Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 514

Деркач Мария Михайловна

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНЫХ ИНВОЛЮТИВНЫХ НАБОРОВ ПОЛИНОМОВ НА ПОЛУПРЯМЫХ СУММАХ АЛГЕБР ЛИ.

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
академик РАН А. Т. Фоменко
д.ф.-м.н., профессор А. В. Болсинов

Москва, 2010

Оглавление

Введение.

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена исследованию интегрируемости гамильтоновых систем алгебраическими и геометрическими методами. Как известно, многие классические уравнения механики (в частности, гамильтоновы системы) записываются как системы дифференциальных уравнений на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Для полной интегрируемости такой системы в общем случае необходимо $(n-1)$ независимых первых интегралов. Однако есть класс многообразий, называемых симплектическими многообразиями, где для полной интегрируемости системы иногда достаточно $n/2$ независимых первых интегралов.

Один из простейших примеров симплектического многообразия — это орбита коприсоединенного действия группы Ли. Если мы сможем в $\mathbb{R}^n$ ввести структуру алгебры Ли так, чтобы на орбите коприсоединенного действия векторное поле, задающее исследуемую систему, было гамильтоновым, то для полной интегрируемости системы достаточно найти набор интегралов, удовлетворяющих теореме Лиувилля. В таких случаях число независимых интегралов должно быть равно половине размерности орбиты.

Эта задача допускает естественное обобщение: вместо рассмотрения конкретной системы уравнений можно поставить вопрос об отыскании максимального коммутативного набора полиномов для произвольной алгебры Ли. Из таких наборов зачастую получаются интересные механические системы. А именно: взяв любую функцию из набора в качестве гамильтониана, можно получить гамильтонову систему, которая будет интегрируема ввиду наличия полного набора коммутирующих полиномиальных интегралов.

Напомним ряд необходимых определений.

Определение 1. *Алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство, на котором введена билинейная, кососимметрическая операция коммутатор $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющая тождеству Якоби $[[\xi,\eta],\zeta]+[[\eta,\zeta],\xi]+[[\zeta,\xi],\eta] = 0$ для любых $\eta,\zeta,\xi \in \mathfrak{g}$. Если рассматривать конечномерные алгебры Ли, то двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ (т.е. пространство линейных функционалов на $\mathfrak{g}$) будет конечномерным линейным пространством.

Ниже, если не оговорено противное, мы рассматриваем лишь вещественные алгебры Ли.

На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ будем рассматривать гладкие функции $f\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$. Заметим, что на множестве таких функций $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ существует скобка Пуассона–Ли

$$\{\cdot;\ \cdot\}\colon C^\infty(\mathfrak{g}^*)\times C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

определяемая в каждой точке $x \in \mathfrak{g}^*$ равенством

$$\{f,g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{0.1}$$

В механических системах первые интегралы чаще всего являются полиномиальными функциями на $\mathfrak{g}^*$, например, полная энергия механической системы — это квадратичный полином от элементов самой алгебры. Для полиномиальных функций f и g скобку Пуассона–Ли можно определить следующим эквивалентным способом:

1). Если f и g — линейные (т.е. $f,g \in \mathfrak{g}$), то $\{f,g\} = [f,g]$, 2). $\{,\}$ — билинейная,

3). $\{,\}$ — кососимметричная,

4). Скобка удовлетворяет правилу Лейбница $\{fg,\, h\} = \{f, h\}g + \{g, h\}f$ для любых полиномов $f,\ g,\ h$.

Определение 2. Говорят, что две функции находятся *в инволюции* (или *коммутируют*), если их скобка Пуассона–Ли равна нулю.

Еще одно важное понятие — это *коприсоединенное действие группы*. Пусть конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует группа Ли G, т.е. гладкое многообразие, имеющее структуру группы с гладкими операциями умножения и взятия обратного элемента. Тогда алгебра Ли — это касательное пространство в единице этой группы. На алгебре $\mathfrak{g}$ естественно определено *присоединенное действие ее группы* $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ по следующему правилу: пусть $g(t)$ кривая в группе G, проходящая через единицу группы в начальный момент времени $t = 0$, касательный вектор к которой в единице группы совпадает с наперед заданным вектором $\xi \in \mathfrak{g}$. Тогда для любого элемента $h \in G$, $hg(t)h^{-1}$ — тоже кривая в группе G, проходящая через единицу группы в начальный момент времени $t = 0$, а значит касательный вектор к ней в единице группы также лежит в алгебре $\mathfrak{g}$. Этот вектор и является результатом действия оператора Ad_h на вектор ξ. Действие, двойственное к присоединенному действию группы, называется *коприсоединенным действием* $\mathrm{Ad}^*\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ и играет важную роль в теории гамильтоновых систем, а именно: орбиты O^* коприсоединенного действия являются *симплектическими многообразиями* (т.е. многообразиями, на которых можно ввести замкнутую невырожденную 2-форму, см. [1, стр. 15-17]). Для симплектических многообразий верна теорема

Лиувилля, позволяющая уменьшить необходимое количество первых интегралов.

Теорема 1. *Пусть на гладком симплектическом многообразии* M^{2n} *заданы гамильтонова система*[1] $v = \operatorname{sgrad} H$ *и набор гладких функций* $f_1, \ldots, f_n$ *со следующими свойствами:*

- $f_1, \ldots, f_n$ *— первые интегралы системы,*
- *они функционально независимы на* M^{2n}*,*
- *они попарно коммутируют относительно скобки Пуассона* $\{f, g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g)$*,*
- *векторные поля* $\operatorname{sgrad} f_i$ *полны, т.е. естественный параметр вдоль интегральных траекторий полей определен на всей числовой прямой.*

Пусть T_ξ *— совместная поверхность уровня интегралов* $f_1, \ldots, f_n$*. Тогда*

1. *Если многообразие* T_ξ *связно, регулярно и компактно, то оно диффеоморфно n-мерному тору. Этот тор называется тором Лиувилля*
2. *Слоение Лиувилля в окрестности тора Лиувилля тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению* $T^n \times D^n$*.*
3. *В достаточно малой окрестности* $U = T^n \times D^n$ *существует такая система координат* $s_1, \ldots, s_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *(называемых переменными действие-угол), что*

[1] Определение косого градиента функции sgrad можно найти, например, в [1, стр. 18].

- $s_1, \ldots, s_n$ *— координаты на диске* D^n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— координаты на торе* T^n,
- *симплектическая форма* ω *принимает в этих координатах канонический вид:* $\omega = d\varphi_i \wedge ds_i$,
- *В переменных действие-угол гамильтонов поток выпрямляется на каждом торе Лиувилля в окрестности* U, *т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид*

$$\dot{s}_i = 0, \;\; \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \ldots, s_n), \; i = 1, \ldots, n.$$

(Более подробную формулировку и доказательство теоремы Лиувилля можно найти в [1, стр.27-33]).

Как было сказано выше, орбита O^* является симплектическим многообразием, при этом симплектическая 2-форма ω вводится каноническим образом (см. [1, стр.17–18]). На пространстве гладких функций на любом симплектическом многообразии M можно ввести операцию *скобки Пуассона* по следующему правилу: $\{f, g\} = \omega(\mathrm{sgrad}\, f, \mathrm{sgrad}\, g)$. Оказывается, что если M — это орбита коприсоединенного действия O^*, то ограничение скобки Пуассона–Ли, введенной формулой (0.1), на M совпадает со скобкой Пуассона, существующей на ней как на симплектическом многообразии с канонической формой ω.

Модельным примером описанной выше конструкции может служить система, описывающая движение твердого тела в трехмерном пространстве. Соответствующая система дифференциальных уравнений может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{K} = [K, \Omega] + [e, u], \\ \dot{e} = [e, \Omega]. \end{cases} \tag{0.2}$$

Здесь K — кинетический момент, Ω — угловая скорость тела, а физический смысл векторов e и u определяется выбранной задачей. Эта система уравнений на $\mathbb{R}^6(K, e)$ имеет два естественных первых интеграла: $f_1 = \langle e, e \rangle$, $f_2 = \langle K, e \rangle$. Для полной интегрируемости системы (0.2) необходимо найти еще три интеграла. Однако введение на $\mathbb{R}^6(K, e)$ структуры алгебры Ли позволяет уменьшить искомое число первых интегралов.

На пространстве $\mathbb{R}^6(K, e)$ можно ввести структуру алгебры Ли $e(3)$, т.е. алгебры Ли группы движений трехмерного пространства. Совместная поверхность уровня M_{12} первых интегралов f_1 и f_2 будет являться орбитой коприсоединенного действия группы $E(3)$, а значит ограничение скобки Пуассона–Ли (вырожденной на всей алгебре $e(3)$), на орбиту окажется невырожденным. Многообразие M_{12} в общем случае имеет размерность 4. Поскольку векторное поле (0.2) касается поверхности M_{12} и оказывается гамильтоновым на M_{12} ([2, стр.108]), получаем гамильтонову систему на 4-мерном симплектическом многообразии, для интегрируемости которой по теореме Лиувилля необходимо два интеграла. Один из них — это гамильтониан системы, второй требуется найти.

Обобщение этой конструкции на случай произвольной алгебры $\mathfrak{g}$ выглядит следующим образом: пусть размерность орбиты коприсоединенного действия O^* общего положения равна $\dim O^*$. Тогда для «различения» орбит требуется $\dim \mathfrak{g} - \dim O^* = \operatorname{codim} O^*$ интегралов. Каждая орбита — это симплектическое многообразие, поэтому для интегрируемости системы на нем необходимо еще $\frac{\dim O^*}{2}$ функций. Следовательно, общее число функционально независимых полиномов для интегрируемости системы на всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ равно

$$m = \operatorname{codim} O^* + \frac{\dim O^*}{2} = \frac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{codim} O^*}{2}. \tag{0.3}$$

Определение 3. Коразмерность орбиты регулярного элемента для коприсоединенного действия называется *индексом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \min_{O^*}(\dim \mathfrak{g} - \dim O^*).$$

С использованием определения индекса алгебры формулу (0.3) можно переписать в виде: $m = \left(\frac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}}{2}\right)$.

Определение 4. Коммутативный относительно скобки Пуассона набор функционально независимых полиномов $f_1, \ldots, f_m$ называется *полным*, если

$$m = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}\right). \tag{0.4}$$

Таким образом, если на алгебре Ли найдется полный коммутативный набор полиномов $f_1, \ldots, f_m$, то гамильтонова система на *всей* алгебре, с гамильтонианом $f \in \{f_1, \ldots, f_n\}$, будет интегрируема.

Исследуя гамильтоновы системы на алгебрах Ли, А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко сформулировали важную гипотезу: на двойственном пространстве к любой конечномерной алгебре Ли над полем нулевой характеристики $\mathbb{K}$ всегда существует полный коммутативный набор полиномов. Следовательно, всегда существует интегрируемая гамильтонова система с полиномиальными интегралами. А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко доказали эту гипотезу для всех редуктивных алгебр Ли (определение см. ниже). Доказательство оказалось весьма нетривиальным и было основано на новом методе, предложенном авторами, и получившем в дальнейшем широкие применения и развитие во многих работах. Затем последовало большое число работ различных авторов, в которых гипотеза Мищенко-Фоменко доказывалась для других алгебр Ли. Окончательное доказательство гипотезы было получено С. Т. Садэтовым [3]. Более наглядное и геометрическое доказательство, основанное на алгоритме Садэтова, приведено А. В. Болсиновым в [4]. Таким образом, верно следующее фундаментальное утверждение.

Теорема 2 (Мищенко, Фоменко, Садэтов)**.** *На двойственном пространстве к любой конечномерной алгебре Ли над полем нулевой характеристики всегда существует полный инволютивный набор полиномов.*

Наиболее изученный класс алгебр Ли — это полупростые и редуктивные алгебры Ли. Напомним, что *полупростой* называется алгебра Ли, не имеющая нетривиальных разрешимых идеалов. Если рассмотреть прямую сумму полупростой алгебры Ли с любой коммутативной алгеброй, получим *редуктивную алгебру Ли.* Для случая редуктивных алгебр теорема 2 была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [8]–[14]. Полный инволютивный набор полиномов для такой алгебры может быть построен с помощью метода сдвига аргумента[2], введенного в [8], [10], [16]–[19].

Следующий важный класс алгебр — это полупрямые суммы алгебр Ли.

[2]Подробнее о методе сдвига аргумента будет рассказано в главе 1.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли с коммутатором $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$, а $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$ — произвольное линейное представление этой алгебры. *Полупрямой суммой* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_{\chi} V$ называется алгебра Ли, которая как линейное пространство изоморфна прямой сумме пространств $\mathfrak{h}$ и V, а коммутатор определяется следующим образом: пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}$, $v_1, v_2 \in V$, тогда $[(\xi_1, v_1),\, (\xi_2, v_2)] = ([\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{h}},\, \chi(\xi_1)v_2 - \chi(\xi_2)v_1)$.

Вопрос построения полных наборов для полупрямых сумм алгебр Ли рассматривался многими авторами. Полупрямые суммы простых алгебр Ли по неприводимому представлению рассматривали А.В. Болсинов [11, 29] и Б. Привитцер [12]. Кроме того, для сумм $\mathrm{gl}(2n) + V$ по представлению $\Lambda^2\rho$ (где $\Lambda^2\rho$ – вторая внешняя степень представления минимальной размерности), $\mathrm{sl}(2n)+V$ по представлению $S^2\rho$ (где $S^2\rho$ – вторая симметрическая степень представления минимальной размерности) и $\mathrm{sp}(n)+V$ по сумме представлений $\rho+\tau$ (где ρ – представление минимальной размерности, а τ — одномерное тривиальное представление) Т. А. Певцовой в [21] построены явные формулы для искомых полиномов. Наиболее полный список результатов приведен в обзоре В.В.Трофимова и А.Т.Фоменко [7, с.249], а также во введении к кандидатской диссертации К.Шваи [26]. Общие результаты в этом направлении получены А.В. Браиловым (см. обзор Трофимова, Фоменко [25]) и А.С. Теном (см. [23]).

Определение 6. *Инвариантом алгебры Ли* называется функция $f\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{K}$, постоянная на орбитах коприсоединенного действия.

Теорема 3 (А. В. Браилов [25, 24])**.** *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_{\chi} V$ *— полупрямая сумма комплексной алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *и линейного пространства* V

относительно неприводимого представления. $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$*. Пусть* $g_1, \dots, g_k$ *— инварианты алгебры* $\mathfrak{g}$*. Тогда сдвиги этих инвариантов*[3] $g_m(x + \lambda L)$ *на элемент* $L \in \mathfrak{h}^*$ *совместно с линейными функциями на* V^* *образуют инволютивный набор функций на* $\mathfrak{g}^*$*.*

Введем обозначение для *стационарной подалгебры* в смысле представления χ^*:

$$\mathrm{St}\, v = \{A \in \mathfrak{h}\colon \chi^*(A)v = 0\}, \quad v \in V^*. \tag{0.5}$$

Теорема 4 (А. В. Браилов [25, 24])**.** *Набор, описанный в теореме 3, является полным тогда и только тогда, когда сдвиги инвариантов алгебры* $\mathrm{St}\, v$ *дают полный набор функций на пространстве* $(\mathrm{St}\, v)^*$*, где* $v \in V^*$ *— элемент общего положения.*

Определение 7. Обозначим через $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ дифференциал присоединенного действия группы $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. *Полупростой компактной* (или просто *компактной*) алгеброй Ли называется вещественная полупростая алгебра Ли, форма Киллинга $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_M \mathrm{ad}_N$ на которой отрицательно определена.

В виду компактности алгебры $\mathfrak{h}$ ее можно представить как подалгебру в $\mathrm{so}(m)$ для достаточно большого m. Тогда отождествление с $\mathfrak{h}^*$ производится при помощи формы $\mathrm{Tr}\colon (A, B) = \mathrm{Tr}\, AB$, здесь A, B представлены кососимметрическими матрицами $m \times m$.

Теорема 5 (А. С. Тен [23])**.** *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ *— полупрямая сумма компактной алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *и линейного пространства* V *по произвольному представлению* $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$*. Рассмотрим следующий набор функций на* $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}^* + V^*$*:* $\sum \lambda^m f_{k,L,m}(M, v) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\ v}(M + \lambda L))^k$*,*

[3] Т.е. функции, полученные из инвариантов алгебры путем сдвига аргумента. Подробнее об этом будет рассказано в главе 1.

где $L \in \mathfrak{h}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *а* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M$ *— проекция элемента* $M \in \mathfrak{h}^*$, *рассматриваемого как элемент* $\mathfrak{h}$, *на стационарную подалгебру* $\mathrm{St}\, v$ *элемента* v. *Функции* $f_{k,L,m}$, *совместно с базисом пространства* V, *рассматриваемым как набор линейных функций на* V^*, *будут образовывать полный инволютивный набор функций на* $\mathfrak{g}^*$.

Поскольку результаты Тена и Браилова получены независимо, возникает вопрос о сравнении наборов, получаемых методами Тена, Браилова и Садэтова. Для начала определим, какие наборы полиномов мы называем совпадающими.

Определение 8. По полному набору функций $\{h_j\}$ определим подпространство $\mathcal{D}_x(h_j) \subset \mathfrak{g}$, порожденное дифференциалами функций $h_j(x)$ из набора в точке x.

Определение 9. Будем говорить, что наборы полиномов $\{f_k\}$ и $\{g_m\}$ *эквивалентны*, если подпространства $\mathcal{D}_x(f_k)$ и $\mathcal{D}_x(g_m)$ совпадают почти для всех точек $x \in \mathfrak{g}^*$.

Отметим, как известно, что два набора полиномов на алгебре Ли (и вообще на алгебраическом многообразии) эквивалентны в том и только в том случае, когда они алгебраически зависимы, т.е. полиномы одного набора полиномиально выражаются через полиномы другого набора.

Поскольку в наборах, построенных каждым из методов, присутствует матричный параметр сдвига, то естественно считать, что наборы эквивалентны, если возможно выбрать этот параметр так, чтобы полученные наборы оказались эквивалентными в смысле определения 9.

Определение 10. *Набором Браилова* назовем следующий набор полиномов, состоящий из двух частей:

Первая часть — линейные функции на V^* (т.е. базис пространства V), Вторая часть — функции $g_{m,L}(x)$, полученные из сдвигов инвариантов $g_i(x)$ коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ на вектор $L \in \mathfrak{h}^*$, путем разложения $g_i(x + \lambda L)$ по степеням λ.

Определение 11. *Набором Тена* назовем следующий набор функций, состоящий из двух частей:
Первая часть — линейные функции на V^* (т.е. базис пространства V), Вторая часть — функции $f_{k,L}(x)$, полученные из сдвигов следов степеней $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\ v}(M+\lambda L))^i$, путем разложения по степеням λ (см. теорему 5).

Заметим, что набор Браилова определен для более широкого класса алгебр, чем набор Тена. Однако, для получения явного вида функций из набора Браилова требуется знать вид инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$, что в общем случае является довольно сложной задачей. Поэтому набор Тена в определенном смысле построен «более явно», чем набор Браилова.

Структура диссертации.

Данная диссертация состоит из двух глав. Первая глава диссертации посвящена сравнению наборов, получаемых методами Тена, Браилова и Садэтова. Главный результат первой главы сформулирован в теоремах A,B и C.

Теорема A. *Рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V по произвольному представлению $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Пусть вторые части наборов Тена и Браилова получены сдвигом на один и тот же вектор L. Тогда наборы Тена и Браилова эквивалентны.*

Подобно описанным двум методам, метод Садэтова также использует коммутативный идеал, который дополняется до полного набора функциями следующего специального вида: рассматриваются рациональные отображения $\psi\colon V^* \to \mathfrak{g}$, такие что $\psi(v) \in \tilde{\mathrm{St}}\, v$ для любого $v \in V^*$, где $\tilde{\mathrm{St}}\, v$ — стационарная подалгебра в смысле представления $(\mathrm{ad}|_V)^*\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V^*)$, двойственного ограничению $\mathrm{ad}|_V$ представления $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ на идеал $V \subset \mathfrak{g}$. Эти отображения будут являться сечениями расслоений стационарных подалгебр в $\mathfrak{g}$. По сечениям ψ строятся функции $f_\psi(M, v) = \langle (M, v), \psi(v) \rangle$. Функции f_ψ и будут образовывать алгебру K, на которой необходимо построить полный инволютивный набор полиномов на втором шаге. Пусть мы умеем строить полный инволютивный набор полиномов на алгебре K. Построенная «вторая часть» набора будет состоять из полиномов H_i от элементов алгебры K, но поскольку сечения ψ — рациональные, функции f_ψ также будут рациональными, а значит H_i можно считать рациональными функциями от элементов $\mathfrak{g}$. Оказывается (и мы явно это покажем в нашем случае), что полиномы, стоящие в знаменателях функций H_i, зависят только от V. Домножив H_i на знаменатель и добавив первую часть набора Садэтова, получим полный инволютивный набор полиномов на алгебре $\mathfrak{g}$.

Полный инволютивный набор на втором шаге метода Садэтова в нашем случае строится методом сдвига аргумента, причем вектор сдвига инвариантов $F_1, \dots F_n$ алгебры K — это некоторое сечение φ из алгебры сечений $\Phi = \{\varphi\colon V^* \to \mathfrak{h} | \varphi(v) \in \mathrm{St}\, v\ \forall v \in V^*\}$[4].

[4]Связь между сечениями φ и сечениями ψ, описанными выше, будет объяснена в параграфе 5 главы 1.

Определение 12. *Первой частью набора Садэтова* назовем линейные функции на V^*, т.е. базис коммутативного идеала V. *Второй частью набора Садэтова* назовем функции, полученные на втором шаге метода Садэтова.

Теорема B. *Рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V по произвольному представлению $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Пусть вторая часть набора Тена получена сдвигом функций f_k на вектор L, а вторая часть набора Садэтова — сдвигами инвариантов $F_i(\varphi) = \operatorname{Tr} \varphi^i$ на сечение $\varphi_L = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} L \in \Phi$, где проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}$ определена в теореме 5.*

Тогда наборы Тена и Садэтова эквивалентны.

Теорема C. *Рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V по произвольному представлению $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Пусть вторая часть набора Браилова получена сдвигом инвариантов $g_1, \ldots, g_m$ на вектор $L \in \mathfrak{h}^*$. Пусть $\check{\psi}_L$ — такой элемент пространства Φ^*, двойственного алгебре сечений Φ, что для любого $v \in V$ $\check{\psi}_L(v)$[5] — естественная проекция элемента $L \in \mathfrak{h}^*$ на $(\mathrm{St}\, v)^*$, а вторая часть набора Садэтова получена из сдвигов инвариантов $F_i\colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ на элемент $\check{\psi}_L \in \Phi^*$ (эти сдвиги рассматриваются как функции на $\mathfrak{g}^*$).*

Тогда наборы Браилова и Садэтова эквивалентны.

