МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА и ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ДАО ЧОНГ ТХИ

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОТОКИ И ПОВЕРХНОСТИ В РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

(01.01.04 - геометрия и топология)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук А.Т.Фоменко

Москва - 1977

С о д е р ж а н и е

Введение

Исследования многомерной задачи Плато на римановых многообразиях ведутся в двух основных направлениях. К первому направлению относятся те результаты, которые позволяют доказать существование и исследовать регулярность многомерных решений в самом общем случае, а ко второму направлению - те результаты, которые носят более конкретный характер и позволяют, например, в явном виде указывать глобально минимальные поверхности.

В настоящее время для решения упомянутой задачи в первом направлении накопился достаточно глубоко развитый аппарат, позволяющий получать мощные теоремы существования многомерных решений и их регулярности почти всюду в широких классах допустимых вариаций с разнообразными краевыми условиями. Так, например, общие теоремы существования минимальных поверхностей в различных формулировках получены Г.Федерером, У.Х.Флемингом, Ф.Дж.Альмгреном (см.[1],[2],[3]), Е.де Джорджи (см.[4]), а также Ч.Б.Морри Е.Р.Райфенбергом и А.Т.Фоменко (см.[5],[6],[7],[8],[9]). Особенно в[3]эти теоремы доказаны для класса произвольных эллиптических интеграндов, частным случаем которых является функционал хаусдорфовой меры; а в работе [9] многомерная задача Плато рассмотрена в классах компактов, описываемых произвольными теориями гомологий или когомологий, в частности, она поставлена и решена в своём классическом виде, с помощью теории бордизмов.

Если же обратиться ко второмунаправлению, то мы увидим значительно меньше результатов. Отметим следующие интересные результаты, носящие конкретно аналитично-геометрический характер.

Г.Федерер [II], используя неравенство Виртингера, доказал, что поверхности в кэлеровом многообразии, имеющие почти всюду комплексные касательные пространства, являются минимальными поверхностями.

Г.Б.Лоусон [I3], рассматривая эквивариантную задачу Плато в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, редуцировал задачу о нахождении минимальных $(n-1)$-мерных поверхностей с заданной границей M, являющейся G-инвариантным $(n-2)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$, к соответствующей задаче на пространстве орбит $\mathbb{R}^n/G$, где G - некоторая связная компактная подгрупна групны ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. В частности получено новое доказательство хорошо известного результата Е.Бомбьери, Е.де Джорджи, Е.Джусти [I5] о том, что конус $C(S^n \times S^n) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 \leq |y|^2 = \frac{1}{2}\}$ для $n \geq 3$ является единственной минимальной поверхностью в классе всех гиперповерхностей с границей $S^n \times S^n$ в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Эквивариантный метод Лоусона имеет большое ограничение: он применим только к исследованию минимальных поверхностей коразмерности I в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

А.Т.Фоменко [I0] построил геометрический метод, дающий возможность получить универсальные оценки снизу на меры произвольных минимальных поверхностей "реализующего типа" в каждом римановом многообразии. В частности, доказано, что почти все симметрические подпространства ранга I в компактных симметрических пространствах, реализующие нетривиальные циклы, являются минимальными поверхностями. Однако, как показано в [I0], этот метод редко даёт возможность найти минимальные поверхности из-за того, что указанная универсальная оценка снизу, хотя в общем случае является наилучшей, в большинстве классов гомологий не достигается ни на какой минимальной поверхности.

Целью настоящей диссертации, основные результаты которой изложены в [28], [29], [30], [31], [32], является разработка алгебраического метода, позволяющего, в частности, установить условия глобальной минимальности поверхностей и потоков на римановых многообразиях в гомологическом классе.

