространство.

<u>Теорема I.</u> а) Пусть $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ - пара компактных групп Ли такая, что $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ - классическое симметрическое пространство. Тогда объемы сингулярных орбит относительно присоединенного действия $\mathcal{H}$ на $\mathcal{G}$ вычислены в явном виде и приведены в таблице №2

(глава 2). б) Пусть (G, H) – пара компактных групп Ли, указанная в таблице №3 (глава 3). Паре (G, H) отвечает неприводимое однородное пространство G/H. Тогда объемы орбит общего положения присоединенного действия H на G вычислены явно (см. таблицу №3).

Отметим, что главная орбита W общего положения в G^* может оказаться сингулярной орбитой в группе G (так как $G \supset G^*$).

Теорема 2. Пусть G – компактная матричная неособая простая группа Ли ранга два, H – такая её подгруппа, что G/H – симметрическое пространство. Пусть H действует на G присоединенным образом, т.е. элементу $h \in H$ отвечает преобразование $\hat{h}(x) = hxh^{-1}$, $h \in H$, $x \in G$. Тогда следующий список исчерпывает все G^* – локально минимальные орбиты W в пространстве G^*.

1) Если $G = Sp(2)$, $H = U(2)$, то

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} g^{-1}, g \in U(2) \right\}$$

2) Если $G = SU(3)$, $H = SO(3)$, то

$$W = \left\{ g g_0 g^{-1}, \ g \in SO(3) \right\},$$

где g_0 принимает одно из следующих значений:

$\mathrm{diag}\left(1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$, $\mathrm{diag}\left(1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$,

$\mathrm{diag}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}, 1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$, $\mathrm{diag}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$,

$\mathrm{diag}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, 1\right)$, $\mathrm{diag}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, 1\right)$;

3) Если $\mathcal{G} = SO(5)$, $\mathcal{H} = SO(2)\times SO(3)$, то

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in SO(2)\times SO(3) \right\};$$

4) Если $\mathcal{G} = SU(3)$, $\mathcal{H} = S(U(1)\times U(2))$, то

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} -e^{-2i\varphi} & & \\ & -e^{i\varphi} & \\ & & e^{i\varphi} \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in S(U(1)\times U(2)) \right\}$$

5) Если $\mathcal{G} = SO(5)$, $\mathcal{H} = SO(4)$, то

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in SO(4) \right\} \text{ или } W = \left\{ g \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in SO(4) \right\}$$

Пространства $\mathcal{G}^*$ строятся здесь относительно стандартных максимальных торов.

<u>Теорема 3</u>. а) Пусть $g \in \mathcal{G}$ – произвольный элемент компактной матричной группы Ли $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ – её замкнутая подгруппа, действующая на $\mathcal{G}$ присоединенным образом, $\mathcal{Z}(g) = \{h \in \mathcal{H} \mid hg = gh\}$ – централизатор элемента g при этом действии. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис алгебры Ли H группы Ли $\mathcal{H}$ по модулю алгебры Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{Z}(g)$. Тогда

$$\mathrm{vol}\, \mathcal{O}_{\mathcal{H}}(g) = \frac{\mathrm{vol}\, \mathcal{H}}{\mathrm{vol}\, \mathcal{Z}(g)} \sqrt{\frac{\det(f_i, f_j)}{\det(e_i, e_j)}}$$

где $f_i = g^{-1} e_i g - e_i$, (X, Y) – метрика Киллинга алгебры Ли G группы Ли $\mathcal{G}$. Объемы вычисляются относительно ограничения на орбиты левоинвариантного продолжения метрики Киллинга алгебры Ли G.

б) Пусть a и b – такие элементы группы Ли $\mathcal{G}$, что имеет место включение $\mathcal{Z}(a) \subset \mathcal{Z}(b)$, где $\mathcal{Z}(a)$ - централизатор элемента a в группе Ли $\mathfrak{g}$. Тогда относительно нормальной однородной римановой метрики на орбите имеет место равенство

$$vol\, \mathcal{O}(b) = \frac{vol \cdot \mathcal{O}(a)}{vol\ \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a)}.$$

В заключение, остановимся кратко на содержании работы.

Глава I посвящена развитию метода Вейля вычисления объемов орбит присоединенного действия компактных групп Ли.

В § I приведены различные вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем.

В § 2 дан основной алгоритм для вычисления объемов орбит, присоединенного действия относительно метрики, индуцированной метрикой Киллинга на группе Ли.

В § 3 изучается нормальная однородная метрика на орбитах, порожденная формой Киллинга на алгебре Ли. В частности, установлена простая связь между объемами регулярных и сингулярных элементов.

Глава 2 посвящена применению результатов главы I к конкретным примерам, связанными с симметрическими пространствами.

В § I приведены основные результаты, необходимые для вычисления объемов орбит действия, связанного с симметрическими пространствами.

В § 2 рассматривается случай действия, ассоциированного с симметрическим пространством $SU(n)/SO(n)$.

В § 3 рассматривается случай действия, ассоциированного с симметрическим пространством $Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$.

В § 4 рассматривается случай действия, ассоциированного с симметрическим пространством $SU(n)/S(U(n-p) \times U(p))$.

В § 5 рассматривается случай действия, ассоциированного с симметрическим пространством $Sp(n)/U(n)$.

Глава 3 посвящена применению результатов главы I к конкретным примерам действий, связанных с однородными неприводимыми пространствами.

В § I приведены необходимые сведения об однородных неприводимых пространствах, используемые для вычисления объемов орбит действий, ассоциированных с такими пространствами.

В § 2 рассматривается случай действия, порожденного однородным неприводимым пространством, которое ассоциированно с представлением $\circ\!-\!\overset{1}{\circ}\!-\ldots-\!\circ\!-\!\circ$. Каждое представление простой компактной группы Ли задается числовыми отметками на соответствующей схеме простых корней.

В § 3 рассмотрен случай действия, порожденного однородным неприводимым пространством, которое ассоциированно с представлением $\overset{2}{\circ}\!-\!\circ\!-\ldots-\!\circ\!-\!\circ$.

В § 4 рассмотрен случай действия, порожденного однородным неприводимым пространством, которое ассоциированно с представлением $\overset{1}{\circ}\!-\!\circ\!-\ldots-\!\circ\!-\!\circ \quad \overset{1}{\circ}\!-\!\circ\!-\ldots-\!\circ\!-\!\circ$.

Глава 4 посвящена изучению критических точек функции объема для действий, связанных с симметрическими пространствами. Эти рассмотрения связаны с так называемой эквивариантной задачей Плато.

В § I напоминаются понятия, относящиеся к эквивариантной задаче Плато, и формулируется основная теорема о G^* - локально минимальных поверхностях для симметрических пар (G, H) таких, что ранг G равен двум.

В § 2 изучаются критические точки функции объема действия, связанного с симметрическим пространством $Sp(2)/U(2)$.

В § 3 изучаются критические точки функции объема действия, связанного с симметрическим пространством $SO(5)/SO(2)\times SO(3)$.

В § 4 изучаются критические точки функции объема действия, связанного с симметрическим пространством $SU(3)/SO(3)$.

В § 5 изучаются критические точки функции объема действия, связанного с симметрическим пространством $SU(3)/S(U(1)\times U(2))$, и пространство главных орбит, пересекающих фиксированный максимальный тор в группе Ли $SU(3)$.

В § 6 изучаются критические точки функции объема действия, связанного с симметрическим пространством $SO(5)/SO(4)$, и пространство главных орбит, пересекающих фиксированный максимальный тор в группе Ли $SO(5)$.

Перечислим кратко основные результаты :

I) Найдена формула для вычисления объемов в случае римановой метрики, полученной ограничением на орбиту левого сдвига метрики Киллинга алгебры Ли.

2) Найдена формула для вычисления объемов орбит для нормальной однородной римановой метрики на орбите, как на однородном пространстве с группой преобразований G.

3) В явном виде вычислена функция объема для действий, ассоциированных с классическими симметрическими пространствами для орбит сингулярных элементов.

4) В явном виде вычислена функция объема для действий, ассоциированных с некоторыми однородными неприводимыми пространствами.

5) В случае симметрических пространств G/H таких, что G - неособая простая компактная группа Ли ранга два и $G/H \neq \mathbb{H}P^1$, описаны в явном виде G^* - локально минимальные поверхности.

Результаты диссертации опубликованы в [25] , [26] .

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А. Т. Фоменко за постановку задачи, внимание к работе и постоянную поддержку.

ОБЪЕМЫ ОРБИТ В ПРИСОЕДИНЕННОМ ДЕЙСТВИИ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

§ 1. Необходимые сведения об однородных пространствах.

Пусть G - группа Ли, M - гладкое многообразие. Говорят, что группа Ли G действует на M, если задано гладкое отображение многообразий $G\times M \longrightarrow M$, $(g,x) \to \hat{g}x$ такое, что возникающее здесь отображение

$$G \longrightarrow \mathrm{Diff}(M) \quad , \; g \to \hat{g} ,$$

является гомоморфизмом группы G в группу $\mathrm{Diff}(M)$ диффеоморфизмов многообразия M. Группа Ли G в этом случае называется группой Ли преобразований многообразия M.

Пусть группа Ли G действует на многообразии M, $x_0 \in M$. Подмножество $G(x_0)=\{\hat{g}x_0 \mid g\in G\}$ в M называется орбитой точки x_0 относительно действия группы Ли G. Две точки $x,y\in M$ лежат на одной и той же орбите тогда и только тогда, когда $y=\hat{g}x$ для некоторого элемента $g\in G$. Многообразие M является объединением попарно непересекающихся орбит относительно действия G. Каждая орбита является погруженным подмногообразием в M.

Если многообразие M состоит из одной орбиты, то говорят, что G действует на M транзитивно, а M называют однородным пространством группы G.

Рассмотрим пример однородного пространства. Пусть G - группа Ли, H - замкнутая подгруппа в G. Пусть G/H - пространство левых смежных классов gH по подгруппе H. На пространстве G/H естественным образом вводится структура топологического пространства: отображение канонической проекции

$\pi : G \to G/H$ является непрерывным и открытым. Поскольку смежные классы замкнуты в G, то G/H – хаусдорфово топологическое пространство.

На пространстве G/H можно определить действие группы G индуцированное левыми сдвигами на самой группе G. Это действие определяется из следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L_g} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H & \xrightarrow{\tau(g)} & G/H \end{array}$$

т.е. $\tau(g) : G/H \to G/H$; $xH \to (gx)H$.

Легко проверяется, что это действие транзитивно.

<u>Предложение I.I.I</u> (см. [23] . На топологическом пространстве G/H можно ввести такую структуру гладкого многообразия, что относительно действия G группа G является группой Ли преобразований многообразия G/H . Причем

$$\dim G/H = \dim G - \dim H$$

<u>Определение I.I.I</u>. Для любой точки x однородного пространства M группы Ли G подмножество

$$G_x = \left\{ g \in G \mid \hat{g}\, x = x \right\}$$

является подгруппой в G . Она называется подгруппой изотропии или стационарной подгруппой точки x в группе G .

Подгруппа изотропии является замкнутой подгруппой в G .

<u>Теорема I.I.I</u>. Пусть M – однородное пространство группы Ли G преобразований многообразия M , G_x – стационарная

подгруппа точки $x \in M$. Обозначим через π отображение

$$\pi : G/G_x \longrightarrow M \ , \quad g\,G_x \longrightarrow \hat{g}x \, .$$

1) Если отображение π является гомеоморфизмом, то оно есть изоморфизм однородных пространств G/G_x и M, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} G/G_x \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\hat{g}"'] & M \arrow[d, "\hat{g}"] \\ G/G_x \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

коммутативна.

2) Если π – гомеоморфизм и M связно, то компонента единицы G_0 группы G действует на M транзитивно.

Итак, следующие объекты по-существу не различаются между собой:

а) однородные факторпространства группы Ли G; б) многообразия, на которых G действует транзитивно.

С основными фактами теории G – пространств можно ознакомиться по работам [23], [2], [1].

Нам потребуется следующая теорема из теории расслоенных пространств. Основные определения и результаты этой теории можно найти в [8], [16], [24].

<u>Теорема 1.1.2</u>. Пусть G – компактная группа Ли, пусть X – вполне регулярное G – пространство, все орбиты которого имеют один и тот же тип G/H. Тогда орбитное отображение $X \longrightarrow X/G$ является расслоением со слоем G/H и структурной группой $N(H)/H$ (действующей на G/H посредством правых сдвигов). Обратно, каждое такое расслоение может быть получено описанным способом.

Здесь $N(h_y)$ – нормализатор подгруппы h_y .

При вычислении различных интегралов мы будем использовать теорему Фубини в том виде, как она приведена в книге [8] .

Теорема I.I.3 (см. [8]). Пусть X^n, Y^m – гладкие многообразия размерностей n и m соответственно, $\Phi : Y^m \to X^n$ – гладкое отображение класса C^1 и $m \geqslant n$. Пусть ω – некоторая $(m-n)$– форма на Y^m, Ω – некоторая n – форма на X^n. Если K_Φ – множество особых точек отображения Φ , то предположим, что $\Phi(K_\Phi)$ является 0 – множеством. Тогда для почти всех $x \in X^n$ корректно определена функция

$$F(x) = \int_{\Phi^{-1}(x)} \omega$$

($= 0$, если $\Phi^{-1}(x) = \emptyset$) . Функция F измерима и суммируема относительно Ω , и имеет место равенство

$$\int_{Y^m} \omega \wedge \Phi^* \Omega = \int_{X^n} F \Omega$$

Замечание I.I.I. Если $\Phi \in C^{m-n+1}$, то в силу теоремы Сарда предположение, что $\Phi(K_\Phi)$ есть 0 – множество, можно опустить.

§ 2. Основная формула для вычисления объемов орбит.

Напомним сначала понятие объема риманова многообразия. Пусть M^n – риманово многообразие с римановой метрикой g_{ij} и $\{e_i\}$ ортонормированный базис касательного пространства $T_x M^n$ $\{\theta_i\}$ – сопряженный к нему базис. Определим элемент объема на многообразии M^n в точке x формулой

$$|dM^n|_x = |\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n| .$$

Это определение не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$. В координатах можно написать

$$|dM^n|_x = \sqrt{|g|}\;\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n ,$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Если многообразие M^n ориентировано, то можно определить ориентированный элемент объема dM^n, взяв базис $\{e_i\}$, согласованный с ориентацией на многообразии M^n; n - форма $(n = \dim M^n)$

$$dM^n = \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$$

не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$.

Под объемом риманова многообразия M^n с метрикой g_{ij} мы будем понимать интеграл (см. [7]):

$$vol(M^n) = \int_{M^n} |dM^n| = \int_{M^n} \sqrt{\det(g_{ij})}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

Пусть G - компактная группа Ли. Определим на G риманову метрику. Через R_a и L_a мы будем обозначать правые и левые сдвиги группы Ли G, т.е. $R_a(x) = xa$, $L_a(x) = ax$.

<u>Определение I.2.I</u>. Пусть G - группа Ли. Риманова метрика g на группе Ли G называется биинвариантной, если L_x и R_x являются изометриями относительно g для всех $x \in G$.

Если скалярное произведение (X, Y) на $T_e(G) = G$ инвариантно относительно преобразований Ad_x, то, используя его, можно следующим образом построить биинвариантную метрику на группе Ли G. Продолжим (X, Y) левыми сдвигами до римановой метрики на G, т.е. для любых $\xi, \eta \in T_x G$ определим $(\xi, \eta)_x$ по

формуле $(\xi,\eta)_x=(L_{x^{-1}*}(\xi),L_{x^{-1}*}(\eta))$ (см. [I5]).
Ясно, что эта метрика инвариантна относительно всех левых сдвигов. Из условия инвариантности метрики (X,Y) относительно присоединенного представления Ad_x, $x\in G$:

$$(Ad_x X, Ad_x Y)=(X,Y), \quad X,Y\in T_e G = G$$

следует биинвариантность построенной метрики на группе Ли G .

На алгебре Ли компактной группы Ли G легко указать скалярное произведение $(X,Y)_K$, инвариантное относительно присоединенного представления Ad_x, $x\in G$ (см. [I4]) :

$$(X,Y)_K=-Tr\ ad_X ad_Y \quad , \quad X,Y\in G=T_e G .$$

Это, так называемое, скалярное произведение Киллинга. Оно положительно определено и инвариантно, т.е. $(Ad_x X, Ad_x Y)_K=(X,Y)_K$, $X, Y\in G$.

Итак, любая компактная группа Ли является римановым многообразием, причем его метрика инвариантна как относительно правых, так и относительно левых сдвигов.

Пусть G - компактная группа Ли, а H - ее замкнутая подгруппа. Определим действие группы Ли H на G с помощью внутренних автоморфизмов: $\hat{h}(g)=hgh^{-1}$, где $h\in H$, $g\in G$.

Через $O(g)$ обозначим орбиту элемента $g\in G$ относительно этого действия, т.е. $O(g)=\{hgh^{-1}\mid h\in H\}$, где $g\in G$. Если B - подгруппа в H , то через $O_B(g)$ обозначим орбиту элемента $g\in G$ относительно подгруппы $B\subset H$, т.е.

$$O_B(g)=\{hgh^{-1}\mid h\in B\}.$$

Имеет место следующая основная теорема.

<u>Теорема I.2.I.</u> Пусть $g \in \mathcal{G}$ – произвольный элемент компактной матричной группы Ли $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ – ее замкнутая подгруппа, действующая на $\mathcal{G}$ присоединенным образом, $\mathcal{Z}(g) = \{h \in \mathcal{H} \mid hg = gh\}$ – централизатор элемента g при этом действии. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис пространства H по модулю алгебры Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{Z}(g)$ (H – алгебра Ли группы Ли $\mathcal{H}$). Тогда

$$vol\, \mathcal{O}(g) = \frac{vol\, \mathcal{H}}{vol\, \mathcal{Z}(g)} \sqrt{\frac{det\, \| (f_i, f_j)_K \|}{det\, \| (e_i, e_j)_K \|}}$$

где $f_i = g^{-1} e_i g - e_i$, $(X, Y)_K$ – метрика Киллинга алгебры Ли G.

<u>Доказательство.</u> Докажем сначала теорему для случая, когда централизатор элемента $g \in \mathcal{G}$ тривиален, т.е. $\mathcal{Z}(g) = e$.

Рассмотрим каноническое отображение

$$\alpha_g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}(g), \quad \alpha_g(h) = hgh^{-1} = \hat{h}(g)$$

$h \in \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{G}$, группы Ли $\mathcal{H}$ на орбиту $\mathcal{O}(g)$. Поскольку $\mathcal{Z}(g) = e$, то α_g – диффеоморфизм. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис алгебры Ли H группы Ли $\mathcal{H}$. Построим на группе Ли $\mathcal{H}$ левоинвариантные векторные поля Z_i $(i = 1, \dots, n)$, отвечающие базису $e_1, \dots, e_n$.

$$Z_i(h) = (L_h)_* e_i \quad , \quad h \in \mathcal{H}.$$

В матричном случае $Z_i(h) = he_i$, $i = 1, \dots, n$. В силу левоинвариантности этих полей метрический тензор h_{ij} биинвариантной римановой метрики на $\mathcal{H}$ постоянен в следующем смысле

$$h_{ij}(h) = (Z_i(h), Z_j(h)) = ((L_{h^{-1}} L_h)_* e_i, (L_{h^{-1}} L_h)_* e_j) = (e_i, e_j)_K = const$$

$$= \left(hg^{-1}h^{-1}h(e_i g - g e_i)h^{-1},\ hg^{-1}h^{-1}h(e_j g - g e_j)h^{-1} \right)_K =$$

$$= \left(h(g^{-1}e_i g - e_i)h^{-1},\ h(g^{-1}e_j g - e_j)h^{-1} \right)_K =$$

$$= \left(Ad_h f_i,\ Ad_h f_j \right)_K = (f_i, f_j)_K = const$$

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ – двойственный базис I-форм на орбите $\mathcal{O}(g)$ по отношению к векторным полям $X_1, \ldots, X_n$.

Тогда

$$vol\ \mathcal{O}(g) = \int_{\mathcal{O}(g)} \sqrt{\det(g_{ij})}\ \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n = \sqrt{\det(g_{ij})} \int_{\mathcal{O}(g)} \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$$

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – двойственный базис I-форм на группе $\mathcal{H}$ по отношению к векторным полям $Z_1, \ldots, Z_n$.