Заметим, что если в теореме C инварианты F_i брать в виде $F_i(\varphi) = \operatorname{Tr} \varphi^i$, то из теорем A и B следует утверждение теоремы C. В параграфе 6 первой главы теорема C доказана в общем случае (то есть для любого максимального набора инвариантов).

[5] О сопоставлении $\check{\psi} \mapsto \check{\psi}(v)$ будет рассказано в параграфе 6 главы 1.

Вторая глава диссертации посвящена свойствам инволютивных семейств полиномов на некоторых алгебрах Ли. Здесь рассматриваются полупрямые суммы алгебр $\mathfrak{g}_{nk} = \mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)^k$, $\mathfrak{h}_{nk} = \mathrm{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)^k$ и $\mathfrak{f}_{nk} = \mathrm{u}(n) +_{\zeta'_k} (\mathbb{C}^n)^k$ (где ρ_k, ζ_k, ζ'_k — k-ые степени представлений минимальной размерности, т.е. в каждом случае первая часть суммы действует независимо на каждой компоненте $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$). Для рассматриваемых алгебр найдены явные формулы для проекции на стационарную подалгебру $\mathrm{St}\, v$.

Теорема D. *Рассмотрим набор полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*_{nk}$: базис $u_1, \ldots, u_{nk}$ пространства $V = (\mathbb{R}^n)^k$, рассматриваемый как линейные функции на V^*, и функции*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^l(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}v}(M + \lambda B))^l, \qquad (0.6)$$

$l = 2, 4, \ldots, 2 \cdot [(n-k)/2]$, *где проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M$ задана явной формулой, $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ — определитель матрицы Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k$, а B — регулярный элемент* $\mathrm{so}(n)$, *выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{g}_{nk} = \mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)^k$ при $k < n-1$. Если $k \geqslant n-1$, то полный инволютивный набор на $\mathfrak{g}^*_{nk}$ образуют функции $u_1, \ldots, u_{nk}$.

Теорема E. *Рассмотрим набор полиномиальных функций на $\mathfrak{h}^*_{nk}$: базис $u_1, \ldots, u_{2nk}$ пространства $V = (\mathbb{C}^n)^k$, рассматриваемый как линейные функции на V^*, и функции*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^{2l}(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v_1,\ldots,v_k)}(M + \lambda B))^l, \qquad (0.7)$$

$l = 2, 3 \ldots n-k-1$, *где проекция* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M$ *задана явной формулой,* $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ *— определитель матрицы Грама системы векторов* $v_1, \ldots, v_k$, *а* B *— регулярный элемент* $\mathrm{su}(n)$, *выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{h}_{nk} = \mathrm{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)^k$ *при* $k < n-1$. *При* $k \geqslant n-1$ *полный коммутативный набор образуют функции* $u_1, \ldots, u_{2nk}$.

Теорема F. *Рассмотрим набор полиномиальных функций на* $\mathfrak{f}_{nk}^*$: *базис* $u_1, \ldots, u_{2nk}$ *пространства* $V = (\mathbb{C}^n)^k$, *рассматриваемый как линейные функции на* V^*, *и функции*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^{2l}(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v_1,\ldots,v_k)}(M + \lambda B))^l, \qquad (0.8)$$

$l = 1, 2 \ldots n-k-1$, *где проекция* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M$ *задана явной формулой,* $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ *— определитель матрицы Грама системы векторов* $v_1, \ldots, v_k$, *а* B *— регулярный элемент* $\mathrm{u}(n)$, *выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{f}_{nk} = \mathrm{u}(n) +_{\zeta_k'} (\mathbb{C}^n)^k$ *при* $k < n-1$. *При* $k \geqslant n-1$ *полный коммутативный набор образуют функции* $u_1, \ldots, u_{2nk}$.

Явные формулы для проекций мы приводить не будем в виду их громоздкости. Они приведены в соответствующих параграфах под номерами (2.10), (2.23) и (2.37) для алгебр $\mathfrak{g}_{nk}$, $\mathfrak{h}_{nk}$ и $\mathfrak{f}_{nk}$ соответственно.

Для алгебр $\mathfrak{g}_{n1}$ также получена оценка на степени полиномов, входящих в построенный набор.

Теорема G. *Степени полиномов, входящих в набор, описанный в теореме D для k=1, не превосходят* $2n$.

Научная новизна работы.

Результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие результаты.

1. Произведено сравнение трех методов построения полных инволютивных наборов полиномов. Доказано, что при правильном выборе параметра сдвига, наборы, получаемые всеми тремя методами, эквивалентны. Указано соответствие между параметрами сдвига.

2. С использованием методов, исследованных в главе 1, приведены явные формулы полиномов для трех бесконечных серий алгебр Ли.

3. Для алгебр Ли малой размерности из исследованных бесконечных серий формулы для полиномов значительно упрощены.

4. Найдена оценка сверху для степеней полиномов, получаемых в бесконечной серии $e(n)$.

Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [27], и [31] – [32].

Глава 1

Методы Тена, Браилова и Садэтова построения полных коммутативных семейств полиномов на алгебрах Ли. Сравнение полученных наборов полиномов.

В этой главе мы рассмотрим, какие наборы полиномов можно получить, применяя методы Тена, Браилова и Садэтова.

Напомним для начала идею *метода сдвига аргумента*, который понадобится нам в этой главе. Этот метод заключается в следующем: пусть $f(x)$ — инвариант алгебры Ли, т.е. функция, постоянная на орбитах коприсоединенного действия. Рассмотрим сдвиг $f(x + \lambda a)$ на произвольный регулярный вектор a. Если инвариант полиномиальный, то $f(x + \lambda a)$ можно разложить по степеням λ. Коэффициенты $f_i(x)$ этого разложения будут находиться в инволюции. Если алгебра редуктивная, то взяв такие коэффициенты для всех инвариантов алгебры, получим полный инволютивный набор полиномов.

В этой главе мы будем рассматривать алгебры типа полупрямой суммы

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V, \tag{1.1}$$

где $\mathfrak{h}$ — полупростая вещественная компактная алгебра Ли, а представление $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$ — произвольное.

Определение 13. По набору функций $\{h_j\}$ определим подпространство $\mathcal{D}_{x,a}(h_j) \subset \mathfrak{g}$, порожденное дифференциалами сдвигов функций $h_j(x)$ из набора на вектор a, взятыми в точке x.

Для доказательства теоремы А, напомним вкратце доказательства инволютивности наборов Тена и Браилова.

1.1 Анализ метода Тена

Для построения полного коммутативного набора на алгебре $\mathfrak{g}$ Тен использует метод цепочек подалгебр. Напомним его схему (см. также [7, §35]). Пусть требуется построить коммутативную подалгебру алгебры $\mathcal{F}$. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. Предположим, что в $\mathcal{L}$ мы умеем строить полную коммутативную подалгебру $\mathfrak{A}$. Рассмотрим функции из $\mathcal{F}$, коммутирующие с $\mathcal{L}$. Подалгебру таких функций естественно обозначить через $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}}(\mathcal{L})$. Иногда в $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}}(\mathcal{L})$ легко выбрать полную коммутативную подалгебру $\mathfrak{B}$ и тогда подалгебра $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ при некоторых естественных условиях будет полной коммутативной подалгеброй в $\mathcal{F}$.

В качестве подалгебры $\mathcal{L}$ возьмем коммутативный идеал V. Требуется найти все функции, коммутирующие с V.

Лемма 1.1. *Пусть $f\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ — некоторая функция на $\mathfrak{g}^*$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1. f — инвариант представления $\mathrm{Ad}|_V^*\colon V \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, двойственного ограничению $\mathrm{Ad}_V\colon V \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ коприсоединенного действия группы $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

2. f коммутирует с любой линейной функцией $v \in V$.

3. $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_{(M,v)} \in \mathrm{St}\, v$ для любых $M \in \mathfrak{h}^*$ и $v \in V^*$, где стационарная подалгебра $\mathrm{St}\, v$ задана формулой (0.5), а $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — естественная проекция.

Доказательство. Поскольку $d\gamma = \gamma$ для любой линейной функции $\gamma \in V$, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\{f,\gamma\}(x) = \langle x,\ [df_x,\gamma]\rangle = \langle \mathrm{ad}_\gamma df_x, x\rangle = \langle df_x,\ \mathrm{ad}^*_\gamma x\rangle. \tag{1.2}$$

Пусть выполнено условие 2, т.е. для любого $\gamma \in V$ $\{f,\gamma\} = 0$, тогда $\{f,\gamma\}(x) = 0\,\forall x \in \mathfrak{g}^*$, а следовательно, $\langle df_x,\ \mathrm{ad}^*_\gamma x\rangle = 0$. Последнее равенство, в свою очередь, и означает выполнение условия 1.

Аналогично в обратную сторону: если f — инвариант представления $\mathrm{Ad}|_V^*\colon V \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, то $\langle df_x,\ \mathrm{ad}^*_\gamma x\rangle = 0$, а следовательно $\{f,\gamma\} = 0$.

Пусть теперь $x = (M,v)$. Тогда эквивалентность условий 2 и 3 следует из следующей цепочки равенств:

$$\{f,\gamma\}(x) = \langle x, [df_x,\ \gamma]\rangle = \langle v,\ [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x,\ \gamma]\rangle = \langle \chi^*(\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x)v,\ \gamma\rangle$$

для любых $\gamma \in V$ и $x \in \mathfrak{g}^*$. Поэтому $\{f,\gamma\} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x \in \mathrm{St}\, v\ \forall x = (M,v) \in \mathfrak{g}^*$. □

Определение 14. Функции, являющиеся инвариантами представления $\mathrm{Ad}|_V^*\colon V \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, называются V-инвариантными функциями на $\mathfrak{g}^*$.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}$ множество функций, удовлетворяющих условию 3, т.е.

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \colon \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x \in \mathrm{St}\, v\}. \tag{1.3}$$

Поскольку $\tilde{\mathcal{F}}$ — множество функций, коммутирующих с V, именно из него будем выбирать недостающие функции. Нам нужно найти центр $Z(\tilde{\mathcal{F}})$ алгебры $\tilde{\mathcal{F}}$.

Лемма 1.2. *V-инвариантная функция $f(x) \equiv f(M, v)$ лежит в центре V-инвариантных функций тогда и только тогда, когда при любом фиксированном v ограничение дифференциала df_x на $\mathfrak{h}$ удовлетворяет условию,*

$$\langle M, [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x, \mathrm{St}\, v]\rangle = 0, \tag{1.4}$$

Доказательство. Функция f должна удовлетворять условию $\{f, g\} = 0$ для любой функции $g \in \tilde{\mathcal{F}}$. Перепишем это условие следующим образом:

$$0 = \{f, g\}(x) = \langle x, [df_x, dg_x]\rangle = \langle M, [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x, \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x]\rangle + \langle v, [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x, \mathrm{pr}_V dg_x]\rangle + \langle v, [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x, \mathrm{pr}_V dg_x]\rangle = \langle M, [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x, \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x]\rangle.$$

В конце мы воспользовались тем, что f и g — V-инвариантные функции. Поскольку g — любая V-инвариантная функция, а значит $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x$ — любой элемент $\mathrm{St}\, v$, условие

$$\langle M, [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x, \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x]\rangle = 0$$

равносильно формуле (1.4). □

Все рассуждения, проведенные с начала параграфа, справедливы для любой полупрямой суммы $\mathfrak{h} +_\chi V$. Другими словами, мы до сих пор не пользовались тем, что $\mathfrak{h}$ — компактная алгебра. Компактность алгебры $\mathfrak{h}$ позволяет нам вложить ее как подалгебру в алгебру $so(m)$ для достаточно большого m, после чего $\mathfrak{h}$ отождествляет с $\mathfrak{h}^*$ при помощи формы $\mathrm{Tr}\colon \langle A,\, B\rangle = \mathrm{Tr}\, AB$ (здесь $A, B \in \mathrm{so}(m)$ представлены кососимметрическими матрицами $m \times m$). Это позволяет нам построить функции из центра в наглядном виде. Результат следует из следующих лемм.

Лемма 1.3. *Функция $f(x) \equiv f(M, v) = h(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)$, где $h\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, лежит в пространстве V-инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*$.*

Доказательство см в. [23].

Следствие 1. *Функция $f_n(M, v) = \mathrm{Tr}\,\left[(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^n\right]$ лежит в центре V-инвариантных функций.*

Доказательство. Из леммы 1.2 следует, что нам достаточно доказать равенство (1.4) для функции $f(M,\, v) := f_n(M,\, v) = \mathrm{Tr}\,\left[(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^n\right]$. Найдем $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_{(M,v)}$. Для этого необходимо понять, как действует $df_{(M,v)} \in \mathfrak{g}$ на элементы $(L, 0) \in \mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$.

$$\begin{gathered}
\langle df_{(M,v)},\ L\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(M+\varepsilon L,\, v) - f(M,\, v)}{\varepsilon} = \\
= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{Tr}\,\left[(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}(M+\varepsilon L))^n\right] - \mathrm{Tr}\,\left[(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^n\right]}{\varepsilon} = \\
= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Tr}\,\left[\frac{\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}\varepsilon L}{\varepsilon} \cdot \left(\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}_v}(M+\varepsilon L)\right)^{n-1} + \cdots + (\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^{n-1}\right)\right] = \\
= \mathrm{Tr}\,\left[n\, \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} L \cdot (\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^{n-1}\right] = n\, \mathrm{Tr}\,\left[\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^{n-1} L\right].
\end{gathered}$$

Следовательно, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df(M, v) = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}\left[(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^n\right]$. Возьмем теперь произвольную матрицу $B \in \mathrm{St}\, v$. Левая часть соотношения (1.4) примет вид $\langle M, [\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}\left((\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)^{n-1}\right), B]\rangle$. Преобразуем ее, используя ортогональность проекции $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}$ в смысле формы $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\,AB$, а также то, что $\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle = -\langle [X,Z], Y\rangle$ для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$.

$$\langle M, [\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)^{n-1}\right), B]\rangle = \langle \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M, \left[\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}\left(\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M\right)^{n-1}\right), B\right]\rangle =$$
$$= -\langle [\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M, B], \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}\left(\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M\right)^{n-1}\right)\rangle = -\langle \left[\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M, B\right], \left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M\right)^{n-1}\rangle =$$
$$= \langle \left[\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M, \left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M\right)^{n-1}\right], B\rangle = 0 \quad \forall B \in \mathrm{St}\,v$$

В последнем выражении можно считать, что $[\ ,\ ]$ — обычный матричный коммутатор. Более строго: форма $\langle\ ,\ \rangle$ невырождена на $\mathrm{so}(m)$, чьей подалгеброй является $\mathfrak{h}$, поэтому $\langle N, \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} A\rangle = \langle N, A\rangle$ для любых $N \in \mathrm{St}\,v$ и $A \in \mathrm{so}(m)$. Но поскольку $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M$ — кососимметрическая матрица, в формуле для функций f_n имеет смысл брать только четные n. Следовательно, $A = (\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)^{n-1}$ — кососимметрическая, а поэтому справедлив третий переход и значит $[\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M, (\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)^{n-1}] = (\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)^n - (\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)^n = 0$. Таким образом, равенство (1.4) для функции $f_n(M, v)$ выполняется, что и доказывает лемму. □

Для получения результата основной теоремы остается применить метод сдвига аргумента. Доказательство полноты полученного набора см. в [23].

1.2 Анализ метода Браилова.

Приведем доказательство теоремы 3, которое будет полезно нам в дальнейшем.

Доказательство теоремы 3. Пусть g — инвариант коприсоединенного действия. Тогда $g(\mathrm{Ad}^*_{(X,v)}x) = g(x)$ $\forall (X,\, v) \in G$ или, что то же самое, $dg_x(\mathrm{ad}^*_\xi x) = 0$ $\forall \xi \in \mathfrak{g}$. Последнее соотношение можно переписать в виде:

$$-\langle \mathrm{ad}^*_\xi x,\, dg_x\rangle = \langle x,\, \mathrm{ad}_\xi dg_x\rangle = \langle x,\, [dg_x,\, \xi]\rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}. \tag{1.5}$$

Пусть теперь $g_1, \ldots, g_k$ — инварианты из условия теоремы. Покажем,что их сдвиги $g_m(x+\lambda L)$ коммутируют. Фиксируем $i \neq j$ и положим $g_i = f$, $g_j = g$.

Пояснение: Введем функции $\tilde{f}(x) = f(x+\lambda L)$ и $\tilde{g}(x) = g(x+\mu L)$. Тогда

$$d\tilde{f}_x(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{f}(x+\varepsilon y) - \tilde{f}(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon y+\lambda L) - f(x+\lambda L)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon y) - f(t)}{\varepsilon},$$

где $t = x+\lambda L$. Поэтому $d\tilde{f}_x = df_{(x+\lambda L)}$. Аналогично $d\tilde{g}_x = dg_{(x+\mu L)}$. А нам необходимо доказать, что функции $\tilde{g}(x)$ и $\tilde{f}(x)$ коммутируют, т.е., что выражение

$$\{d\tilde{f}_x, d\tilde{g}_x\} = \langle x, [d\tilde{f}_x, d\tilde{g}_x]\rangle = \langle x, [df_{(x+\lambda L)}, dg_{(x+\mu L)}]\rangle$$

равно нулю.

Заметим, что найдутся такие числа a и b, что $a(x+\lambda L) + b(x+\mu L) \equiv X$ для всех $\lambda \neq \mu$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle x, [df_{(x+\lambda L)}, dg_{(x+\mu L)}]\rangle &= \langle a(x+\lambda L) + b(x+\mu L),\ [df_{(x+\lambda L)}, dg_{(x+\mu L)}]\rangle = \\ &= a\langle (x+\lambda L),\ [df_{(x+\lambda L)}, dg_{(x+\mu L)}]\rangle + b\langle (x+\mu L),\ [df_{(x+\lambda L)}, dg_{(x+\mu L)}]\rangle = 0,\end{aligned}$$

так как функции f и g удовлетворяют равенству (1.5).

Теперь пусть $\alpha \in V$ — любая линейная функция на V^*. Покажем, что $\{g(x+\lambda L),\, \alpha\} = 0$. Действительно,

$$\{g(x+\lambda L,\, \alpha\}(x) = \langle x,\, [dg_{(x+\lambda L)}, \alpha]\rangle = \langle x+\lambda L,\, [dg_{(x+\lambda L)}, \alpha]\rangle - \lambda\langle L,\, [dg_{(x+\lambda L)}, \alpha]\rangle.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $[dg_{(x+\lambda L)}, \alpha] \in V$, а первое обращается в нуль из (1.5). Таким образом коммутативность набора доказана. $\square$

1.3 Функции на двойственном пространстве к стационарной подалгебре.

В этом параграфе будет описана конструкция, которой мы будем пользоваться при доказательстве теоремы А.

Зафиксируем $v \in V$. В алгебре $\mathfrak{h}$ зафиксируется некоторая подалгебра $\mathrm{St}\,v$. Заметим, что отображение $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{St}\,v$ индуцирует отображение двойственных пространств $\pi\colon (\mathrm{St}\,v)^* \to \mathfrak{h}^*$ по правилу

$$\langle \pi(M'), A\rangle = \langle M', \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} A\rangle \tag{1.6}$$

для любых $M' \in (\mathrm{St}\,v)^*,\ A \in \mathfrak{h}$.

Пусть $h(M)$ — функция на $\mathfrak{h}^*$ такая, что $dh_M \in \mathrm{St}\,v$. Введем новую функцию $\hat{h}\colon (\mathrm{St}\,v)^* \to \mathbb{R}$ по правилу $\hat{h}(M') = h(\pi(M'))\quad \forall M' \in (\mathrm{St}\,v)^*$.

Лемма 1.4. *Дифференциал функции $\hat{h}$ для любой точки $M' \in (\mathrm{St}\,v)^*$ удовлетворяет соотношению*

$$d\hat{h}_{M'} = dh_{\pi(M')}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Рассмотрим, как действует дифференциал $d\hat{h}_{M'}$ на произвольный элемент $L' \in (\mathrm{St}\,v)^*$.

$$d\hat{h}_{M'}(L') = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\hat{h}(M' + \varepsilon L') - \hat{h}(M')}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h(\pi(M' + \varepsilon L')) - h(\pi(M'))}{\varepsilon} \tag{1.8}$$

но поскольку $\pi(M' + \varepsilon L') = \pi(M') + \varepsilon\pi(L')$ из (1.8) имеем

$$d\hat{h}_{M'}(L') = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h(\pi(M') + \varepsilon\pi(L')) - h(\pi(M'))}{\varepsilon} = dh_{\pi(M')}(\pi(L')) = dh_{\pi(M')}(L'),$$

последний переход следует из того, что $dh_{\pi(M')} \in \mathrm{St}\,v$ и поскольку, в силу определения вложения π,

$$\langle \pi(L'), A\rangle = \langle L', A\rangle \quad \forall A \in \mathrm{St}\,v,\ \forall L' \in (\mathrm{St}\,v)^*. \tag{1.9}$$

Таким образом, для произвольного $L' \in (\mathrm{St}\,v)^*$ имеем соотношение $d\hat{h}_{M'}(L') = dh_{\pi(M')}(L')$, что и доказывает лемму. □

Теперь вернемся к функциям на $\mathfrak{g}^*$. Пусть $g\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ — одна из таких функций. При каждом фиксированном v функцию $g(M, v)$ можно ограничить на $\mathfrak{h}^*$. Пусть $\tilde{g}\colon \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$ — это ограничение, т.е. $\tilde{g}(M) = g(M, v)\ \forall M \in \mathfrak{h}$.