Пусть $\mathcal{M}$ - связное риманово многообразие, а $A \subset \mathcal{M}$ - некоторая замкнутая $(k-1)$ -мерная поверхность в $\mathcal{M}$. Рассмотрим класс $\{P\}$ всех k -мерных поверхностей таких, что если P' и P'' - две произвольные поверхности из этого класса, то $\partial P' = \partial P'' = A$ и $P' - P''$ - является гомологичным нулю циклом. Согласно упомянутым выше общим теоремам существования решения многомерной задачи Плато, в классе $\{P\}$ имеется глобально минимальная поверхность, т.е. такая поверхность, которая обладает наименьшим объемом среди всех поверхностей из класса $\{P\}$. В диссертации изучается вопрос о том, когда данная поверхность из класса $\{P\}$ глобально минимальна, выводится условие глобальной минимальности поверхностей. Особый интерес представляет случай, когда $A = \emptyset$. В этом случае $\{P\}$ является классом гомологичных между собой поверхностей и для определенных гомологических классов выведенное условие глобальной минимальности становится необходимым и достаточным, которое заключается в следующем: k -мерная поверхность P из гомологического класса α многообразия $\mathcal{M}$ имеет наименьший объем в классе α тогда и только тогда, когда касательный k-вектор $\vec{P}_x$ к P в точке x (т.е. простой k-вектор, ассоциированный с касательным пространством к P в точке x) принадлежит некоторому множеству в $\Lambda_k T_x \mathcal{M}$, определенному классом α, почти всюду. Этот критерий эффективно применяется к исследованию глобальной минимальности поверхностей симметрических пространств. В частности получаются широкие серии примеров глобальных минимальных вполне геодезических подмногообразий в симметрических пространствах. Исследуются на минимальность также примитивные циклы Понтрягина в компактных группах Ли, которые имеют особую точку.

Заметим, что упомянутые выше результаты Г.Федерера [11], а также полученные А.Т.Фоменко [10] примеры глобально минимальных симметрических подпространств получаются в рамках нашего метода довольно просто.

Развитая нами методика основана на теории нормальных и целочисленных потоков, разработанной Г.Федерером и У.Х.Флемингом [1], [2]. Поверхности рассматриваются как целочисленные потоки, а вещественные цепи - нормальные потоки. Причём объем поверхности совпадает с массой соответствующего целочисленного потока.

Заметим, что вариационные задачи на нормальных и целочисленных потоках обладают самостоятельным значением (см. [12]).

Перейдем к формальной постановке задачи и точной формулировке основных результатов работы.

Рассмотрим связное риманово многообразие $\mathcal{M}$ и обозначим через $N_*(\mathcal{M})$ и $I_*(\mathcal{M})$ цепные комплексы нормальных и целочисленных потоков соответственно. Пусть $P \in N_*(\mathcal{M})\left(I_*(\mathcal{M})\right)$. Определим множество всех k-потоков Q из $N_k(\mathcal{M})\left(I_k(\mathcal{M})\right)$ таких, что $\partial Q = \partial P$ и $P-Q$ гомологичен нулю. Это множество мы обозначим через $H(P; N_k(\mathcal{M}))\left(H(P; I_k(\mathcal{M}))\right)$. В частности, если $\partial P = 0$ то определенное множество совпадает с классом гомологий из

$H_k(N_*(\mathcal{M}))\,(H_k(I_*(\mathcal{M})))$, содержащим в себе k -поток P. Рассмотрим произвольный k -поток S из $N_k(\mathcal{M})\,(I_k(\mathcal{M}))$. Когда поток S имеет минимальную массу в множестве $H(S;N_k(\mathcal{M}))$ $(H(S;I_k(\mathcal{M})))$, то есть $M(S)\leq M(S')$ для любого $S'\in$ $H(S;N_k(\mathcal{M}))\,(H(S;I_k(\mathcal{M})))$, где через $M(S)$ обозначается масса потока S. В диссертации выведено условие для того, чтобы S был потоком минимальной массы в соответствующем множестве потоков; причём, если $\mathcal{M}$ компактно, то это условие даёт необходимое и достаточное условие глобальной минимальности потоков в классах гомологий, ассоциированных с ковариантно постоянными формами. Если же, кроме того, $\mathcal{M}$ является симметрическим пространством, то получено необходимое и достаточное условие глобальной минимальности потоков в произвольном классе гомологий.

Заметим, что если замкнутый целочисленный поток S является потоком минимальной массы в классе $\alpha_R\in H_k(N_*(\mathcal{M}))$, то класс целочисленных гомологий $\alpha\in H_k(I_*(\mathcal{M}))$,определенный включением $\alpha\subset\alpha_R$,является стабильным. Вопрос о стабильности гомологий гладкого тора рассмотрен Г.Б.Лоусоном [I4]. Разработанный нами метод позволяет в многих случаях исследовать стабильность гомологий римановых многообразий.

Ниже кратко изложено содержание работы.