Ясно, что $\omega_i = \alpha_g^*(\theta_i)$. Поэтому $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n = \alpha_g^*(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n)$ и

$$\int_{\mathcal{H}} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n = \int_{\mathcal{H}} \alpha_g^*(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) = \int_{\mathcal{O}(g)} \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$$

С другой стороны

$$vol\ \mathcal{H} = \int_{\mathcal{H}} \sqrt{\det(h_{ij})}\ \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n = \left(\int_{\mathcal{H}} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \right) \sqrt{\det(h_{ij})}.$$

Сравнивая получившиеся равенства, имеем

$$vol\ \mathcal{O}(g) = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{\sqrt{\det(h_{ij})}}\ vol\ \mathcal{H} = \frac{\sqrt{\det \|(f_i, f_j)_K\|}}{\sqrt{\det \|(e_i, e_j)_K\|}}\ vol\ \mathcal{H}.$$

Итак, в этом частном случае теорема доказана.

Докажем теперь утверждение теоремы в общем случае. Рассмотрим каноническое отображение

$$\alpha_g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}(g), \quad \alpha_g(h) = hgh^{-1}, \qquad h \in \mathcal{H},\ g \in \mathcal{G}.$$

Ясно, что отображение α_g является локально тривиальным расслоением, причем слой F_x над точкой $x = hgh^{-1} \in \mathcal{O}(g)$ диффеоморфен централизатору $\mathcal{Z}(g)$ элемента g. Более того, $F_x = L_h(\mathcal{Z}(g))$.

Пусть ω_0 – форма "объема слоя" на группе Ли $\mathcal{G}$, т.е. s-форма $(s = \dim \mathcal{Z}(g))$, определенная следующим образом: если $A_1, \ldots, A_s$ – касательные вектора к слою $F_x = \alpha_g^{-1}(x)$ в точке $h \in F_x$, то значение формы на $A_1, \ldots, A_s$ равно объему натянутого на эти вектора s-мерного параллелепипеда, другими словами $|\omega_0(A_1,\ldots,A_s)| = \sqrt{\det(A_1,\ldots,A_s)}$, где $(A_1,\ldots,A_s)$ – матрица Грама системы векторов $A_1, \ldots, A_s$. Если $A_1, \ldots, A_s$ не лежат в касательной плоскости к слою, то $|\omega_0(A_1,\ldots,A_s)| = \sqrt{\det(\pi(A_1),\ldots,\pi(A_s))}$, где $\pi : T_h\mathcal{G} \to T_h F_x$ – ортогональная проекция касательного пространства к группе на касательное пространство к слою. Пусть ω – форма объема на орбите $\mathcal{O}(g)$. Тогда, применяя к указанным формам теорему Фубини, имеем

$$\int_{\mathcal{G}} \omega_0 \wedge \alpha_g^*(\omega) = \int_{\mathcal{O}(g)} \left(\int_{F_x} \omega_0 \right) \omega$$

<u>Лемма I.2.I.</u> Значение интеграла $\int_{F_x} \omega_0$ не зависит от точки $x \in \mathcal{O}(g)$.

<u>Доказательство.</u> Из определения формы ω_0 следует, что при ограничении ω_0 на слой она переходит в стандартную форму объема слоя. Поэтому

$$\int_{F_x} \omega_0 = \operatorname{vol} F_x$$

Но, как было сказано выше, слой F_x получается из слоя $F_g = \mathcal{L}(g)$ с помощью левого сдвига на элемент $h \in \mathcal{H}$. Относительно биинвариантной метрики на группе Ли $\mathcal{H}$ левые сдвиги являются изометриями, поэтому

$$vol\, F_x = vol\, \mathcal{L}(g) = const$$

Лемма доказана.

Таким образом, имеем

$$\int_{\mathcal{H}} \omega_0 \wedge \alpha_g^*(\omega) = \int_{O(g)} \left(\int_{F_x} \omega_0 \right) \omega =$$

$$= \int_{F_x} \omega_0 \int_{O(g)} \omega = vol\, \mathcal{L}(g)\, vol\, O(g)$$

Пусть Ω – форма объема на группе Ли $\mathcal{H}$. Ясно, что формы $\omega_0 \wedge \alpha_g^*(\omega)$ и Ω пропорциональны, т.е.

$$\omega_0 \wedge \alpha_g^*(\omega) = f(h)\, \Omega$$

Вычислим функцию $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис алгебры Ли H группы Ли $\mathcal{H}$ по модулю алгебры Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{L}(g)$, т.е. $e_1, \ldots, e_n$ – базис в ортогональном дополнении в H к алгебре Ли $C(g)$. Пусть $e_{n+1}, \ldots, e_{n+s}$ – базис алгебры $C(g)$. Тогда $e_1, \ldots, e_{n+s}$ – базис алгебры Ли H. Рассмотрим левоинвариантные векторные поля Z_i $(i = 1, \ldots, n+s)$, отвечающие базису $e_1, \ldots, e_{n+s}$:

$$Z_i(h) = (L_h)_* e_i = h e_i \qquad , i = 1, \ldots, n+s.$$

В силу бинвариантности метрики h_{ij} поля Z_k $(k=1,\dots,n)$ и Z_ℓ $(\ell=n+1,\dots,n+s)$ ортогональны в каждой точке $h\in h_y$. Кроме того поля Z_ℓ $(\ell=n+1,\dots,n+s)$ являются касательными к слоям F_x. Сравним теперь значение форм $\omega_0\wedge\alpha_g^*(\omega)$ и Ω на векторных полях $Z_1,\dots,Z_{n+s}$. В точке $h\in h_y$ имеем

$$\Omega(Z_1,\dots,Z_{n+s})=\sqrt{\det(Z_1,\dots,Z_{n+s})}=\sqrt{\det(Z_1,\dots,Z_n)}\sqrt{\det(Z_{n+1},\dots,Z_{n+s})}=$$

$$=\sqrt{\det\|(e_i,e_j)_K\|}\sqrt{\det(Z_{n+1},\dots,Z_{n+s})}$$

Далее $\omega_0\wedge\alpha_g^*(\omega)(Z_1,\dots,Z_{n+s})=\omega_0(Z_{n+1},\dots,Z_{n+s})\alpha_g^*(\omega)(Z_1,\dots,Z_n)$, поскольку поля $Z_1,\dots,Z_n$ ортогональны касательной плоскости к слою, и поэтому $\pi(Z_i)=0$ $(i=1,\dots,n)$. Таким образом,

$$\omega_0\wedge\alpha_g^*(\omega)\ (Z_1,\dots,Z_{n+s})=$$

$$=\omega_0(Z_{n+1},\dots,Z_{n+s})\ \omega(d\alpha_g(Z_1),\dots,d\alpha_g(Z_n))=$$

$$=\sqrt{\det(Z_{n+1},\dots,Z_{n+s})}\ \sqrt{\det(d\alpha_g(Z_1),\dots,d\alpha_g(Z_n))}$$

В первой части доказательства было показано, что $(d\alpha_g)_h(Z_i)=$ $=h(e_ig-ge_i)h^{-1}$. По определению метрики на орбите имеем

$$(d\alpha_g(Z_i),d\alpha_g(Z_j))=((L_{hg^{-1}h^{-1}})_*d\alpha_g(Z_i),(L_{hg^{-1}h^{-1}})_*d\alpha_g(Z_j))_K=$$

$$=(Ad_h(g^{-1}e_ig-e_i),Ad_h(g^{-1}e_jg-e_j))_K=(Ad_hf_i,Ad_hf_j)_K=(f_i,f_j)_K$$

Итак, $\omega_0\wedge\alpha_g^*(\omega)=\sqrt{\dfrac{\det\|(f_i,f_j)_K\|}{\det\|(e_i,e_j)_K\|}}\ \Omega$. Поэтому

$$\int_{h_y}\omega_0\wedge\alpha_g^*(\omega)=\sqrt{\frac{\det\|(f_i,f_j)_K\|}{\det\|(e_i,e_j)_K\|}}\int_{h_y}\Omega=\sqrt{\frac{\det\|(f_i,f_j)_K\|}{\det\|(e_i,e_j)_K\|}}\ \mathrm{vol}\, h_y.$$

откуда и следует утверждение теоремы.

§ 3. Связь объемов орбит регулярных и сингулярных элементов.

В этом параграфе мы изучим несколько иную метрику на орбитах присоединенного действия подгруппы $\mathcal{H}$ на группе $\mathcal{G}$, связанную с однородностью орбиты. На любом однородном пространстве имеется так называемая нормальная однородная риманова метрика. Напомним ее построение применительно к нашему случаю. Любая орбита $\mathcal{O}(g)$ является однородным пространством, причем $\mathcal{O}(g)=\mathcal{H}/\Sigma(g)$, где $\Sigma(g)$ - централизатор элемента g, т.е. $\Sigma(g)=\{h\in\mathcal{H} \mid hg=gh\}\subset\mathcal{H}$.

Пусть снова $\mathcal{G}$ - компактная линейная группа Ли, а $\mathcal{H}$ - её замкнутая подгруппа. Группа $\mathcal{H}$ действует на $\mathcal{G}$ присоединенным образом, т.е. $\hat{h}(x)=hxh^{-1}$, $h\in\mathcal{H}$, $x\in\mathcal{G}$. Через $\mathcal{O}(g)$ мы обозначим орбиту элемента $g\in\mathcal{G}$ относительно этого действия. Если $\mathcal{B}$ - подгруппа в $\mathcal{H}$, то через $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(g)$ обозначим орбиту элемента $g\in\mathcal{G}$ относительно подгруппы $\mathcal{B}\subset\mathcal{H}$.

Для произвольного элемента $g\in\mathcal{G}$ определено отображение $\alpha_g:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{O}(g)$ группы Ли $\mathcal{H}$ на орбиту $\mathcal{O}(g)$ по формуле

$$\alpha_g(h)=\hat{h}(g)=hgh^{-1}.$$

Пусть $d\alpha_g$ обозначает дифференциал отображения α_g в единице $e\in\mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$. Ортогональное дополнение в H к подпространству $A\subset H$ относительно метрики Киллинга алгебры Ли H группы Ли $\mathcal{H}$ обозначим через $A^{\perp}$. Имеет место изоморфизм линейных пространств $d\alpha_g:(\ker\alpha_g)^{\perp}\to T_g\mathcal{O}(g)$.

<u>Определение I.3.I</u>. Метрикой Киллинга на орбите $\mathcal{O}(g)$ назо-

вем метрику (ξ, ζ), $\xi, \zeta \in T_g \mathcal{O}(g)$, определенную равенством

$$(\xi, \zeta) = (\, d\alpha_g^{-1}(\xi), d\alpha_g^{-1}(\zeta))_K ,$$

здесь $d\alpha_g : (\ker d\alpha_g)^{\perp} \to T_g \mathcal{O}(g)$ – изоморфизм, поэтому имеет смысл говорить о $d\alpha_g^{-1} : T_g \mathcal{O}(g) \longrightarrow (\ker d\alpha_g)^{\perp}$.

Итак, каждая орбита $\mathcal{O}(g)$, $g \in \mathcal{G}$, является римановым многообразием. Оказывается между объемами орбит различных элементов имеется в некоторых случаях простая связь.

<u>Теорема I.3.I</u>. Пусть a и b – такие элементы группы Ли G, что имеет место включение $\Sigma(a) \subset \Sigma(b)$, где $\Sigma(a)$– централизатор элемента a в группе Ли G, т.е. $\Sigma(a) = \{h \in G \mid ha = ah\}$, аналогично $\Sigma(b) = \{h \in G \mid hb = bh\}$. Тогда относительно метрики Киллинга на орбитах имеет место равенство

$$\operatorname{vol} \mathcal{O}(b) = \frac{\operatorname{vol} \mathcal{O}(a)}{\operatorname{vol} \mathcal{O}_{\Sigma(b)}(a)}$$

<u>Доказательство</u>. Сначала изложим некоторые конструкции, которые нам потребуются для доказательства нашего утверждения.

<u>Лемма I.3.I</u>. Пусть a, b – такие элементы группы Ли G, что $\Sigma(a) \subset \Sigma(b)$. Тогда имеет место естественное локально тривиальное расслоение орбиты $\mathcal{O}(a)$ над орбитой $\mathcal{O}(b)$, т.е. имеется естественное отображение $\varphi : \mathcal{O}(a) \longrightarrow \mathcal{O}(b)$, являющееся локально тривиальным расслоением.

<u>Доказательство</u>. Определим отображение φ формулой $\varphi(\hat{h}(a)) = \hat{h}b$. Проверим корректность этого определения. Пусть $\hat{h}_1(a) = \hat{h}_2(a)$. Надо доказать, что $\hat{h}_1(b) = \hat{h}_2(b)$. Если $\hat{h}_1(a) = \hat{h}_2(a)$, то $\widehat{h_2^{-1} h_1}(a) = a$ или $h = h_2^{-1} h_1 \in \Sigma(a) \subset \Sigma(b)$. Поэтому $h_1 = h_2 h$ и, следовательно, $\hat{h}_1(b) = \hat{h}_2(\hat{h}(b)) = \hat{h}_2(b)$.

где $h \in \mathfrak{I}(b)$.

Обозначим через F_b слой этого расслоения над точкой $b \in \mathcal{O}(b)$.

Лемма I.3.2. Слой F_b совпадает с орбитой $\mathcal{O}_{\mathfrak{I}(b)}(a)$ элемента a относительно подгруппы $\mathfrak{I}(b)$.

Доказательство. Надо найти все такие элементы $\hat{g}(a)$, что $\varphi(\hat{g}(a)) = b$, т.е. $\hat{g}(b) = b$. Откуда $g \in \mathfrak{I}(b)$, а это и означает, что $F_b = \mathcal{O}_{\mathfrak{I}(b)}(a)$, что и утверждалось.

Лемма I.3.3. Пусть $\hat{h}(b) = hbh^{-1}$. Тогда $F_{\hat{h}(b)} = \hat{h}(F_b)$.

Доказательство. Имеем $F_{\hat{h}(b)} = \{\hat{g}(a) \mid \varphi(\hat{g}(a)) = \hat{h}(b)\}$. Пусть $\varphi(\hat{g}(a)) = \hat{g}(b) = \hat{h}(b)$. Тогда $\widehat{h^{-1}g} = l \in \mathfrak{I}(b)$, т.е. $\widehat{h^{-1}g}(b) = b$. Следовательно,

$$F_{\hat{h}(b)} = (\widehat{h\,\mathfrak{I}(b)})(a) = \hat{h}(\widehat{\mathfrak{I}(b)})(a) =$$

$$= \hat{h}(\mathcal{O}_{\mathfrak{I}(b)}(a)) = \hat{h}(F_b),$$

и лемма доказана.

Предложение I.3.I. Пусть $g = (g_{ij})$ - метрика Киллинга на орбите $\mathcal{O}(a)$, $h = (h_{ij})$ - метрика Киллинга на орбите $\mathcal{O}(b)$, причем имеет место включение $\mathfrak{I}(a) \subset \mathfrak{I}(b)$. Тогда имеем локально тривиальное расслоение $\varphi : \mathcal{O}(a) \to \mathcal{O}(b)$. Утверждается, что для любых $X, Y \in (\ker d\varphi)^{\perp}$ имеет место равенство

$$g(X,Y) = h(d\varphi(X), d\varphi(Y))$$

где $d\varphi : T_a\mathcal{O}(a) \to T_b\mathcal{O}(b)$ - дифференциал отображения φ в точке a.

Доказательство. Напомним построение метрики Киллинга на орбите. Имеем два отображения: $\alpha_a : \mathfrak{g} \to \mathcal{O}(a)$ и $\alpha_b : \mathfrak{g} \to \mathcal{O}(b)$. Пусть $V = \ker(d\alpha_a)_e$, $W = \ker(d\alpha_b)_e$. Имеем изоморфизм линейных пространств

$$d\alpha_a : V^{\perp} \longrightarrow T_a \mathcal{O}(a),$$

$$d\alpha_b : W^{\perp} \longrightarrow T_b \mathcal{O}(b).$$

Обозначим через Q ядро отображения $d\varphi$ в точке a, т.е.

$$Q = \ker d\varphi = T_a \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a)$$

Отображение $d\varphi : T_a\mathcal{O}(a) \to T_b\mathcal{O}(b)$ отображает $Q^{\perp}$ изоморфно на $T_b\mathcal{O}(b)$. Из включения $\mathcal{Z}(a) \subset \mathcal{Z}(b)$ следует включение $V = C(a) \subseteq W = C(b)$ и, следовательно, $W^{\perp} \subset V^{\perp}$.

Итак, имеем отображение $d\alpha_a : H = (\ker d\alpha_a)^{\perp} \oplus (\ker d\alpha_a) \to T_a\mathcal{O}(a)$. Поскольку $\ker (d\alpha_a|_{V^{\perp}}) = 0$, то можно говорить об отображении $d\alpha_a^{-1} : T_a\mathcal{O}(a) \longrightarrow (\ker d\alpha_a)^{\perp}$. По определению мы имеем для $\xi, \eta \in T_a\mathcal{O}(a)$ равенство

$$(\xi, \eta) = (d\alpha_a^{-1}(\xi), d\alpha_a^{-1}(\eta)),$$

где $(X, Y)_K$ – метрика Киллинга на алгебре Ли $H = L(\mathfrak{h})$.

Лемма I.3.4. Имеет место равенство $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a) = \alpha_a(\mathcal{Z}(b))$.

Доказательство. Поскольку $\alpha_a(\mathcal{Z}(b)) =$
$= \{\alpha_a(x) \mid x \in \mathcal{Z}(b)\} = \{x a x^{-1} \mid x \in \mathcal{Z}(b)\}$
и $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a) = \{h a h^{-1} \mid h \in \mathcal{Z}(b)$, то $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a) = \alpha_a(\mathcal{Z}(b))$.

Лемма I.3.5. Имеет место равенство $Q = T_a \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a) = d\alpha_a(W)$, где $W = \ker d\alpha_b$.

Доказательство. Поскольку $\alpha_a(e) = a$, то

$$d\alpha_a : T_e \mathcal{Z}(b) \longrightarrow T_a \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a)$$

и

$$Q = T_a \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a) = d\alpha_a(T_e \mathcal{Z}(b)) = d\alpha_a(W).$$

Лемма I.3.6. Имеет место равенство $Q^{\perp} = d\alpha_a(W^{\perp})$.

Доказательство. Пусть $\xi \in d\alpha_a(W^{\perp})$. Покажем, что $\xi \in Q^{\perp}$.

т.е. покажем, что $(\xi,\eta)=0$ для любого $\eta\in Q=d\alpha_a(W)$, или для любого $\eta=d\alpha_a(\bar\eta)$, где $\bar\eta\in W$.

Если $\xi\in d\alpha_a(W^\perp)$, то $\xi=d\alpha_a(\bar\xi)$, $\bar\xi\in W^\perp$. Тогда

$$(\xi,\eta)=(d\alpha_a(\bar\xi),\ d\alpha_a(\bar\eta))=$$
$$((d\alpha_a)^{-1}d\alpha_a(\bar\xi),(d\alpha_a)^{-1}d\alpha_a(\bar\eta))_K=$$
$$=(\bar\xi,\bar x)$$

где $\bar\xi\in W^\perp$, $x\in W$. Имеем

$$(d\alpha_a^{-1})(d\alpha_a(\bar\xi))=\bar\xi\in W^\perp,$$

так как $\bar\xi\in W^\perp\subset V^\perp$. Далее $x=d\alpha_a^{-1}d\alpha_a(\bar\eta)\in W$, $\bar\eta\in W$. Действительно, пусть $\omega\in W$, в этом случае можно написать, что $d\alpha_a^{-1}(d\alpha_a(\omega))=\omega_1+\omega_2$, где $\omega_1\in W$, $\omega_2\in W^\perp$. Предположим, что $\omega_2\neq 0$. Применим оператор $d\alpha_a$ к равенству $\omega_1+\omega_2=d\alpha_a^{-1}(d\alpha_a(\omega))$, получим $d\alpha_a(\omega)=d\alpha_a(\omega_1+\omega_2)$. Отсюда $\omega_1+\omega_2-\omega\in\ker d\alpha_a=V\subset W$, поэтому $\omega_1+\omega_2-\omega=\omega_3\in W$ и, следовательно,

$$W^\perp\ni\omega_2=\omega_3+\omega-\omega_1\in W,$$

поскольку $\omega_3\in W$, $\omega\in W$, $\omega_1\in W$. Поэтому $\omega_2=0$. Таким образом, $d\alpha_a^{-1}d\alpha_a(W)\subset W$.