Лемма 1.5. *Дифференциал функции $\tilde{g}$ удовлетворяет соотношению*

$$d\tilde{g}_M = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x. \tag{1.10}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $L \in \mathfrak{h}$. Тогда для дифференциала $d\tilde{g}_M$ имеем

$$\begin{aligned}\langle d\tilde{g}_M,\, L\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{g}(M+\varepsilon L)-\tilde{g}(M)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(M+\varepsilon L,\, v)-g(M,\, v)}{\varepsilon} = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(x+\lambda L)-g(x)}{\varepsilon} = \langle dg_x, L\rangle = \langle \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x,\, L\rangle.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности L следует утверждение леммы. □

Лемма 1.6. *Пусть $g\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ — такая функция, что $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_{(M,v)} \in \mathrm{St}\, v$ для некоторого фиксированного $v \in V^*$. Тогда формула*

$$\hat{g}(M') = g(\pi(M'), v) \tag{1.11}$$

корректно определяет ограничение функции g на подалгебру $(\mathrm{St}\, v)^*$, при этом справедливо соотношение

$$d\hat{g}_{M'} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_{(\pi(M'),v)}.$$

Доказательство. По лемме 1.5 для ограничения $\tilde{g}\colon \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$ функции g справедливо соотношение (1.10). Следовательно, $d\hat{g}_M \in \mathrm{St}\, v$. Поэтому функцию $\tilde{g}$ можно ограничить на $(\mathrm{St}\, v)^*$, по формуле (1.11) и, воспользовавшись леммой 1.4, получить, что

$$d\hat{g}_{M'} = d\tilde{g}_{\pi(M')} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_{(\pi(M'),v)} \quad \forall M \in (\mathrm{St}\, v)^*.$$

Что и требовалось доказать. □

Иными словами, по любой функции $g\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$, дифференциал которой обладает свойством $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_{(M,v)} \in \mathrm{St}\, v$, фиксировав v, можно корректно определить функцию на $(\mathrm{St}\, v)^*$, дифференциал которой будет совпадать с проекцией дифференциала исходной функции на подалгебру $\mathfrak{h}$.

1.4 Сравнение наборов, получаемых методами Тена и Браилова

Алгоритмы Тена и Браилова вкратце можно сформулировать следующим образом:

Схема построения набора Тена.

1. Берется базис в пространстве V (первая часть набора).

2. Вторая часть набора строится с помощью центра подалгебры V-инвариантных функций. Этот центр задается соотношениями

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x \in \mathrm{St}\, v \quad V\text{-инвариантность} \tag{1.12}$$

$$\langle M,\, [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} df_x, \mathrm{St}\, v]\rangle = 0 \quad \text{центр } V\text{-инвариантных функций} \tag{1.13}$$

Показывается, что в этом центре лежат функции $f_k(M,\, v) = \mathrm{Tr}\,[(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M)^k]$

3. В качестве второй части набора берутся функции из разложения их сдвигов $\mathrm{Tr}\,[(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}(M + \lambda L))^k]$ на вектор $L \in \mathfrak{h}^*$ по степеням λ.

Схема построения набора Браилова.

1. Берется базис в пространстве V (первая часть набора).

2. Находятся инварианты $g_m(x)$ коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$.

3. В качестве второй части набора берутся функции из разложения их

сдвигов $g_m(M+\lambda L, v)$ на вектор $L \in \mathfrak{h}^*$ по степеням λ.

Лемма 1.7. *Пусть $g\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ — инвариант алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда функция $\hat{g}\colon (\mathrm{St}\, v)^* \to \mathbb{R}$ заданная формулой (1.11), является инвариантом алгебры $\mathrm{St}\, v$.*

Доказательство. Покажем, во-первых, что определение корректно. Действительно, инвариант алгебры $\mathfrak{g}$ будет являться инвариантом представления $\mathrm{Ad}|_V^*\colon V \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g}^*)$, поэтому по лемме 1.1, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_{(M,v)} \in \mathrm{St}\, v$, а значит, формула (1.11) применима.

Во-вторых, для любого инварианта алгебры $\mathfrak{g}$ выполняется равенство

$$\langle x, [dg_x, \xi]\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}^* \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, \tag{1.14}$$

а для доказательства леммы нам остается показать, что

$$\langle M', [d\hat{g}_{M'}, A]\rangle = 0 \quad \forall A \in \mathrm{St}\, v \quad \forall M' \in (\mathrm{St}\, v)^*. \tag{1.15}$$

Фиксируем произвольные $A \in \mathrm{St}\, v$ и $M' \in (\mathrm{St}\, v)^*$ и подставим в (1.14) значения $x = (\pi(M'), v)$ и $\xi = (A, 0)$. Получим

$$0 = \langle x, [dg_x,\ A]\rangle = \langle \pi(M'),\ [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_x, A]\rangle + \langle v, [\mathrm{pr}_V dg_x, A]\rangle.$$

Так как $A \in \mathrm{St}\, v$, второе слагаемое принимает вид

$$\langle v, [\mathrm{pr}_V dg_x, A]\rangle = -\langle v, \chi(A)\mathrm{pr}_V dg_x\rangle = \langle \chi^*(A)v, \mathrm{pr}_V dg_x\rangle = 0,$$

поскольку $\chi^*(A)v = 0$. Следовательно, $\langle \pi(M'),\ [\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_{(\pi(M'),v)}, A]\rangle = 0$. Преобразуем левую часть этого соотношения

$$0 = \langle \pi(M'),\ \big[\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dg_{(\pi(M'),v)},\ \mathrm{St}\, v\big]\rangle = \langle \pi(M'),\ \big[d\hat{g}_{M'},\ \mathrm{St}\, v\big]\rangle =$$
$$= \langle M',\ \big[d\hat{g}_{M'},\ \mathrm{St}\, v\big]\rangle.$$

Последний переход следовал из (1.9) и из того, что $\big[d\hat{g}_{M'}, \operatorname{St} v\big] \in \operatorname{St} v$. А значит (1.15) выполняется для любых $A \in \operatorname{St} v$ и $M' \in (\operatorname{St} v)^*$. Что и требовалось доказать. $\square$

Перейдем к функциям из второй части набора Тена. Поскольку функции f_k лежат в множестве $\tilde{\mathcal{F}}$ (1.3), их тоже можно перенести на алгебру $(\operatorname{St} v)^*$. Посмотрим, какой вид они приобретут.

Напомним, что в силу компактности алгебры $\mathfrak{h}$ можно отождествить пространства $\mathfrak{h}$ и $\operatorname{St} v$ с двойственными им. Обозначим первое отображение (задающее отождествление $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$) за $\varkappa_1$, а второе — за $\varkappa_2$.

Лемма 1.8. *При любом фиксированном v следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} (\operatorname{St} v)^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varkappa_2"'] & \mathfrak{h}^* \arrow[d, "\varkappa_1"] \\ \operatorname{St} v & \mathfrak{h} \arrow[l, "\mathrm{pr}_{\operatorname{St} v}"'] \end{tikzcd} \qquad (1.16)$$

Доказательство. Это утверждение — следствие того, что отображения $\mathrm{pr}_{\operatorname{St} v}$ и π двойственны друг другу, а также, что отображения $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ порождаются одной и той же формой Tr.

Однако, доказательство этого утверждения может быть получено и явным вычислением. Покажем, что для любого $M' \in (\operatorname{St} v)^*$ выполнено равенство $\varkappa_2^{-1}\Bigg(\mathrm{pr}_{\operatorname{St} v}\Big(\varkappa_1\big(\pi(M')\big)\Big)\Bigg) = M'$. Возьмем произвольный $A \in \operatorname{St} v$. Тогда

$$\langle \varkappa_2^{-1}\Bigg(\mathrm{pr}_{\operatorname{St} v}\Big(\varkappa_1\big(\pi(M')\big)\Big)\Bigg), A\rangle = \operatorname{Tr}\Bigg(A \cdot \mathrm{pr}_{\operatorname{St} v}\Big(\varkappa_1\big(\pi(M')\big)\Big)\Bigg) =$$
$$= \operatorname{Tr}\Big(A \cdot \varkappa_1\big(\pi(M')\big)\Big) = \langle A, \pi(M')\rangle = \langle A, M'\rangle.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Из леммы 1.8 следует, что ограничения $\hat{f}_k$ функций f_k имеют вид $\hat{f}_k(M') = f_k(\pi(M')) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}\big(\varkappa_1\pi(M')\big)\right)^k = \mathrm{Tr}\,(M')^k$. То есть также, как и в случае набора Браилова, в силу редуктивности $\mathrm{St}\, v$, они являются ее инвариантами.

Теорема А. *Рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V по произвольному представлению $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Пусть вторые части наборов Тена и Браилова получены сдвигом на один и тот же вектор L. Тогда наборы Тена и Браилова эквивалентны.*

Доказательство теоремы А. Для сравнения наборов Тена и Браилова заметим, во-первых, что первые части этих наборов эквивалентны, т.е. они состоят из функций, чьи дифференциалы порождают одно и то же пространство, а именно идеал V (поскольку дифференциалы линейных функций — это сами эти функции). Осталось сравнить вторые части наборов, т.е. посмотреть на те подпространства, которые порождают дифференциалы функций из вторых частей набора при одном и том же параметре сдвига. Более точно, нас интересуют не сами дифференциалы функций $\{f_{k,L}\}$ и $\{g_{m,L}\}$, а проекции этих дифференциалов на алгебру $\mathfrak{h}$, поскольку пространства $\mathcal{D}_{x,L}(f_k)$ и $\mathcal{D}_{x,L}(g_m)$ уже содержат подпространство V.

При фиксированном v, согласно лемме 1.6, и функции g_m, и функции f_k можно ограничить на $(\mathrm{St}\, v)^*$. Причем полученные наборы $\{\hat{g}_m\}$ и $\{\hat{f}_k\}$ состоят из инвариантов алгебры $\mathrm{St}\, v$. Посмотрим, как соотносятся сдвиги функций g_m и f_k на вектор L и сдвиги функций $\hat{g}_m$ и $\hat{f}_k$ на вектор L' , такой что $\pi(L') = L$.

Лемма 1.9. *Пусть* $\{h_i\}$ *— набор функций* $\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$*, такой что для любой функции* h_i *и любого* $x \in \mathfrak{g}^*$ $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(dh_i)_x \in \mathrm{St}\, v$*. И пусть* v *— фиксировано. Тогда пересечение пространства* $\mathcal{D}_{(M,v)}(h_{i,L})$ *с подалгеброй* $\mathfrak{h}$ *совпадает с пространством* $\mathcal{D}_{M'}(\hat{h}_{i,L'})$*, где* $\pi(L') = L$*,* $\pi(M') = M$*.*

Доказательство. Пусть $h\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая условию леммы 1.9. Сдвиг этой функции на L порождает семейство функций h_k^L по следующему правилу:

$$h(M + \lambda L, v) = \sum_k \lambda^k h_k^L(M, v).$$

Поэтому, в частности, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} d(h_k^L)_{(M,v)} \in \mathrm{St}\, v$. Теперь перейдем к сдвигу функции $\hat{h}(M') = h(\pi(M'), v)$. С одной стороны, ее аргумент можно сдвинуть на L' и получить набор функций $h_k^{L'}(M')$, таких что

$$\hat{h}(M' + \lambda L') = \sum_k \lambda^k \hat{h}_k^{L'}(M'). \tag{1.17}$$

С другой стороны,

$$\hat{h}(M' + \lambda L') = h(\pi(M') + \lambda\pi(L'), v) = \sum_k \lambda^k h_k^{\pi(L')}(\pi(M')). \tag{1.18}$$

Сравнивая (1.17) с (1.18), получаем, что $\hat{h}_k^{L'}(M') = h_k^{\pi(L')}(\pi(M'), v)$ для любого k. Откуда, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} d(h_k^{\pi(L')})_{\pi(M')} = d(\hat{h}_k^{L'})_{M'}$. Поэтому, в произвольной точке (M, v) та часть пространства $\mathcal{D}_{(\pi(M'),v)}(h_{i,\pi(L')})$, которая лежит в $\mathfrak{h}$, совпадает с пространством $\mathcal{D}_{M'}(\hat{h}_{i,L'})$ $\square$

Следствие 2. *Пространство* $\mathcal{D}_{M'}(\hat{h}_{i,L'})$ *не зависит от того, какие прообразы* M' *и* L' *точек* M *и* L *при отображении* π *(*$\pi(L') = L$*,* $\pi(M') = M$*) мы выбираем.*

Окончание доказательства теоремы А. Из леммы 1.9 следует, что вместо того, чтобы сравнивать пространства, натянутые на дифференциалы сдвигов функций из вторых частей наборов, можно сравнить подпространства $\mathcal{D}_{M'}(f_{k,L'})$ и $\mathcal{D}_{M'}(g_{m,L'})$, натянутые на дифференциалы сдвигов инвариантов алгебры $\mathrm{St}\, v$, которые получаются путем ограничения функций f_k и g_m на $(\mathrm{St}\, v)^*$.

Рассмотрим сдвиги инвариантов $\hat{g}_m$ на вектор L': $\hat{g}_{m,L'} \equiv \hat{g}_m(M' + \lambda L') = g_m(\pi(M') + \lambda\pi(L'), v)$. Если $\pi(L')$ — регулярный элемент, то проекции дифференциалов функций $g_m(\pi(M') + \lambda\pi(L'), v)$ на подалгебру $\mathfrak{h}$ дают подпространство $\mathcal{D}_{x,\pi(L')}(g_m)$ размерности $l = \frac{1}{2}\big(\dim \mathrm{St}\, v + \mathrm{ind}\, \mathrm{St}\, v\big)$ (поскольку в силу полноты набора на $\mathfrak{g}$ размерность подпространства $\mathcal{D}_{x,\pi(L')}(g_m)$ равна $\dim V + \frac{1}{2}(\dim\ \mathrm{St}\, v + \in\ \mathrm{St}\, v)$, а первая часть набора дает в эту сумму вклад ровно $\dim V$). Значит и дифференциалы функций $\hat{g}_{m,L'}$ тоже образуют пространство $\mathcal{D}_{M'}(\hat{g}_{m,L'})$ размерности $\frac{1}{2}\big(\dim\ \mathrm{St}\, v + \mathrm{ind}\ \mathrm{St}\, v\big)$. Следовательно сдвиги инвариантов $\hat{g}_{m,L'}(M') = \hat{g}_m(M' + \lambda L')$ дают полный набор на $(\mathrm{St}\, v)^*$. Аналогично сдвиги инвариантов $\hat{f}_{k,L'}(M') = \hat{f}_k(M' + \lambda L')$ дают полный набор на $(\mathrm{St}\, v)^*$.

Рассмотрим набор функций на $(\mathrm{St}\, v)^*$, являющийся объединением этих наборов: $\{\hat{h}_n\} = \{\hat{f}_k\} \cup \{\hat{g}_m\}$. Этот набор состоит из инвариантов алгебры $\mathrm{St}\, v$. Рассмотрим сдвиги $\hat{h}(M' + \lambda L')$. Дифференциалы функций этого набора образуют подпространство $\mathcal{D}_{M',L'}(\hat{h}_n)$ размерности не более, чем $l = \frac{1}{2}\big(\dim\ \mathrm{St}\, v + \mathrm{ind}\ \mathrm{St}\, v\big)$. Но $\mathcal{D}_{M',L'}(\hat{h}_n)$ уже содержит l-мерные пространства $\mathcal{D}_{M',L'}(\hat{f}_k)$ и $\mathcal{D}_{M',L'}(\hat{g}_m)$, значит $\mathcal{D}_{M',L'}(\hat{f}_k)$ и $\mathcal{D}_{M',L'}(\hat{g}_m)$ совпадают, а следовательно совпадают и пространства, натянутые на проекции дифференциалов функций из вторых частей наборов Тена и Браилова на алгебру $\mathfrak{h}$, что влечет доказательство теоремы А. $\square$

1.5 Анализ метода Садэтова.

Посмотрим, как преобразуется алгоритм, описанный в [4] для алгебр вида (1.1).

Согласно [4], в качестве «первой части» набора мы берём элементы коммутативного идеала V, которые являются линейными функциями на V^*.

Первую часть набора Садэтова мы хотим дополнить функциями, которые находятся в инволюции с элементами V. Обозначим через $\mathrm{Ann}(V)$ множество функций из $P(\mathfrak{g})$, коммутирующих с элементами V. Оказывается [4, стр. 97], что $\mathrm{Ann}(V)$ является пуассоновой алгеброй $P(K)$ для некоторой алгебры K. Поэтому для построения оставшейся части набора достаточно найти полный инволютивный набор полиномов в алгебре K.

Алгебра K, в свою очередь строится следующим образом: рассматриваются рациональные отображения $\psi\colon V^* \to \mathfrak{g}$, такие что $\psi(v) \in \tilde{\mathrm{St}}\, v$ для любого $v \in V^*$, где $\tilde{\mathrm{St}}\, v$ — стационарная подалгебра в смысле представления $(\mathrm{ad}|_V)^*\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V^*)$, двойственного ограничению $\mathrm{ad}|_V$ представления $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ на идеал $V \subset \mathfrak{g}$. Эти отображения будут являться сечениями расслоений стационарных подалгебр в $\mathfrak{g}$. По сечениям ψ строятся функции $f_\psi(M, v) = \langle (M, v), \psi(v) \rangle$. Эти функции и будут образовывать алгебру K, на которой необходимо построить полный инволютивный набор полиномов на втором шаге. Построенная «вторая часть» набора будет состоять из полиномов F_i от элементов алгебры K, но поскольку сечения ψ — рациональные, функции f_ψ также будут рациональными, а значит F_i можно считать рациональными функциями от элементов $\mathfrak{g}$. Оказывается (и мы явно это покажем в нашем частном случае), что полиномы, стоящие в знаменателях функций F_i зависят только от V. Домножив F_i на знаменатель и добавив первую часть набора Садэтова, получим полный инволютивный набор полиномов на алгебре $\mathfrak{g}$.

1.5.1 Строение алгебры рациональных сечений.

Лемма 1.10. *Стационарная подалгебра в смысле представления* $(\mathrm{ad}|_V)^* \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V^*)$ *имеет вид*

$$\tilde{\mathrm{St}}\, v = \{\xi \in \mathfrak{g} | (\mathrm{ad}|_V)^*_\xi v = 0\} = \{(A, \alpha) \mid \alpha \in V, \chi^*(A)v = 0\},$$

то есть является полупрямой суммой подалгебры $\mathrm{St}\, v$ *(0.5) и пространства* V *по ограничению* $\chi|_{\mathrm{St}} : \tilde{\mathrm{St}}\ v \to \mathrm{gl}(V)$ *представления* χ *на стационарную подалгебру (0.5)*

Доказательство. Нам необходимо найти все такие $\xi = (A, \alpha)$, что $(\mathrm{ad}|_V)^*_\xi v = 0$. Но это условие равносильно равенству $\langle (\mathrm{ad}|_V)^*_\xi v, \beta\rangle = 0\ \forall \beta \in V$. Поскольку

$$\langle (\mathrm{ad}|_V)^*_\xi v, \beta\rangle = -\langle v, (\mathrm{ad}|_V)_\xi \beta\rangle = -\langle v, \chi(A)\beta\rangle = \langle \chi^*(A)v, \beta\rangle,$$

на пару $\xi = (A, \alpha)$ накладывается единственное условие: $\chi^*(A)v = 0$. Таким образом $\mathrm{St}\, v$ — это подалгебра $\mathfrak{g}$, содержащая все пространство V и подалгебру $\mathrm{St}\, v \subset \mathfrak{h}$ (0.5). Что и требовалось доказать. □

Остановимся подробнее на строении алгебры сечений. Если мы введем поточечный коммутатор на множестве этих сечений $[\psi_1, \psi_2](v) =$

$[\psi_1(v), \psi_2(v)]$, алгебра сечений станет алгеброй Ли, размерность которой над исходным полем очевидно равна бесконечности. Но если мы перейдем к полю $\mathbb{R}(V^*)$ рациональных функций на V^*, алгебра станет конечномерной. Алгебра сечений также, как и стационарная подалгебра $\tilde{\mathrm{St}}\, v$ регулярного элемента, состоит из двух частей: $\Phi = \{\varphi : V^* \to \mathfrak{h} |\ \chi^* (\varphi (v))\, v = 0\}$ — множество рациональных функций, обладающих условием $\chi^* (\varphi (v))\, v = 0\ \forall v \in V^*$, и $S = \{s : V^* \to V\}$ — множество произвольных рациональных отображений. При этом сумма здесь тоже не будет прямой:

$$[\varphi_1 + s_1,\ \varphi_2 + s_2] (v) = [\varphi_1 (v) + s_1 (v) , \varphi_2 (v) + s_2 (v)] = [\varphi_1 (v) , \varphi_2 (v)] +$$
$$+\chi (\varphi_1 (v))\, s_2 (v) - \chi (\varphi_2 (v))\, s_1 (v) \neq [\varphi_1, \varphi_2] (v) + [s_1, s_2] (v) .$$

Если ввести базис в $\mathfrak{g}$, а именно $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in V$, $A_1, \ldots , A_k \in \mathfrak{h}$, то сечения запишутся виде:

$$s (\cdot) = \sum_{i=1}^{m} P_i (\cdot)\ \alpha_i, \quad \varphi (\cdot) = \sum_{j=1}^{k} Q_j (\cdot)\ A_j, \tag{1.19}$$

где $P_i(\cdot)$ и $Q_j(\cdot)$ — рациональные функции от элементов V.

Построим отображение $\tilde{\chi} : \Phi \to \mathrm{gl}(S)$, по правилу:

$$\tilde{\chi} (\varphi)\, s = \tilde{s},\ \text{где}\ \tilde{s}(v) = \chi (\varphi (v))\, s (v) . \tag{1.20}$$

Это отображение также будет также являться представлением (см. [27]). Кроме того $\tilde{\chi}([\varphi_1, \varphi_2]) = [\tilde{\chi}(\varphi_1), \tilde{\chi}(\varphi_2)]$. Таким образом, доказана лемма:

Лемма 1.11. *Алгебра сечений является полупрямой суммой* $\Phi +_{\tilde{\chi}} S$ *алгебры*

$$\Phi = \{\varphi : V^* \to \mathfrak{h} |\ \chi^* (\varphi (v))\, v = 0\} ,$$

состоящей из рациональных сечений, обладающих условием $\chi^*(\varphi(v))\,v = 0\ \forall v \in V^*$, *и коммутативной алгебры* $S = \{s : V^* \to V\}$, *состоящей из произвольных рациональных отображений, по представлению* $\tilde{\chi}$ *определенному формулой (1.20).*

1.5.2 Строение алгебры рациональных функций K_Φ.

Введем функции

$$f_\psi(x) = \langle x, \psi(\mathrm{pr}_{V^*}x)\rangle = \langle (M, v),\ \psi(v)\rangle. \tag{1.21}$$

Согласно [4], эти функции принадлежат $\mathrm{Ann}(V)$.

Лемма 1.12. *Алгебра* $K_\psi = \{f_\psi | f_\psi(x) = \langle (M, v), \psi(v)\rangle\}$ *является прямой суммой алгебры* $K_\Phi = \{f_\varphi | f_\varphi(x) = \langle (M, \psi(v)\rangle\}$ *и основного поля — поля рациональных функций* $\mathbb{R}(V^*)$.