Глава I состоит из семи параграфов и посвящена нахождению условий глобальной минимальности потоков в общем случае. В §I и 2 собраны необходимые сведения о грассмановых алгебрах евклидова пространства, а также о дифференциальных формах и потоках риманова многообразия.

В §3 излагаются известные факты о гомологиях цепных комплексов нормальных и целочисленных потоков и ставится задача об об исследовании потоков, имеющих минимальную массу в соответствующем множестве.

В §4 для произвольной k-формы ω на $\mathcal{M}$ определим множества $\Sigma_x(\omega)=\{\eta\in\Lambda_k T_x\mathcal{M} : \|\eta\|=1 \text{ и } (\omega_x,\eta)=\|\omega_x\|^*\}$ и $\Sigma'_x(\omega)=\Sigma_x(\omega)\cap G^k_x$, где G^k_x обозначает множество всех единичных простых k-векторов из $\Lambda_k T_x\mathcal{M}$. Доказывается следующая

Теорема I. Предположим, что ω замкнута и $\|\omega_x\|^*=1$ для любого $x\in\mathcal{M}$. Пусть $S\in N_k(\mathcal{M})(I_k(\mathcal{M}))$ такой, что $\vec{S}_x \in\Sigma_x(\omega)\left(\Sigma'_x(\omega)\right)$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Тогда S имеет минимальную массу в множестве $H(S;N_k(\mathcal{M}))\left(H(S;I_k(\mathcal{M}))\right)$. Причём, если $P\in H(S;N_k(\mathcal{M}))\left(H(S;I_k(\mathcal{M}))\right)$, то P имеет минимальную массу в множестве $H(S;N_k(\mathcal{M}))\left(H(S;I_k(\mathcal{M}))\right)$ тогда и только тогда, когда $\vec{P}_x\in\Sigma_x(\omega)\left(\Sigma'_x(\omega)\right)$ почти всюду в смысле меры $\|P\|$.

В §5 многообразие $\mathcal{M}$ предполагается компактным и односвязным. Фиксируем произвольную точку e на $\mathcal{M}$ и обозначим через Ψ_e группу голономий многообразия $\mathcal{M}$ в точке e, а через Λ^I_k - множество Ψ_e-инвариантных k-векторов в пространстве $\Lambda_k T_e\mathcal{M}$. Для $\xi\in\Lambda^I_k$ положим

$$F^*_e(\xi)=\{\eta\in\Lambda^I_k : \|\eta\|^*=1 \text{ и } (\eta,\xi)=\|\xi\|\}$$

$$F_e(\xi)=\{\eta\in\Lambda_k T_e\mathcal{M} : \|\eta\|=1 \text{ и } (\eta,\gamma)=1 \ \forall\gamma\in F^*_e(\xi)\}.$$

Множество $F_e(\xi)$ корректно переносится по всему многообразию $\mathcal{M}$ и мы обозначим получаемое в точке x множество через $F_x(\xi)$. С ξ ассоциирован замкнутый k-поток S_ξ, имеющий минимальную массу в своём классе гомологий α.

Теорема II. Пусть $\xi \in \Lambda_k^I$, а S_ξ и α определяются как выше. Если $S \in \alpha$, то S имеет минимальную массу в классе α тогда и только тогда, когда $\vec{S}_x \in F_x(\xi)$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$.

В §6 изучаются важные для дальнейшего исследования свойства изоморфизмов двойственности Пуанкаре $D_k : \Lambda_k T_e \mathcal{M} \to \Lambda_{n-k} T_e \mathcal{M}$, где $n = \dim \mathcal{M}$. Доказывается следующее утверждение

Теорема III. Пусть $\xi \in \Lambda_k T_e \mathcal{M}$ и $\eta \in \Lambda_k^I$. Тогда имеют место следующие соотношения

$$\|D_k \xi\|^* = \|\xi\|^* , \quad \|D_k \xi\| = \|\xi\| ,$$

$$F_e^*(D_k \eta) = D_k(F_e^*(\eta)) , \quad F_e(D_k \eta) = D_k(F_e(\eta)),$$

где через $\|\xi\|^*$ и $\|\xi\|$ обозначаются комасса и масса k-вектора ξ соответственно.