Докажем теперь предложение. Проверим, что $\alpha_b=\varphi\circ\alpha_a$. Действительно, $\alpha_b(h)=hbh^{-1}$,

$$(\varphi\circ\alpha_a)h=\varphi(\alpha_a(h))=\varphi(hah^{-1})=\hat h(b)=hbh^{-1}.$$

Итак имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Q^\perp \arrow[rr, "d\varphi"'] & & T_b\,O(b) \\
& W^\perp \arrow[ul, "d\alpha_a"] \arrow[ur, "d\alpha_b"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой все отображения являются изоморфизмами. Итак, $d\alpha_a^{-1} = d\alpha_b^{-1}\circ d\varphi$. Проверим равенство $(\xi,\eta) = (d\varphi(\xi), d\varphi(\eta))$, $\xi,\eta\in Q^{\perp}$.
Поскольку $(\xi,\eta) = (d\alpha_a^{-1}(\xi), d\alpha_a^{-1}(\eta))$, то

$$(d\varphi(\xi), d\varphi(\eta)) = ((d\alpha_b)^{-1} d\varphi(\xi), (d\alpha_b)^{-1} d\varphi(\eta)) =$$

$$= (d\alpha_a^{-1}(\xi), d\alpha_a^{-1}(\eta)) = (\xi,\eta),$$

что и требовалось доказать.

Отметим также следующее важное свойство построенной выше метрики Киллинга на орбитах $O(g)$.

Лемма I.3.7. Рассмотрим отображение $\hat{a}: O(g)\to O(g)$, $a\in \mathfrak{H}$, $\hat{a}(x) = axa^{-1}$. Относительно метрики Киллинга на орбите $O(g)$ все отображения $\hat{a}$, $a\in\mathfrak{H}$, являются изометриями.

Доказательство разобьем на четыре этапа.

I. Поскольку $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(aha^{-1}) = a\mathcal{I}(h)a^{-1}$, то $V_1 = aV_2a^{-1} = \mathrm{Ad}_a V_2$, где $V_1 = \ker d\alpha_g$ и $V_2 = \ker d\alpha_h$.

2. Имеет место равенство $V_1^{\perp} = \mathrm{Ad}_a(V_2^{\perp})$. Действительно, пусть $x = \mathrm{Ad}_a(\omega)$, $\omega\in V_2^{\perp}$. Покажем, что $x\in V_1^{\perp}$, т.е. $(x,y) = 0$ для всех $y\in V_1$. Произвольный элемент $y\in V_1$ имеет вид $y = \mathrm{Ad}_a\bar\omega$, $\bar\omega\in V_2^{\perp}$. Проверим, что $(x,y)=0$. Поскольку метрика Киллинга на алгебре Ли инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, то

$$(x,y) = (\mathrm{Ad}_a\omega, \mathrm{Ad}_a\bar\omega) = (\omega,\bar\omega) = 0 .$$

3. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V_1^{\perp} \arrow[r, "d\alpha_g"'] & T_g O(g) \\
V_2^{\perp} \arrow[u, "\mathrm{Ad}_a"] \arrow[r, "d\alpha_h"'] & T_h O(g) \arrow[u, "d\hat{a}"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Если $g = aha^{-1}$, то $\alpha_g \circ \hat{a} = \hat{a} \circ \alpha_h$, так как

$$\alpha_g \circ \hat{a}(x) = \alpha_g(axa^{-1}) = axa^{-1}g(axa^{-1})^{-1} =$$
$$= axa^{-1}g\,ax^{-1}a^{-1} = axhx^{-1}a^{-1} =$$
$$= a(xhx^{-1})a^{-1} = \hat{a}(\alpha_h(x))$$

Поэтому $d\alpha_g \circ d\hat{a} = d\hat{a} \circ d\alpha_h$, т.е. $d\alpha_g \circ Ad_a = d\hat{a} \circ d\alpha_h$, так как дифференциал отображения $\hat{a}$ в единице группы есть $Ad\,a$, см. [1], [8], [23].

4. По определению метрики имеем равенство

$$(\xi, \eta) = \left(d\alpha_h^{-1}(\xi),\, d\alpha_h^{-1}(\eta)\right),$$

где $\xi, \eta \in T_h O(g)$. Поэтому нам надо проверить равенство

$$\left(d\alpha_h^{-1}(\xi),\, d\alpha_h^{-1}(\eta)\right) = \left(d\alpha_g^{-1}d\hat{a}(\xi),\, d\alpha_g^{-1}d\hat{a}(\eta)\right).$$

Из утверждения 3 следует соотношение $Ad_{a^{-1}} \circ d\alpha_g^{-1} = d\alpha_h^{-1} \circ d\hat{a}^{-1}$, поэтому $d\alpha_h^{-1} = Ad_{a^{-1}} \circ d\alpha_g^{-1} \circ d\hat{a}$. Тогда

$$\left(d\alpha_h^{-1}(\xi),\, d\alpha_h^{-1}(\eta)\right) = \left(Ad_{a^{-1}}\, d\alpha_g^{-1} d\hat{a}(\xi),\, Ad_{a^{-1}}\, d\alpha_g^{-1} d\hat{a}(\eta)\right) =$$
$$= \left(d\alpha_g^{-1} d\hat{a}(\xi),\, d\alpha_g^{-1} d\hat{a}(\eta)\right),$$

что и утверждалось.

<u>Доказательство теоремы I.3.I.</u> Применим теорему Фубини (см. § I) к расслоению $\varphi: O(a) \to O(b)$. В качестве формы Ω возьмем форму объема орбиты $O(b)$ относительно метрики Киллинга на $O(b)$; в качестве формы ω – форму объема слоя. Тогда в силу теоремы Фубини имеет место равенство

$$\int_{O(a)} \omega \wedge \varphi^* \Omega = \int_{O(b)} \Big(\int_{\varphi^{-1}(x)} \omega \Big) \Omega$$

Здесь $\omega \wedge \varphi^* \Omega$ - элемент объема на $O(a)$ в силу предложения I.3.I. Далее

$$\int_{\varphi^{-1}(x)} \omega = const$$

в силу утверждений леммы I.3.7. и леммы I.3.3. Поэтому имеет место равенство

$$vol\ O(a) = \int_{F_b} \omega \int_{O(b)} \Omega = vol\ O(b)\ vol\ O_{\mathcal{I}(b)}(a)\,,$$

так как $F_b = O_{\mathcal{I}(b)}(a)$ (лемма I.3.2.) . Теорема доказана.

ГЛАВА 2

ОБЪЕМЫ ОРБИТ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ I. Объемы орбит представления изотропии для симметрических пространств

В этой главе мы будем рассматривать специальный класс однородных пространств G/H, так называемые симметрические пространства. Для этого специального случая рассмотрим гладкое действие $\hat{h}$ группы Ли H на G с помощью внутренних автоморфизмов $\hat{h}(x) = hxh^{-1}$, $h \in H$. Эту ситуацию в случае регулярных элементов $x \in G$ рассматривала И.С.Балинская.

Пусть G - связная группа Ли и пусть σ - инволютивный автоморфизм в G (т.е. $\sigma^2 = I$, $\sigma \neq I$). Пусть G_σ - замкнутая подгруппа в G, состоящая из всех точек G, инвариантных относительно σ, а G_σ' - компонента единицы в G_σ. Пусть H - замкнутая подгруппа, такая, что $G_\sigma \supset H \supset G_\sigma'$. Тогда мы будем говорить, что G/H - симметрическое однородное пространство (определенное по автоморфизму σ).

Каждое однородное пространство G/H, где G - группа Ли, а H - компактная подгруппа, допускает инвариантную метрику, доказательство см. в [23].

Симметрическое однородное пространство G/H, снабженное G - инвариантной римановой метрикой, называется глобально симметрическим римановым пространством.

С каждым глобально симметрическим римановым пространством G/H можно связать пару $(\mathfrak{G}, \sigma)$ со следующими свойствами: I) $\mathfrak{G}$ - алгебра Ли группы Ли G; 2) σ - инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}$; 3) множество

$$K = \{X \in \mathfrak{G} \mid \sigma(X) = X\}$$

является компактной подалгеброй в G , и K ,
$P = \{X \in G \mid \sigma(X) = -X\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[K,K] \subset K \quad , \quad [K,P] \subset P \quad , \quad [P,P] \subset K \; .$$

Пара (G,σ) называется ортогональной симметрической алгеброй Ли. Сопоставление ортогональной симметрической алгебры Ли с глобально симметрическим римановым пространством позволяет свести задачу классификации этих пространств к задаче классификации ортогональных симметрических алгебр Ли.

Глобально симметрическое риманово пространство называется неприводимым, если соответствующая ортогональная симметрическая алгебра Ли удовлетворяет следующим условиям : I) G – полупроста, а K не содержит отличных от 0 идеалов из G ; 2) K – максимальная собственная подалгебра в G .

Картан показал, что задача классификации глобально симметрических римановых пространств может быть сведена к задаче классификации неприводимых пространств, и решил последнюю задачу.

Мы перечислим здесь только те пространства из этой классификации, которые будем затем использовать – это компактные неприводимые глобально симметрические римановы пространства (тип I в классификации Картана). Перечислим классические симметрические пространства такого типа : пространство $SU(n)/SO(n)$ ранга $n-1$ и размерности $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$, пространство $SU(2n)/Sp(n)$ ранга $(n-1)$ и размерности $(n-1)(2n+1)$, пространство $SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ ранга $\min(p,q)$ и размерности $2pq$, пространство $SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$ ранга $\min(p,q)$ и размерности pq , пространство $SO(2n)/U(n)$ ранга $[\frac{n}{2}]$ и размерности $n(n-1)$, пространство $Sp(n)/U(n)$ ранга n и размерности $n(n+1)$, пространство $Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$ ранга $\min(p,q)$ и размерности $4pq$.

Итак, мы рассматриваем пары $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, которые определяют неприводимые симметрические римановы пространства. В этом случае формула для вычисления объемов орбит присоединенного действия $\mathcal{H}$ на $\mathcal{G}$ имеет следующий вид.

Пусть $g \in \mathcal{G}$ произвольный элемент группы Ли $\mathcal{G}$, $\mathcal{Z}(g)$ - его централизатор в подгруппе $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, $C(g)$ - алгебра Ли подгруппы $\mathcal{Z}(g) \subset \mathcal{H}$. Если $e_1, \dots, e_n$ - базис алгебры Ли H группы Ли $\mathcal{H}$ по модулю $C(g)$, т.е. базис в ортогональном дополнении к $C(g)$, и $f_i = g^{-1} e_i g - e_i$, то

$$vol\ \mathcal{O}(g) = const \sqrt{\frac{\det (f_i, f_j)_K}{\det (e_i, e_j)_K}}$$

здесь константа зависит от орбит - типа орбиты элемента $g \in \mathcal{G}$, см. доказательство теоремы I.2.I.

В качестве следствия этого алгоритма мы имеем следующее утверждение, позволяющее иногда вычислить объемы орбит не главного орбит-типа. Заметим, что вычисление объема орбит главного орбит-типа для присоединенного действия $\mathcal{H}$ на $\mathcal{G}$ фактически решается формулой Вейля [23]. Эта работа была выполнена И.С.Балинской.

<u>Теорема 2.I.I.</u> Пусть $a_n \to b$ при $n \to \infty$, причем имеет место включение $\mathcal{Z}(a_n) \subset \mathcal{Z}(b)$ и централизаторы всех элементов a_n совпадают, где $\mathcal{Z}(a)$ - централизатор элемента a в группе Ли $\mathcal{H}$, т.е. $\mathcal{Z}(a) = \{h \in \mathcal{H} \mid ha = ah\}$. Тогда

$$\operatorname{vol} \mathcal{O}(b) = c \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{vol} \mathcal{O}(a_n)}{\operatorname{vol} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(b)}(a_n)}$$

Доказательство. Пусть $C(a)$ – алгебра Ли централизатора $\mathcal{Z}(a_n)$. По условию он не зависит от n. Выберем базис $e_1,\dots,e_N$ пространства H по модулю $C(a)$ так, что $e_1,\dots,e_s \in C(b)$ и $e_i \perp C(a)$, $1\le i\le s$, $e_{s+1},\dots,e_N \perp C(b)$ (ортогональность понимается в смысле метрики Киллинга алгебры Ли H). Тогда

$$\operatorname{vol} \mathcal{O}(b) = c\sqrt{\frac{\det(f_{s+1},\dots,f_N)}{\det(e_{s+1},\dots,e_N)}}$$

где $f_i = b^{-1}e_i b - e_i$, $s+1\le i\le N$. Здесь $\det(e_1,\dots,e_k)$ обозначает матрицу Грамма системы векторов $(e_1,\dots,e_k)$ относительно метрики Киллинга. Далее, так как $e_i\perp e_j$ при $1\le i\le s$, $s+1\le j\le N$, то

$$\det(e_1,\dots,e_N) = \det(e_1,\dots,e_s)\det(e_{s+1},\dots,e_N)$$

Поэтому

$$\operatorname{vol} \mathcal{O}(b) = c\sqrt{\frac{\det(f_{s+1},\dots,f_N)}{\det(e_1,\dots,e_s)\det(e_{s+1},\dots,e_N)}}\sqrt{\det(e_1,\dots,e_s)} =$$

$$= c\sqrt{\frac{\det(f_{s+1},\dots,f_N)}{\det(e_1,\dots,e_N)}}\sqrt{\det(e_1,\dots,e_s)}\,.$$

Далее,

$$vol\ \mathcal{O}(a) = c\sqrt{\frac{\det(f_1', \dots, f_N')}{\det(e_1, \dots, e_N)}}$$

где $f_i' = a^{-1}e_i a - e_i \quad , \quad 1 \le i \le N$.

а) Утверждается, что $f_1', \dots, f_s' \in C(b)$ и $f_1', \dots, f_s' \in C(a)^{\perp}$. Действительно, $e_i \in C(b)$ и $e_i \perp C(a)$, следовательно, для $\xi \in C(a)$ имеем $(Ad_a e_i , \xi) = (e_i , Ad_{a^{-1}} \xi) = 0$, так как $e_i \perp C(a)$, $Ad_{a^{-1}} \xi \in C(a)$, т.е. $Ad_a e_i \in C(a)^{\perp}$ и, следовательно, $Ad_a e_i - e_i \in C(a)^{\perp}$.

Далее, $Ad_a e_i \in C(b)$. Действительно, так как $\mathfrak{L}(a) \subset \mathfrak{L}(b)$, то $Ad_a \mathfrak{L}(a) \subset \mathfrak{L}(b)$ и, следовательно, $Ad_a \xi \in C(b)$ для $\xi \in C(b)$.

Действительно, если $xb = bx$ (т.е. $x \in \mathfrak{L}(b)$) , то $(axa^{-1})b = b(axa^{-1})$, т.е. $Ad_a x \in \mathfrak{L}(b)$ (так как $ab = ba$, что следует из включения $\mathfrak{L}(a) \subset \mathfrak{L}(b)$) .

б) Утверждается, что $f_{s+1}', \dots, f_N' \in C(b)^{\perp}$. Действительно, для $s+1 \le i \le N$ и $\xi \in C(b)$ имеем

$$(Ad_a e_i, \xi) = (e_i , Ad_{a^{-1}} \xi) = 0$$

так как в пункте а) мы уже проверили, что $Ad_a C(b) \subset C(b)$.

в) Итак, $\det(f_1', \dots, f_N') = \det(f_1', \dots, f_s') \det(f_{s+1}', \dots, f_N')$.

г) Поэтому имеем равенства

$$vol\ \mathcal{O}(b) = c\sqrt{\frac{\det(f_{s+1}, \dots, f_N)}{\det(e_1, \dots, e_N)}}\sqrt{\det(e_1, \dots, e_s)} =$$

$$= c\sqrt{\frac{\det(f_1',\dots,f_N')}{\det(e_1,\dots,e_N)}}\sqrt{\frac{\det(e_1,\dots,e_s)}{\det(f_1',\dots,f_s')\det(f_{s+1}',\dots,f_N')}}\times$$

$$\times\sqrt{\det(f_{s+1},\dots,f_N)} =$$

$$= \frac{c\ \mathrm{vol}\, O(a)}{\sqrt{\dfrac{\det(f_1',\dots,f_s')}{\det(e_1,\dots,e_s)}}}\ \frac{\sqrt{\det(f_{s+1},\dots,f_N)}}{\sqrt{\det(f_{s+1}',\dots,f_N')}}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ получим наше утверждение, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\det(f_{s+1},\dots,f_N)}}{\sqrt{\det(f_{s+1}',\dots,f_N')}} = 1$$

и в силу основного алгоритма для вычисления объемов имеет место равенство

$$\mathrm{vol}\, O_{\mathcal{L}(B)}(a) = \sqrt{\frac{\det(f_1',\dots,f_s')}{\det(e_1,\dots,e_s)}}\ \mathrm{const}$$

§ 2. Вычисления в случае пространства $SU(n)/SO(n)$

Напомним определения классических матричных групп Ли, см. [13].

Ортогональная группа $O(n)$ состоит из матри размера $n\times n$ с вещественными коэффициентами и с условием $A^tA=E$, где A^t – матрица, транспонированная к A.

Специальная ортогональная группа $SO(n)$ состоит из ортогональных матриц с определителем, равным единице.

Унитарная группа $U(n)$ состоит из комплексных матриц размера $n \times n$, удовлетворяющих условию $A\bar{A}^t = E$, где $\bar{A}$ – матрица, элементы которой комплексно сопряжены с соответствующими элементами матрицы A, т.е. если $A = (a_{ij})$, то $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$.

Специальная унитарная группа $SU(n)$ состоит из унитарных матриц с определителем, равным единице.

Этим группам Ли отвечают следующие алгебры Ли. Коммутатор во всех случаях – обычный матричный коммутатор $[A,B] = AB - BA$.

Алгебра Ли $so(n)$ состоит из всех вещественных матриц размера $n \times n$, удовлетворяющих условию $A^t = -A$ (кососимметрические матрицы).

Алгебра Ли $u(n)$ состоит из всех комплексных матриц размера $n \times n$, удовлетворяющих условию $\bar{A}^t = -A$. В частности, на диагонали у них стоят чисто мнимые элементы. Такие матрицы называются косоэрмитовыми.

Алгебра Ли $su(n)$ состоит из косоэрмитовых матриц со следом нуль.

В этом параграфе мы рассмотрим случай $H = SO(n)$, $G = SU(n)$, вложение $H \subset G$ стандартное.

<u>Теорема 2.2.1.</u> Если $g = diag(e^{i\varphi}, e^{i\varphi}, e^{i\varphi_3}, \dots, e^{i\varphi_n})$ – сингулярный элемент группы $SU(n)$ $(\varphi_i \neq \varphi_j,\ i \neq j,\ 3 \leq i,j \leq n)$, то

$$vol\, O_{SO(n)}(g) = const \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j > 2}} (1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j))^{1/2}$$

<u>Доказательство</u>. Централизатор $Z(g) = \{h \in SO(n) \mid hg = gh\}$ элемента g в группе $SO(n)$ имеет вид

$$\mathcal{L}(g) = \left\{ A = \begin{pmatrix} O(2) & & & & \\ & \pm 1 & & & \\ & & \pm 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \pm 1 \end{pmatrix},\ \det A = 1 \right\}$$

Алгебра Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{L}(g)$ имеет вид

$$C(g) = \left\{ B = \begin{pmatrix} so(2) & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Пусть E_{ij} – элементарная матрица, т.е.

$$E_{ij} = \| x_{kl} \| \quad , \ x_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

Тогда $e_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \quad (i<j)$ – базис алгебры Ли $so(n)$. Матрицы e_{ij} при $1 \le i < j \le n$, $j>2$ образуют базис алгебры Ли $so(n)$ по модулю алгебры Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{L}(g)$.

Простые вычисления показывают, что матрица $\| (f_{ij}, f_{kl}) \|$ диагональная, и на диагонали стоят элементы $(1-\cos(\varphi_i - \varphi_j))$, где $f_{ij} = g^{-1} e_{ij}\, g - e_{ij}$. Отсюда следует наше утверждение.

Рассмотрим теперь общий случай сингулярного элемента в группе Ли $SU(n)$.

<u>Теорема 2.2.2.</u> Если $g = diag(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}) \in SU(n)$, причем $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_s = \varphi$, $\varphi_i \ne \varphi_j$, $i \ne j$, $j > s$ (т.е. g – сингулярный элемент в группе Ли $SU(n)$) , то

$$\operatorname{vol} O_{SO(n)}(g) = \operatorname{const} \prod_{\substack{1\le i<j\le n \\ j>s}} \left(1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)\right)^{1/2}$$

<u>Доказательство</u> получается применением основного алгоритма. В этом случае базис алгебры Ли $SO(n)$ по модулю алгебры Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{Z}(g)$ образуют матрицы e_{ij} при $1\le i<j\le n$, $j>s$.

Это утверждение также следует из утверждения теоремы из § I главы 2 (теорема 2.I.I.), так как в этом случае, очевидно, все предположения этой теоремы выполнены.

§ 3. Вычисления в случае пространства $Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$.