Доказательство. Пусть $x = (M, v)$, а f_{ψ_1} и f_{ψ_2} – две функции, отвечающие сечениям $\psi_1 = (\varphi_1, s_1)$ и $\psi_2 = (\varphi_2, s_2)$ соответственно. Посчитаем их скобку

$$\begin{gathered}\{f_{\psi_1}, f_{\psi_2}\}(x) = \langle [\psi_1, \psi_2](v),\ x\rangle = \langle [\psi_1, \psi_2](v), (M,\ v)\rangle = \\ = \langle [\psi_1(v), \psi_2(v)], (M,\ v)\rangle = \\ = \langle [\varphi_1(v), \varphi_2(v)] + \chi(\varphi_1(v))\,s_2(v) - \chi(\varphi_2(v))\,s_1(v),\ (M,\ v)\rangle = \\ = \langle [\varphi_1(v), \varphi_2(v)], M\rangle + \langle \chi(\varphi_1(v))\,s_2(v),\ v\rangle - \langle \chi(\varphi_2(v))\,s_1(v), v\rangle.\end{gathered}$$

Однако, второе и третье слагаемые равны нулю, поскольку

$$\langle \chi(\varphi_2(v))\,s_1(v),\ v\rangle = -\langle s_1(v),\ \chi^*(\varphi_2(v))\,v\rangle = -\langle s_1(v),\ 0\rangle$$

по свойству сечений φ. Поэтому сумма алгебр функций будет *прямой* и, более того, будет содержать центр — функции f_s.

Используя представление (1.19), легко получить наглядную запись для функций f_s:

$$f_s(\cdot) = \langle P_i(\cdot)\,\alpha_i, \cdot\rangle = P_i(\cdot)\,\alpha_i(\cdot) = \tilde{P}_i(\cdot)\,,$$

где $\tilde{P}_i = P_i\alpha_i$. То есть алгебра $\{f_s\}$ — это ни что иное, как алгебра рациональных функций $\mathbb{R}(V^*)$. Что и требовалось доказать $\square$

Рассмотрим отображение $\varphi \mapsto f_\varphi$. Это гомоморфизм алгебр Ли Φ и K_Φ. Посмотрим на его ядро:

$$f_\varphi = 0 \;\Leftrightarrow\; f_\varphi(M, v) = \langle M, \varphi(v)\rangle = 0 \quad \forall M \in \mathfrak{h}^*, \forall v \in V^*$$

откуда, в частности $\varphi(v) = 0$ $\forall v \in V^*$. То есть $\varphi \mapsto f_\varphi$ — изоморфизм алгебр Ли.

В нашем случае из компактности алгебры $\mathfrak{h}$ следует редуктивность алгебры $\mathrm{St}\,v$, а значит будут редуктивными также алгебры Φ и K_Φ. Поэтому на втором шаге нам необходимо построить полный инволютивный набор полиномов на алгебре, являющейся прямой суммой редуктивной алгебры K_Φ и основного поля $\mathbb{R}(V^*)$, то есть на редуктивной алгебре (прямая сумма редуктивной алгебры с основным полем также редуктивна). Поскольку алгебра $K_\Phi \oplus \mathbb{R}(V^*)$ редуктивная, к ней, согласно методу Садэтова, надо применить метод сдвига аргумента. А именно, пусть $F_1, \ldots, F_k$ — инварианты алгебры, тогда их сдвиги дают полный набор полиномов. Однако полный набор инвариантов будет состоять из инвариантов полупростой части алгебры K_Φ и одной линейной функции на $(\mathbb{R}(V^*))^*$. Сдвигая же последнюю, будем получать функции, зависящие только от элементов V, а значит, функционально зависимые с первой частью набора Садэтова. Следовательно, для получения полного набора на алгебре $\mathfrak{g}$ достаточно найти полный набор полиномов на K_Φ, который вместе с первой частью набора Садэтова будет давать искомый набор полиномов.

В связи с тем, что $K_\Phi \cong \Phi$, построим полный набор для алгебры Φ, а потом перенесем его на алгебру K_Φ.

1.6 Полный набор полиномов на алгебре Φ.

Как было сказано в предыдущем параграфе, задача построения полного инволютивного набора по методу Садэтова свелась к построению полного набора полиномов на алгебре Φ и перенесения этого набора на алгебру K_Φ.

Для начала рассмотрим частный случай, когда Φ — полупроста, а $F_1, \ldots, F_k$ выбираются особым образом. Из полупростоты алгебры Φ следует, что Φ можно отождествить с Φ^* с помощью формы $\mathrm{Tr} : \Phi \times \Phi \to \mathbb{R}(V^*)$, действующей по правилу (см. также [4, стр.93]):

$$\langle \mathrm{Tr}\, \varphi_1\varphi_2,\ v\rangle = \mathrm{Tr}\,_\chi\big(\varphi_1(v)\varphi_2(v)\big). \tag{1.22}$$

Здесь справа берется след произведения операторов $\chi\big(\varphi_1(v)\big)$, $\chi\big(\varphi_1(v)\big) \in \mathrm{gl}(V^*)$. Тогда в качестве инвариантов алгебры Φ можно взять следы степеней, т.е. функции $F_k \colon \Phi \to \mathbb{R}(V^*)$, такие что

$$\langle F_k(\varphi),\, v\rangle = \mathrm{Tr}\,_\chi\big(\varphi(v)\big)^k. \tag{1.23}$$

при этом сдвиг будет производиться на вектор φ_0 такой, что для элемента $v \in V^*$ общего положения его образ $\varphi_0(v) \in \mathfrak{h}$ регулярен в $\mathrm{St}\, v = \varphi_0(V) \subset \mathfrak{h}$.

1.6.1 Функции F_k как функции на $\mathfrak{g}^*$.

Фиксируем k и рассмотрим функцию $F := F_k$. Поскольку имеет место отождествление Φ с Φ^*, функцию F можно считать полиномом от элементов $\varphi_{ij} \in \Phi$: $F = \sum_i \prod_j \varphi_{ij}$, которая на любой элемент $\varphi \in \Phi$ действует по правилу

$$F(\varphi) = \sum_j \prod_i \operatorname{Tr}\big(\varphi_{ij}\varphi\big). \tag{1.24}$$

Но для сечений φ_{ij} имеем представление (1.19): $\varphi_{ij} = \sum_k Q_{ijk}A_{ijk}$, где $A_{ijk} \in \mathfrak{h}$, $Q_{ijk} \in \mathbb{R}(V^*)$. Поэтому функцию $F = \sum_i \prod_j \sum_k Q_{ijk}A_{ijk}$ можно рассматривать как функцию на $\mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} F(M, v) &= \sum_i \prod_j \sum_k Q_{ijk}(v)\langle A_{ijk},\, M\rangle = \\ &= \sum_i \prod_j \operatorname{Tr}\big(\varphi_{ij}(v)\cdot M\big) = \sum_i \prod_j \operatorname{Tr}\big(\varphi_{ij}(v)\cdot \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M\big). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Здесь после второго знака равенства M рассматривается как элемент $\mathfrak{h}$ (что можно сделать в силу существования отождествления $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$), а проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}$, как и раньше, — ортогональная проекция на стационарную подалгебру $\mathrm{St}\,v$.

Фиксируем v. Из функции F получим рациональную функцию (на самом деле даже полином) от элементов $\mathfrak{h}$:

$$F_v(M) = F(M,\, v) = \sum_i \prod_j \operatorname{Tr}\,(\varphi_{ij}(v)M).$$

Поскольку $\varphi_{ij}(v) \in \mathrm{St}\,v$ можно считать, что F_v — функция на стационарной подалгебре. Преобразуем формулу (1.25). Пусть $A \in \mathrm{St}\,v$ — произвольный элемент. Рассмотрим рациональное сечение φ_A, такое что $\varphi_A(v) = A$. Тогда

$$F_v(A) = F_v(\varphi_A(v)) = \sum_i \prod_j \mathrm{Tr}\,\big(\varphi_{ij}(v)\varphi_A(v)\big) =$$
$$= \langle \sum_i \prod_j \mathrm{Tr}_\chi(\varphi_{ij}\varphi_A),\, v\rangle = \langle F(\varphi_A),\, v\rangle =$$
$$= \langle \mathrm{Tr}\,\varphi_A^k,\, v\rangle = \mathrm{Tr}\,\big(\varphi_A(v)\big)^k = \mathrm{Tr}\,A^k.$$

Иными словами,

$$F_v(A) = \sum_i \prod_j \mathrm{Tr}\,\big(\varphi_{ij}(v)A\big) = \mathrm{Tr}\,A^k \quad \forall A \in \mathrm{St}\,v \tag{1.26}$$

— функция на стационарной подалгебре $\mathrm{St}\,v$ для каждого фиксированного v.

Поэтому, возвращаясь к формуле (1.25), с учетом (1.26), получим

$$F(M, v) = \sum_i \prod_j \mathrm{Tr}\,(\varphi_{ij}(v)\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}M) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}M)^k.$$

1.6.2 Сдвиги функций F_k.

Теперь рассмотрим функцию $F_{k,\varphi_0}(\varphi) = \mathrm{Tr}\,(\varphi + \lambda\varphi_0)^k$. Это тоже полином, поэтому, проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем, что F_{k,φ_0} может рассматриваться как функция на $\mathfrak{g}^*$, при этом если фиксировать v, то функция $F_{k,\varphi_0,v}$ на произвольном элементе A будет вычисляться по формуле $F_{k,\varphi_0,v}(A) = \mathrm{Tr}\,\big(A + \lambda\varphi_0(v)\big)^k$. А следовательно, $F_{k,\varphi_0}(M, v) = \mathrm{Tr}\,\big(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}M + \lambda\varphi_0(v)\big)^k$. В качестве сечения для сдвига можно взять сечение $\varphi_0(v) = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}L$ для $L \in \mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$ общего положения. Тогда функции F_{k,φ_0} примут вид $F_{k,\varphi_0}(M, v) = F_{k,L}(M, v) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}\big(M + \lambda L)\big)^k$, где M и L рассматриваются как элементы алгебры $\mathfrak{h}$.

Замечание 1. *На самом деле аналогичные рассуждения справедливы и для редуктивной алгебры* Φ*, для этого надо рассматривать не саму алгебру* Φ*, а ее полупростую часть. При этом следы степеней алгебры* Φ *всё равно останутся инвариантами и их сдвиги будут давать нужное количество полиномов.*

Определение 15. Второй частью набора Садэтова назовем сдвиги функций $F_i(\varphi)$ на сечение φ_0, рассматриваемые как функции на $\mathfrak{g}^*$.

Таким образом, мы только что доказали следующую теорему:

Теорема B. *Пусть вторая часть набора Тена получена сдвигом функций* f_k *на вектор* L*, а вторая часть набора Садэтова — сдвигами функций* F_i *на сечение* $\varphi_L = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}L$*. Тогда наборы Тена и Садэтова эквивалентны.*

1.6.3 Общий случай.

Теперь посмотрим, как выглядит эта же конструкция в общем случае, т.е. когда $F_1, \ldots, F_k \colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ — произвольные инварианты.

Произвольный полиномиальный инвариант $F := F_n$ выглядит следующим образом:

$$F = \sum_i \prod_j \varphi_{ij} = \sum_i \prod_j \sum_k Q_{ijk} A_{ijk}. \tag{1.27}$$

Поэтому его можно рассматривать как функцию на $\mathfrak{g}^*$:

$$F(M, v) = \sum_i \prod_j \sum_k Q_{ijk}(v) \langle A_{ijk},\, M\rangle = \sum_i \prod_j \langle M, \varphi_{ij}(v)\rangle. \tag{1.28}$$

Лемма 1.13. *Дифференциал функции* F*, рассматриваемой как функция на* $\mathfrak{g}^*$*, в произвольной точке* (M, v) *удовлетворяет соотношению* $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(M,v)} \in \mathrm{St}\, v$.

Доказательство. Действительно, посмотрим, как действует $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(M,v)}$ на произвольный элемент $L \in \mathfrak{h}^*$:

$$\langle \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(M,v)}, L\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(M+\varepsilon L) - F(M)}{\varepsilon} =$$

$$= \sum_i \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\prod_j \langle \varphi_{ij}(v), M+\varepsilon L\rangle - \prod_j \langle \varphi_{ij}(v), M\rangle}{\varepsilon} =$$

$$= \sum_i \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\prod_j \big(\langle \varphi_{ij}(v), M\rangle + \varepsilon\langle \varphi_{ij}(v), L\rangle\big) - \prod_j \langle \varphi_{ij}(v), M\rangle}{\varepsilon} =$$

$$= \sum_i \sum_{j_0} \langle \varphi_{ij_0}(v), L\rangle \prod_{j\neq j_0} \langle \varphi_{ij}(v), M\rangle.$$

Откуда

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(M,v)} = \sum_{i,j_0} \varphi_{ij_0}(v) \prod_{j\neq j_0} \langle M, \varphi_{ij}(v)\rangle. \tag{1.29}$$

Поскольку $\varphi_{ij_0}(v) \in \mathrm{St}\, v$, а $\langle M, \varphi_{ij}(v)\rangle$ — действительные числа, то $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(M,v)} \in \mathrm{St}\, v$ для любого $v \in V^*$. Что и требовалось доказать. □

Итак, мы показали, что функцию $F\colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ можно трактовать как функцию $F\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$. Более того, рассматривая лемму 1.13 совместно с леммой 1.6, заключаем, что для фиксированного v функцию $F\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ можно ограничить на $(\mathrm{St}\, v)^*$ и получить $\hat{F}\colon (\mathrm{St}\, v)^* \to \mathbb{R}$. При этом будет справедливо соотношение

$$d\hat{F}_{M'} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(\pi(M'),v)}. \tag{1.30}$$

Лемма 1.14. *Функция $\hat{F}$ является инвариантом коприсоединенного представления алгебры* $(\mathrm{St}\, v)^*$.

Прежде чем доказывать эту лемму, посмотрим, что дает нам для функции $F\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ тот факт, что $F\colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ — инвариант алгебры Φ.

Для начала условимся обозначать элементы Φ^* через $\check{\varphi}$ и $\check{\psi}$. Каждому элементу $\check{\varphi} \in \Phi^*$ мы можем сопоставить элемент $\check{\varphi}(v) \in (\operatorname{St} v)^*$ по правилу $\langle \check{\varphi}(v), \varphi(v) \rangle = \langle \check{\varphi}, \varphi \rangle(v)$, где $\langle \check{\varphi}, \varphi \rangle \in \mathbb{R}(V^*)$.

Теперь, поскольку F — инвариант алгебры Φ, для него верно соотношение: $\langle \check{\varphi}, \big[\varphi, dF_{\check{\varphi}}\big] \rangle = 0$ для любых $\check{\varphi} \in \Phi^*$ и $\varphi \in \Phi$. Но левая часть этого соотношения — рациональная функция из $\mathbb{R}(V^*)$. Поэтому $\langle \check{\varphi}, \big[\varphi, dF_{\check{\varphi}}\big] \rangle(v) = 0$ для любого $v \in V^*$.

Преобразовав это соотношение, получим, что

$$\langle \check{\varphi}, \big[\varphi, dF_{\check{\varphi}}\big] \rangle(v) = \langle \check{\varphi}(v), \big[\varphi(v), dF_{\check{\varphi}}(v)\big] \rangle = 0 \quad \forall v \in V^*. \tag{1.31}$$

Лемма 1.15. *Справедливо соотношение*

$$dF_{\check{\varphi}}(v) = \operatorname{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(\pi(\check{\varphi}(v)),v)}, \tag{1.32}$$

где проекция π задана формулой (1.6). Здесь слева функция F рассматривается как функция на Φ^*, а справа — как функция на $\mathfrak{g}^*$.

Доказательство. Из представления (1.27) для функции F заключаем, что $F(\check{\varphi} + \varepsilon \check{\psi}) = \sum\limits_i \prod\limits_j \big(\langle \varphi_{ij}, \check{\varphi} \rangle + \varepsilon \langle \varphi_{ij}, \check{\psi} \rangle \big)$. Поэтому

$$\langle dF_{\check{\varphi}}, \check{\psi} \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\check{\varphi} + \varepsilon \check{\psi}) - F(\check{\varphi})}{\varepsilon} =$$

$$= \sum_i \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\prod\limits_j \big(\langle \varphi_{ij}, \check{\varphi} \rangle + \varepsilon \langle \varphi_{ij}, \check{\psi} \rangle \big) - \prod\limits_j \langle \varphi_{ij}, \check{\varphi} \rangle}{\varepsilon} = \sum_{i, j_0} \langle \varphi_{ij_0}, \check{\psi} \rangle \prod_{j \neq j_0} \langle \varphi_{ij}, \check{\varphi} \rangle \Rightarrow$$

$$dF_{\check{\varphi}} = \sum_{i, j_0} \varphi_{ij_0} \prod_{j \neq j_0} \langle \varphi_{ij}, \check{\varphi} \rangle.$$

Откуда немедленно следует, что

$$dF_{\check{\varphi}}(v) = \sum_{i, j_0} \varphi_{ij_0}(v) \prod_{j \neq j_0} \langle \check{\varphi}(v), \varphi_{ij}(v) \rangle. \tag{1.33}$$

Сравнивая (1.33) с формулой (1.29), получаем, что $dF_{\check{\varphi}}(v) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(\pi(\check{\varphi}(v)),v)}$. Лемма доказана. □

Подставим в соотношение (1.31) равенство (1.32), получим

$$\langle \check{\varphi}(v), \big[\varphi(v), \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(\pi(\check{\varphi}(v)),v)}\big] \rangle = 0. \tag{1.34}$$

Доказательство леммы 1.14. Нам необходимо доказать, что $\langle M', \big[A, d(\hat{F}_v)_{M'}\big]\rangle = 0$ для любых $M' \in (\mathrm{St}\, v)^*$ и $A \in \mathrm{St}\, v$. Возьмем произвольные $M' \in (\mathrm{St}\, v)^*$ и $A \in \mathrm{St}\, v$. Пусть φ — такое сечение, что $f(v) = A$ (для того v, которое мы фиксировали). А $\check{\varphi} \in \Phi^*$ — такое, что $\check{\varphi}(v) = M'$. Тогда соотношение (1.34) с учетом (1.30) переписывается в виде

$$0 = \langle M', \big[A, \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} dF_{(\pi(M'),v)}\big]\rangle = \langle M', \big[A, d(\hat{F}_v)_{M'}\big]\rangle. \tag{1.35}$$

Что и требовалось доказать. □

Теперь перейдем к изучению сдвигов функций $\Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ и соответствующих им функций $\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$.

Лемма 1.16. *Пусть $\check{\psi} \in \Phi^*$ — произвольный. Рассмотрим функцию $F\colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ как функцию на $\mathfrak{g}^*$ и ограничим ее на $\mathfrak{h}^*$, зафиксировав $v \in V^*$. Получим $\tilde{F}\colon \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$. Тогда сдвигу функции $F\colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ на $\check{\psi}$ соответствует сдвиг функции $\tilde{F}\colon \mathfrak{h}^* \to \mathbb{R}$ на $\pi(\check{\psi}(v)) \in \mathfrak{h}^*$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_{\check{\psi}}(\check{\varphi}) = F(\check{\varphi} + \lambda\check{\psi}) = \sum_i \prod_j \big(\langle \varphi_{ij}, \check{\varphi}\rangle + \lambda\langle \varphi_{ij}, \check{\psi}\rangle\big).$$

Здесь в скобках первое слагаемое зависит от $\check{\varphi}$, а второе — рациональная функция из $\mathbb{R}(V^*)$. Поэтому $F_{\check{\psi}}(\cdot) = \sum_i \prod_j \big(\langle \varphi_{ij}, \cdot\rangle + \lambda\langle \varphi_{ij}, \check{\psi}\rangle\big)$.

Если рассматривать $F_{\check{\psi}}$ как функцию на $\mathfrak{g}^*$, то поскольку $\langle \varphi_{ij}, \psi \rangle \in \mathbb{R}(V^*)$, то имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} F_{\check{\psi}}(M, v) &= \sum_i \prod_j \big(\langle \varphi_{ij}(v), M \rangle + \lambda \langle \varphi_{ij}(v), \check{\psi}(v) \rangle \big) = \\ &= \sum_i \prod_j \langle \varphi_{ij}(v), (M + \lambda \pi(\check{\psi}(v)) \rangle. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Фиксируя v в равенстве 1.36, получим, что функция $\tilde{F}_{\check{\psi}}(M)$ — это сдвиг функции $\tilde{F}(M)$ на вектор $\pi(\check{\psi}(v)) \in \mathfrak{h}^*$. □

Теорема С. *Рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V по произвольному представлению $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Пусть вторая часть набора Браилова получена сдвигом инвариантов $g_1, \dots, g_m$ на вектор $L \in \mathfrak{h}^*$. Пусть $\check{\psi}_L$ — такой элемент пространства Φ^*, двойственного алгебре сечений Φ, что для любого $v \in V$ $\check{\psi}_L(v)$ — естественная проекция элемента $L \in \mathfrak{h}^*$ на $(\mathrm{St}\, v)^*$, а вторая часть набора Садэтова получена из сдвигов инвариантов $F_i\colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ на элемент $\check{\psi}_L \in \Phi^*$ (эти сдвиги рассматриваются как функции на $\mathfrak{g}^*$).*

Тогда наборы Браилова и Садэтова эквивалентны.

Доказательство. Идея доказательства теоремы С аналогична идее, использованной в доказательстве теоремы А. Во-первых, дифференциалы первых частей наборов опять порождают всё пространство V. Поэтому остается сравнить ту часть пространств $\mathcal{D}(F_i)$ и $\mathcal{D}(g_m)$, которая лежит в $\mathfrak{h}$.

Фиксируем v и ограничим наборы $\{F_i\}$ и $\{g_m\}$ на $(\mathrm{St}\, v)^*$ (это можно сделать по лемме 1.6). Получим два набора инвариантов алгебры $\mathrm{St}\, v$, сдвиги каждого из которых на вектор L', такой что $\pi(L') = L$ дают полный набор (роль элемента L' в случае Садэтова играет $\check{\psi}(v) \in (\mathrm{St}\,v)^*$, который по определению удовлетворяет условию $\pi(\check{\psi}(v)) = L$). А следовательно, проводя рассуждения, аналогичные приведенным в последнем абзаце доказательства теоремы А, получаем, что исследуемые подпространства совпадают. А значит, сами наборы, описанные в теореме С эквивалентны. $\square$

Замечание 2. *Если вновь вспомнить про отождествления $\mathfrak{h}$ с $\mathfrak{h}^*$, $\mathrm{St}\,v$ с $(\mathrm{St}\,v)^*$ и Φ с Φ^*, то из леммы 1.8 следует, что элементу $\check{\psi}$ из формулировки теоремы С будет соответствовать сечение ψ, такое что $\psi(v) = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}\varkappa_1(L)$, где $\varkappa_1(L)$ — элемент $\mathfrak{h}$, соответствующий $L \in \mathfrak{h}^*$ при отождествлении.*

Глава 2

Свойства инволютивных семейств полиномов на некоторых алгебрах Ли.

В настоящей главе будут рассмотрены примеры применения методов, исследованных в главе 1, а также изучены получающиеся полиномы для некоторых полупрямых сумм.

Для начала сделаем несколько общих замечаний, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Рассмотрим снова алгебру (1.1). Согласно определению полноты набора, необходимое число полиномов в инволюции равно

$$m = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}). \tag{2.1}$$

Преобразуем это выражение, учитывая специальный вид рассматриваемых алгебр. По формуле Раиса [6] индекс алгебр вида (1.1) вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \operatorname{ind} \operatorname{St} v + \operatorname{ind} \chi^*,$$

здесь, как и прежде, $\operatorname{St} v$ стационарная подалгебра регулярного элемента $v \in \mathfrak{h}^*$ задается формулой (0.5). Пусть $O(v)$ — орбита регулярного элемента v при действии χ^*, т.е. $O(v) = \{\chi^*(A)v | A \in \mathfrak{h}\}$. По определению $\operatorname{ind} \chi^* = \operatorname{codim} O(v) = \dim V - \dim O(v)$, а $\dim O(v) = \dim \mathfrak{h} - \dim \operatorname{St} v$. Поэтому

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \operatorname{ind} \operatorname{St} v + \dim V - \dim \mathfrak{g} + \dim \operatorname{St} v,$$

а следовательно, формула (2.1) в рассматриваемом случае принимает вид

$$m = \frac{1}{2}\Big(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}\Big) = \frac{1}{2}\left(\dim V + \dim \mathfrak{h} + \dim V - \dim \mathfrak{h} + \operatorname{ind} \operatorname{St} v + \right.$$
$$\left. + \dim \operatorname{St} v\right) = \dim V + \frac{1}{2}\left(\dim \operatorname{St} v + \operatorname{ind} \operatorname{St} v\right). \tag{2.2}$$

В каждом из рассмотренных в главе 1 методов в качестве первой части набора берется базис коммутативного идеала. Количество таких функций равно размерности идеала, т.е. $\dim V$. Поэтому во второй части набора должно содержаться ровно $\frac{1}{2}(\dim \operatorname{St} v + \operatorname{ind} \operatorname{St} v)$ функционально независимых (между собой и с элементами V) полиномов. В частности, если стационарная подалгебра тривиальна, то базис коммутативного идеала уже будет составлять полный набор.

2.1 Полный инволютивный набор полиномов для алгебр $\mathfrak{g}_{nk} = \mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)^k$.

Рассмотрим алгебры

$$\mathfrak{g}_{nk} = \mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)^k, \tag{2.3}$$

Здесь сумма вещественной алгебры $\mathrm{so}(n)$ и nk-мерного пространства $V = \mathbb{R}^{nk}$ берется по представлению $\rho_k = \underbrace{\rho \times \rho \cdots \times \rho}_{k \text{ раз}}$, где $\rho\colon \mathrm{so}(n) \to$

$\mathrm{gl}(\mathbb{R}^n)$ — представление минимальной размерности, т.е. $\mathrm{so}(n)$ действует независимо на каждой компоненте $\mathbb{R}^n$.

Пространство $\mathbb{R}^{nk}$ нам удобно будет представлять как k экземпляров пространства $\mathbb{R}^n$. Если в $\mathbb{R}^{nk}$ фиксировать базис, то операторы $\rho_k(A)$ будут представлены блочно-диагональными кососимметрическими матрицами с k блоками размера $n \times n$. При этом, если во всех экземплярах $\mathbb{R}^n$ фиксирован один и тот же базис, то все блоки, стоящие по диагонали, будут одинаковыми.

Фиксируем одинаковые базисы во всех экземплярах $\mathbb{R}^n$. Тогда каждому элементу алгебры $\mathfrak{g}_{nk}$ можно сопоставить набор $(M, v_1, \dots, v_k)$, где $M \in \mathrm{so}(n)$ — кососимметрическая матрица $n \times n$, а $v_1, \dots, v_n$ — векторы-столбцы, взятые по одному из каждого экземпляра $\mathbb{R}^n$, при этом $\rho(M)v_i = Mv_i$.

Двойственное пространство к алгебре (2.3) отождествляется с самой алгеброй посредством невырожденной формы

$$\langle (M_1, v_1, \dots, v_k),\ (M_2, u_1, \dots, u_k) \rangle = \operatorname{Tr} M_1 M_2 + (v_1,\ u_1) + \dots + (v_k,\ u_k),$$

где $(\,\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение в каждом из экземпляров $\mathbb{R}^n$. Это позволяет нам отождествить ρ^* с ρ. А именно, пусть $\tilde{u}_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ — ковектор, двойственный вектору $u_i \in \mathbb{R}^n$, а матрица $N \in \mathrm{so}(n)$ и вектор $v_i \in \mathbb{R}^n$ — произвольные. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \rho^*(N)\tilde{u}_i,\ v_i \rangle = -\langle \tilde{u}_i, \rho(N)v_i \rangle = -\langle \tilde{u}_i, Nv_i \rangle = \\ = -(u_i,\ Nv_i) = (Nu_i, v_i) = \langle (N\tilde{u}_i), v_i \rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Это значит, что оператор $\rho^*(N)$ на $\mathbb{R}^{n*} \cong \mathbb{R}^n$ представляется матрицей N.

Лемма 2.1. *а) При $k \geqslant n-1$ стационарная подалгебра регулярного элемента в смысле представления ρ_k^* тривиальна; б) при $k < n-1$ эта подалгебра изоморфна* $\mathrm{so}(n-k)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) \in V^*$ — произвольный ковектор. Условие $\rho_k^*(N)\tilde{v} = 0$ эквивалентно системе уравнений:

$$\rho^*(N)\tilde{v}_1 = \rho^*(N)\tilde{v}_2 = \cdots = \rho^*(N)\tilde{v}_k = 0,$$

а с учетом отождествления (2.4) получаем, что стационарная подалгебра задается системой

$$Nv_1 = Nv_2 = \cdots = Nv_k = 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим орбиту произвольного элемента $u = (u_1, \dots, u_k)$ при действии ортогональной группы $\mathrm{SO}(n)$ на пространстве $\mathbb{R}^{nk}$, дифференциалом которого является представление ρ_k. Эта орбита состоит из векторов $(Bu_1, \dots, Bu_k)$, где $B \in \mathrm{SO}(n)$, а значит при действии группы $\mathrm{SO}(n)$ сохраняются длины векторов Bu_i и углы между любыми двумя. Таким образом, у орбиты есть $k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ инвариантов, а значит орбита регулярного элемента имеет размерность не более, чем $nk - \frac{k(k+1)}{2}$.

Множество векторов $\{\rho_k(N)v \in \mathbb{R}^{nk} \,|\, N \in \mathrm{so}(n)\}$ — это касательное пространство к орбите, следовательно $\dim\{\rho_k(N)v \in \mathbb{R}^{nk} \,|\, N \in \mathrm{so}(n)\} \leqslant nk - \frac{k(k+1)}{2}$. Поскольку для фиксированного u отображение $\alpha(N) = \rho_k(N)u$ — гомоморфизм, то $\dim \operatorname{Im}\alpha + \dim \operatorname{Ker}\alpha = \dim \mathrm{so}(n)$. Но $\operatorname{Im}\alpha$ — это и есть касательное пространство к орбите, а $\operatorname{Ker}\alpha$ — это стационарная подалгебра элемента u. Поэтому для любого элемента

$$\dim \operatorname{St} u \geqslant \frac{n(n-1)}{2} - nk + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Теперь покажем, что значение $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ для размерности стационарной подалгебры достигается и найдем все v, для которых $\dim \mathrm{St}\, v = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ (они и будут регулярными). Заметим, что проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v}$ зависит только от подпространства Δ, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_k$, входящие в элемент $v = (v_1, \ldots, v_k)$. Фиксируем произвольный элемент v и выберем в $\mathbb{R}^n$ базис $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы $\Delta = \langle e_1, \ldots, e_{k'} \rangle$. Тогда $\mathrm{St}\, v$ однозначно определяется системой

$$Ne_1 = Ne_2 = \cdots = Ne_{k'} = 0, \quad \text{где} \quad k' = \dim \Delta. \tag{2.6}$$

В силу первого уравнения системы (2.6) оказывается нулевым первый столбец (а значит и первая строка) матрицы N. В силу второго уравнения — вторые строка и столбец. И так далее. В результате, любая матрица N удовлетворяющая системе (2.6), в описанном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & & \\ & & & & A & \\ 0 & \ldots & 0 & & & \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

здесь первые k' строк и столбцов — нулевые, а матрица A — произвольная кососимметрическая. Множество матриц вида (2.7) образует подалгебру изоморфную $\mathrm{so}(n-k')$ (а значит размерности $\frac{(n-k')(n-k'-1)}{2}$). Наименьшее значение этого выражения достигается, когда $\dim \Delta = k$, т.е. когда векторы $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы.

Таким образом, элемент v — регулярный тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы и стационарная подалгебра любого регулярного элемента изоморфна $\mathrm{so}(n-k)$.

Докажем теперь пункт а) леммы. Пусть $k \geqslant n$. Фиксируем вектор $v = (v_1, \ldots, v_k)$. Пусть m — максимальное количество линейно независимых векторов в наборе $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Найдем размерность орбиты v при действии $\mathrm{so}(n)$. Образ вектора v полностью определяется образами m линейно независимых векторов из набора $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Однако, как было показано выше, множество образов этих m векторов имеет размерность $nm - \frac{m(m-1)}{2}$. Следовательно и размерность орбиты вектора v равна $nm - \frac{m(m-1)}{2}$. Максимум значения функции $y(m) = \frac{-m^2+2nm-m}{2}$ достигается при $m = n$. В итоге получаем, что орбита регулярного элемента $\frac{n(n-1)}{2}$-мерная, а стационарная подалгебра тривиальная. Что и требовалось доказать. $\square$

Из леммы 2.1 и формулы (2.2) следует, что если $k > n-1$, то линейные функции на V^* уже будут образовывать полный инволютивный набор. Пусть теперь $k < n-1$. Тогда стационарная подалгебра регулярного элемента изоморфна $\mathrm{so}(n-k)$, а значит полупроста. Следовательно, для построения полного инволютивного набора полиномов, согласно методу Тена, остается написать явную формулу для проекции на стационарную подалгебру, которая задается системой 2.5.

Пользуясь формулой (2.2), мы можем также посчитать, что необходимое количество полиномов равно

$$m = nk + \frac{1}{2}\left(\dim \mathrm{so}(n-k) + \mathrm{ind}\, \mathrm{so}(n-k)\right) =$$
$$= nk + \frac{1}{2}\left(\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right]\right).$$

Перейдем к написанию проекции $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M$ на стационарную подалгебру. Рассмотрим ортогональный базис в пространстве, натянутом на векторы $v_1, \ldots, v_k$, построенный по правилу: пусть $v_1, \ldots, v_{k'}$ — линейно независимые векторы из пространства $\langle v_1, \ldots v_k\rangle$ ($k' \leqslant k$), тогда базис имеет вид

$$w_1 = v_1, w_m = v_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(v_m, w_i)}{(w_i, w_i)} w_i. \tag{2.8}$$

Здесь m меняется от 2 до k'.

Поскольку подпространства $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ и $\langle w_1, \ldots, w_{k'}\rangle$ совпадают, а оператор $\rho^*(N)$ должен обнулять всё пространство $\langle v_1, \ldots v_k\rangle$, то система (2.5) эквивалентна системе

$$N w_1 = N w_2 = \cdots = N w_{k'} = 0. \tag{2.9}$$

Лемма 2.2. *Ортогональная в смысле формы Киллинга проекция произвольной матрицы M на стационарную подалгебру вектора v имеет вид*

$$N = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,(v_1,\ldots,v_{k'})} M = M - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \left(M w_i \otimes w_i^\top - w_i \otimes (M w_i)^\top \right) + \\ + \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{(M w_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j \otimes w_i^\top. \tag{2.10}$$

где векторы $w_1, \ldots, w_{k'}$ заданы формулой (2.8).

Доказательство. Для доказательства леммы нам необходимо проверить выполнение трех условий:

1). Матрица N удовлетворяет системе (2.9),

2). Кососимметричность матрицы N, т.е. что $\langle Nu, u\rangle = 0$ для любого

$u \in \mathbb{R}^n$,

3). Ортогональность проекции в смысле формы Киллинга.

1) Выполнение системы (2.9) для матрицы (2.10) следует из явной выкладки:

$$\begin{aligned}
Nw_m = Mw_m - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} Mw_i(w_i, w_m) - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} w_i(Mw_i, w_m) + \\
+ \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2|w_j|^2} w_j(w_i, w_m) = Mw_m - \frac{1}{|w_m|^2} Mw_m(w_m, w_m) - \\
- \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} w_i(Mw_i, w_m) + \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_m, w_j)}{|w_m|^2|w_j|^2} w_j(w_m, w_m) = \\
= - \sum_{i=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2} w_i + \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_m, w_j)}{|w_j|^2} w_j = 0.
\end{aligned}$$

2). Перейдем ко второму условию. Матрица N состоит из трех слагаемых. Первое кососимметричное по определению. Докажем кососимметричность второго и третьего слагаемых. Пусть $u \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\big((Mw_i \otimes w_i^\top - w_i \otimes (Mw_i)^\top)u, u\big) = \big((Mw_i(w_i, u) - w_i(Mw_i, u)), u\big) =$$

$$= (Mw_i, u)(w_i, u) - (Mw_i, u)(w_i, u) = 0;$$

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2|w_j|^2} w_j \otimes w_i^\top \right) u, u \right) = \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2|w_j|^2} (w_j, u)(w_i, u) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \left(\frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2|w_j|^2} + \frac{(Mw_j, w_i)}{|w_i|^2|w_j|^2} \right) (w_j, u)(w_i, u) = 0.$$

3). И наконец, покажем, что проекция является ортогональной в смысле заданного скалярного произведения, т.е. что $\operatorname{Tr}(N(M-N)) = 0$. Дополним векторы $w_1, \ldots, w_{k'}$ до ортогонального базиса $w_1, \ldots, w_n$

в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}\left(N(M-N)\right) &= \sum_{m=1}^{n} \frac{\big(N(M-N)w_m,\ w_m\big)}{|w_m|^2} = \\ &= \sum_{m=1}^{n} \frac{\big((M-N)Nw_m,\ w_m\big)}{|w_m|^2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Заметим, что первые k' слагаемых равны нулю, т.к. $Nw_m = 0$ при $m \leqslant k'$. Далее, при $m > k'$

$$Nw_m = Mw_m - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} Mw_i \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0} + \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} w_i (Mw_i, w_m) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0} = Mw_m + \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} w_i (Mw_i, w_m);$$

$$(M-N)Nw_m = \left(\sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \left(Mw_i \otimes w_i^\top - w_i \otimes (Mw_i)^\top \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j \otimes w_i^\top \right) \left(Mw_m + \sum_{l=1}^{k'} \frac{1}{|w_l|^2} w_l (Mw_l, w_m) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \Big(Mw_i (w_i, Mw_m) - w_i (Mw_i, Mw_m) \Big) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j (w_i, Mw_m) + \sum_{i=1}^{k'} \sum_{l=1}^{k'} \frac{(Mw_l, w_m)}{|w_l|^2 |w_i|^2} \Big(Mw_i (w_i, w_l) -$$

$$- w_i (Mw_i, w_l) \Big) - \sum_{i=1}^{k'} \sum_{i=j}^{k'} \sum_{l=1}^{k'} \frac{(Mw_i, w_j)(Mw_l, w_m)}{|w_i|^2 |w_j|^2 |w_l|^2} w_j (w_i, w_l) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k'} \frac{(w_i, Mw_m)}{|w_i|^2} Mw_i - \sum_{i=1}^{k'} \frac{(Mw_i, Mw_m)}{|w_i|^2} w_i -$$

$$-\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_j)(w_i,Mw_m)}{|w_i|^2|w_j|^2}w_j+\sum_{i=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_m)}{|w_i|^2}Mw_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{k'}\sum_{l=1}^{k'}\frac{(Mw_l,w_m)(Mw_i,w_l)}{|w_l|^2|w_i|^2}w_i-\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_j)(Mw_i,w_m)}{|w_i|^2|w_j|^2}w_j.$$

Поэтому

$$((M-N)Nw_m,w_m)=\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_m)}{|w_i|^2}(Mw_i,w_m)-$$

$$-\sum_{i=1}^{k'}\frac{(Mw_i,Mw_m)}{|w_i|^2}\underbrace{(w_i,w_m)}_{=0}-\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_j)(w_i,Mw_m)}{|w_i|^2|w_j|^2}\underbrace{(w_j,w_m)}_{=0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_m)}{|w_i|^2}(Mw_i,w_m)-\sum_{i=1}^{k'}\sum_{l=1}^{k'}\frac{(Mw_l,w_m)(Mw_i,w_l)}{|w_l|^2|w_i|^2}\underbrace{(w_i,w_m)}_{=0}-$$

$$-\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_j)(Mw_i,w_m)}{|w_i|^2|w_j|^2}\underbrace{(w_i,w_m)}_{=0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_m)}{|w_i|^2}(Mw_i,w_m)+\sum_{i=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_m)}{|w_i|^2}(Mw_i,w_m)=0.$$

Отсюда немедленно следует, что каждое слагаемое в сумме (2.11) равно нулю. Поэтому и след $\operatorname{Tr} N(M-N)=0$. Лемма доказана. $\square$

Теорема D. *Рассмотрим набор полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*_{nk}$: базис $u_1,\dots,u_{nk}$ пространства $V=(\mathbb{R}^n)^k$, рассматриваемый как линейные функции на V^*, и функции*

$$f_{l,B,\lambda}(M,v)=\Gamma^l(v_1,\dots,v_k)\cdot\operatorname{Tr}(\operatorname{pr}_{\mathrm{St}v}(M+\lambda B))^l, \tag{2.12}$$

$l=2,4,\dots,2\cdot[(n-k)/2]$, *где проекция $\operatorname{pr}_{\mathrm{St}\,v}M$ задана формулой (2.10), $\Gamma(v_1,\dots,v_k)$ — определитель матрицы Грама системы векторов $v_1,\dots,v_k$, а B — регулярный элемент $\mathrm{so}(n)$, выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{g}_{nk} = \mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)^k$ *при* $k < n-1$. *Если* $k \geqslant n-1$, *то полный инволютивный набор на* $\mathfrak{g}^*_{nk}$ *образуют функции* $u_1, \ldots, u_{nk}$.

Доказательство теоремы D. Заметим, во-первых, что полнота набора линейных функций для $k > n-1$ следует из формулы (2.2).

Далее, согласно теореме Тена для получения полного инволютивного набора рациональных функций линейные функции на идеале V^* необходимо дополнить функциями вида $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}(M+\lambda B)\right)^l$. Рассмотрим знаменатели этих функций. Из формулы (2.10) вытекает, что знаменатель функции $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}(M+\lambda B)\right)^l$ равен $\left(|w_1|^2 \cdot \cdots \cdot |w_k|^2\right)^l = \Gamma^l(w_1, \ldots, w_k)$, где $\Gamma(w_1, \ldots, w_k)$ — определитель матрицы Грама системы векторов $w_1, \ldots, w_k$. Но поскольку такой определитель равен объему параллелепипеда, натянутого на векторы $w_1, \ldots, w_k$, то из формулы (2.8) имеем равенство $\Gamma(w_1, \ldots, w_k) = \Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ А значит, $f(M, v) = \Gamma^l(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}(M+\lambda B)\right)^l$ — полином. Кроме того, если (M, v) — регулярная точка для набора Тена (т.е. точка, в которой градиенты функций образуют максимальное изотропное подпространство), то $\Gamma(v_1, \ldots, v_k) \neq 0$. Теперь подставим в равенство $\mathrm{grad}_x(fg) = f(x)\mathrm{grad}_x g + g(x)\mathrm{grad}_x f$ функции $g(M, v) = \Gamma^l(v_1, \ldots, v_k)$, $f(M, v) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}(M+\lambda B)\right)^l$ и, пользуясь тем, что $\mathrm{grad}_x g \in V$, а $g(x) = g(M, v) \neq 0$, получим, что подпространство, порожденное градиентами функций нового (полиномиального) набора совпадает с подпространством, порождаемым функциями набора Тена, а значит (M, v) — регулярная точка для нового набора. Таким образом множество регулярных точек нового набора имеет полную меру. Осталось заметить, что поскольку функции $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}(M+\lambda B)\right)^l$, образовывавшие полный инволютивный набор вместе с базисом V, мы домножили на полином от элементов V, то инволютивность набора сохранилась (это следует из формулы Лейбница для скобки Пуассона–Ли и явной выкладки). Теорема D доказана. $\square$

2.2 Операторный вид формулы для проекции $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}$.

Формула (2.10) задает проекцию на подпространство в $\mathrm{so}(n)$, выделяемое условием (2.9). Отсюда следует, что $Nw = 0$ для любого вектора w, лежащего в подпространстве $\langle w_1, \dots, w_{k'}\rangle$, натянутом на векторы $w_1, \dots, w_{k'}$. Поэтому формула (2.10) не должна меняться при замене базиса $w_1, \dots, w_{k'}$ другим базисом подпространства $\langle w_1, \dots w_{k'}\rangle$. Иными словами сама проекция зависит только от подпространства, натянутого на векторы $v_1, \dots, v_k$, а не от набора векторов его порождающего. Пусть P — ортогональная проекция вдоль подпространства $\langle w_1, \dots w_{k'}\rangle = \langle v_1, \dots v_k\rangle$. Оказывается, что формулу (2.10) можно с ее помощью задать в очень простом виде.

Пусть $M \in \mathrm{so}(n)$ представляется кососимметрической матрицей $n\times n$, а P — такая симметрическая матрица $n\times n$, что $Pv_1 = \dots = Pv_k = 0$ и $Pu = u$ для любого u из ортогонального дополнения к $\langle v_1, \dots, v_k\rangle$.