В этом параграфе мы рассмотрим случай $\mathfrak{h} = Sp(p)\times Sp(q)$, $\mathcal{G} = Sp(p+q)$, вложение $\mathfrak{h}\subset\mathcal{G}$ стандартное, если

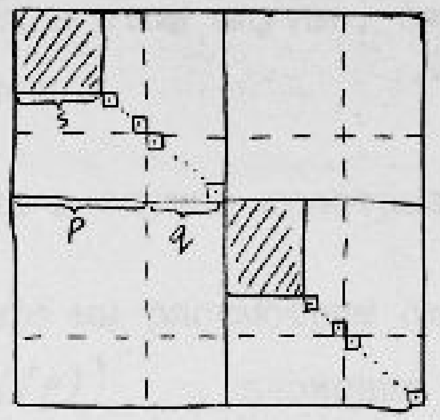
$$A = \underset{Sp(p)}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}}}, \quad B = \underset{Sp(q)}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\bar{B}_2 & \bar{B}_1 \end{pmatrix}}}, \qquad (A,B) \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & & A_2 & \\ & B_1 & & B_2 \\ -\bar{A}_2 & & \bar{A}_1 & \\ & -\bar{B}_2 & & \bar{B}_1 \end{pmatrix} \in Sp(p+q).$$

<u>Теорема 2.3.I.</u> Если $g = \operatorname{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_{p+q}}) \in Sp(p+q)$, причем $\varphi_1=\varphi_2=\ldots=\varphi_s=\varphi$, $\varphi_i\ne\varphi_j$ $(i\ne j,\ j>s)$, $s<p$ (т.е. g – сингулярный элемент группы $Sp(p+q)$), то

$$\operatorname{vol} O(g) = \operatorname{const} \prod_{\substack{1\le i<j\le p \\ j>s}} \left(1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)\right) \prod_{1\le i<j\le p} \left(1-\cos(\varphi_i+\varphi_j)\right)\left(1-\cos 2\varphi_i\right) \times$$

$$\times \prod_{p+1\le i<j\le p+q} \left(1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)\right)\left(1-\cos(\varphi_i+\varphi_j)\right)\left(1-\cos 2\varphi_i\right)$$

<u>Доказательство</u>. Алгебра Ли централизатора элемента g имеет вид

$C(g) =$ 

Пусть E_{ij} – элементарная матрица, тогда базис алгебры Ли $sp(p)+sp(q)$ по модулю $C(g)$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} h^{(1)}_{\ell k} &= E_{\ell k} - E_{k\ell} \\ h^{(2)}_{\ell k} &= i\,(E_{\ell k} + E_{k\ell}) \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} 1 \le \ell < k \le p \\ k > s \end{matrix} \quad , \quad p+1 \le \ell < k \le p+q$$

$$\left.\begin{aligned} h^{(3)}_{\ell k} &= E_{\ell, n+k} + E_{k, \ell+n} - E_{n+k, \ell} - E_{\ell+n, k} \\ h^{(4)}_{\ell k} &= i\,(E_{\ell, n+k} + E_{k, \ell+n} + E_{n+k, \ell} + E_{\ell+n, k}) \end{aligned}\right\} \quad 1 \le \ell < k \le p \quad , \quad p+1 \le \ell < k \le p+q$$

$$\left.\begin{aligned} h^{(5)}_{\ell\ell} &= E_{\ell, \ell+n} - E_{\ell+n, \ell} \\ h^{(6)}_{\ell\ell} &= i\,(E_{\ell, \ell+n} + E_{\ell+n, \ell}) \end{aligned}\right\} \quad 1 \le \ell \le p+q \qquad\qquad (n = p+q)$$

Пусть $f^{(m)}_{\ell k} = g^{-1} h^{(m)}_{\ell k}\, g - h^{(m)}_{\ell k}$. Как и в предыдущих случаях матрица Грамма диагональна.

Вычисляя скалярное произведение $\left(f^{(m)}_{\ell k}, f^{(m')}_{\ell' k'}\right)$, имеем

$$vol\, \mathcal{O}(g) = const \sqrt{\frac{\det\left(f^{(m)}_{\ell k}, f^{(m')}_{\ell k'}\right)}{\det\left(h^{(m)}_{\ell k}, h^{(m')}_{\ell k'}\right)}} = const \prod_{m,\ell,k} \frac{\left(f^{(m)}_{\ell k}, f^{(m)}_{\ell k}\right)}{\left(h^{(m)}_{\ell k}, h^{(m)}_{\ell k}\right)} =$$

$$= const \prod_{\substack{1 \le i < j \le p \\ j > s}} 1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j) \prod_{1 \le i < j \le p} \left(1 - \cos(\varphi_i + \varphi_j)\right)\left(1 - \cos(2\varphi_i)\right) \times$$

$$\times \prod_{p+1 \le i < j \le p+q} \left(1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j)\right)\left(1 - \cos(\varphi_i + \varphi_j)\right)\left(1 - \cos(2\varphi_i)\right) ,$$

что и утверждалось.

Этот же результат следует из теоремы из § I главы 2 (теорема 2.I.I.), так как в этом случае, очевидно, все предположения этой теоремы выполнены.

§ 4. Вычисления в случае пространства $SU(n)/S(U(n-p)\times U(p))$

В этом параграфе мы рассмотрим случай $G = SU(n)$, $H = S(U(n-p)\times U(p))$, вложение $S(U(n-p)\times U(p)) \to SU(n)$ стандартное :

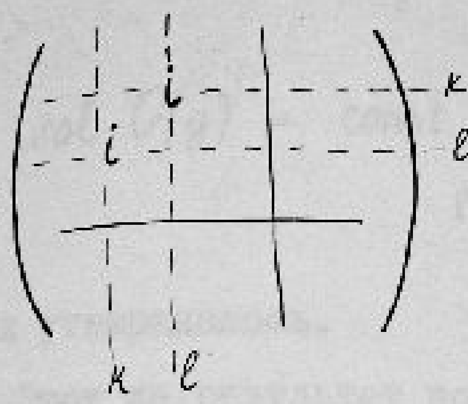
$$(A,B) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & B \end{array}\right)$$

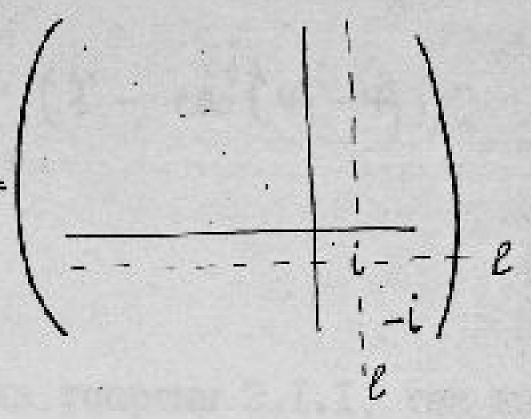
<u>Теорема 2.4.I.</u> Если $g = \operatorname{diag}(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_n}) \in SU(n)$, причем $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = \varphi$, $\varphi_i \neq \varphi_j$, $i\neq j, j>s$, $s<p$, (т.е. g – сингулярный элемент группы Ли $SU(n)$), то

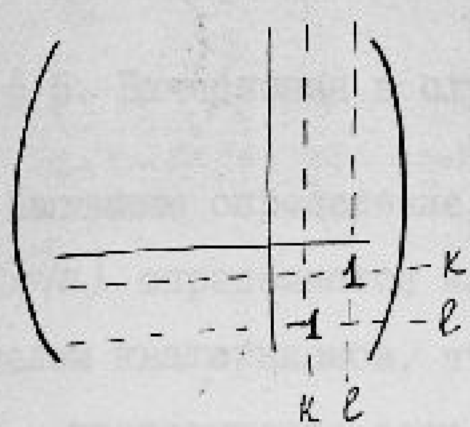
$$\operatorname{vol} O(g) = \mathrm{const} \prod_{\substack{1\le i<j\le p,\ p+1\le i<j\le n \\ j>s}} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j))$$

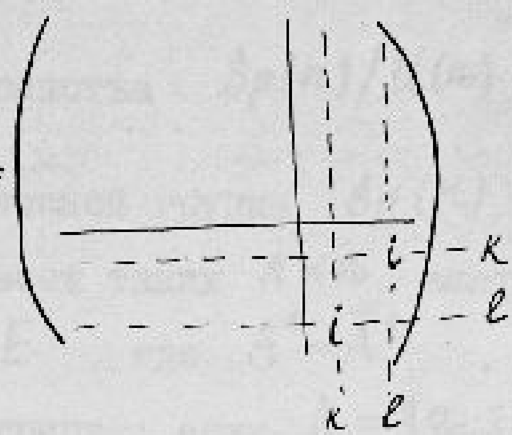
<u>Доказательство</u> получается применением основного алгоритма для вычисления объемов, см. § I главы I. Базис алгебры Ли $s(u(n-p)+u(p))$ имеет вид

$$e^{(1)}_l = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|cc} \ddots & & & & \\ & i & & & \\ & & \ddots & & \\ \hline & & & \ddots & \\ & & & & -i \end{array}\right) \begin{matrix} \\ l \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad l \end{matrix} \end{array}, \qquad e^{(2)}_{kl} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} \cdots & 1 & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots \\ \hline & & \end{array}\right) \begin{matrix} k \\ l \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} k & l \end{matrix} \end{array}$$

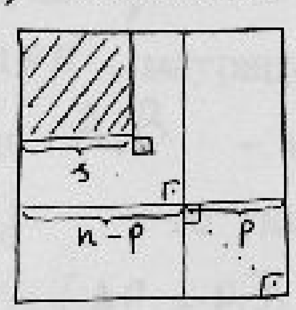
$e_{kl}^{(3)} =$ 

$e_{l}^{(4)} =$ 

$e_{kl}^{(5)} =$ 

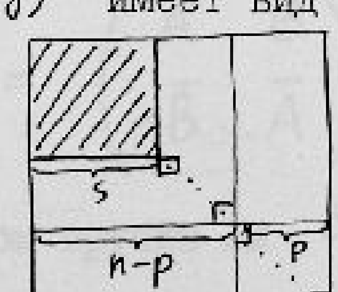
$e_{kl}^{(6)} =$ 

Централизатор $\Sigma(g)$ элемента g имеет вид

$$\Sigma(g) = \left\{ A = \right.$$ 

$$\left. , \quad A \in S(U(n-p) \times U(p)) \right\}$$

его алгебра Ли $C(g)$ имеет вид

$$C(g) = \left\{ B = \right.$$ 

$$\left. , \quad B \in s(u(n-p) + u(p)) \right\}$$

Матрицы $e_{ij}^{(2)}$, $1 \le i < j \le n-p$, $j > s$, $e_{kj}^{(3)}$, $1 \le k < j \le n-p$, $j > s$, $e_{ij}^{(4)}$, $e_{ij}^{(5)}$, $e_{ij}^{(6)}$ образуют базис алгебры Ли $s(u(n-p)+u(p))$ по модулю алгебры Ли $C(g)$ централизатора $\Sigma(g)$.

Тогда матрица Грамма $\| (f_{ij}^{m}, f_{kl}^{n}) \|$, где $f_{ij}^{m} = g^{-1} e_{ij}^{(m)} g - e_{ij}^{(m)}$, диагональна и, следовательно,

$$vol\ \mathcal{O}(g) = const \prod_{\substack{1 \le i<j \le p,\, j>s \\ p+1 \le i<j \le n}} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)),$$

что и утверждалось.

Этот же результат получается из теоремы 2.I.I, так как в этом случае, очевидно, все предположения этой теоремы выполнены.

§ 5. Вычисления в случае пространства $Sp(n)/U(n)$.

Напомним определение симплектической группы $Sp(n)$. Группа $Sp(n)$ определяется как группа всех таких $n \times n$ матриц A над телом кватернионов, что $AA^* = E$, где $A^* = \bar{A}^t$, здесь $\bar{A}$ – кватернионно сопряженная матрица : если $A = \| a_{ij} \|$, то $\bar{A} = \| \bar{a}_{ij} \|$. Кватернион $\bar{q}$, сопряженный к $q = a + bi + cj + dk$, определяется по формуле $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.

Кватернионную $n \times n$ матрицу P можно записать в виде $P = A + Bj$, где A, B – комплексные $n \times n$ – матрицы. Поскольку $jB = \bar{B}j$, то умножение задается формулой

$$(A+Bj)(C+Dj) = (AC - B\bar{D}) + (AD + B\bar{C})j.$$

Отображение

$$\varphi(P) = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом группы Ли $Sp(n)$ на подгруппу унитарных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

Матрицы такого вида будут унитарными тогда и только тогда, когда

$$A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E$$
$$BA^t = AB^t$$

При таком вложении $Sp(n)$ в $U(2n)$ алгебра Ли $sp(n)$ группы Ли $Sp(n)$ состоит из всех комплексных матриц порядка $2n \times 2n$ следующего вида

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}$$

где Z_1 – комплексная косоэрмитова матрица порядка $n \times n$, а Z_2 – комплексная симметрическая матрица порядка $n \times n$.

В этом параграфе мы рассмотрим случай $G = Sp(n)$, $H = U(n)$. Каждое унитарное преобразование, очевидно, можно рассматривать как симплектическое преобразование, т.е. имеется стандартное вложение $U(n) \subset Sp(n)$, и группа $Sp(n)$ вложена в $U(2n)$.

<u>Теорема 2.5.I.</u> Пусть

$$g = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \cos\varphi_1 & & & & -\sin\varphi_1 & & & \\ & \cos\varphi_2 & & & & -\sin\varphi_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \cos\varphi_n & & & & -\sin\varphi_n \\ \hline \sin\varphi_1 & & & & \cos\varphi_1 & & & \\ & \sin\varphi_2 & & & & \cos\varphi_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \sin\varphi_n & & & & \cos\varphi_n \end{array}\right)$$

причем $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_s = \varphi$, $\varphi_i \neq \varphi_j$, $i \neq j$, $j > s$, тогда

$$\mathrm{vol}\, O(g) = \mathrm{const} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n,\, j > s} (1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j)) .$$

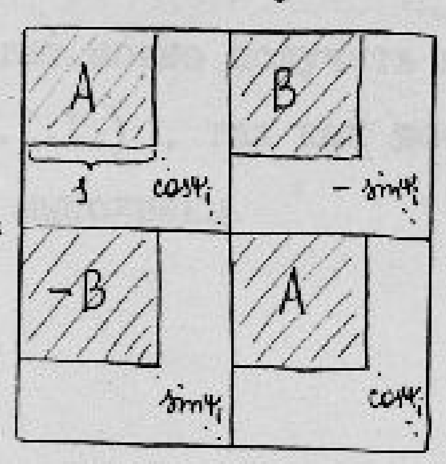
<u>Доказательство</u>. Алгебра Ли $u(n)$ вложена в $Sp(n)$ в виде

матриц
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} a, b \in M(n, R) \\ a \text{ – кососимметрическая} \\ b \text{ – симметрическая} \end{array}$$

поэтому в качестве базиса алгебры Ли $\mathcal{U}(n)$ можно взять

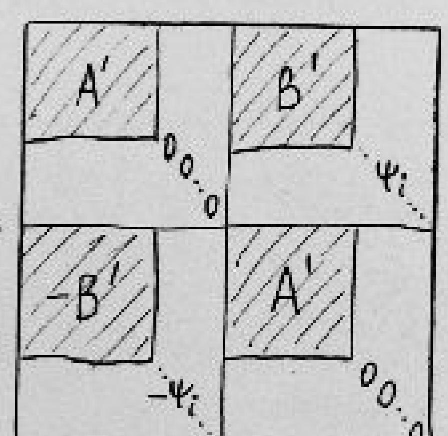
$$h_i^{(1)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ n+i \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & n+i \end{matrix} & \end{array}, \quad h_{ij}^{(2)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & j & & \end{matrix} & \end{array}, \quad h_{jk}^{(3)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} j \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} j & k & j+n & k+n \end{matrix} & \end{array}$$

Централизатор $\mathcal{Z}(g)$ элемента g имеет вид

$$\mathcal{Z}(g) = \Big\{ X =$$


$$, \ X \in U(n) \Big\}$$

Алгебра Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{Z}(g)$ имеет вид

$$C(g) = \Big\{ Y =$$


$$, \ Y \in \mathcal{U}(n) \Big\}$$

Базис алгебры Ли $\mathcal{U}(n)$ по модулю алгебры Ли $C(g)$ централизатора $\Sigma(g)$ имеет вид

$$h^{(2)}_{ij}\ ,\ \begin{matrix}1\le i<j\le n\\ j>s\end{matrix}\ ;\ h^{(3)}_{ij}\ ,\ \begin{matrix}1\le i<j\le n\\ j>s\end{matrix}\ .$$

Матрица Грамма диагональна и, следовательно,

$$vol\ \mathcal{O}(g) = const \prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ j>s}} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j))$$

Полученный результат можно получить применением теоремы из § I главы 2 (теорема 2.I.I.) , так как все условия для применения этой теоремы у нас выполнены.

Таблица № I. Объемы орбит регулярных элементов в случае симметрических пространств.

G	H	$vol(g)$
$SU(n)$	$SO(n)$	$const \prod\limits_{1\le i<j\le n} \left(1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)\right)^{1/2}$
$Sp(n)$	$U(n)$	$const \prod\limits_{1\le i<j\le n} \left(1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)\right)$
$SU(n)$	$SU(p)\times SU(n-p)$	$const \prod\limits_{\substack{1\le i<j\le p\\ p+1\le i<j\le n}} \left(1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)\right)$
$Sp(p+q)$	$Sp(p)\times Sp(q)$	$const \prod\limits_{\substack{1\le i<j\le p\\ p+1\le i<j\le p+q}} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j))(1-\cos(\varphi_i+\varphi_j))(1-\cos 2\varphi_i)$
$SU(2n)$	$Sp(n)$	$const \prod\limits_{1\le i<j\le n} \left\lvert \frac{(\beta_i-\beta_j)^2}{\beta_i\beta_j} + \frac{(\beta_{i+n}-\beta_{j+n})^2}{\beta_{i+n}\beta_{j+n}} \right\rvert \times$ $\times \left\lvert \frac{(\beta_i-\beta_{j+n})^2}{\beta_i\beta_{j+n}} + \frac{(\beta_{i+n}-\beta_j)^2}{\beta_{i+n}\beta_j} \right\rvert \prod\limits_{1\le i\le n} \left\lvert \frac{(\beta_i-\beta_{i+n})^2}{\beta_i\beta_{i+n}} \right\rvert, \quad \beta_s=e^{i\varphi_s}$
$SO(2n)$ $n=2m$	$U(n)$	$const \prod\limits_{1\le i<j\le m} (A^{+}_{ij}+A^{+}_{i+m,j+m})(A^{-}_{ij}+A^{-}_{i+m,j+m})(A^{+}_{i,j+m}+A^{+}_{i+m,j})\times$ $\times (A^{-}_{i,j+m}+A^{-}_{i+m,j}) \prod\limits_{1\le i\le m} A^{+}_{i,i+m}(A^{-}_{i,i+m})^{\frac{1}{2}},$ $A^{\mp}_{k\ell}=(1-\cos(\varphi_k\mp\varphi_\ell))$

Таблица № 2. Объемы орбит сингулярных элементов в случае симметрических пространств.

G_g	h_g	$vol\, \mathcal{O}(g)$ $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_s = \varphi$
$SU(n)$	$SO(n)$	$const \prod_{1\le i<j\le n,\, j>s} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j))^{1/2}$
$Sp(n)$	$U(n)$	$const \prod_{1\le i<j\le n,\, j>s} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j))$
$SU(n)$	$SU(p)\times SU(n-p)$	$const \prod_{\substack{1\le i<j\le p,\, j>s \\ p+1\le i<j\le n}} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j))$, $s\le p$
$Sp(p+q)$	$Sp(p)\times Sp(q)$	$const \prod_{1\le i<j\le p,\, j>s} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j)) \prod_{1\le i<j\le p} (1-\cos(\varphi_i+\varphi_j))(1-\cos 2\varphi_i)\times$ $\times \prod_{p+1\le i<j\le p+q} (1-\cos(\varphi_i-\varphi_j))(1-\cos(\varphi_i+\varphi_j))(1-\cos 2\varphi_i)$, $s\le p$
$SU(2n)$	$Sp(n)$	$const \prod_{1\le i<j\le s} \left\lvert\frac{(\beta_{i+n}-\beta_{j+n})^2}{\beta_{i+n}\beta_{j+n}}\right\rvert \prod_{1\le i<j\le n,\, j>s} \left\lvert\frac{(\beta_i-\beta_j)^2}{\beta_i\beta_j}+\frac{(\beta_{i+n}-\beta_{j+n})^2}{\beta_{i+n}\beta_{j+n}}\right\rvert\times$ $\times \prod_{1\le i<j\le n} \left\lvert\frac{(\beta_i-\beta_{j+n})^2}{\beta_i\beta_{j+n}}+\frac{(\beta_{i+n}-\beta_j)^2}{\beta_{i+n}\beta_j}\right\rvert \prod_{1\le i\le n} \left\lvert\frac{(\beta_i-\beta_{n+i})^2}{\beta_i\beta_{n+i}}\right\rvert$, $\beta_s = e^{i\varphi_s}$, $s\le n$
$SO(2n)$ $n=2m$	$U(n)$	$const \prod_{1\le i<j\le s} (A^-_{i+m,j+m}) \prod_{1\le i<j\le m,\, j>s} (A^-_{ij}+A^-_{i+m,j+m})\times$ $\times \prod_{1\le i<j\le m} (A^+_{ij}+A^+_{i+m,j+m})(A^+_{i,j+m}+A^+_{i+m,j})(A^-_{i,j+m}+A^-_{i+m,j})\times$ $\times \prod_{1\le i\le m} A^+_{i,i+m}(A^-_{i,i+m})^{1/2}$, $A^\pm_{k\ell} = (1-\cos(\varphi_k\pm\varphi_\ell))$, $s\le m$

ГЛАВА 3

ОБЪЕМЫ ОРБИТ РЕГУЛЯРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ МАНТУРОВА

§ 1. Объемы орбит представления изотропии пространств Мантурова

В этой главе мы будем изучать орбиты присоединенного действия для пар (G, H), которые образуют пространства Мантурова.