Лемма 2.3. *Пусть P — оператор проектирования вдоль подпространства $\langle v_1, \dots, v_k\rangle$, т.е.*

$$Pu = 0\ \forall u \in \langle v_1, \dots, v_k\rangle; \quad Pw = w\ \forall w \in \langle v_1, \dots, v_k\rangle^{\perp}$$

(ортогональное дополнение к подпространству берется в смысле скалярного произведения). Тогда проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}\colon \mathrm{so}(n) \to \mathrm{St}\,v \subset \mathrm{so}(n)$

имеет вид

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M = PMP.$$

Доказательство. Заметим, во-первых, что поскольку

$$(PMP)^T = P^T M^T P^T = -PMP,$$

матрица PMP является кососимметрической. Во-вторых, $PMPv_i = 0$, поскольку $Pv_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Отсюда уже следует, что матрица PMP лежит в $\mathrm{St}\,v$. Осталось проверить, что эта проекция является ортогональной, то есть, что выполнено условие $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M(M - \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)\right) = 0$. Но поскольку $P^2 = P$, а $\mathrm{Tr}\,AB = \mathrm{Tr}\,BA$ для любых матриц A и B, имеем

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M(M \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M)\right) = \mathrm{Tr}\,(PMP(M - PMP)) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,PMPM - \mathrm{Tr}\,PMP^2MP = \mathrm{Tr}\,PMPM - \mathrm{Tr}\,P^2MP^2M =$$
$$= \mathrm{Tr}\,PMPM - \mathrm{Tr}\,PMPM = 0.$$

Что и требовалось показать. □

Для оператора P также можно предъявить формулу, выражающую его через векторы из подпространства проектирования. Действительно, если $w_1, \ldots, w_{k'}$ — ортогональный базис в пространстве $\langle v_1, \ldots v_k \rangle$, то P можно записать в виде: $P = E - \sum\limits_{i=1}^{k'} \frac{w_i \otimes w_i^\top}{|w_i|^2}$, где E — единичная матрица. Поскольку векторы $w_1, \ldots, w_{k'}$ зависят от v_i рационально, то и сама формула проекции будет рационально зависеть от v_i.

2.3 Степени полиномов.

В этом параграфе будут исследованы степени полиномов из формулы (2.12) в случае алгебр $\mathrm{so}(n) +_\rho \mathbb{R}^n$. Он отвечает значению $k = 1$, а значит функции (2.12) можно переписать в форме

$$f_{l,\lambda}(M,v) = \mathrm{Tr}\,(|v|^2\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,(v)}(M+\lambda B))^l = \mathrm{Tr}\,((M+\lambda B)|v|^2 + v\otimes(Mv)^\top +$$
$$+\lambda v\otimes(Bv)^\top - Mv\otimes v^\top - \lambda Bv\otimes v^\top))^l = \mathrm{Tr}\,((M|v|^2 + v\otimes(Mv)^\top -$$
$$- Mv\otimes v^\top) + \lambda(B|v|^2 + v\otimes(Bv)^\top - Bv\otimes v^\top))^l =$$
$$= \mathrm{Tr}\,(|v|^2\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,(v)}M + \lambda|v|^2\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,(v)}B)^l = \mathrm{Tr}\,(P(M,v)+\lambda Q_B(v))^l, \tag{2.13}$$

где $P(M,v)$ — полином третьей степени, зависящий от M и v, а $Q_B(v)$ — квадратичный полином, не зависящий от M, коэффициенты которого зависят от параметра B.

Таким образом, после разложения по степеням λ для разных l получим следующие полиномы (в скобках указана степень полинома):

	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3
$l=1$	$\mathrm{Tr}\,P$ (3)	$\mathrm{Tr}\,Q$ (2)	—	—
$l=2$	$\mathrm{Tr}\,P^2$ (6)	$\mathrm{Tr}\,PQ$ (5)	$\mathrm{Tr}\,Q^2$ (4)	—
$l=3$	$\mathrm{Tr}\,P^3$ (9)	$\mathrm{Tr}\,P^2Q$(8)	$\mathrm{Tr}\,PQ^2$ (7)	$\mathrm{Tr}\,Q^3$ (6)
$l=4$	$\mathrm{Tr}\,P^4$ (12)	$\mathrm{Tr}\,P^3Q$ (11)	$\mathrm{Tr}\,(P^2Q^2+(PQ)^2)$ (10)	$\mathrm{Tr}\,PQ^3$ (9)
...	...	...	...	...

Поскольку для кососимметрических матриц $\mathrm{Tr}\,A^{2i+1}=0$, то строчки, соответствующие нечетным l мы не рассматриваем.

Введем функцию:

$$S(X) = |v|^2\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,(v)}X = X|v|^2 - vv^TX - Xvv^T$$

$(X\in \mathrm{so}(n))$.

Как было сказано в главе 1, основная характеристика каждого набора — это пространство, натянутое на дифференциалы функций из набора. Так, если для двух наборов эти пространства совпадают, то и сами наборы считаются одинаковыми. В нашем случае это пространство всегда содержит все $V = \mathbb{R}^n$. Поэтому интересны проекции дифференциалов функций на $\mathrm{so}(n)$.

Лемма 2.4. *Пусть $f(M, v)$ и $g(M, v)$ — два полинома на $(\mathrm{so}(n)+\mathbb{R}^n)^*$, причем $f(M, v) = \alpha(v) \cdot g(M, v)$, где $\alpha(v)$ — функция, не зависящая от M, а $v_1, \ldots v_n$ — базис $\mathbb{R}^n$, рассматриваемый, как линейные функции на $(\mathrm{so}(n) + \mathbb{R}^n)^*$. Тогда подпространство натянутое на дифференциалы функций $v_1, \ldots, v_n, f$ совпадает с подпространством натянутым на дифференциалы функций $v_1, \ldots, v_n, g$.*

Доказательство. Пусть на алгебре $\mathrm{so}(n)$ введены координаты $p_{ij},\ 0 < i < j \leqslant n$, тогда проекция дифференциала функции $f(M, v) = f(p_{ij}, v)$ на алгебру $\mathrm{so}(n)$ имеет вид

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{so}(n)} df = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial p_{12}} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{1n}} \\ -\frac{\partial f}{\partial p_{12}} & 0 & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{2n}} \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ -\frac{\partial f}{\partial p_{1n}} & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

Поэтому

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{so}(n)} df = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(v)\frac{\partial g}{\partial p_{12}} & \ldots & \alpha(v)\frac{\partial g}{\partial p_{1n}} \\ -\alpha(v)\frac{\partial g}{\partial p_{12}} & 0 & \ldots & \alpha(v)\frac{\partial g}{\partial p_{2n}} \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ -\alpha(v)\frac{\partial g}{\partial p_{1n}} & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \alpha(v)\mathrm{pr}_{\mathrm{so}(n)} dg. \qquad (2.15)$$

т.е. векторы $\mathrm{pr}_{\mathrm{so}(n)}dg$ и $\mathrm{pr}_{\mathrm{so}(n)}df$ коллинеарны. А значит проекция дифференциала функции $f(M,v)$ на $\mathrm{so}(n)$ будет давать такой же вклад в исследуемое подпространство, что и проекция дифференциала функции $g(M,v)$. Поскольку оба подпространства содержат $\mathbb{R}^n$, а часть, лежащая в $\mathrm{so}(n)$, определяется в первом случае функцией f, а во втором — функцией g, то исследуемые подпространства совпадают. $\square$

Как видно из формулы (2.12) степени полиномов, входящих в набор достаточно велики, но, из леммы 2.4 следует, что иногда степень полиномов можно понизить, не меняя подпространства, натянутого на дифференциалы функций набора.

Главный результат параграфа будет получаться как следствие из следующей леммы.

Лемма 2.5. *Полином*

$$f = \mathrm{Tr}\prod_{i=1}^{2t} S(X_i) = \mathrm{Tr}\prod_{i=1}^{2t}(X_i|v|^2 - vv^TX_i - X_ivv^T), \tag{2.16}$$

где все матрицы X_i кососимметрические, делится на $|v|^{2t}$.

Доказательство. Раскроем скобки в произведении (2.16), Получим сумму следов мономов, каждый из которых — это произведение сомножителей трех типов: $P_1 = vv^TX$, $P_0 = |v|^2X$, $P_{-1} = Xvv^T$ (здесь X — одна из матриц X_i). Посмотрим на вид одного монома M. Заметим, что если в мономе M встречаются комбинации $P_\epsilon \cdot P_\epsilon$ ($\epsilon = \pm 1$) или $P_{-1}P_0P_1$, то $M = 0$, что следует из равенства $v^TXv = 0\ \forall X \in \mathrm{so}(n)$:

$$P_\epsilon \cdot P_\epsilon = vv^TX_ivv^TX_j = X_iv\,\underbrace{v^TX_jv}\,v^T = 0;$$

$$P_{-1}\cdot P_0\cdot P_1 = X_ivv^TX_j|v|^2vv^TX_k = |v|^2X_iv\,\underbrace{v^TX_jv}\,v^TX_k = 0.$$

Кроме того, поскольку нас интересует лишь след этого монома, то мы можем циклически переставлять сомножители. ПустьTr $M \neq 0$. Рассмотрим случаи:

1). В мономе M нет ни одного сомножителя типа P_{-1}. Переставим сомножители циклически, так чтобы M начинался с P_1 (если так сделать нельзя, то $\mathrm{Tr}\, M = |v|^{4t} \mathrm{Tr}\, X^{2t}$). Тогда после каждого сомножителя P_1 идет P_0 (иначе $M = 0$) и в конце также идет P_0, так как в противном случае $\mathrm{Tr}\, M = \mathrm{Tr}\,(P_1 \dots P_1) = \mathrm{Tr}\,(P_1 P_1 \dots) = 0$. Поэтому сомножителей P_0 не меньше половины, но так как каждый из них содержит $|v|^2$, то M делится на $|v|^{2t}$ и Tr M также делится на $|v|^{2t}$.

2). Сомножители типа P_{-1} присутствуют. Переставим сомножители циклически так, чтобы M начинался с P_{-1}. После каждого P_{-1} идет либо P_0, либо P_{-1}. Каждая такая пара делится на $|v|^2$. Действительно,

$$P_{-1} P_1 = Xv \underbrace{v^T v}_{|v|^2} v^T X = |v|^2 X v v^T X;$$

$$P_{-1} P_0 = X v v^T X |v|^2.$$

Выделим все такие пары с P_{-1}. Посмотрим, что осталось невыделенным. Если невыделенными остались только P_0, то из монома можно вынести заведомо большую степень $|v|$, чем $2t$. Если среди невыделенных остались не только P_0, но и P_1 (все экземпляры P_{-1} вошли в выделенные пары), то в каждом промежутке перед каждым P_1 идет P_0 (поскольку P_1 не может идти после любой выделенной пары и два P_1 не могут идти подряд). Отсюда заключаем, что и в этом случае в невыделенном множестве множителей P_0 не меньше половины. Поэтому из M, а значит и из Tr M вынесется не менее, чем $|v|^{2t}$. Что и требовалось доказать. $\square$

Теорема G. *Степени полиномов, входящих в набор, описанный в теореме D для k=1, не превосходят* $2n$.

Доказательство теоремы G. Из введенных обозначений следует, что $P(M, v) = S(M)$, а $Q_B(v) = S(B)$. Кроме того, степень полинома $T = \mathrm{Tr} \prod_{i=1}^{m+k} S(X_i)$, где среди X_i k раз встречается M и m раз переменная Q равна $3k + 2m$. Но тогда по лемме 2.5 полином T делится на $|v|^{k+m}$ ($k + m$ — число четное, как было отмечено раньше). Итого степень полинома T можно уменьшить до $2k + m$. Поскольку $k + m < n$, то максимальное значение выражение $2k + m$ принимает при $k = n - 1$, $m = 0$. При этом $2k + m = 2(n - 1) < 2n$. Что и требовалось доказать. □

2.4 Алгебры малых размерностей

В данном параграфе мы рассмотрим, какие наборы полиномов дает теорема D на алгебрах $\mathrm{so}(2) + \mathbb{R}^2$, $\mathrm{so}(3) + \mathbb{R}^3$ и $\mathrm{so}(4) + \mathbb{R}^4$, а также выясним в каждом случае, как можно понизить степени этих полиномов.

2.4.1 Алгебра $\mathfrak{g}_{21} = \mathrm{so}(2) +_\rho \mathbb{R}^2$.

Здесь набор должен содержать $\frac{3+1}{2} = 2$ полинома. Видим, что коммутативный идеал имеет размерность 2. То есть набор состоит из функций $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$.

2.4.2 Алгебра $\mathfrak{g}_{31} = e_3 = \mathrm{so}(3) +_\rho \mathbb{R}^3$.

Здесь необходимо $(6 + 2)/2 = 4$ полинома и линейных функций на идеале уже не хватает: нужен еще один полином. Поскольку четвертый полином должен быть функционально независим с первыми тремя, а значит, должен зависеть не только от v, но и от M, то на роль четвертого полинома могут претендовать только $f_1 = \operatorname{Tr} P^2(M,v)$ и $f_2(M,v) = \operatorname{Tr}\big(P(M,v)\cdot Q_B(v)\big)$. Используя лемму 2.5, можно понизить степень каждого из этих полиномов на 2, разделив на $|v|^2$.

Введем координаты на алгебре:

$$v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & -p_{13} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} \\ p_{13} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

и выпишем функцию $\tilde{f}_1(M,v) = \frac{1}{|v|^2} f_1(M,v)$, пользуясь соотношением

$$\tilde{f}_1(M,v) = \frac{1}{|v|^2} f_1(M,v) = |v|^2 \operatorname{Tr} M^2 - 2(v, M^2 v) = |v|^2 \operatorname{Tr} M^2 + 2(Mv, Mv)$$

Тогда

$$\begin{gathered}
\tilde{f}_1(M,v) = -2((p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2)(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - \\
-((p_{12}s_2 - p_{13}s_3)^2 + (p_{12}s_1 - p_{23}s_3)^2 + (p_{13}s_1 - p_{23}s_2)^2)) = \\
= 2(p_{12}^2 s_2^2 + p_{13}^2 s_3^2 + p_{12}^2 s_1^2 + p_{23}^2 s_3^2 + p_{13}^2 s_1^2 + p_{23}^2 s_2^2 + \\
-2p_{12}p_{13}s_2s_3 - 2p_{12}p_{23}s_1s_3 - 2p_{13}p_{23}s_1s_2 - \\
-p_{12}^2 s_1^2 - p_{12}^2 s_2^2 - p_{12}^2 s_3^2 - p_{13}^2 s_1^2 - p_{13}^2 s_2^2 - p_{13}^2 s_3^2 - p_{23}^2 s_1^2 - p_{23}^2 s_2^2 - p_{23}^2 s_3^2) = \\
= -2(p_{12}^2 s_3^2 + p_{23}^2 s_1^2 + p_{13}^2 s_2^2 + 2p_{12}p_{13}s_2s_3 + 2p_{12}p_{23}s_1s_3 + 2p_{13}p_{23}s_1s_2) = \\
= -2(p_{12}s_3 + p_{23}s_1 + p_{13}s_2)^2.
\end{gathered}$$

Видим, что полином является (с точностью до константы) квадратом интеграла площадей, который также будет находиться в инволюции с тремя линейными функциями на идеале.

Аналогичные выкладки дают следующую формулу для полинома

$\tilde{f}_2(M,v) = \frac{1}{|v|^2} f_2(M,v)$:

$$\tilde{f}_2(M,v) = -2(p_{12}s_3 + p_{13}s_2 + p_{23}s_1)(b_{23}s_1 + b_{12}s_3 + b_{13}s_2)$$

Поскольку вторая скобка не зависит от M опять получаем, что четвертый полином дает тот же вклад в подпространство дифференциалов функций, что и интеграл площадей.

Теорема H. *Функции* s_1, s_2, s_3 *и* $\hat{f}(M,v) = (p_{12}s_3 + p_{23}s_1 + p_{13}s_2)$ *образуют полный набор полиномов на алгебре Ли* $e(3)$.

2.4.3 Алгебра $\mathfrak{g}_{41} = e_4 = \mathrm{so}(4) +_\rho \mathbb{R}^4$.

Количество полиномов, которое необходимо найти равно $4 + \frac{3+1}{2} = 6$, коммутативный идеал 4-мерный. Следовательно, необходимо еще 2 полинома. Поскольку l в нашем случае не превосходит 2, на роль недостающих полиномов могут претендовать только функции $\mathrm{Tr}\ P^2$, $\mathrm{Tr}\ PQ$. Введем координаты на алгебре следующим образом,

$$v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

После сокращения на максимально возможную степень $|v|$ функции можно переписать в виде:

$$\tilde{f}_1(M,v) = |v|^2 \mathrm{Tr}\, M^2 + 2(Mv, Mv)$$
$$\tilde{f}_2(M,v) = |v|^2 \mathrm{Tr}\, MB + 2(Bv, Mv)$$

Теорема I. *Функции v_1, v_2, v_3, v_4, и $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ образуют полный набор полиномов на алгебре $e(4)$.*

В статье А.С.Воронцова [28] было показано, что функция $\tilde{f}_1$ является функцией Казимира на исследуемой алгебре.

2.5 Полный инволютивный набор полиномов для алгебр $\mathfrak{h}_{nk} = \mathrm{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)^k$.

Рассмотрим полупрямую сумму алгебры $\mathrm{su}(n)$ и пространства $\mathbb{C}^{nk}$ по представлению $\zeta_k = \underbrace{\zeta \times \zeta \cdots \times \zeta}_{k \text{ раз}}$, где $\zeta \colon \mathrm{su}(n) \to \mathrm{gl}(\mathbb{C}^n)$ — представление минимальной размерности, т.е. $\mathrm{su}(n)$ действует независимо на каждой компоненте $\mathbb{C}^n$

$$\mathfrak{h}_{nk} = \mathrm{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)^k, \tag{2.17}$$

Если, подобно случаю $\mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (R^n)^k$, представлять себе $\mathbb{C}^{nk}$ как k экземпляров пространства $\mathbb{C}^n$ и выбрать во всех этих экземплярах $\mathbb{C}^n$ одинаковый базис, то операторы $\zeta_k(A)$, $A \in \mathrm{su}(n)$ будут представлены блочно-диагональными матрицами с k одинаковыми блоками порядка $n \times n$, в которых стоит одна и та же косоэрмитова матрица со следом 0.

Напомним, что поскольку свойство косоэрмитовости не сохраняется при умножении на i, алгебра $\mathrm{su}(n)$ — вещественная. Поэтому и пространство $\mathbb{C}^n$ в полупрямой сумме (2.17) следует понимать не как n-мерное комплексное, а как $2n$-мерное вещественное пространство.

В каждом экземпляре введем эрмитово произведение $(\cdot, \cdot)$ (линейное по первому аргументу и косолинейное по второму), которое порождает форму $\langle \cdot ; \cdot \rangle = \mathfrak{Re}(\cdot ; \cdot)$, являющуюся скалярным произведение в $\mathbb{R}^{2n}$.

Фиксируем одинаковые базисы во всех экземплярах $\mathbb{R}^n$. Тогда каждому элементу алгебры $\mathfrak{h}_{nk}$ можно сопоставить набор $(M, v_1, \ldots, v_k)$, где $M \in \mathrm{su}(n)$ — косоэрмитова матрица $n \times n$ со нулевым следом, а $v_1, \ldots, v_n$ — векторы-столбцы, взятые по одному из каждого экземпляра $\mathbb{C}^n$, при этом $\zeta(M)v_i = Mv_i$.

Двойственное пространство к каждой из алгебр (2.17) отождествляется с самой алгеброй посредством невырожденной формы:

$$\begin{aligned}&\langle (M_1, v_1, \ldots, v_k);\ (M_2, u_1, \ldots, u_k)\rangle = \\ &= \mathrm{Tr}\, M_1 M_2 + \langle v_1,\ u_1\rangle + \cdots + \langle v_k,\ u_k\rangle,\end{aligned} \tag{2.18}$$

что позволяет нам произвести отождествление представлений ζ и ζ^*, подобно тому, как это было сделано в §2.1. Действительно, пусть $\tilde{u}_i \in (\mathbb{C}^n)^*$ — ковектор, двойственный вектору $u_i \in \mathbb{C}^n$, а матрица $N \in \mathrm{su}(n)$ и вектор $v_i \in \mathbb{C}^n$ — произвольные. Тогда

$$\begin{aligned}\langle \zeta^*(N)\tilde{u}_i,\ v_i\rangle = -\langle \tilde{u}_i, \zeta(N)v_i\rangle = -\langle \tilde{u}_i,\ Nv_i\rangle = -\mathfrak{Re}(u_i,\ Nv_i) = \\ = \mathfrak{Re}(Nu_i,\ v_i) = \langle N\tilde{u}_i,\ v_i\rangle.\end{aligned}$$

Это значит, что оператор $\zeta^*(N)$ на $\mathbb{C}^{n*} \cong \mathbb{C}^n$ представляется матрицей N.

Лемма 2.6. *а) При $k \geqslant n$ стационарная подалгебра регулярного элемента в смысле представления ζ_k^* тривиальна; б) при $k < n$ эта подалгебра изоморфна* $\mathrm{su}(n-k)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) \in V^*$ — произвольный ковектор. Условие $\zeta_k^*(N)\tilde{v} = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$\zeta^*(N)\tilde{v}_1 = \zeta^*(N)\tilde{v}_2 = \cdots = \zeta^*(N)\tilde{v}_k = 0,$$

а с учетом отождествления (2.5) получаем, что стационарная подалгебра задается системой

$$Nv_1 = Nv_2 = \dots = Nv_k = 0. \tag{2.19}$$

Найдем стационарную подалгебру элемента произвольного v. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве леммы 2.1, можно считать, без ограничения общности, что элемент v имеет вид $v = (e_1, \dots, e_{k'}, 0, \dots, 0)$. В силу первого уравнения системы (2.19) оказывается нулевым первый столбец матрицы N, но поскольку элементы, симметричные относительно главной диагонали косоэрмитовой матрицы получаются друг из друга путем комплексного сопряжения и домножения на (-1), то первая строка матрицы N также оказывается нулевой. Аналогично рассуждая, получим, что в силу второго уравнения оказываются нулевыми вторые строка и столбец. И так далее. В результате, любая матрица N, удовлетворяющая системе (2.19), для описанного вектора v имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ & & & & A & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

здесь первые k' строк и столбцов — нулевые, а A — произвольная косоэрмитова матрица со следом нуль. Множество матриц вида (2.20) образует подалгебру изоморфную $\mathrm{su}(n-k')$.

Посмотрим теперь, сколько вещественных инвариантов орбиты мы можем указать. Рассмотрим произвольный вектор $v \in \mathbb{C}^{nk}$. Матрицы из $\mathrm{SU}(n)$ сохраняют эрмитово произведение, поэтому сохраняются и вещественная, и мнимая части чисел $(v_i,\, v_j)$ $i < j$, что дает $2 \cdot \frac{k(k-1)}{2}$ инвариантов. Если к этому числу прибавить еще k квадратов длин векторов $|v_i|^2 = (v_i,\, v_i)$, являющихся по определению эрмитова произведения вещественными числами, то получим, что для каждой орбиты можно указать не менее k^2 инвариантов. Потому орбита регулярного элемента имеет размерность не более $2nk - k^2$, а значит размерность стационарной подалгебры не менее

$$\dim \mathrm{su}(n) - 2nk + k^2 = n^2 - 1 - 2nk + k^2 = (n-k)^2 - 1 = \dim \mathrm{su}(n-k)$$

Откуда следует, что элемент v регулярный тогда и только тогда, когда $k' = k$, т.е. векторы $v_1, \ldots, v_k$ — линейно независимы. $\square$

Пользуясь формулой (2.2), мы можем также посчитать, что необходимое количество полиномов равно

$$m = 2nk + \frac{1}{2}\left(\dim \mathrm{su}(n-k) + \mathrm{ind}\, \mathrm{su}(n-k)\right) =$$
$$= 2nk + \frac{1}{2}\big((n-k)^2 - 1 + (n-k-1)\big)\,.$$

Обозначим через w^T — ковектор, двойственный w, а $\mathfrak{I}$ оператор умножения на мнимую единицу. Чтобы не загромождать выкладки, условимся под записью $\mathfrak{I}w^T$ понимать образ вектора $\mathfrak{I}w$ после отождествления (2.5): $\mathfrak{I}w^T := (\mathfrak{I}w)^T$.

Пусть $w_1, \ldots, w_{k'}$ — ортонормированный базис в подпространстве, натянутом на векторы $v_1, \ldots, v_k$ $(k' \leqslant k)$:

$$w_1 = v_1, \ldots, w_m = v_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(v_m, w_i)}{|w_i|^2} w_i \quad m = 2, \ldots, k' \tag{2.21}$$

Тогда условие (2.19) эквивалентно системе

$$Nw_1 = Nw_2 = \dots = Nw_k = 0 \tag{2.22}$$

Лемма 2.7. *Ортогональная в смысле формы Киллинга проекция произвольной матрицы M на стационарную подалгебру вектора v имеет вид*

$$N = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M = N_1 + N_2 + N_3 + N_4, \tag{2.23}$$

где

$$\begin{aligned}
N_1 =& M - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \left(M w_i \times w_i^T + M \mathfrak{I} w_i \times \mathfrak{I} w_i^T - \right. \\
& \left. - \mathfrak{I} w_i \times (M \mathfrak{I} w_i)^T - w_i \times (M w_i)^T \right); \\
N_2 =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{\langle M w_i,\, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} \left(w_j \times w_i^T - w_i \times w_j^T + \mathfrak{I} w_j \times \mathfrak{I} w_i^T - \right. \\
& \left. - \mathfrak{I} w_i \times \mathfrak{I} w_j^T \right); \\
N_3 =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} \frac{\langle M \mathfrak{I} w_i,\, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} \left(w_j \times \mathfrak{I} w_i^T + w_i \times \mathfrak{I} w_j^T - \right. \\
& \left. - \mathfrak{I} w_j \times w_i^T - \mathfrak{I} w_i \times w_j^T \right); \\
N_4 =& - \sum_{i=1}^{k'} \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n - k')} \left(E - \sum_{i=1}^{k'} \frac{w_i \times w_i^T}{|w_i|^2} \right),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

а векторы $w_1, \dots, w_{k'}$ заданы формулой (2.21).

Доказательство. Дополним набор $w_1, \dots, w'_{k'}$ до ортогонального базиса: $w_1, \dots, w_n$ в $\mathbb{C}^n$ (т.е. $(w_i, w_j) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ i = j$).

Для доказательства леммы нам необходимо проверить выполнение следующих условий:

1. Матрица N удовлетворяет системе (2.22).

2. Матрица N косоэрмитова. Это условие эквивалентно следующему:

$$(Nv,\, u) + (v,\, Nu) = 0 \;\forall\; v,\, u \in \mathbb{C}^n. \tag{2.25}$$

3. Tr $N = 0$.

4. Ортогональность проекции в смысле формы Киллинга.

При проверке этих свойств будем пользоваться соотношениями:

$$(w, w) = |w|^2, \quad \langle w,\, \mathfrak{I}w\rangle = 0 \tag{2.26}$$

$$\text{при } i \neq j \quad \langle w_i, w_j\rangle = \langle \mathfrak{I}w_i, w_j\rangle = 0 \tag{2.27}$$

$$(Mw_j, w_l) + (w_j, Mw_l) = 0 \;\Rightarrow \langle Mw_j,\; w_l\rangle + \langle w_j,\; Mw_l\rangle = 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{(Mw,\, w)}{i} \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle Mw,\, w\rangle = 0 \tag{2.29}$$

$$\langle M\mathfrak{I}w,\, w_i\rangle\, i + \langle Mw,\, w_i\rangle \;=$$

$$= -i\mathfrak{Im}(Mw,\, w_i) + \mathfrak{Re}(Mw,\, w_i) = \overline{(Mw,\, w_i)} \tag{2.30}$$

$$\langle M\mathfrak{I}w_m, w_j\rangle = \mathfrak{Re}(i(Mw_m,\, w_j)) =$$

$$= -\mathfrak{Re}(i(w_m,\, Mw_j)) = \mathfrak{Re}(w_m,\, M\mathfrak{I}w_j) = \langle w_m, M\mathfrak{I}w_j\rangle \tag{2.31}$$

1). Для проверки условия 1 выпишем $N_i w_m = 0$ при $m \leqslant k'$ для всех матриц N_i из (2.24).

$$N_1 w_m = Mw_m - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \Bigg(Mw_i \underbrace{\langle w_i, w_m\rangle}_{\delta_{im}|w_m|^2} + M\mathfrak{I}w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m\rangle}_{0} -$$

$$-\mathfrak{I}w_i\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle - w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle \Bigg) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \Big(\mathfrak{I}w_i\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle + w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle \Big)$$

$$N_2 w_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle Mw_i,\, w_j\rangle}{|w_i|^2|w_j|^2}\,(w_j\langle w_i,\, w_m\rangle - w_i\langle w_j,\, w_m\rangle +$$

$$+\mathfrak{I}w_j\underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle}_{0} - \mathfrak{I}w_i\underbrace{\langle \mathfrak{I}w_j, w_m\rangle}_{0}\Bigg) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle Mw_m,\, w_j\rangle}{|w_j|^2}w_j -$$

$$-\sum_{i=1}^{k'}\frac{\langle Mw_i,\, w_m\rangle}{|w_i|^2}w_i\Big) = \sum_{i=1}^{k'}\frac{\langle Mw_m,\, w_i\rangle}{|w_i|^2}w_i;$$

$$N_3 w_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_j\rangle}{|w_i|^2|w_j|^2}\Big(w_j\underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle}_{0} +$$

$$+w_i\underbrace{\langle \mathfrak{I}w_j,\, w_m\rangle}_{0} - \mathfrak{I}w_j\langle w_i,\, w_m\rangle - \mathfrak{I}w_i\langle w_j,\, w_m\rangle\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\mathfrak{I}w_m,\, w_j\rangle}{|w_j|^2}\mathfrak{I}w_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'}\frac{\langle M\mathfrak{I}w_i, w_m\rangle}{|w_i|^2}w_i =$$

$$= \big(\text{из соотношения (2.31)}\big) = -\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\mathfrak{I}w_j, w_m\rangle}{|w_j|^2}\mathfrak{I}w_j;$$

$$N_4 w_m = -\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}\,(w_m - w_m) = 0;$$

Поэтому

$$Nw_m = \sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\Big(\mathfrak{I}w_i\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle + w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k'}\frac{\langle Mw_m,\, w_i\rangle}{|w_i|^2}w_i - \sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\mathfrak{I}w_j, w_m\rangle}{|w_j|^2}\mathfrak{I}w_j = 0.$$

Условие 1 проверено.

Перед тем, как перейти к проверке условий 2 и 3, выпишем Nw_m для $m > k'$:

$$N_1 w_m = M w_m - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \Bigg(M w_i \underbrace{\langle w_i, w_m\rangle}_{0} + M\mathfrak{I} w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I} w_i, w_m\rangle}_{0} -$$

$$- \mathfrak{I} w_i \langle M\mathfrak{I} w_i,\, w_m\rangle - w_i \langle M w_i,\, w_m\rangle \Bigg) =$$

$$= M w_m + \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \Big(\mathfrak{I} w_i \langle M\mathfrak{I} w_i,\, w_m\rangle + w_i \langle M w_i,\, w_m\rangle \Big)$$

Далее, поскольку $0 \leqslant i \leqslant k'$, а $m > k'$, из (2.27) следует

$$N_2 w_m = N_3 w_m = 0 \quad N_4 w_m = - \sum_{i=1}^{k'} \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n - k')} w_m.$$

В итоге получаем

$$N w_m = M w_m + \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \Big(\mathfrak{I} w_i \langle M\mathfrak{I} w_i,\, w_m\rangle + w_i \langle M w_i,\, w_m\rangle \Big) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k'} \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n - k')} w_m. \qquad (2.32)$$

2). Пользуясь формулой (2.32), докажем выполнение условия 3. След матрицы N может быть вычислен по формуле $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(N w_i, w_i)}{|w_i|^2}$ При $m \leqslant k'$ произведение $(N w_m, w_m)$ обращается в ноль. Вычислим это произведение при $m > k'$.

$$(N w_m, w_m) = (M w_m, w_m) + \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2} \Big(\underbrace{(\mathfrak{I} w_i, w_m)}_{0} \langle M\mathfrak{I} w_i,\, w_m\rangle +$$

$$+ \underbrace{(w_i, w_m)}_{0} \langle M w_i,\, w_m\rangle \Big) - \sum_{i=1}^{k'} \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n - k')} \big(w_m, w_m \big) = (M w_m, w_m) -$$

$$- \frac{(w_m, w_m)}{(n - k')} \sum_{i=1}^{k'} \frac{\big(w_i,\, M w_i \big)}{|w_i|^2}.$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{(Nw_m,\,w_m)}{|w_m|^2}=\sum_{m=k'+1}^{n}\frac{(Nw_m,\,w_m)}{|w_m|^2}=\sum_{m=k'+1}^{n}\frac{(Mw_m,w_m)}{|w_m|^2}-$$

$$-\underbrace{\sum_{m=k'+1}^{n}\frac{1}{(n-k')}}_{1}\sum_{i=1}^{k'}\frac{\big(w_i,\,Mw_i\big)}{|w_i|^2}=\sum_{m=k'+1}^{n}\frac{\big(Mw_m,w_m\big)}{|w_m|^2}-\sum_{i=1}^{k'}\frac{\big(w_i,\,Mw_i\big)}{|w_i|^2}=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{\big(Mw_m,w_m\big)}{|w_m|^2}=0.$$

Условие 3 проверено.

3). Перейдем к условию 2. Очевидно, что это условие достаточно проверить для базисных векторов: $v=w_m$, $u=w_l$. Заметим, во-первых, что если $m,l\leqslant k'$, то обе скобки равны нулю. Во-вторых, если $l\leqslant k'$, а $m>k'$, то второе произведение все также равно нулю, а первое имеет следующий вид:

$$(Nw_m,w_l)=(Mw_m,w_l)+\sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\Big((\Im w_i,w_l)\langle M\Im w_i,\,w_m\rangle+$$

$$(w_i,w_l)\langle Mw_i,\,w_m\rangle\Big)-\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(w_i,Mw_i)}}{|w_i|^2(n-k')}\underbrace{(w_m,w_l)}_{0}=(Mw_m,\,w_l)+$$

$$+i\langle M\Im w_l,\,w_m\rangle+\langle Mw_l,\,w_m\rangle=\big(\text{из (2.30)}\big)=$$

$$=(Mw_m,\,w_l)+\overline{(Mw_l,\,w_m)}=(Mw_m,\,w_l)+(w_m,\,Mw_l)=0.$$

Наконец, при $l,m>k'$ с учетом антилинейности эрмитова произведения левая часть условия (2.25) принимает вид:

$$(Nw_m,\,w_l)+(w_m,Nw_l)=\underbrace{(Mw_m,w_l)}_{I}+\sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\Big(\underbrace{(\Im w_i,\,w_l)}_{0}\langle M\Im w_i,\,w_m\rangle+$$

$$+\underbrace{(w_i, w_l)}_{0}\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}(w_m, w_l)}_{II} + \underbrace{(w_m,\, Mw_l)}_{I} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\Big(\underbrace{(w_m,\, \Im w_i)}_{0}\langle M\Im w_i,\, w_l\rangle + \underbrace{(w_m,\, w_i)}_{0}\langle Mw_i,\, w_l\rangle\Big) +$$

$$+\underbrace{\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}(w_m, w_l)}_{II}.$$

Сравнивая слагаемые, помеченные символом I, получаем, что их совместный вклад в сумму равен нулю. Аналогично со слагаемыми, помеченными символом II. Поэтому $(Nw_m,\, w_l) + (w_m, Nw_l) = 0$. Условие 2) проверено.

4). В заключение, докажем ортогональность проекции в смысле формы Киллинга. Имеет место следующее соотношение

$$\operatorname{Tr} N(M-N) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\big(N(M-N)w_m,\, w_m\big)}{|w_m|^2} = \sum_{m=1}^{n}\frac{\big((N-M)w_m,\, Nw_m\big)}{|w_m|^2} =$$

$$= \sum_{m=k'+1}^{n}\frac{\big((N-M)w_m,\, Nw_m\big)}{|w_m|^2}, \tag{2.33}$$

$$Nw_m = |\text{из } (2.30)| = Mw_m + \sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2}w_i - \sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}w_m,$$

$$(N-M)w_m = \sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2}w_i - \sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}w_m.$$

Преобразуем одно слагаемое суммы (2.33):

$$\big((N-M)w_m,\, Nw_m\big) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2}w_i - \sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}w_m,\, Mw_m\right) +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\,w_m)}}{|w_i|^2}w_i-\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}w_m,\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\,w_m)}}{|w_i|^2}w_i-\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}w_m\right)=$$

$$=(\text{с учетом ортогональности векторов } w_i \text{ и } w_m)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\,w_m)}}{|w_i|^2}\big(w_i,\,Mw_m\big)-\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}\big(w_m,\,Mw_m\big)+$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\,w_m)}}{|w_i|^2}\right|^2\big(w_i,\,w_i\big)+\left|\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}\right|^2\big(w_m,\,w_m\big)=$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\,w_m)}\big(w_i,\,Mw_m\big)}{|w_i|^2}+\sum_{i=1}^{k'}\frac{\overline{(Mw_i,\,w_m)}(Mw_i,\,w_m)}{|w_i|^2}}_{0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}\left(\big(Mw_m,\,w_m\big)+\sum_{i=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_i)}{|w_i|^2}\frac{|w_m|^2}{(n-k')}\right).$$

Отсюда вся сумма (2.33) оказывается равной

$$\sum_{m=k'+1}^{n}\frac{\big((N-M)w_m,\,Nw_m\big)}{|w_m|^2}=\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}\left(\sum_{m=k'+1}^{n}\frac{\big(Mw_m,\,w_m\big)}{|w_m|^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{k'}\frac{(Mw_i,w_i)}{|w_i|^2}\underbrace{\sum_{m=k'+1}^{n}\frac{|w_m|^2}{|w_m|^2(n-k')}}_{1}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k'}\frac{(w_i,Mw_i)}{|w_i|^2(n-k')}\sum_{m=1}^{n}\frac{\big(Mw_m,\,w_m\big)}{|w_m|^2}=0.$$

$\square$

Таким образом, лемма доказана, а проекция оказалась рациональной.

Теорема E. *Рассмотрим набор полиномиальных функций на* $\mathfrak{h}_{nk}^*$*: ба-*

зис $u_1, \ldots, u_{2nk}$ *пространства* $V = (\mathbb{C}^n)^k$, *рассматриваемый как линейные функции на* V^*, *и функции*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^{2l}(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v_1,\ldots,v_k)}(M + \lambda B))^l, \qquad (2.34)$$

$l = 2, 3 \ldots n - k - 1$, *где проекция* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M$ *задана формулой (2.23),* $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ *— определитель матрицы Грама системы векторов* $v_1, \ldots, v_k$, *а* B *— регулярный элемент* $\mathrm{su}(n)$, *выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{h}_{nk} = \mathrm{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)^k$ *при* $k < n - 1$. *При* $k \geqslant n - 1$ *полный коммутативный набор образуют функции* $u_1, \ldots, u_{2nk}$.

Доказательство. Ввиду рациональности проекции (2.23) доказательство теоремы E аналогично доказательству теоремы D. □

2.6 Алгебры семейства $\mathfrak{h}_{n1}$

В этом параграфе будут рассмотрены алгебры $\mathfrak{h}_{n1}$ для малых n. Будет показано, как в этом случае можно упростить формулу (2.34). Для рассматриваемых алгебр необходимо $m = \frac{(n^2+2n-1+n-1)}{2} = \frac{(n^2+3n-2)}{2}$ полиномов. Откуда сразу получаем следующие результаты.

2.6.1 Алгебра $\mathfrak{h}_{21}$.

Для алгебры $\mathfrak{h}_{21} = \mathrm{su}(2) + \mathbb{C}^2 \cong \mathrm{so}(3) + \mathbb{R}^4$, оказывается, что необходимо 4 полинома. Поскольку размерность коммутативного идеала как раз и равна четырем, линейных полиномов хватает.

2.6.2 Алгебра $\mathfrak{h}_{31}$.

При $n \geqslant 3$ линейных полиномов не хватает, поэтому исследуем, какой вид принимает формула (2.23) в этом случае. Во-первых, видим сразу, что

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

$$N_1 = M - \frac{1}{|w|^2}\left(Mw \times w^T + M\mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times (M\mathfrak{I}w)^T - w \times (Mw)^T\right);$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\frac{\langle Mw,\, w\rangle}{|w|^2|w|^2}\left(w \times w^T - w \times w^T + \mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}w^T\right) = 0;$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\frac{\langle M\mathfrak{I}w,\, w\rangle}{|w|^4}\left(w \times \mathfrak{I}w^T + w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times w^T - \mathfrak{I}w \times w^T\right) =$$

$$= \frac{\langle M\mathfrak{I}w,\, w\rangle}{|w|^4}\left(w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times w^T\right);$$

$$N_4 = -\frac{(w, Mw)}{|w|^2(n-1)}\left(E - \frac{w \times w^T}{|w|^2}\right);$$

Фиксируем теперь тот ортонормированный «канонический» базис, в котором оператор $\mathfrak{I}$ — это оператор умножения вектора $w \in \mathbb{C}^n$ (рассматриваемого как вектор с n комплексными координатами) на мнимую единицу. Посмотрим, какой вид примет формула для проекции в этом базисе. Для этого сначала приведем ряд очевидных соотношений, которыми будем пользоваться.

$$M\mathfrak{I}w = i \cdot Mw;$$

$$u \times v + \mathfrak{I}u \times \mathfrak{I}v^T = u\langle \cdot\,;\ v\rangle + iu\langle \cdot\,;\ iv\rangle = u\mathfrak{Re}(\cdot\,;\ v) + iu\mathfrak{Re}(\cdot\,;\ iv) =$$

$$= u\mathfrak{Re}(\cdot\,;\ v) + iu\mathfrak{Re}\left\{-i(\cdot\,;\ v)\right\} = u\mathfrak{Re}(\cdot\,;\ v) + iu\mathfrak{Im}(\cdot\,;\ v) =$$

$$= u\left\{\mathfrak{Re}(\cdot\,;\ v) + i\mathfrak{Im}(\cdot\,;\ v)\right\} = u(\cdot\,;\ v);$$

$$-i\langle M\mathfrak{I}w;\ w\rangle = -i\mathfrak{Re}(iMw;\ w) = i\mathfrak{Im}(Mw;\ w) =$$

$$= |\text{в силу (2.29)}| = (Mw;\ w);$$

$$w \times \mathfrak{J}w^T - \mathfrak{J}w \times w^T = w \times \mathfrak{J}w^T + \mathfrak{J}w \times \mathfrak{J}\mathfrak{J}w^T =$$
$$= w \times \mathfrak{J}w^T + \mathfrak{J}w \times \mathfrak{J}(\mathfrak{J}w)^T = -iw(\cdot\ ;\ w) \quad \Rightarrow$$
$$N_1 = M - \frac{1}{|w|^2}\Big(Mw(\cdot\ ;\ w) - w(\cdot\ ;\ Mw)\Big);$$
$$N_3 = \frac{(Mw,\, w)w(\cdot\ ;\ w)}{|w|^4}$$

Пояснение: в приведенных выше соотношениях вначале записано выражение в инвариантных терминах, а в конце — его вид в фиксированном базисе. Так первая формула означает, что результат композиции действий операторов M и $\mathfrak{J}$ на вектор w есть ни что иное, как вектор $Mw \in \mathbb{C}^n$, умноженный на мнимую единицу.

Заметим, однако, что в выбранном базисе произведение $(u;\ v)$ можно переписать как результат умножения вектора-столбца u на вектор-строку $\bar{v}^T$ (Здесь и далее ^{T} будет означать транспонирование комплексных вектора или матрицы):

$$(u;\ v) = u\bar{v}^T.$$

Следовательно, в матричном виде (2.23) переписываются следующим образом:

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,w}M = M - \frac{1}{|w|^2}\Big(Mw\bar{w}^T - w(\overline{Mw})^T\Big) + \frac{(Mw,\, w)}{|w|^4}w\bar{w}^T -$$
$$-\frac{(w, Mw)}{|w|^2(n-1)}\left(E - \frac{w\bar{w}^T}{|w|^2}\right).$$

Значит, формулы для нелинейных полиномов получаются из функций

$$f_{l,B,\lambda}(M, w) = |w|^4\mathrm{Tr}\Big(|w|^4\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,w}(M + \lambda B)\Big)^l,\ l = 1, 2 \ldots n-2$$

как коэффициенты разложения функций $f_{l,B,\lambda}$ по степеням переменной λ.

2.7 Полный инволютивный набор полиномов для алгебр $\mathfrak{f}_{nk} = \mathrm{u}(n) +_{\zeta'_k} (\mathbb{C}^n)^k$.