Определение 3.1.1. Связное риманово многообразие M называется пространством Мантурова, если M однородно, т.е. $M = G/H$, где $G = I_0(M)$, и алгебра Ли $\mathfrak{H}$ подгруппы Ли H действует неприводимо на касательном пространстве. Здесь $I(M)$ обозначает группу изометрий пространства M, см. [3].

В работе [11] дана полная классификация таких пространств, см. также работу [35].

Отметим здесь только следующую теорему.

Теорема 3.1.1. ([3]). Пусть M – пространство Мантурова и $G = I_0(M)$. Если M некомпактно, то M – односвязное симметрическое пространство. Если M компактно, то или M окружность, или группа G полупроста.

Все несимметрические пространства Мантурова (см. [11]) задаются некоторой компактной полупростой группой Ли H, её представлением $\rho : H \longrightarrow GL(V)$ и простой компактной группой Ли G такой, что $\rho(H) \subset G \subset GL(V)$.

Мы изучаем присоединенное действие группы Ли $\rho(H) \subset G$ на группе Ли G, т.е. каждому элементу $h \in \rho(H)$ соответствует преобразование $\hat{h} : G \longrightarrow G$, где $\hat{h}(x) = hxh^{-1}, x \in G$. Пусть $O(g)$ – орбита этого действия, т.е. $O(g) = \{\hat{h}(g) \mid h \in \rho(H)\} = \{hgh^{-1} \mid h \in \rho(H)\} = \{\rho(h) g \rho(h)^{-1} \mid h \in H\}$. Наша задача состоит в вычислении функции объема $vol\, \mathcal{O}(g)$.

В этом случае общая схема вычисления объемов выглядит так.

I. Выберем в пространстве представления базис $e_1, \dots, e_N$.

2. Выберем базис $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_s$ алгебры Ли H группы Ли $\mathcal{H}$.

3. Найдем базис $h_1, \dots, h_s$ алгебры Ли $d\rho(H)$. В базисе $e_1, \dots, e_N$ все операторы имеют матричное выражение

$$d\rho(\tilde{h}_i)\, e_j = \alpha_{ij}^{k} e_k \,, \quad d\rho(\tilde{h}_i) = \| \alpha_{ij}^{k} \|$$

Выберем из $h_1, \dots, h_s$ базис по модулю централизатора $C(g)$ регулярного элемента $g \in \mathcal{G}$: $h_{i_1}, \dots, h_{i_k}$, $k \le N$.

4. Вычислим матрицу $f_\ell = g^{-1} h_{i_\ell} g - h_{i_\ell}$, $\ell = 1, \dots, k$, где g - регулярный элемент группы Ли $\mathcal{G}$, принадлежащий фиксированному максимальному тору $T \subset \mathcal{G}$.

5. Вычисляем $det\,(f_i, f_j) = \alpha$, $det\,(h_{i_\ell}, h_{i_m}) = \beta$

6. Находим объем $vol\, \mathcal{O}(g) = const \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

§ 2. Вычисления для представления $\circ\!-\!\overset{1}{\circ}\!-\!\dots\!-\!\circ\!-\!\circ$

Рассмотрим первый пример пространства Мантурова (см. таблицу классификации таких пространств в работе [II]).

Группа $\mathcal{H} = SU(m+1)$ действует по тензорному закону в пространстве V всех комплексных кососимметрических тензоров a^{ij} $(i,j = 1,2,\dots,m+1)$. Это действие сохраняет эрмитову форму $\sum a^{ij}\bar{a}^{ij}$, поэтому $\rho(\mathcal{H})$ является подгруппой в группе $SU(N)$ всех унитарных преобразований пространства V с определителем, равным единице. Здесь $\rho : SU(m+1) \to GL(V)$ - соответствующее представление, а $N = dim\, V = \frac{m(m+1)}{2}$.

<u>Теорема 3.2.I.</u> Пусть $g = diag\,(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_N})$ - регулярнй элемент группы $SU(N)$ (т.е. $\varphi_i \ne \varphi_j$, $i \ne j$) . Тогда для $m = 3$

$$\operatorname{vol} \mathcal{O}(g) = \mathrm{const} \prod_{\substack{1 \le k < l \le 6 \\ k+l<7}} \left\{ \left(e^{i(\varphi_k - \varphi_l)} - 1\right)\left(e^{i(\varphi_l - \varphi_k)} - 1\right) + \left(e^{i(\varphi_{7-l} - \varphi_{7-k})} - 1\right)\left(e^{i(\varphi_{7-k} - \varphi_{7-l})} - 1\right) \right\}$$

где $\mathcal{O}(g)$ – орбита элемента $g \in SU(N)$ относительно присоединенного действия группы $\rho(SU(m+1))$ на $SU(N)$.

<u>Доказательство</u>. Имеем следующую схему вычисления объемов в этом примере.

а) Имеем представление $\rho : SU(m+1) \longrightarrow GL(V)$, где $N = \dim V$, V – пространство представления (пространство соответствующих тензоров). Базис в пространстве V :

$$e_{ij} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} & & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \vdots & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\ \quad\;\; i \quad j \end{array}$$

После перенумерации получим базисные векторы $e_1, \ldots, e_N$.

Здесь $\quad N = 1 + 2 + \ldots + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$

$$\dim SU(N)/\rho SU(m+1) = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 - (m+1)^2$$

б) По общей методике для вычисления объемов орбиты $\mathcal{O}(g)$, которая проходит через элемент $g \in SU(N)$, нужно поступить следующим образом. Надо найти централизатор $\mathcal{Z}(g) = \{ h \in \rho(h_g) \mid gh = hg \}$ элемента g в группе Ли $\rho(SU(m+1))$ и взять базис $e_1, \ldots, e_M$ алгебры Ли $L(\rho(SU(m+1)))$ по модулю алгебры Ли $L(\mathcal{Z}(g)) = C(g)$. Ниже мы покажем для случая $m = 3$, что имеет место равенство $C(g) = d\rho\,(L(T))$. Поэтому для построения базиса $e_1, \ldots, e_M$ надо взять базис алгебры Ли $su(m+1)$ по модулю алгебры Ли $L(T)$ и перенести его с помощью $d\rho$ в $L(\rho(SU(m+1)))$. Это и будет искомый базис.

в) Базис алгебры Ли $su(m+1)$ по модулю алгебры Ли стандартного максимального тора имеет вид :

$$\tilde{h}_{ij}^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdots 0 \cdots \sqrt{-1} \cdots \\ \cdots \sqrt{-1} \cdots 0 \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \\ \quad i \qquad j \end{array}, \quad \tilde{h}_{ij}^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cdots 0 \cdots 1 \cdots \\ \cdots -1 \cdots 0 \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \\ \quad i \qquad j \end{array}$$

г) Вычислим базис алгебры Ли $d\rho(su(m+1))$:

$$d\rho(\tilde{h}_{ij}^{(1)}) = h_{ij}^{(1)}, \quad d\rho(\tilde{h}_{ij}^{(2)}) = h_{ij}^{(2)};$$

$$d\rho(\tilde{h}_{ij}^{(k)})e_p = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_{ijp}^{k\ell} e_\ell, \quad \alpha_{ijp}^{k\ell} \in \mathbb{C},$$

$$d\rho(\tilde{h}_{ij}^{(k)})e_p = \tilde{h}_{ij}^{(k)} e_p + e_p \tilde{h}_{ij}^{(k)}$$

Пусть $h_{ij}^{(1)} = \| \alpha_{ijp}^{1\ell} \|$, $h_{ij}^{(2)} = \| \alpha_{ijp}^{2\ell} \|$.

д) Вычисляем матрицы

$$f_{ij}^{(k)} = g_0^{-1} h_{ij}^{(k)} g_0 - h_{ij}^{(k)},$$

$$g_0 = diag\,(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_N})$$

е) Вычисляем $\quad det\,(h_{ij}^{(k)}, h_{pq}^{(m)}) = \beta \quad$ и

$$det\,(f_{ij}^{(k)}, f_{pq}^{(m)}) = \alpha$$

В этом случае $\quad vol\; O(g) = const \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Случай $m=3$.

В этом случае имеем представление $\rho: SU(4) \to SU(6)$,

$M = SU(6)/\rho(SU(4))$, пространство представления

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Базис прстранства V :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad a_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad a_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad a_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix},\quad a_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}$$

Пусть $g = diag(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_6})$ – регулярный элемент из $SU(6)$, диагональный в базисе $a_1, \dots, a_6$. Найдем алгебру Ли централизатора $\mathcal{L}_{\rho(h_y)}(g)$. Имеем $\mathcal{L}_{\rho(h_y)}(g) = \mathcal{L}_{SU(6)}(g) \cap \rho(SU(4)) = T \cap \rho(SU(4))$. Поэтому алгебра Ли $C(g)$ централизатора $\mathcal{L}_{\rho(h_y)}(g)$ состоит из диагональных элементов вида $d\rho(h)$, где $h \in su(4)$. Легко проверяется, что диагональные элементы алгебры Ли $su(4)$ и только они переходят в диагональные элементы алгебры Ли $su(6)$ при отображении $d\rho$. Итак, $C(g) = d\rho(L(\widetilde{T}))$, где $L(\widetilde{T})$ – алгебра Ли стандартного максимального тора $\widetilde{T} \subset h_y$.

Базис в $su(4)$ по модулю алгебры Ли максимального тора $\widetilde{T}$ имеет вид :

$$\widetilde{h}_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{h}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{h}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{h}_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{h}_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{h}_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{h}_7 = \begin{pmatrix} 0&i&0&0\\ i&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{h}_8 = \begin{pmatrix} 0&0&i&0\\ 0&0&0&0\\ i&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{h}_9 = \begin{pmatrix} 0&0&0&i\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ i&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{h}_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde{h}_{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde{h}_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$$

Вычислим элементы $h_i = d\rho(\tilde{h}_i)$ алгебры Ли $d\rho(su(4))$. Имеем

$$\rho(A)a = AaA^t \ , \ A\in SU(4) \ , \ a\in V \ ;$$

$$d\rho(X)a = Xa + aX^t, \ X\in su(4), \ a\in V;$$

$$d\rho(\tilde{h}_i)a_j = \tilde{h}_i a_j + a_j \tilde{h}_i^t$$

Простые вычисления показывают, что

$$h_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}, h_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{pmatrix}, h_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$h_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}, h_5=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}, h_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$h_7=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&i&0&0\\0&0&0&0&i&0\\0&i&0&0&0&0\\0&0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}, h_8=\begin{pmatrix}0&0&0&i&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&i\\i&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&i&0&0&0\end{pmatrix}, h_9=\begin{pmatrix}0&0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0&i\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\i&0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$h_{10}=\begin{pmatrix} 0&i&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&i&0 \end{pmatrix},\quad h_{11}=\begin{pmatrix} 0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0&0 \end{pmatrix},\quad h_{12}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Если $f_i = g^{-1} h_i g - h_i\ ,\ i=1,\dots,6$ и

$$g = \operatorname{diag}\left(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_6}\right),$$

то

$$\operatorname{vol} O(g) = \mathrm{const}\sqrt{\frac{\det(f_i,f_j)}{\det(e_i,e_j)}} =$$

$$= \mathrm{const}\,(A_{12}+A_{56})(A_{13}+A_{46})(A_{14}+A_{36})(A_{15}+A_{26})(A_{23}+A_{45})(A_{24}+A_{35})$$

где $A_{kl} = \left(e^{i(\varphi_k-\varphi_l)}-1\right)\left(e^{i(\varphi_l-\varphi_k)}-1\right)$, $l,k=1,\dots,6$.

§ 3. Вычисления для представления $\overset{2}{\circ}\!-\!\circ\!-\cdots-\!\circ\!-\!\circ$

Пусть $\mathcal{H} = SU(m+1)$ действует по тензорному закону в пространстве V комплексных симметрических тензоров $a^{ij}\ (i,j=1,\dots,m+1)$. Как и в предыдущем случае это действие сохраняет эрмитову форму $\sum\limits_{ij} a^{ij}\bar{a}^{ij}$. Поэтому $\rho(\mathcal{H})$ является подгруппой группы $G = SU(N)$ всех специальных унитарных преобразований пространства V . Здесь $N=\dim V = \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$, $\rho : \mathcal{H} \longrightarrow GL(V)$ – соответствующее представление.

<u>Теорема 3.3.I.</u> Пусть $g = \operatorname{diag}\left(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_N}\right) \in G = SU(N)$ – регулярный элемент, $\varphi_i \neq \varphi_j$ при $i \neq j$. Тогда для $m=2$

$$\operatorname{vol} O(g) = \mathrm{const}\,(2A_{12}+2A_{24}+A_{35})(2A_{13}+2A_{36}+A_{25})(2A_{45}+2A_{56}+A_{23})$$

где $A_{kl} = \left(e^{i(\varphi_k-\varphi_l)}-1\right)\left(e^{i(\varphi_l-\varphi_k)}-1\right)$, $l,k=1,\dots,6$,

для $m=3$

$$\mathrm{vol}\,\mathcal{O}(g) = \mathrm{const}\,(2A_{15}+2A_{25}+A_{68}+A_{79})(2A_{16}+2A_{36}+A_{58}+A_{7,10})\times$$
$$\times(2A_{17}+2A_{47}+A_{59}+A_{6,10})(2A_{28}+2A_{38}+A_{56}+A_{9,10})\times$$
$$\times(2A_{29}+2A_{49}+A_{57}+A_{8,10})(2A_{3,10}+2A_{4,10}+A_{67}+A_{89})$$

где $A_{kl} = (e^{i(\varphi_k-\varphi_l)}-1)(e^{i(\varphi_l-\varphi_k)}-1)$, $k,l=1,\dots,10$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h} = SU(m+1)$, $G = SU(N)$, $\rho: SU(m+1)\to GL(V)$, описанное выше представление, $\rho(SU(m+1))\subset SU(N)$. Комплексная размерность пространства V равна $N=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$. Тензорный закон преобразования имеет вид

$$\rho(A)(a^{ij}) = A^i_k A^j_l a^{kl}, \quad A\in SU(m+1)$$

Пусть $m=2$.

Мы имеем случай однородного пространства $M = SU(6)/\rho SU(3)$. Базис алгебры Ли $su(3)$ по модулю алгебры Ли максимального тора группы Ли $SU(3)$ имеет вид

$$\tilde h_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ -1&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ -1&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde h_4 = \begin{pmatrix} 0&i&0\\ i&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_5 = \begin{pmatrix} 0&0&i\\ 0&0&0\\ i&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&i\\ 0&i&0\end{pmatrix}.$$

Базис пространства представления $V = S^2(\mathbb{C}^3)$ имеет вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix},\quad a_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix},\quad a_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&0\end{pmatrix},$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0\end{pmatrix},\quad a_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0\end{pmatrix},\quad a_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае имеет место равенство $C(g) = d\rho(L(T))$, где T - стандартный максимальный тор в $SU(3)$. Следовательно, нам нужно найти операторы $h_i = d\rho(\tilde{h}_i)$, $i = 1,\dots,6$. Эти операторы задаются матрицей размера 6×6.

$$d\rho(\tilde{h}_i)(a_j) = \tilde{h}_i a_j + a_j \tilde{h}_i^t$$

Простые вычисления показывают, что

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0&2&0&0&0&0\\ -1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&-2&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ -1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&-2&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&-1&0&1\\ 0&0&0&0&-2&0 \end{pmatrix},$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 0&2i&0&0&0&0\\ i&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ 0&2i&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad h_5 = \begin{pmatrix} 0&0&2i&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ i&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0\\ 0&0&2i&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad h_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2i&0\\ 0&0&0&i&0&i\\ 0&0&0&0&2i&0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $h_1,\dots,h_6$ не являются косоэрмитовыми в обычном смысле, т.к. базис $a_1,\dots,a_6$ не эрмитов. Условие косоэрмитовости матрицы A в базисе $a_1,\dots,a_6$ записывается в виде

$JAJ^{-1} = -\bar{A}^T$, где J - матрица Грамма этого базиса.

Пусть g - регулярный элемент группы Ли $SU(6)$, т.е.

$$g = \mathrm{diag}(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_6}), \qquad \varphi_i \neq \varphi_j \ (i\neq j).$$

Тогда вычисления элементов $f_i = g^{-1}h_i g - h_i$ и их скалярных произведений дают нужный результат.

Пусть $m = 3$.

Мы имеем пространство Мантурова $M = SU(10)/\rho SU(4)$. В этом случае в качестве базиса алгебры Ли $L(\rho(h_g))$ по модулю алгебры Ли стандартного максимального тора в группе $SU(4)$ мы берем базис

$$\tilde h_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde h_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde h_7=\begin{pmatrix}0&i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_8=\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_9=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde h_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde h_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&i&0\end{pmatrix},$$

В пространстве представления $V=S^2(\mathbb{C}^4)$ рассмотрим базис

$$a_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$a_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad a_5=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad a_6=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$a_7=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad a_8=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad a_9=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$a_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Простые вычисления показывают, что

$$h_1=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad h_2=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ -1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$h_3=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ -1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad h_4=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0 \end{bmatrix},$$

$$h_5=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&-1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0 \end{bmatrix},\quad h_6=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$h_7=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&2i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ i&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad h_8=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&2i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\ i&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&i&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$h_9=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&2i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\ i&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&i&0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad h_{10}=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&i&i&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&i&0 \end{bmatrix},$$

$$h_{11}=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&2i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ i&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad h_{12}=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&2i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\ i&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&i&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Тогда элементарные вычисления с матрицами дают ответ, указанный в теореме.

Замечание 3.3.I. Как и в предыдущем случае условие косоэрмитовости матрицы A в базисе $a_1, \ldots, a_{10}$ записывается в виде $JAJ^{-1} = -\bar{A}^t$, где J - матрица Грамма этого базиса.

§ 4. Вычисления для представления $\overset{1}{\circ}-\circ-\ldots-\circ-\circ \quad \overset{1}{\circ}-\circ-\ldots-\circ-\circ$

Пусть $H = SU(m_1+1) \times SU(m_2+1)$. H действует в пространстве всех комплексных тензоров $a^{\alpha i}$ $(\alpha = 1, \ldots, m_1+1;\ i = 1, \ldots, m_2+1)$, ($SU(m_1+1)$) действует на первый индекс, $SU(m_2+1)$ на второй индекс по тензорному закону). Как и в предыдущих случаях это действие сохраняет форму $\sum a^{\alpha i} \bar{a}^{\alpha i}$, поэтому $\rho(H) \subset G = SU(N)$, где $\rho : H \longrightarrow GL(V)$ - соответствующее представление, $N = \dim V = (m_1+1)(m_2+1)$.

Теорема 3.4.I. Пусть $g = diag(e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_N})$ - диагональный регулярный элемент в группе Ли $G = SU(N)$. Тогда для $m_1 = 1$, $m_2 = 2$

$$vol\ O(g) = const\ (A_{12} + A_{45})(A_{23} + A_{56})(A_{13} + A_{46}) \times$$
$$\times (A_{14} + A_{25} + A_{36}),$$

где $A_{k\ell} = (e^{i(\varphi_k - \varphi_\ell)} - 1)(e^{i(\varphi_\ell - \varphi_k)} - 1)$, $k, \ell = 1, \ldots, 6$.