В заключение рассмотрим полупрямую сумму алгебры $\mathrm{u}(n)$ и пространства $\mathbb{C}^{nk}$ по представлению $\zeta'_k = \underbrace{\zeta' \times \zeta' \cdots \times \zeta'}_{k \text{ раз}}$, где $\zeta' \colon \mathrm{u}(n) \to \mathrm{gl}(\mathbb{C}^n)$ – представление минимальной размерности, т.е. $\mathrm{u}(n)$ действует независимо на каждой компоненте $\mathbb{C}^n$.

$$\mathfrak{f}_{nk} = \mathrm{u}(n) +_{\zeta'_k} (\mathbb{C}^n)^k, \tag{2.35}$$

Замечание 3. *Алгебра* $\mathrm{u}(n)$ *не является компактной в смысле определения 7, а в теореме Тена, котором мы пользовались при построении полного инволютивного набора полиномов для алгебр* $\mathfrak{g}_{nk}$ *и* $\mathfrak{f}_{nk}$*, компактность требовалась. Однако, если проследить за доказательством теоремы Тена, то это условие было необходимо лишь для того, чтобы сказать, что стационарная подалгебра редуктивна, а в нашем случае это так (мы докажем это ниже). Поэтому полный инволютивный набор будем строить методом Тена.*

В этом параграфе все замечания, сделанные для алгебр (2.17), также, как и введенное обозначение оператора $\mathfrak{I}$, остаются в силе. В дополнительной оговорке нуждается лишь невырожденность формы (2.18). Покажем, что форма (2.18) также невырождена для алгебр (2.35), то есть что из условия

$$\langle (M_1, v_1, \ldots, v_k);\ (M_2, u_1, \ldots, u_k) \rangle = 0\ \forall (M_2, u_1, \ldots, u_k) \in \mathfrak{f}_{nk} \tag{2.36}$$

следует, что $M_1 = 0$ и $v_1 = v_k = 0$. Действительно, второе условие получается если подставлять в (2.36) $(M_2;\ u_1,\ \ldots,\ u_k) = (0;\ 0, \ldots, u_i,\ \ldots, 0)$, где $u_i = 1,\ i$. Подставим теперь $u_1 = 0, \ldots, u_k = 0$, $M = iE \in \mathrm{u}(n)$. Тогда получим $\operatorname{Tr} M_1 = 0$, откуда следует, что $M_1 \in \mathrm{su}(n)$. После чего условие $\operatorname{Tr} M_1 M_2 = 0$ для любой матрицы $M_2 \in \mathrm{su}(n)$ сразу влечет за собой $M_1 = 0$.

Лемма 2.8. *а) При $k \geqslant n$ стационарная подалгебра регулярного элемента в смысле представления ${\zeta'}_k^*$ тривиальна; б) при $k < n$ эта подалгебра изоморфна* $\mathrm{u}(n-k)$.

Доказательство. Используя k^2 инвариантов, указанных при доказательстве леммы 2.6, и проводя аналогичные рассуждения, получим требуемое. □

Поскольку $\mathfrak{f}_{nk} = \mathfrak{h}_{nk} \oplus \mathbb{R}$ (сумма прямая), необходимое количество полиномов для исследуемых алгебр равно

$$m = 2nk + \frac{1}{2}\left((n-k)^2 + (n-k)\right).$$

При $k > n$ линейных полиномов хватает для образования полного коммутативного набора. В случае $k < n$ стационарная подалгебра регулярного элемента является редуктивной алгеброй. В обозначениях (2.24) получаем, что искомая проекция на стационарную алгебру вектора $v = (v_1, \ldots, v_k)$ может быть записана в форме:

$$K = N_1 + N_2 + N_3. \tag{2.37}$$

(Слагаемое N_4, корректировавшее след матрицы, в этом случае нам не понадобится).

Лемма 2.9. *Формула (2.37) удовлетворяет всем свойствам ортогональной в смысле формы Киллинга проекции на подалгебру* $\operatorname{St} v$.

Доказательство. Дополним набор $w_1, \dots, w_{k'}$ до ортогонального базиса: $w_1, \dots, w_n$ в $\mathbb{C}^n$. Нам необходимо проверить выполнение следующих свойств:

1. $Kw_m = 0 \ \forall m = 1, \dots, k'$
2. $K \in \mathrm{u}(n) \Leftrightarrow K = -\bar{K}^T \ \Leftrightarrow \ (Kv,\, u) + (v,\, Ku) = 0.$
3. K – ортогональная проекция: $\mathrm{Tr}\ K(M-K) = 0$, что равносильно равенству $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{|w_i|^2}(K(M-K)w_i, w_i) = 0.$

При проверке этих свойств будем пользоваться соотношениями (2.26 – 2.31).

1. $Nw_m = 0$ при $m \leqslant k'$

$$N_1 w_m = Mw_m - \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2}\Big(Mw_i \underbrace{\langle w_i, w_m\rangle}_{\delta_{im}|w_m|^2} + M\mathfrak{I}w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m\rangle}_{0} -$$

$$-\mathfrak{I}w_i\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle - w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2}\Big(\mathfrak{I}w_i\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle + w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big);$$

$$N_2 w_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'} \frac{\langle Mw_i,\, w_j\rangle}{|w_i|^2|w_j|^2}\,(w_j\langle w_i,\, w_m\rangle - w_i\langle w_j,\, w_m\rangle +$$

$$+ \mathfrak{I}w_j \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle}_{0} - \mathfrak{I}w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_j, w_m\rangle}_{0}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{k'} \frac{\langle Mw_m,\, w_j\rangle}{|w_j|^2} w_j - \sum_{i=1}^{k'} \frac{\langle Mw_i,\, w_m\rangle}{|w_i|^2} w_i\Big) = \sum_{i=1}^{k'} \frac{\langle Mw_m,\, w_i\rangle}{|w_i|^2} w_i;$$

Поэтому

$$N_3 w_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\Im w_i,\, w_j\rangle}{|w_i|^2|w_j|^2}\Big(w_j\underbrace{\langle\Im w_i,\, w_m\rangle}_{0}+w_i\underbrace{\langle\Im w_j,\, w_m\rangle}_{0}-$$

$$-\Im w_j\langle w_i,\, w_m\rangle-\Im w_i\langle w_j,\, w_m\rangle\Big)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\Im w_m,\, w_j\rangle}{|w_j|^2}\Im w_j-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'}\frac{\langle M\Im w_i, w_m\rangle}{|w_i|^2}w_i=$$

$$=\big(\text{из соотношения (2.31)}\big)=-\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\Im w_j, w_m\rangle}{|w_j|^2}\Im w_j;$$

$$Nw_m=\sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\Big(\Im w_i\langle M\Im w_i,\, w_m\rangle+w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k'}\frac{\langle Mw_m,\, w_i\rangle}{|w_i|^2}w_i-\sum_{j=1}^{k'}\frac{\langle M\Im w_j, w_m\rangle}{|w_j|^2}\Im w_j=0.$$

2. Выпишем теперь Nw_m для $m>k'$:

$$N_1 w_m = Mw_m-\sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\left(Mw_i\underbrace{\langle w_i, w_m\rangle}_{0}+\right.$$

$$\left.+M\Im w_i\underbrace{\langle\Im w_i, w_m\rangle}_{0}-\Im w_i\langle M\Im w_i,\, w_m\rangle-w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle\right)=$$

$$=Mw_m+\sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\Big(\Im w_i\langle M\Im w_i,\, w_m\rangle+w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big).$$

Далее, поскольку $0\leqslant i\leqslant k'$, а $m>k'$, из (2.27) следует

$$N_2 w_m = N_3 w_m = 0$$

В итоге получаем

$$Nw_m=Mw_m+\sum_{i=1}^{k'}\frac{1}{|w_i|^2}\Big(\Im w_i\langle M\Im w_i,\, w_m\rangle+w_i\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big). \quad (2.38)$$

3. Перейдем к условию 2. Очевидно, что это условие достаточно проверить для базисных векторов: $v = w_m$, $u = w_l$. Заметим, во-первых, что если $m, l \leqslant k'$, то обе скобки равны нулю. Во-вторых, если $l \leqslant k'$, а $m > k'$, то первое произведение все также равно нулю, а первое имеет следующий вид:

$$(Nw_m, w_l) = (Mw_m, w_l) + \sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2}\Big((\mathfrak{I}w_i, w_l)\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle +$$

$$+(w_i, w_l)\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big) = (Mw_m,\, w_l) +$$

$$+i\langle M\mathfrak{I}w_l,\, w_m\rangle + \langle Mw_l,\, w_m\rangle = \big(\text{из } (2.30)\big) =$$

$$= (Mw_m,\, w_l) + \overline{(Mw_l,\, w_m)} = (Mw_m,\, w_l) + (w_m,\, Mw_l) = 0.$$

Наконец, при $l, m > k'$ с учетом антилинейности эрмитова произведения левая часть соотношения (2) преобразуется к форме:

$$(Nw_m,\, w_l) + (w_m, Nw_l) = \underbrace{(Mw_m, w_l)}_{I} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2}\Big(\underbrace{(\mathfrak{I}w_i,\, w_l)}_{0}\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_m\rangle + \underbrace{(w_i, w_l)}_{0}\langle Mw_i,\, w_m\rangle\Big) + \underbrace{(w_m,\, Mw_l)}_{I} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k'} \frac{1}{|w_i|^2}\Big(\underbrace{(w_m,\, \mathfrak{I}w_i)}_{0}\langle M\mathfrak{I}w_i,\, w_l\rangle + \underbrace{(w_m,\, w_i)}_{0}\langle Mw_i,\, w_l\rangle\Big) = 0.$$

Соотношение 2 доказано.

4. В заключение, докажем ортогональность проекции в смысле формы Киллинга. Имеет место следующее соотношение

$$\operatorname{Tr} N(M-N) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\big(N(M-N)w_m,\, w_m\big)}{|w_m|^2} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{\big((N-M)w_m,\, Nw_m\big)}{|w_m|^2} = \sum_{m=k'+1}^{n} \frac{\big((N-M)w_m,\, Nw_m\big)}{|w_m|^2}, \qquad (2.39)$$

$$Nw_m = \text{из (2.30)} = Mw_m + \sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2} w_i,$$

$$(N-M)w_m = \sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2} w_i.$$

Используя эти равенства, преобразуем одно слагаемое суммы (2.39):

$$\big((N-M)w_m,\, Nw_m)\big) = \left(\sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2} w_i,\, Mw_m\right) +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2} w_i,\, \sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2} w_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2} (w_i,\, Mw_m) + \left|\sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}}{|w_i|^2}\right|^2 (w_i,\, w_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}(w_i,\, Mw_m)}{|w_i|^2} + \sum_{i=1}^{k'} \frac{\overline{(Mw_i,\, w_m)}(Mw_i,\, w_m)}{|w_i|^2} = 0.$$

Откуда получаем, что каждое слагаемое суммы (2.39) равно нулю, а значит и вся сумма тоже. □

Теорема F. *Рассмотрим набор полиномиальных функций на $\mathfrak{f}_{nk}^*$: базис $u_1, \ldots, u_{2nk}$ пространства $V = (\mathbb{C}^n)^k$, рассматриваемый как линейные функции на V^*, и функции*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^{2l}(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v_1,\ldots,v_k)}(M + \lambda B))^l, \tag{2.40}$$

$l = 1, 2 \ldots n-k-1$, где проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M$ задана явной формулой, $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ – определитель матрицы Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k$, а B – регулярный элемент $\mathrm{u}(n)$, выступающий в качестве параметра.

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{f}_{nk} = \mathrm{u}(n) +_{\zeta'_k} (\mathbb{C}^n)^k$ при

$k < n-1$. *При* $k \geqslant n-1$ *полный коммутативный набор образуют функции* $u_1, \ldots, u_{2nk}$.

Доказательство. Ввиду рациональности проекции (2.23) доказательство теоремы F аналогично доказательству теоремы D. □

2.8 Операторный вид проекций (2.23) и (2.37).

В заключение отметим, что формулы (2.23) и (2.37) допускают операторный вид, подобный описанному в параграфе 2.2 для алгебры $\mathrm{so}(n) +_{\rho_k} \mathbb{R}^{nk}$.

Лемма 2.10. *Пусть* P *— оператор проектирования вдоль подпространства* $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, *т.е.*

$$Pu = 0 \ \forall u \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle; \quad Pw = w \ \forall w \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle^{\perp}$$

(ортогональное дополнение к подпространству берется в смысле эрмитова произведения). Тогда

- *Проекция* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} \colon \mathrm{su}(n) \to \mathrm{St}\, v \subset \mathrm{su}(n)$ *имеет вид*

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M = PMP - \frac{\mathrm{Tr}\, PMP}{\mathrm{Tr}\, P} P,$$

- *Проекция* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} \colon \mathrm{u}(n) \to \mathrm{St}\, v \subset \mathrm{u}(n)$ *имеет вид*

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M = PMP.$$

Доказательство. Для доказательства леммы нам необходимо проверить косоэрмитовость матриц $M_1 = PMP$ и $M_2 = PMP - \frac{\mathrm{Tr}\, PMP}{\mathrm{Tr}\, P} P$, выполнение системы $M_i v_1 = \ldots M_i v_k = 0 \ i = 1, 2$ и справедливость соотношений $\mathrm{Tr}\, M_i(M - M_i) = 0$ (ортогональность проекций в смысле формы Киллинга). А также равенство нулю следа матрицы M_2.

Для начала покажем, что обе матрицы косоэрмитовы. Действительно, из равенства $(Pu,\, w) = (u,\, Pw)$, верного в силу определения оператора P, следует, что P — эрмитов оператор, т.е. в любом ортонормированном базисе его матрица удовлетворяет соотношению $\overline{P}^T = P$. Поэтому матрица PMP будет в любом ортонормированном базисе косоэрмитовой, поскольку $\overline{PMP}^T = -PMP$. Следовательно, $\mathrm{Tr}\, PMP$ — чисто мнимое число, а $\mathrm{Tr}\, P$ — вещественное. Откуда и следует косоэрмитовость матрицы $PMP - \frac{\mathrm{Tr}\, PMP}{\mathrm{Tr}\, P} P$.

Условие $M_1 v = M_2 v = 0 \ \forall v \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ следует из того, что для всех таких векторов $Pv = 0$.

Перейдем к проверке ортогональности проекции. Во-первых, из свойств оператора проектирования и операции след следует, что $\mathrm{Tr}\, PMP(M - PMP) = 0$ (доказательство повторяет доказательство для алгебр $\mathfrak{g}_{nk}$). Теперь рассмотрим матрицу M_2:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\ \left[\left(PMP - \frac{\mathrm{Tr}\ PMP}{\mathrm{Tr}\ P}P\right)\left(\big(M - PMP\big) + \frac{\mathrm{Tr}\ PMP}{\mathrm{Tr}\ P}P\right)\right] = \\
&= \underbrace{\mathrm{Tr}\ \big[PMP\big(M - PMP\big)\big]}_{0} - \frac{\mathrm{Tr}\ PMP}{\mathrm{Tr}\ P}\mathrm{Tr}\ \underbrace{P\big(M - PMP\big)}_{0} + \\
&+ \frac{\mathrm{Tr}\ PMP}{\mathrm{Tr}\ P}\mathrm{Tr}\ PMP^2 - \left(\frac{\mathrm{Tr}\ PMP}{\mathrm{Tr}\ P}\right)^2 \mathrm{Tr}\ P^2 = \\
&= \frac{\mathrm{Tr}\ PMP}{\mathrm{Tr}\ P}\mathrm{Tr}\ PMP - \left(\frac{\mathrm{Tr}\ PMP}{\mathrm{Tr}\ P}\right)^2 \mathrm{Tr}\ P = 0
\end{aligned}$$

Наконец, след матрицы M_2 равен нулю, что следует из прямой выкладки: $\mathrm{Tr}\, M_2 = \mathrm{Tr}\, PMP - \frac{\mathrm{Tr}\, PMP}{\mathrm{Tr}\, P}\mathrm{Tr}\, P = 0$.

Как и в параграфе 2.2 здесь можно написать явную формулу для оператора проектирования P. Пространство $\mathbb{C}^n$, рассматриваемое как n-мерное комплексное пространство, отождествляется с $(\mathbb{C}^n)^*$ при помощи эрмитова произведения $(\cdot,\cdot)$. Элемент двойственный вектору $w \in \mathbb{C}^n$ будем обозначать через $w^\top$. Тогда формула для оператора проектирования примет вид: $P = E - \sum\limits_{i=1}^{k'} \frac{w_i \otimes w_i^\top}{|w_i|^2}$.

Поскольку векторы $w_1, \ldots, w_{k'}$ зависят от v_i рационально, то и сама формула проекции будет рационально зависеть от v_i. $\square$

Благодарности

Я благодарю своих научных руководителей, академика РАН Анатолия Тимофеевича Фоменко и доктора физико-математических наук, профессора Алексея Викторовича Болсинова, за постановку задачи, плодотворные обсуждения и постоянное внимание.

Литература

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., “Интегрируемые гамильтоновы системы”, Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2. - Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.

[2] Фоменко А. Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.* (Монография). - М.; изд-во МГУ, 1988.

[3] Садэтов С. Т., *Доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко*, Докл. РАН, 397:6 (2004), 751–754; англ. пер.: S. T. Sadetov, “A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture”, Dokl. Math., 1 (2004), 635–638.

[4] Болсинов А. В., “*Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах:доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко*”// Труды семинара по векторному и тензорному анализу.. Вып.26. М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ. 2005, с.87-109.

[5] Джекобсон Н. Алгебры Ли, — М., 1964.

[6] Rais M. *L'indice des produits semi-directs* $E \times_\rho \mathfrak{g}$. Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. 1978. **287**, №4, p.195-197.

[7] Трофимов В. В., Фоменко А. Т., *“Алгебра интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений”*. М.-Ижевск: Факториал и изд-во “Просперус” Удмуртского гос.ун-та, 1995.

[8] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., “*Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли*” *ДАН СССР*. 1976, т.231, No.3, с.536-538.

[9] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., “*Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли*”, Известия АН СССР, 1978, т.42, No.2, с.396-415.

English translation: Mischenko A. S., Fomenko A. T., *Euler equations on finite-dimensional Lie groups*, Math. USSR Izvestija, 1978, v.12, No.2, pp.371-389.

[10] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. “*Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли*// Труды семинара по векторному и тензорному анализу.” - М.; изд-во МГУ, 1979, вып.19, с.3-94.

English translation: Mishchenko A. S., Fomenko A. T., *Integrability of Euler Equations on Semisimple Lie Algebras*, Sel. Math. Sov. 1982, v.2, No.3, pp.207-291.

[11] Болсинов А. В., “*Инволютивные семейства функций на двойственных пространствах к алгебрам Ли типа $G +_\phi V$*”, УМН, 42:6(258) (1987), с. 183–184.

[12] Привитцер Б., “*Новые примеры интегрируемых гамильтоновых систем на полупрямых суммах алгебр Ли*”, Матем. сб., 184:10 (1993), с.135–143.

[13] Трофимов В. В., Фоменко А. Т., "*Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем*"// Функц. анализ и его приложения, 1983, т.17, вып.1, с.31-39.

[14] Браилов А. В., Фоменко А. Т., "*Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем*"// Матем. сборник, 1987, т.133, No.3, с.375-385.

[15] Болсинов А. В., "*Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли*" // Канд. диссертация (1988).

[16] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., "*Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем*", Функц.анализ и его приложения, 1978, т.12, No.2, с.49-59.

[17] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., "*Некоммутативное интегрирование гамильтоновых систем и его приложения*" Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1978, No.4, с.187-188.

[18] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., "*Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями*", Труды семинара по векторному и тензорному анализу. - вып.20, М.; изд-во МГУ, 1981. с.5-54.

[19] Трофимов В.В., Фоменко А. Т., "*Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли*", *УМН*, 1984, т.39, вып.2, с.3-56.

English translation: Mischenko A. S., Fomenko A. T., *On the integration of the Euler equations on semisimple Lie algebras*, Soviet Math. Dokl. 1976, v.17, No.6, pp. 1591-1593.

[20] Манаков С. В., “*Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела*”, Функц. анализ и его прил., 10:4 (1976), с. 93–94.

[21] Певцова Т. А., *Симплектическая структура орбит коприсоединенного представления алгебр Ли типа* $E \underset{\rho}{\times} G$, Матем. сб., 1984, 123(165):2, с. 276–286.

[22] Садэтов С. Т., Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли // Докт. диссертация (2004).

[23] Тен А. С., *Полные коммутативные семейства функций на полупрямых суммах алгебр Ли*, Дипломная работа МГУ, механико-математический факультет, 2002.

[24] Браилов А. В., Некоторые свойства вполне интегрируемых гамильтоновых систем,// Кандидатская диссертация, МГУ, 2006.

[25] Трофимов В. В., Фоменко А. Т.,*Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли*, Динамические системы – 7, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 16, ВИНИТИ, М., 1987, с. 227–299.

[26] Швая Крыстына, Инварианты и полные инволютивные семейства полиномов некоторых алгебр Ли, // Кандидатская диссертация, МГУ (1988).

[27] Жданова М. М., “*Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на полупрямых суммах алгебр Ли*”, Матем. сб., 200:5 (2009), с.3–32.

[28] Воронцов А. С., “*Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом*”, Матем. сб., 200:8 (2009), с.45–62.

[29] Bolsinov A. V., “*Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets*”// Acta Appl. Math., 24(1991), pp. 253-274.

[30] Жданова (Деркач) М. М., “Новые интегрируемые случаи на конечномерных алгебрах Ли”. Вестник Моск. Унив., Сер. Матем. Мех. №4, 2006, 62-64.

[31] Деркач М. М., Тен А. С., “Максимальные коммутативные подалгебры функций на двойственных пространствах к алгебрам Ли”, Вестник Моск. Унив., Сер. Матем. Мех. №1, 2011, с.31-36.

[32] Деркач М. М., “Анализ методов построения полных инволютивных наборов полиномов на алгебрах Ли вида полупрямой суммы”, депонирована в ВИНИТИ РАН, 29.11.2010, №667-В2010, 1-27.

[33] Жданова (Деркач) М. М., “Интегрируемые случаи на полупрямых суммах классических алгебр Ли”, Тезисы воронежской школы им. С.Г.Крейна, с.41.

[34] Жданова (Деркач) М. М., “Новые интегрируемые случаи на конечномерных алгебрах Ли”, Тезисы конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, с.97-99.

[35] Жданова (Деркач) М. М., “Интегрируемые случаи на полупрямых суммах классических алгебр Ли”, Тезисы конференции “Александровские чтения-2006”, с.46.