Доказательство. Пусть $\rho : SU(m_1+1) \times SU(m_2+1) \to GL(V)$ - представление, описанное выше. Пространство представления V можно отождествить с пространством комплексных матриц размера 2×3. Действие ρ имеет в этом случае вид $\rho(A, B)(X) = AXB^t$. Его дифференциал : $d\rho(C, D)(Y) = CY + YD^t$.

Пусть

$$B_{ij}^{(1)} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \cdots & 0 & \cdots & \sqrt{-1} & \cdots \\ \cdots & \sqrt{-1} & \cdots & 0 & \cdots \end{array} \right) \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & \quad j \end{array} \end{array} , \quad B_{ij}^{(2)} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots \end{array} \right) \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & \quad j \end{array} \end{array} ,$$

$$\tilde{h}_{ij}^{(1)} = \left(B_{ij}^{(1)}, 0 \right), \quad \tilde{h}_{ij}^{(2)} = \left(B_{ij}^{(2)}, 0 \right),$$

$$\tilde{h}_{ij}^{(3)} = \left(0, B_{ij}^{(1)} \right), \quad \tilde{h}_{ij}^{(4)} = \left(0, B_{ij}^{(2)} \right).$$

Тогда $\tilde{h}_{ij}^{(1)}, \tilde{h}_{ij}^{(2)}, \tilde{h}_{ij}^{(3)}, \tilde{h}_{ij}^{(4)}$ – базис алгебры Ли $H = su(m_1+1) + su(m_2+1)$ по модулю алгебры Ли максимального тора в h_g .

Пусть $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. В этом случае базис пространства представления имеет вид :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для дальнейших вычислений необходимо равенство $C(g) = d\varphi(L(T))$, которое проверяется прямой выкладкой. Здесь g – диагональный регулярный элемент группы Ли $G = SU(N)$.

Базис алгебры Ли $su(m_1+1) + su(m_2+1)$ по модулю алгебры Ли максимального тора имеет вид :

$$\tilde{h}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \quad \tilde{h}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \quad \tilde{h}_3 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\tilde{h}_4 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \tilde{h}_5 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \tilde{h}_6 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\tilde{h}_7 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \tilde{h}_8 = \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Пусть $d\rho(\tilde{h}_i) = h_i$. Тогда простые вычисления показывают, что

$$h_1=\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ -1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0 \end{bmatrix},\quad h_2=\begin{bmatrix} 0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&0&0&i\\ i&0&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0 \end{bmatrix},\quad h_3=\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$h_4=\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0 \end{bmatrix},\quad h_5=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&-1&0 \end{bmatrix},\quad h_6=\begin{bmatrix} 0&i&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&i&0\\ 0&0&0&i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$h_7=\begin{bmatrix} 0&0&i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&i&0&0 \end{bmatrix},\quad h_8=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&i\\ 0&0&0&0&i&0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя элементы $f_i = g^{-1}h_i g - h_i$ и скалярно их перемножая, получим формулу, указанную в теореме.

Таблица № 3. Объемы орбит регулярных элементов некоторых серий пространств Мантурова.

ℓ_g	V	G_g	$G_g/g(\ell_g)$	g	vol $O(g)$
$SU(m+1)$ $m=3$	$a^{ij}=-a^{ji}$ $i,j=1,\dots,m+1$	$SU(N)$ $N=$ $=\dfrac{m(m+1)}{2}$	$SU(6)/_{\rho}SU(4)$	$diag(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_6})$	см. теорему 3.2.I.
$SU(m+1)$ $m=2$ $m=3$	$a^{ij}=a^{ji}$ $i,j=1,\dots,m+1$	$SU(N)$ $N=$ $=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$	$SU(6)/_{\rho}SU(3)$ $SU(10)/_{\rho}SU(4)$	$diag(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_{10}})$ $diag(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_{10}})$	см. теорему 3.3.I.
$SU(m_1+1)\times$ $\times SU(m_2+1)$ $m_1=1$ $m_2=2$	$a^{i\alpha}$ $i=1,\dots,m_1+1$ $\alpha=1,\dots,m_2+1$	$SU(N)$ $N=$ $=\dfrac{(m_1+1)(m_2+1)}{2}$	$SU(6)/SU(2)\times SU(3)$	$diag(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_6})$	см. теорему 3.4.I.

ГЛАВА 4

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ ОБЪЕМА ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ РАНГА ДВА

§ I. Эквивариантная задача Плато

В этом параграфе мы разберем аппарат, позволяющий при наличии группы симметрии сводить задачу поиска локально минимальных поверхностей к аналогичной задаче на пространстве орбит.

Пусть M^n – риманово многообразие, на котором гладко действует группа изометрий $I(M^n)$. Рассмотрим подгруппу $G \subset I_0(M)$, где $I_0(M)$ – связная компонента единицы в группе $I(M)$. Пусть $V^p \subset M^n$ – некоторая поверхность, инвариантная относительно действия группы G. Как V, так и все M^n расслоено на орбиты $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$, см. [20], [22], [31], [32]. Изучение минимальности поверхности V в M^n можно в этом случае свести к изучению минимальности поверхности V/G в M/G. Фактор-пространство M/G, вообще говоря, не является гладким многообразием оно может иметь особенности, однако в M есть открытое всюду плотное подмножество $\widetilde{M}$ (состоящее из гладких орбит), такое, что $\widetilde{M}/G$ есть гладкое многообразие, см. [21].

Пусть $\pi : M \to M/G$ – каноническая проекция на пространство орбит. Если $\Phi(X, Y)$ – скалярное произведение на $T_x M$, то можно построить риманову метрику на пространстве M/G следующим естественным образом. Фиксируем распределение R нормальных плоскостей к орбитам $G(x)$, и пусть $X', Y' \in T_{\pi(x)} M/G$. Тогда существуют единственные векторы $X, Y \in T_x M$ – прообразы X', Y', принадлежащие R, и можно положить $\Phi'(X', Y') = \Phi(X, Y)$. Это скалярное произведение порождает в M/G метрику ds. Определим далее на M/G функцию v, положив $v(x) = vol_\nu(\pi^{-1}(x))$, где ν – размерность главных орбит. Пусть $V^p \subset M^n$ – это G -

инвариантное подмногообразие. Положим $k=p-\nu$. Тогда можно построить на M/G новую метрику dl_k, положив $dl_k = v^{1/k}d\xi$.

Предложение 4.I.I. (W.Y. Hsiang, H.B. Lawson[3I]). Пусть $V^p \subset M^n$ - это G - инвариантное подмногообразие, V является локально минимальным в M (средняя кривизна $H \equiv 0$) тогда и только тогда, когда V/G - локально минимально в M/G относительно метрики dl_k. Более того, $vol_p V^p = vol_k V/G$, где $k=p-\nu$, т.е. k – коразмерность орбиты общего положения на поверхности V.

Это утверждение позволяет сводить задачи о минимальности G - инвариантных поверхностей к аналогичным задачам на пространстве орбит, при этом надо ограничиться, естественно, только главными орбитами.

Уже при $k=0$ мы получим интересное следствие, которым только и будем пользоваться в дальнейшем. Если V^p - связная поверхность, то равенство $k=0$ означает, что V^p некоторая орбита действия группы Ли G на многообразии M.

Итак, все локально минимальные $(H=0)$ главные орбиты $G(x)$ группы G в многообразии M находятся так. Нужно рассмотреть пространство главных орбит $\tilde{M}/G$, вычислить на нем функцию объема орбит $v(x)$ и найти её критические точки, т.е. такие точки, в которых $grad\ v(x)=0$, см. [I2]. Они и являются орбитами, являющимися локально минимальными подмногообразиями в M $(H \equiv 0)$ (см. [22], с. I70).

Прежде чем сформулировать основной результат этой главы, мы приводим основные понятия, связанные с главными орбитами.

Пусть на X действует группа G. Множество стационарных подгрупп $\{G_x, x \in X\}$ очевидным образом разбивается на классы сопряженных подгрупп, соответствующие разным типам орбит в X:

$\{G_x \mid x \in X\} = \bigcup (H_i)$, где (H_i) – классы сопряженности.

Заметим, что однородное пространство G/B может быть эквивариантно отображено в G/H_y в том и только в том случае, когда группа B сопряжена некоторой подгрупле группы H_y, т.е. когда $gBg^{-1} \subseteq H_y$ при подходящем $g \in G$. Поэтому естественно ввести следующее отношение частичного порядка на множестве типов орбит : $(H_i) \geqslant (H_j)$, если H_i сопряжена подгрупле группы H_j.

Основное свойство введенного отношения порядка описывает следующая теорема.

<u>Теорема 4.I.I</u> (Монтгомери, Самельсон, Ян). Пусть M – связное многообразие, на котором действует компактная группа $G \subset I_0(M)$. Тогда в множестве типов орбит $O(M) = \{(H_i)\}$ имеется единственный такой максимальный тип орбит (H_1), что

I) $(H_1) \geqslant (G_x)$ для всех $x \in M$;

2) объединение $M_{(H_1)} = \{x \mid G_x \in (H_1)\}$ всех орбит типа (H_1) открыто и плотно в M, и коразмерность множества $M \setminus M_{(H_1)}$ не меньше I ;

3) множество $F(H_1, M)$ неподвижных точек группы H_1 на M пересекается с каждой орбитой ;

4) пространство орбит $M_{(H_1)}/G$ связно.

По определению единственный максимальный тип орбит называется главным типом орбит, а соответствующие стационарные подгруппы называются главными стационарными подгруппами. Это определение не конструктивно, т.е. с помощью его трудно определить является ли данная орбита, проходящая через фиксированную точку $x \in M$, главной или нет. Для решения этого вопроса можно использовать следующий критерий, который в каждом конкретном случае позволяет решить однозначно этот вопрос.

Итак, пусть группа Ли G действует на многообразии M. Орбита $G(x)$, проходящая через точку $x \in M$ будет главной, если представление среза в точке x тривиально (тождественно), см. [34], [32].

Напомним определение представления среза. Пусть G_x - стационарная подгруппа точки x. Тогда эта группа G_x представлена в касательном пространстве $T_x M$ к многообразию M в точке $x \in M$, т.е. для любого элемента $g \in G_x$ имеем линейное отображение $d\hat{g}: T_x M \longrightarrow T_x M$ так как $\hat{g}(x)=x$ по определению стационарной подгруппы. Итак, имеем представление $f: G_x \longrightarrow GL(T_x M)$ группы Ли G_x.

Пусть на M задана риманова метрика g_{ij}, инвариантная относительно действия группы Ли G. Через V обозначим ортогональное к подпространству $T_x G(x)$ в пространстве $T_x M$ относительно скалярного произведения $g_{ij}(x)$, здесь $G(x)$ -орбита точки x относительно действия группы Ли G. Ограничение $\rho: G_x \longrightarrow GL(V)$ представления f на пространство V называется представлением среза в точке $x \in M$. Отметим, что ограничение имеет смысл, так как метрика g_{ij} инвариантна относительно действия группы Ли G на многообразии M.

В нашем случае мы имеем следующую ситуацию. Пусть H -подгруппа группы Ли G, H действует на G внутренними автоморфизмами, т.е. $\hat{h}(g)=hgh^{-1}$ для любого $g \in G$, где $h \in H$. На G рассматривается инвариантная метрика, полученная левыми (или правыми) сдвигами из метрики Киллинга алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы Ли G (мы предполагаем, что G и H - матричные полупростые компактные, связные группы Ли).

Стационарная подгруппа H_x точки $x \in G$ совпадает с центразатором элемента $x \in \mathcal{G}$ в группе Ли $\mathcal{H}$, т.е.

$$\mathcal{H}_x = \Sigma(x) = \{ y \in \mathcal{H} \mid xy = yx \}.$$

Касательная плоскость $T_x \mathcal{G}$ есть левый сдвиг касательного пространства $T_e \mathcal{G}$ в точку x , т.е. $T_x \mathcal{G} = (L_x)_* (T_e \mathcal{G}) = (L_x)_* G$, где G - алгебра Ли группы Ли $\mathcal{G}$.

Вычислим касательную плоскость $T_x \mathcal{H}(x)$ к орбите $\mathcal{H}(x)$. Пусть $\xi \in T_x \mathcal{H}(x)$. Тогда

$$\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} a(t), \quad a(0) = x, \quad a(t) \in \mathcal{H}(x)$$

Имеем $a(t) = g(t) x g^{-1}(t)$ для некоторой кривой $g(t)$ в группе Ли $\mathcal{H}$, такой, что $g(0) = e$. Пусть

$$h = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) \in T_e \mathcal{H} = H,$$

где H - алгебра Ли группы Ли $\mathcal{H}$. Тогда

$$\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (g(t)) x g^{-1}(t) = hx - xh,$$

так как $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{-1}(t) = -h$ Итак, $\xi = hx - xh$, т.е.

$$T_x \mathcal{H}(x) = \{ [h, x] \mid h \in H \}$$

Нам потребуется знание ортогонального дополнения к орбите. Имеем следующее утверждение.

<u>Предложение 4.I.2.</u> Пусть $C(g_0)$ - алгебра Ли централизатора $\Sigma_{\mathcal{G}}(g_0)$. Тогда касательное пространство $T_{g_0} \mathcal{H}(g_0)$ к орбите $\mathcal{H}(g_0)$ перпендикулярно к $(L_{g_0})_* (C(g_0))$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\mathcal{G}_{g_0} = \{ x \in \mathcal{G} \mid x g_0 = g_0 x \}$, то алгебра Ли $C(g_0)$ централизатора $\Sigma(g_0)$ имеет вид

$$C(g_0) = \{ x \in G \mid g_0 x = x g_0 \},$$

Поэтому для любого элемента x из $C(g_0)$ выполняется равенство $g_0 x g_0^{-1} = x$. Сдвинем касательное пространство $T_{g_0} O(g_0)$ к орбите $O(g_0)$ в алгебре Ли G группы Ли $\mathcal{G}$ с помощью левого сдвига $(L_{g_0^{-1}})_*$. Произвольный элемент из этого подпространства имеет вид $\xi = g_0^{-1} x g_0 - x$, $x \in H$. Для скалярного произведения (ξ, g), где $\xi = g_0^{-1} x g_0 - x$, $g \in C(g_0)$ имеем

$$(\xi, g) = (g_0^{-1} x g_0 - x, g) = (g_0^{-1} x g_0, g) - (x, g) =$$

$$= (g_0^{-1} x g_0, g_0^{-1} g g_0) - (x, g) = (x, g) - (x, g) = 0,$$

так как $g = g_0^{-1} g g_0$, что и утверждалось.

Пусть $\mathcal{G}$ – компактная неособая простая матричная группа Ли ранга два, т.е. $\mathcal{G}$ одна из следующих групп $Sp(2)$, $SO(5)$, $SU(3)$. Выберем в этих группах Ли максимальный тор следующего вида:

а)

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \subset Sp(2),$$

б)

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & & \\ \hline & & \cos\psi & -\sin\psi & \\ & & \sin\psi & \cos\psi & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right) \subset SO(5),$$

в)

$$T = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & e^{i\varphi_2} & \\ & & e^{i\varphi_3} \end{pmatrix} \subset SU(3)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \pmod{2\pi}.$$

Заметим, что если не предполагать простоты группы Ли G, то имеются дополнительные случаи: $SO(2)\times SO(2)$, $SO(2)\times SO(3)$, $SO(2)\times SU(2)$, $SO(3)\times SO(3)$, $SO(3)\times SO(2)$, $SU(2)\times SU(2)$, причем неизоморфные алгебры Ли имеют только $SO(2)\times SO(2)$, $SO(2)\times SU(2)$, $SU(2)\times SU(2)$.

Через G^* в этих случаях обозначим множество таких точек $x\in G$, что орбита $H(x)$ элемента $x\in G$ пересекается с максимальным тором T, т.е. $H(x)\cap T \neq \emptyset$.

Локально минимальные поверхности в G^* будем называть G^*-локально минимальными поверхностями в G. Имеет место следующая основная

<u>Теорема 4.1.2</u>. Пусть G – компактная матричная простая неособая группа Ли ранга два, H такая её подгруппа, что G/H – симметрическое пространство и $G/H \neq \mathbb{H}P^1$. Пусть H действует на G присоединенным образом, т.е. элементу $h\in H$ отвечает преобразование $\hat{h}(x) = hxh^{-1}$, $x\in G$. Тогда следующий список исчерпывает все G^*-локально минимальные орбиты W в пространстве G.

1) Если $G = Sp(2)$, $H = U(2)$, то

$$W = \left\{ g\begin{pmatrix} -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} g^{-1},\ g\in U(2) \right\}$$

2) Если $G = SU(3)$, $H = SO(3)$, то

$$W = \left\{ g g_0 g^{-1} \mid g \in SO(3) \right\}$$

где g_0 принимает одно из следующих значений :

$diag(1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i})$, $diag(e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i}, 1)$, $diag(e^{\frac{2\pi}{3}i}, 1, e^{-\frac{2\pi}{3}i})$,

$diag(1, e^{-\frac{2\pi}{3}i}, e^{\frac{2\pi}{3}i})$, $diag(e^{-\frac{2\pi}{3}i}, e^{\frac{2\pi}{3}i}, 1)$, $diag(e^{-\frac{2\pi}{3}i}, 1, e^{\frac{2\pi}{3}i})$.

3) Если $G = SO(5)$, $H = SO(2)\times SO(3)$, то

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in SO(2)\times SO(3) \right\}$$

4) Если $G = SU(3)$, $H = S(U(1)\times U(2))$, то

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} -e^{-2i\varphi} & & \\ & -e^{i\varphi} & \\ & & e^{i\varphi} \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in S(U(1)\times U(2)) \right\}$$

5) Если $G = SO(5)$, $H = SO(4)$, то

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in SO(4) \right\} \text{ или } W = \left\{ g \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in SO(4) \right\}.$$

Доказательство этой теоремы получается применением вышеописанной техники, и оно состоит в нахождении критических точек функции объема на пространство главных орбит. Эти вычисления будут приведены в следующих параграфах.

Пусть $T \subset G$ - максимальный тор группы Ли G, $\dim T = 2$ в ситуации, описанной в теореме. Пусть $exp : R^2 \longrightarrow T$ - экспоненциальное отображение алгебры Ли R^2 группы Ли T в группу T, а φ_1, φ_2 - координаты в R^2, которые мы будем использовать в дальнейшем при описании нужных нам элементов в группе Ли G. Используя список симметрических пространств (см., например, [23]), получим следующий список пар. Случай симметрического пространства $SU(n)/SO(n)$ дает нам пару $(SU(3), SO(3))$; случай симметрического пространства $SU(2m)/Sp(m)$ не дает нам ничего; случай симметрического пространства $SO(2n)/U(n)$ не дает нам ничего; так как $SO(4)$ – не простая группа Ли; случай симметрического пространства $Sp(n)/U(n)$ дает нам пару $(Sp(2), U(2))$; случай симметрического пространства $SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ дает нам пару $(SU(3), S(U(1)\times U(2))$; случай симметрического пространства. $SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$ дает нам только две пары $(SO(5), SO(2)\times SO(3))$, $(SO(5), SO(4))$, так как $SO(4)$ – не простая группа Ли; случай симметрического пространства $Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$ ничего нам не дает, так как $Sp(2)/Sp(1)\times Sp(1) = \mathbb{H}P^1$, а этот случай мы исключили из рассмотрения.

Итак, пары, удовлетворяющие условиям теоремы, допускают полное описание, и они исчерпываются следующим списком :

I) $(SU(3), SO(3))$, 2) $(Sp(2), U(2))$,

3) $(SU(3), S(U(1)\times U(2))$, 4) $(SO(5), SO(2)\times SO(3))$,

5) $(SO(5), SO(4))$.

В этих случаях функции объема для регулярных орбит имеют следующий вид :

I) $f(\varphi_1, \varphi_2) = \mathrm{const}\,\{(1-\cos(2\varphi_1+\varphi_2))(1-\cos(\varphi_1+2\varphi_2))\times$
$\times(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))\}^{1/2}$

2) $f(\varphi_1, \varphi_2) = \mathrm{const}\,(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))$

3) $f(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{const}\ (1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))$,

4) $f(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{const}\ \sin^2\frac{\varphi_2}{2}$

5) $f(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{const}\ (1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))(1-\cos(\varphi_1+\varphi_2))$

Соответствующие вычисления будут воспроизведены в следующих параграфах. Метод вычисления изложен в главе I.

Из вышесказанного следует, что мы должны найти точки экстремума функции объема только в следующих случаях :

I) $f(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{const}\left\{(1-\cos(2\varphi_1+\varphi_2))(1-\cos(2\varphi_2+\varphi_1))(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))\right\}^{1/2}$

2) $f(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{const}\ (1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))$,

3) $f(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{const}\ \sin^2\frac{\varphi_2}{2}$, 4) $f(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{const}\ (1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))(1-\cos(\varphi_1+\varphi_2))$

Далее мы должны будем найти главные орбиты действия группы Ли $\mathfrak{h}$ на пространстве G^* . Для этого мы будем использовать представление среза, описанное выше. После этого найдем критические точки функции объема на пространстве $G^*_{\text{гл.}}$ главных орбит, эти вычисления проведены в следующих параграфах. Отметим, что хотя функции объема в некоторых случаях совпадают, но главные орбиты, вообще говоря, различны. Поэтому орбиты надо исследовать в кад ом из описанных случаев. Собирая вместе все эти вычисления мы получим наше основное утверждение о локально минимальных подмногообразиях в G^*, инвариантных относительно группы H, удовлетворяющей условиям нашей теоремы.

§ 2. Критические точки в случае $Sp(2)/U(2)$

В случае симметрического пространства $Sp(2)/U(2)$ функция объема орбит описана в следующем утверждении.

Предложение 4.2.I. Пусть группа $Sp(2)$ вложена в $U(4)$ в виде матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$, а $U(2)$ в виде матриц $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$,

где $$A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E \quad , \quad A\bar{B}^t = B\bar{A}^t$$

и x, y - вещественные матрицы (см. главу 2), T - описанный в § I максимальный тор группы Ли $Sp(2)$. Тогда

$$vol\ O(g) = const\ (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Доказательство. В качестве базиса алгебры Ли $u(2)$ группы Ли $U(2)$ по модулю алгебры Ли тора T можно взять матрицы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $(e_1, e_1) = 4$, $(e_2, e_2) = 4$, $(e_1, e_2) = 0$, поэтому $\det \| (e_i, e_j) \| = 16$. Далее,

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & \sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} - e_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cos(\varphi_1-\varphi_2)-1 & 0 & \sin(\varphi_2-\varphi_1) \\ -\cos(\varphi_1-\varphi_2)+1 & 0 & \sin(\varphi_2-\varphi_1) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_1-\varphi_2) & 0 & \cos(\varphi_1-\varphi_2)+1 \\ \sin(\varphi_1-\varphi_2) & 0 & -\cos(\varphi_1-\varphi_2)+1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & \sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} - e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\varphi_1-\varphi_2) & 0 & \cos(\varphi_1-\varphi_2)-1 \\ \sin(\varphi_2-\varphi_1) & 0 & \cos(\varphi_1-\varphi_2)-1 & 0 \\ 0 & -\cos(\varphi_1-\varphi_2)+1 & 0 & \sin(\varphi_1-\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_1-\varphi_2)+1 & 0 & \sin(\varphi_2-\varphi_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $(f_1, f_1) = 4(1 - \cos(\varphi_1-\varphi_2))$,

$$(f_2, f_2) = 4(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2)), \quad (f_1, f_2) = 0,$$

поэтому $\det \|(f_i, f_j)\| = 16\,(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))^2$, т.е.

$$\mathrm{vol}\, O(g) = \mathrm{const}\sqrt{\frac{\det(\|(f_i, f_j)\|)}{\det(\|(e_i, e_j)\|)}} = \mathrm{const}\,(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2)).$$

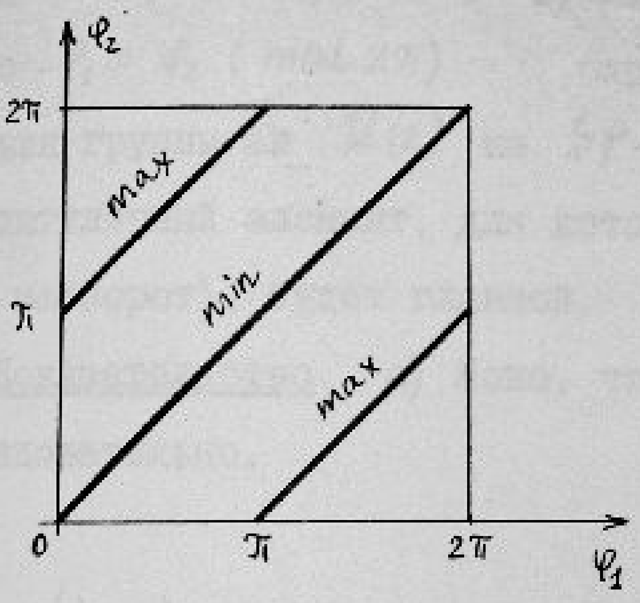
<u>Предложение 4.2.2.</u> Критические точки функции объема для действия, ассоциированного с симметрическим пространством $Sp(2)/U(2)$ имеют вид $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Для нахождения критических точек мы имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1} = \text{const} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2} = -\text{const} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{cases}$$

отсюда $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Замечание 4.2.I. Распределение точек экстремума можно изобразить на квадрате $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$ в виде следующей диаграммы критических точек



Исследуем теперь орбиты действия группы $U(2)$ на $Sp(2)^*$.

Лемма 4.2.I. Пространство $Sp(2)^*$ имеет размерность, равную четырем.

Доказательство. Из каждой точки $g \in T$ вырастает двумерная орбита действия группы Ли $U(2)$. Действительно, централизатор регулярного элемента

$$g_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

в группе Ли $Sp(2)$ есть максимальный тор T этой группы Ли, но $\Sigma_{h_{\mathcal{G}}}(g_0) = \Sigma_{\mathcal{G}}(g_0) \cap h_{\mathcal{G}} = T$, поэтому $\dim \Sigma_{h_{\mathcal{G}}}(g_0) = 2$. Далее,

$\dim O(g_0) = \dim h_{\mathcal{G}} - \dim \Sigma_{h_{\mathcal{G}}}(g_0) = 4-2=2$, $\dim U(2) = 2^2 = 4$,

Следовательно,

$$\dim Sp(2)^* = \dim T + \dim O(g_0) = 2+2=4$$

что и утверждалось.

<u>Предложение 4.2.3</u>. а) Орбита, проходящая через регулярный элемент $g \in T$ группы $Sp(2)$, является главной для действия подгруппы $U(2)$ на $Sp(2)^*$. б) Любой сингулярный элемент, для которого $\varphi_1 = \varphi_2 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ определяет сингулярную орбиту для действия группы Ли $U(2)$ на $Sp(2)^*$. в) Орбита, проходящая через сингулярный элемент, для которого $\varphi_1 = 0$, но $\varphi_2 \neq 0$ (либо наоборот), будет главной.

<u>Доказательство</u>. а) Ясно, что $T_{g_0} Sp(2)^* = T_{g_0} h_{\mathcal{G}}(g_0) \oplus (L_{g_0})_* C_{\mathcal{G}}(g_0)$ и, следовательно,

$$V = (L_{g_0})_* L(T) = (L_{g_0})_* \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где $V = (T_{g_0} O_{h_{\mathcal{G}}}(g_0))^{\perp}$ в $T_{g_0} \mathcal{G}^*$, см. § I. Пусть $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тогда

$$gX = \begin{pmatrix} -\alpha \sin\varphi_1 & 0 & -\alpha\cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & -\beta\sin\varphi_2 & 0 & -\beta\cos\varphi_2 \\ \alpha\cos\varphi_1 & 0 & -\alpha\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \beta\cos\varphi_2 & 0 & -\beta\sin\varphi_2 \end{pmatrix} = Xg$$

т.е. представление среза тривиально на V , поскольку произвольный элемент из централизатора $\mathcal{L}_{h_y}(g_0)$ имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Итак, орбита, проходящая через регулярный элемент группы $Sp(2)$ будет главной.

б) Если $\varphi = \varphi_2 \pmod{2\pi}$, то произвольный элемент g из централизатора $\mathcal{L}_{U(2)}(g_0)$ имеет вид

$$g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right), \qquad A + iB \in U(2)$$

и этот элемент действует нетривиально на пространстве

$$\left(T_{g_0} h_y(g_0)\right)^{\perp} = (L_{g_0})_* \left(C_g(g_0)\right) =$$

$$= (L_{g_0})_* \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ -y_1 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -y_2 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

в) Случай, когда $\varphi_1 = 0$ нам потребуется только для $\varphi_2 = \pi$, см. предложение, где вычислены критические точки функции объема, поэтому мы проделаем все вычисления только в этом случае. Если $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = \pi$, то

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Sp(2).$$

Далее, $\mathfrak{L}_{Sp(2)}(g_0) = \{X \mid g_0 X = X g_0\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ -b_1 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \right\} \subset Sp(2),$$

$$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ принадлежит группе Ли $Sp(2)$ тогда и только тогда, когда $A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E$, $A\bar{B}^t = B\bar{A}^t$. В нашем случае $a_1\bar{a}_1 + b_1\bar{b}_1 = 1$, $a_2\bar{a}_2 + b_2\bar{b}_2 = 1$. Если a_1, a_2, b_1, b_2 – вещественные числа, то $a_1 = \cos\varphi$, $b_1 = \sin\varphi$, т.е. $\mathfrak{L}_{U(2)}(g_0) = \mathfrak{L}_{Sp(2)}(g_0) \cap U(2) = T$. Имеем

$$gX = Xg,$$

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}_{U(2)}(g_0) = T,$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ -b_1 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in C_{bj}(g_0).$$

Следовательно, представление среза тождественно, т.е. орбита, проходящая через элемент g_0 главная.

Доказательство основной теоремы для пространства $Sp(2)/U(2)$. Критические точки функции объема на $Sp(2)^*_{гл.}$ дают локально минимальные орбиты в $Sp(2)^*$. В силу вышедоказанного, критические точки функции объема на $Sp(2)^*_{гл.}$ – это в точности те элементы, для которых $\varphi_1-\varphi_2=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Соответствующая орбита W действия группы Ли $U(2)$ на $Sp(2)^*$ имеет вид

$$W=\left\{ g\begin{pmatrix} -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0\\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ -\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi & 0\\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} g^{-1},\ g\in U(2)\right\}$$

§ 3. Критические точки в случае $SO(5)/SO(2)\times SO(3)$

В случае симметрического пространства $SO(5)/SO(2)\times SO(3)$ функция объема описана в следующем утверждении.

<u>Предложение 4.3.I.</u> Пусть группа $SO(2)\times SO(3)$ вложена в $SO(5)$ стандартным образом, если $A\in SO(2)$, $B\in SO(3)$, то $(A,B)\in SO(2)\times SO(3)$ ставится в соответствие матрица

$$\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\in SO(5)$$

и T описанный в § I максимальный тор группы Ли $SO(5)$.
Тогда

$$\operatorname{vol} O(g)=\mathrm{const}\ \sin^2\frac{\varphi_2}{2}.$$

<u>Доказательство</u>. Базис алгебры Ли $so(2)\times so(3)$ группы Ли $SO(2)\times SO(3)$ по модулю алгебры Ли максимального тора имеет вид

$$e_1=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Очевидно, что $(e_1,e_1)=2$, $(e_2,e_2)=2$ и $(e_1,e_2)=0$, поэтому $\det\|(e_i,e_j)\|=+4$. Простые вычисления показывают, что

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & & & \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & \\ & & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} - e_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi_2 \\ 0 & 0 & -\cos\varphi_2 + 1 & -\sin\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & & & \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & \\ & & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} - e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_2 - 1 \\ 0 & 0 & \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее $(f_1, f_1) = 2\left((\cos\varphi_2 - 1)^2 + \sin^2\varphi_2\right)$,

$(f_2, f_2) = 2\left((\cos\varphi_2 - 1)^2 + \sin^2\varphi_2\right)$, $(f_1, f_2) = 0$.

Поэтому $\det(f_i, f_j) = 4\left((\cos\varphi_2 - 1)^2 + \sin^2\varphi_2\right)^2$ и

$$\operatorname{vol} O(g) = \operatorname{const} \sqrt{\frac{\det(f_i, f_j)}{\det(e_i, e_j)}} =$$

$$= \operatorname{const}\left((\cos\varphi_2 - 1)^2 + \sin^2\varphi_2\right) =$$

$$= \operatorname{const}\left(\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)^2,$$

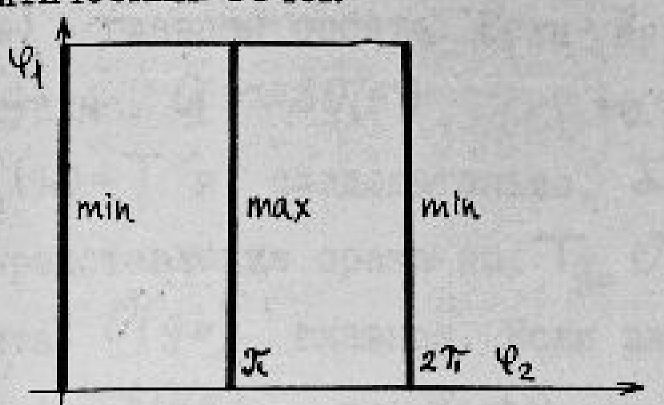
что и утверждалось.

<u>Предложение 4.3.2</u>. Критические точки для функции объема

орбит действия, ассоциированного с симметрическим пространством $SO(5)/SO(2)\times SO(3)$ имеют вид $\varphi_2=\pi+2\pi l$, $\varphi_2=2\pi s$, $l,s\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Для нахождения точки экстремума имеем уравнение $\frac{\partial f}{\partial\varphi_2}=\sin\frac{\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2}\,\mathrm{const}$. Откуда, либо $\sin\frac{\varphi_2}{2}=0$, либо $\cos\frac{\varphi_2}{2}=0$, поэтому $\varphi_2=\pi+2\pi l$, $\varphi_2=2\pi s$, $l,s\in\mathbb{Z}$.

Замечание 4.3.I. Распределение точек экстремума можно изобразить на квадрате $0\le\varphi_1,\varphi_2\le 2\pi$ в виде следующей диаграммы критических точек



Исследуем теперь орбиты действия группы $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{G}^*=SO(5)^*$.

Лемма 4.3.I. $\dim SO(5)^*=4$.

Доказательство. Из каждой регулярной точки $g\in T$ вырастает двумерная орбита действия группы Ли $SO(2)\times SO(3)$. Действительно, централизатор регулярного элемента

$$g_0=\begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\in T$$

в группе Ли $SO(5)$ есть максимальный тор T этой группы Ли, но $\mathfrak{L}_{\mathfrak{h}}(g_0)=\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(g_0)\cap\mathfrak{h}=T$, поэтому $\dim\mathfrak{L}_{\mathfrak{h}}(g_0)=2$.

Далее, $\dim O(g_0)=\dim\mathfrak{h}-\dim T=4-2=2$,

$\dim SO(2)\times SO(3)=1+3=4$. Следовательно,

$$\dim SO(5)^*=\dim T+\dim O(g)=2+2=4,$$

что и утверждалось.

Предложение 4.3.3. Орбиты, проходящие через элемент

$$g_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

будут главными тогда и только тогда, когда $\varphi_2 \neq 0$.

Доказательство. I) Достаточность. Пусть $\varphi_2 \neq 0$. Покажем, что $O(g_0)$ - главная орбита. Если g_0 - регулярный элемент в смысле группы $G = SO(5)$, то утверждение очевидно, так как $\Sigma_G(g_0) = T$ и, следовательно, $\Sigma_h(g_0) = \Sigma_G(g_0) \cap h = T$. Поэтому представление среза на $T_{g_0} O(g_0)^\perp$ будет тривиальным, т.е. орбита $O(g_0)$ главная. Если элемент g_0 не является регулярным в $SO(5)$, но $\varphi_2 \neq 0$, то и в этом случае $\Sigma_h(g_0) = \Sigma_G(g_0) \cap h = T$, хотя $\Sigma_G(g_0) \neq T$. Представление среза будет, таким образом, тривиальным, а соответствующая орбита главной.

2) Необходимость. Предположим, что $\varphi_2 = 0$. Тогда

$$g_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{SO(2)\times SO(3)}(g_0) = \Sigma_{SO(5)}(g_0) \cap \big(SO(2)\times SO(3)\big) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ \hline & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = SO(2)\times SO(3) = h$$

Ясно, что в этом случае орбита состоит из одной точки, т.е. не является главной.

Доказательство основной теоремы для пространства $SO(5)/SO(2)\times SO(3)$. Критические точки функции объема на пространстве главных орбит $SO(5)^*_{\text{гл.}}$ дают локально минимальные поверхности в $SO(5)^*$. В силу доказанного выше критические точки функции объема на $SO(5)^*_{\text{гл.}}$ – это в точности те элементы, для которых $\varphi_1 = \pi$. Соответствующая орбита W действия группы Ли $SO(2)\times SO(3)$ на $SO(5)^*$ имеет вид

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1},\ g \in SO(2)\times SO(3) \right\}$$

§ 4. Критические точки в случае $SU(3)/SO(3)$

В случае симметрического пространства $SU(3)/SO(3)$ функция объема описана в следующем утверждении.

Предложение 4.4.I. Пусть группа $SO(3)$ вложена в $SU(3)$ стандартным образом, T – описанный в § I максимальный тор группы Ли $SU(3)$. Тогда $\operatorname{vol} O(g) = \text{const}\times$

$$\times \left\{ (1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))(1-\cos(\varphi_2-\varphi_3))(1-\cos(\varphi_1-\varphi_3)) \right\}^{1/2}$$

причем $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 = 0$, т.е. $\operatorname{vol} O(g) = \text{const}\times$

$$\times \left\{ (1-\cos(2\varphi_1+\varphi_2))(1-\cos(2\varphi_2+\varphi_1))(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2)) \right\}^{1/2}$$

Доказательство состоит в стандартном вычислении с матрицами.

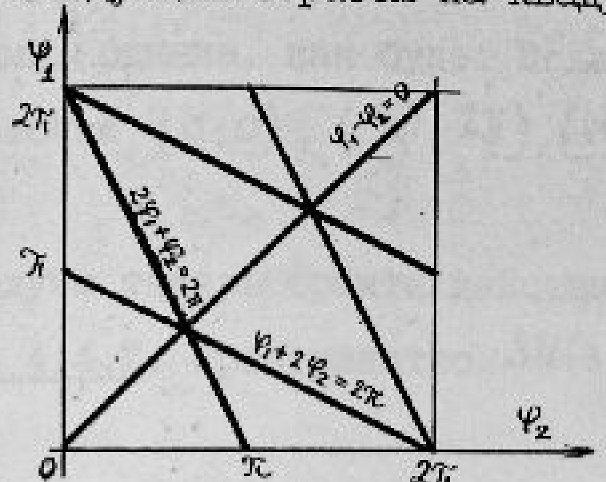
Лемма 4.4.I. Функция объема достигает минимума равного нулю на подмногообразиях $2\varphi_1+\varphi_2 = 2\pi k$, $\varphi_1+2\varphi_2 = 2\pi l$, $\varphi_1-\varphi_2 = 2\pi s$, $l,k,s \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Можно считать в силу периодичности, что $0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi$, поэтому функцию объема можно переписать в виде

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = const \left| \sin(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \sin(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right|$$

Точки, в которых $g(\varphi_1, \varphi_2) = \sin(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \sin(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0$, являются точками минимума функции объема.

Замечание 4.4.I. Подмногообразия, описанные в лемме, можно изобразить следующим образом на квадрате $0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi$



Предложение 4.4.2. Критические точки функции объема для действия, ассоциированного с симметрическим пространством $SU(3)/SO(3)$ имеют вид : $\left(\frac{2\pi k}{3}, \frac{2\pi l}{3}\right)$, где $l, k = 0, 1, 2$, $k \ne l$.

Доказательство. Для нахождения критических точек имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \varphi_1} = \cos(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \sin(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{1}{2} \sin(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \cos(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \\ \quad + \frac{1}{2} \sin(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \sin(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \sin(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \sin(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \cos(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - \\ \quad - \frac{1}{2} \sin(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \sin(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2}) \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на два и вычтем первое, получим

$$\sin(\varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}) \sin(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) = 0,$$

т.е. $\sin\frac{3\varphi_2}{2}=0$. Поэтому для критических точек имеем $\varphi_2=\frac{2\pi k}{3}$. Умножая первое уравнение на два и вычитая второе, получим

$$\sin\frac{2\varphi_1+\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2}{2}=0$$

т.е. $\sin\frac{3\varphi_1}{2}=0$, следовательно, $\frac{3\varphi_1}{2}=\pi s,\ s\in\mathbb{Z}$. Таким образом, для критических точек имеем следующие возможности :

$$\left(\frac{2\pi}{3}k,\ \frac{2\pi}{3}s\right)\ ,\qquad k,s=0,1,2$$

Прямая проверка показывает, что эти точки действительно являются критическими, однако, как будет показано ниже, орбиты проходящие через точки $(0,0)$, $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right)$ не являются главными.

Исследуем теперь орбиты действия группы $SO(3)$ на $SU(3)^*$.

Лемма 4.4.2. Пространство $SU(3)^*$ имеет размерность, равную пяти.

Доказательство. Из каждой регулярной точки $g\in T$ вырастает трехмерная орбита действия группы Ли $SO(3)$ на $SU(3)^*$. Действительно, централизатор регулярного элемента

$$g_0=\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & e^{i\varphi_2} & \\ & & e^{i\varphi_3}\end{pmatrix}$$

в группе $SU(3)$ есть максимальный тор T этой группы Ли, но $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(g_0)=\mathcal{Z}_{G}(g_0)\cap \mathfrak{h}$. Следовательно,

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(g_0)=\left\{\begin{pmatrix}\pm1 & & \\ & \pm1 & \\ & & \pm1\end{pmatrix},\ \det=+1\right\}$$

и $\dim SO(3)(g_0)=\dim SO(3)-\dim\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(g_0)=3-0=3$. Поэтому

$$\dim SU(3)^*=\dim T+\dim SO(3)(g_0)=2+3=5.$$

Предложение 4.4.3. а) Орбита, проходящая через регулярный элемент группы $SU(3)$ является главной для действия группы $SO(3)$ на пространстве $SU(3)^*$. б) Орбита, проходящая через сингулярный элемент является сингулярной.

<u>Доказательство.</u> а) В силу результатов § I ясно, что

$$T_{g_0} SU(3)^* = T_{g_0} \mathcal{O}(g_0) \oplus (L_{g_0})_* C_G(g_0)$$

Поэтому

$$V = (L_{g_0})_* \left\{ \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & \\ & i\varphi_2 & \\ & & i\varphi_3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 ,$$

Далее каждый элемент из централизатора $\mathcal{Z}_{h_y}(g_0)$ действует на пространстве V тождественно, следовательно, представление среза тривиально, и орбита, проходящая через регулярный элемент группы $SU(3)$ является главной.

б) Докажем, что сингулярный элемент группы $SU(3)$ определяет не главную орбиту. Действительно, если, например, $\varphi_1 = \varphi_2$, то

$$\mathcal{Z}(g_0) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{O}(2) & \\ \hline & \pm 1 \end{array} \right), \ \det = 1 \right\}$$

Далее простые вычисления показывают, что $T_{g_0} SO(3)(g_0) =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda(e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi}) \\ 0 & 0 & \mu(e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi}) \\ \lambda(e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi}) & \mu(e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi}) & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

здесь $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$. Следовательно, $\left(T_{g_0} SO(3)(g_0)\right)^{\perp} =$

$$= V = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha_1 & z_1 & 0 \\ -\bar{z}_1 & i\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha_3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ясно, что действие централизатора $\mathcal{Z}_{h_y}(g_0)$ на пространстве V нетривиально :

$$\begin{pmatrix} 0 & ib & 0 \\ ib & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib & 0 & 0 \\ 0 & ib & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} ib & 0 & 0 \\ 0 & -ib & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & ib & 0 \\ ib & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство основной теоремы в случае $SU(3)/SO(3)$. Пусть $SU(3)_{рег}$ – множество регулярных элементов в группе Ли $SU(3)$, а $SU(3)_{гл.}$ – множество таких элементов в $SU(3)^*$, орбиты которых главные. Тогда мы доказали, что $SU(3)^*_{гл} = SU(3)^* \cap SU(3)_{рег}$. Критические точки функции объема на $SU(3)^*_{гл.}$ дают условно локально минимальные орбиты (локально минимальные орбиты в $SU(3)^*$). В силу вышесказанного, критическими точками функции объема на $SU(3)^*_{гл.}$ будут точки

$$g_1 = \mathrm{diag}\left(1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right), \quad g_4 = \mathrm{diag}\left(1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right),$$

$$g_2 = \mathrm{diag}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}, 1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right), \quad g_5 = \mathrm{diag}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right),$$

$$g_3 = \mathrm{diag}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, 1\right), \quad g_6 = \mathrm{diag}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, 1\right).$$

Соответствующие орбиты W имеют вид $W = \{g g_i g^{-1} \mid g \in SO(3)\}$, где $g_i - i=1,\dots,6$ – описанные выше элементы.

§ 5. Случай $SU(3)/S(U(1)\times U(2))$

В этом случае функция объема имеет формально такой же вид как и в случае пары $(Sp(2), U(2))$, которая была рассмотрена в § 2.

Предложение 4.5.I. Пусть группа $S(U(1)\times U(2))$ вложена в $SU(3)$ стандартным образом, т.е. паре матриц (A,B), где $A\in U(1)$, $B\in U(2)$, ставится в соответствие матрица $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B\end{array}\right)$, T – описанный в § I максимальный тор группы Ли $SU(3)$. Тогда

$$\mathrm{vol}\, O(g) = \mathrm{const}\,(1-\cos(\varphi_2-\varphi_3)).$$

Доказательство. В качестве базиса алгебры Ли $s(u(1)+u(2))$ группы Ли $S(U(1)\times U(2))$ по модулю алгебры Ли максимального тора можно взять матрицы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(e_1,e_1) = (e_2,e_2) = 2$, $(e_1,e_2) = 0$. Следовательно, $\det(e_i,e_j) = 4$. Далее,

$$(f_1,f_2) = (f_2,f_1) = 0,$$
$$(f_1,f_1) = 2\left(1-e^{i(\varphi_2-\varphi_3)}\right)\left(1-e^{i(\varphi_3-\varphi_2)}\right),$$
$$(f_2,f_2) = 2\left(1-e^{i(\varphi_2-\varphi_3)}\right)\left(1-e^{i(\varphi_3-\varphi_2)}\right).$$

Поэтому

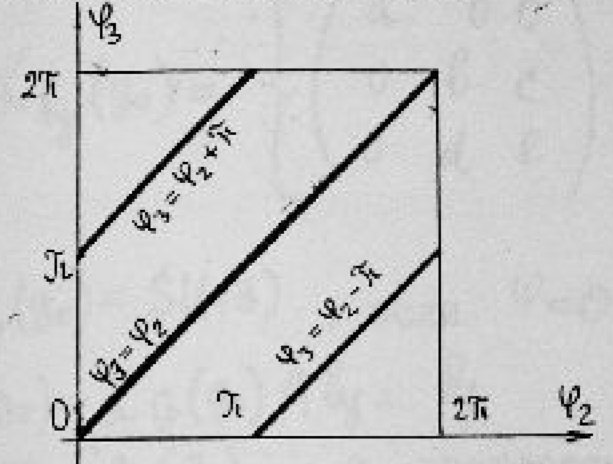
$$\mathrm{vol}\, O(g) = \sqrt{\frac{\det\|(f_i,f_j)\|}{\det\|(e_i,e_j)\|}} =$$

$$= \mathrm{const}\ \left(1 - e^{i(\varphi_2-\varphi_3)}\right)\left(1 - e^{i(\varphi_3-\varphi_2)}\right) =$$

$$= \mathrm{const}\ \left(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\right)$$

Предложение 4.5.2. Критические точки функции объема для действия, ассоциированного с симметрическим пространством $SU(3)/S(U(1)\times U(2))$ имеют вид $\varphi_3 = \varphi_2 + 2\pi k$, $\varphi_3 = \varphi_2 + \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Доказательство следует из предложения 4.2.2.

Замечание 4.5.I. Распределение точек экстремума функции объема можно изобразить на квадрате $0 \le \varphi_2, \varphi_3 \le 2\pi$ в виде следующей диаграммы критических точек



Исследуем теперь орбиты действия группы Ли $S(U(1)\times U(2))$ на пространстве $SU(3)^*$.

Лемма 4.5.I. $\dim SU(3)^* = 4$

Доказательство. Из каждой точки $g \in T$ вырастает двумерная орбита действия группы Ли $S(U(1)\times U(2))$. Действительно, централизатор регулярного элемента

$$g_0 = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} \end{pmatrix}$$

в группе Ли $SU(3)$ есть максимальный тор T этой группы Ли, но $\mathcal{Z}_{H}(g_0) = \mathcal{Z}_{G}(g_0) \cap H = T$. поэтому $\dim \mathcal{Z}_{H}(g_0) = 2$,

и, следовательно, $\dim O(g_0) = \dim \mathfrak{h}_{\mathcal{Y}} - \dim T = 4-2=2$,
поскольку $\dim S(U(1)\times U(2)) = (1+4)-1=4$ и
$$\dim SU(3)^* = \dim O(g_0) + \dim T = 2+2=4.$$

Предложение 4.5.3. а Орбиты, проходящие через сингулярные элементы $\varphi_2 = \varphi_3 \pmod{2\pi}$ не являются главными для действия группы $S(U(1)\times U(2))$ на $SU(3)$. б) Орбиты, проходящие через элементы $\varphi_2 = \varphi_3 + (2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, являются главными.

Доказательство. а) Пусть $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$, т.е.
$$g_0 = \begin{pmatrix} e^{-2i\varphi} & & \\ & e^{i\varphi} & \\ & & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$
Тогда
$$\mathcal{L}_{\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}}}(g_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \right\}, \text{ если } \varphi \neq 0 \text{ и}$$
$\mathcal{L}_{G}(g_0) = SU(3)$, если $\varphi = 0$. В любом случае $\mathcal{L}_{\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}}}(g_0) = \mathcal{L}_{G}(g_0) \cap \mathfrak{h}_{\mathcal{Y}} = \mathfrak{h}_{\mathcal{Y}}$. Эта группа действует нетривиально на $C_{\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}}}(g_0)$, а, следовательно, представление среза нетривиально, т.е. соответствующая орбита не главная.

б) Пусть $\varphi_3 = \varphi_2 + (2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е.
$$g_0 = \begin{pmatrix} -e^{-i2\varphi} & & \\ & -e^{i\varphi} & \\ & & e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$
где $\varphi = \varphi_3$. Тогда
$$\mathcal{L}_{\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}}}(g_0) = \begin{pmatrix} e^{i\psi_1} & & \\ & e^{i\psi_2} & \\ & & e^{i\psi_3} \end{pmatrix} = T \subset SU(3).$$

Группа T действует тождественно на $C_{\mathfrak{g}}(g_0)$, следовательно, представление среза тривиально.

Доказательство основной теоремы для пространства $SU(3)/S(U(1)\times U(2))$. Критические точки функции объема на $SU(3)^*_{\text{гл.}}$ дают локально минимальные орбиты в $SU(3)^*$. В силу вышедоказанного критические точки функции объема на $SU(3)^*_{\text{гл.}}$ – это в точности те элементы, для которых $\varphi_2 = \varphi_3 + (2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Соответствующая орбита W действия группы Ли $S(U(1)\times U(2))$ на $SU(3)^*$ имеет вид

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} -e^{2i\varphi} & & \\ & -e^{i\varphi} & \\ & & e^{i\varphi} \end{pmatrix} g^{-1},\ g\in S(U(1)\times U(2)) \right\}.$$

§ 6. Случай $SO(5)/SO(4)$.

Рассмотрим стандартное вложение $SO(4)\subset SO(5)$: если $A\in SO(4)$, то $A \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & 1 \end{array}\right) \subset SO(5)$

Предложение 4.6.I. Пусть T - описанный в § I максимальный тор группы Ли $SO(5)$. Тогда

$$vol\, O(g) = const\,(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))(1-\cos(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Доказательство. В качестве базиса алгебры Ли $so(4)$ группы $SO(4)$ по модулю алгебры Ли максимального тора в этом случае удобно взять матрицы

$$e_1 = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right), \quad e_2 = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & & 1 & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & & & \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right),$$

$$e_3 = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ \hline -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right), \quad e_4 = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ \hline & -1 & & & \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right)$$

Тогда, вычисляя матрицы $f_i = g^{-1} e_i g - e_i$ и их скалярные произведения, получим

$$(f_1, f_1) = (f_2, f_2) = c\,(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$(f_3, f_3) = (f_4, f_4) = c\,(1 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (f_i, f_j) = 0 \ (i \neq j).$$

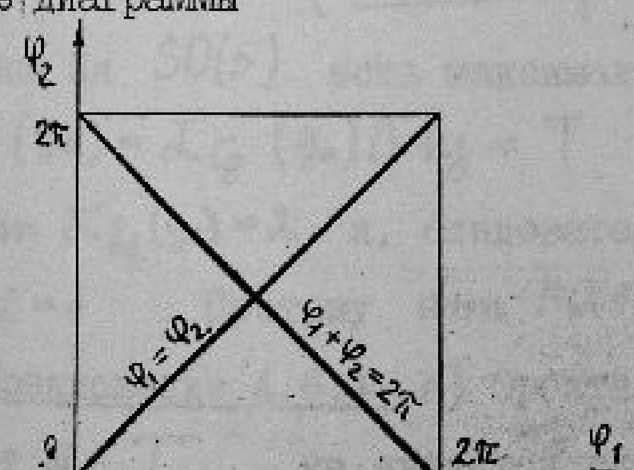
Таким образом, $\operatorname{vol} O(g) = \mathrm{const} \sqrt{\dfrac{\det \|(f_i, f_j)\|}{\det \|(e_i, e_j)\|}} =$

$$= \mathrm{const}\,(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2))(1 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Предложение 4.6.2. Функция объема обращается в нуль на подмногообразиях $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi k$, $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Доказательство очевидно.

Замечание 4.6.I. Подмногообразия, на которых функция объема обращается в нуль, удобно изобразить на квадрате в виде диаграммы



Найдем теперь критические точки функции объема, не принадлежащие указанным подмногообразиям.

Предложение 4.6.3. Критические точки функции объема для действия, ассоциированного с симметрическим пространством $SO(5)/SO(4)$ имеют вид

$$((2k+1)\pi,\ 2\pi l),\ (2\pi l,\ (2k+1)\pi),\quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Доказательство. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1} = const\ \{(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))\sin(\varphi_1+\varphi_2)+(1-\cos(\varphi_1+\varphi_2))\sin(\varphi_1-\varphi_2)\}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2} = const\ \{(1-\cos(\varphi_1-\varphi_2))\sin(\varphi_1+\varphi_2)-(1-\cos(\varphi_1+\varphi_2))\sin(\varphi_1-\varphi_2)\}=0 \end{cases}$$

Имеем $\varphi_1+\varphi_2=\pi k$, $\varphi_1-\varphi_2=\pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Поэтому, если точка (φ_1, φ_2) не принадлежит подмногообразиям, на которых функция объема обращается в нуль, то либо $(\varphi_1,\varphi_2)=((2k+1)\pi,\ 2\pi l)$, либо $(\varphi_1,\varphi_2)=(2\pi l,\ (2k+1)\pi)$.

Исследуем орбиты действия группы $SO(4)$ на $SO(5)^*$.

Лемма 4.6.1. $\dim SO(5)^* = 6$.

Доказательство. Из каждой регулярной точки $g \in T$ вырастает четырехмерная орбита действия группы Ли $SO(4)$. Действительно, централизатор регулярного элемента

$$g_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

в группе Ли $SO(5)$ есть максимальный тор T этой группы, но $\mathcal{L}_{h}(g_0)=\mathcal{L}_{G}(g_0)\cap h = T$, поскольку $T \subset h$. Поэтому $\dim \mathcal{L}_{h}(g_0)=2$ и, следовательно, $\dim O(g_0)=\dim SO(4)-\dim T = 6-2=4$. Поэтому $\dim SO(5)^* = \dim O(g_0)+\dim T = 4+2=6$.

Предложение 4.6.4. а) Орбита, проходящая через сингулярный элемент $g \in T$, не является главной для действия группы $SO(4)$ на $SO(5)$. б) Орбита, проходящая через регулярный элемент, главная.

<u>Доказательство</u>. а) Пусть $g \in T$ — сингулярный элемент группы Ли $SO(4)$, т.е. либо $\varphi_1+\varphi_2 = 0 \pmod{2\pi}$, либо $\varphi_1-\varphi_2 = 0 \pmod{2\pi}$. В любом случае $\dim \mathcal{L}_{h}(g) > 2$, т.е. $\dim O(g) < 4$. Таким образом, орбита $O(g)$ главной не является.

б) Пусть $g \in T$ — регулярный элемент группы Ли $SO(4)$. Тогда $\mathcal{L}_{h}(g_0) = \mathcal{L}_{G}(g_0) \cap h = T$. Группа T действует тождественно на $(L_g)_* C_G(g)$, следовательно, представление среза тривиально.

Доказательство основной теоремы для пространства $SO(5)/SO(4)$. Критические точки функции объема на $SO(5)^*_{гл.}$ дают локально минимальные орбиты в $SO(5)^*$. В силу вышедоказанного критические точки функции объема на $SO(5)^*_{гл.}$ — это в точности точки $((2k+1)\pi, 2\pi l)$ и $(2\pi l, (2k+1)\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Соответствующие орбиты W действия группы Ли $SO(4)$ на $SO(5)^*$ имеют вид

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1}, \ g \in SO(4) \right\},$$

$$W = \left\{ g \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} g^{-1}, \ g \in SO(4) \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамс Дж. Лекции по группам Ли.- М.: Наука, 1979.
2. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований.- М.: Мир, 1980.
3. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны.- М.: Наука, 197
4. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.- М.: Мир, 1971.
5. Дао Чонг Тхи. О минимальных вещественных потоках на римановых многообразиях.- ИАН СССР, 19 , 41, № 4, с. 853-867.
6. Дао Чонг Тхи. Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато.- ИАН СССР, 1980, 44, № 5, с. 1031-1065.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.- М.: Наука, 1979.
8. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения.- М.: Мир, 1975.
9. Ле Хонг Ван. Минимальные поверхности и формы калибровки в симметрических пространствах.- В кн. Труды семин. по вект. и тенз. анализу.- М.: Изд-во МГУ, 1985, вып. XXII, с. 107-118.
10. Лоос О. Симметрические пространства.- М.: Наука, 1985.
11. Мантуров О.В. Однородные римановы пространства с неприводимой группой вращений.- В кн. Труды семин. по вект. и тенз. анализу. М.: Изд-во МГУ, 1966, вып. XIII, с. 68-148.
12. Милнор Дж. Теория Морса.- М.: Мир, 1965.
13. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии.- М.: Изд-во МГУ, 1980.
14. " Семинар Софус Ли ". Теория алгебр Ли. Топология групп Ли.- М.: ИЛ, 1962.
15. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.- М.: Мир, 1953.

16. Стинрод Н. Топология косых произведений.- М.: ИЛ, 1953.
17. Фоменко А.Т. Многомерная задача Плато в Римановых многообразиях.- Матем. сб., 1972, 89 /131/, вып. 3, с. 475-520.
18. Фоменко А.Т. Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга.- ИАН СССР, 1972, 36, № 5, с. 1049-1080.
19. Фоменко А.Т. Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомологий и когомологий. Часть I.- В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу, ХУП. М.: Изд-во МГУ, 1974, с. 3-176; часть II - В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу, ХУШ, М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 4-93.
20. Фоменко А.Т. Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей.- УМН, 1981, № 6, 36, с. 105-135.
21. Фоменко А.Т. Вариационные методы в топологии.- М.: Наука, 1982.
22. Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи.- М.: МГУ, 1984.
23. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.- М.: Мир, 1964.
24. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.- М.: Мир, 1970.
25. Эль Махи С.А.К. Обьемы орбит в некоторых однородных пространствах.- В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу, XXII, М.: Изд-во МГУ, 1985, с. 185-187.
26. Эль Махи С.А.К. Объемы орбит присоединенного представления компактных групп Ли.- В сборнике: Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986 / сдано в печать /.

27. Almegren F.J. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of varying topological type and singularity structure.- Ann. Math., 1908, No. 2, p. 321-393.

28. Federer H. Geometric meosure theorie. -Berlin, Springer Bd. 1969, 153.

29. Harvey R., Lauson H.B. Calibrated geometries. - Acta Math., 1982, V. 148, p. 47-157.

30. Hsiang Wu Chung and Hsiang Wu-YI. Differentiable Actions of compact connected classical Groups.- American Journal of Math., 1967, V.89.

31. Hsiang W.Y., Lawson H.B. Minimal submanifolds of low cohomogenity. - J. Diff. Geometry, 5, No. 1, 1-38.

32. Lawson H.B. The equavariant Plateau problem and interior regularity. - Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 173, 231-249.

33. Montgomery D. and Yang C.T. The existence of slice. Annals of Math., 1957, Vol. 65, No. 1.

34. Tasaki H. Certain minimal or homologically volume minimizing spaes.- Tsukuba J. Math., 1985, V.9 No. 1, p. 117-131.

35. Wolf J.A. The geometry and structure of isotropy-irregucible homogeheous spaces - Acta Math., 1968, 120, p. 59-148.