В §7 исследованы минимальные потоки на кэлеровых многообразиях при помощи теорем I и II. Рассмотрим связное кэлерово многообразие $\mathcal{M}$ с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω. Форма Ω и все её внешние степени Ω^k ковариантно постоянны. Показывается, что $\Sigma_x(\Omega^k)\,(\Sigma'_x(\Omega^k))$ совпадает с множеством всех положительных (простых положительных) $2k$-векторов в пространстве $\Lambda_{2k} T_x \mathcal{M}$. Таким образом получен усиленный вариант упомянутой выше теоремы Г.Федерера [II] о минимальных целочисленных потоках на кэлеровом многообразии. В §7 исследован также случай, когда $\mathcal{M}$ компактно.

Глава II состоит из 6 параграфов и посвящена исследованию глобальной минимальности потоков и поверхностей в компактном симметрическом пространстве. Для симметрического пространства

$\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ мы используем вместо группы голономий Ψ_e стационарную подгруппу $\mathcal{H}$, а вместо ковариантно постоянных форм – $\mathcal{G}$-инвариантные формы. Это объясняется тем, что с одной стороны новые введенные обьекты более знакомы, чем прежние, а с другой стороны, они позволяют нам избавиться от условия односвязности, наложенное на $\mathcal{M}$ в общем случае.

В §8 собраны нужные факты о симметрических пространствах.

В §9 изучается структура когомологий компактного симметрического пространства $\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Доказывается, что в каждом классе когомологий многообразия $\mathcal{M}$ существует, причём единственная, $\mathcal{G}$-инвариантная форма. Более того, алгебра $\mathcal{G}$-инвариантных форм на $\mathcal{M}$ канонически изоморфна подалгебре $\mathcal{H}$-инвариантных поливекторов в алгебре $\Lambda_* T_e \mathcal{M}$.

В §10 изучаются $\mathcal{G}$-инвариантные потоки в компактном симметрическом пространстве $\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Доказывается, что в каждом классе гомологий существует, причём единственный, $\mathcal{G}$-инвариантный поток. Более того, $\mathcal{G}$-инвариантный поток полностью определяется своими значениями на $\mathcal{G}$-инвариантных формах.

В §11 получен новый вариант теоремы II специально для симметрических пространств. Обозначим через Λ_k^{SI} множество $\mathcal{H}$-инвариантных k-векторов в $\Lambda_k T_e \mathcal{M}$. Для $\xi \in \Lambda_k^{SI}$ положим

$$F_e^{S*}(\xi) = \{\eta \in \Lambda_k^{SI} : \|\eta\|^* = 1 \text{ и } (\eta, \xi) = \|\xi\|\}$$

$$F_e^{S}(\xi) = \{\eta \in \Lambda_k T_e \mathcal{M} : \|\eta\| = 1 \text{ и } (\eta, \gamma) = 1 \ \forall \gamma \in F_e^{S*}(\xi)\}.$$

Множество $F_e^S(\xi)$ корректно переносится по всему $\mathcal{M}$, в результате получим множество $F_x^S(\xi)$ для каждого $x \in \mathcal{M}$. С ξ

ассоциирован $\mathcal{G}$-инвариантный k-поток S_ξ минимальной массы в своём классе гомологий α.

Теорема II'. Если $S \in \alpha$, то S имеет минимальную массу в классе α тогда и только тогда, когда $\vec{S}_x \in F_x^S(\xi)$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$.

Замечание. Так как в каждом классе существует $\mathcal{G}$-инвариантный поток S_ξ, то теорема II даёт необходимое и достаточное условие глобальной минимальности уже в произвольном классе гомологий симметрического пространства.

В §12 теорема II' применяется для исследования глобальной минимальности некоторых специальных классов поверхностей. Каждая замкнутая k-мерная поверхность в $\mathcal{M}$ отождествляется с замкнутым k-потоком, заданным интегрированием по этой поверхности. Доказываются следующие теоремы

Теорема IУ. Рассмотрим замкнутую k-мерную поверхность V в $\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Пусть V имеет точку e регулярной точкой и для любой регулярной точки $x \in V$ существует $g \in \mathcal{G}$ такой, что $g(x) = e$ и $dg\vec{V}_x = \vec{V}_e$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$, где через $[V]_R$ обозначается фундаментальный класс поверхности V в группе $H_k(N_*(\mathcal{M}))$.

2) $\vec{V}_e \in F_e^S(\pi_S \vec{V}_e)$, где π_S - оператор усреднения по $\mathcal{H}$

3) $\|\pi_S \vec{V}_e\| = 1$.

Теорема У. Рассмотрим $\mathcal{K}$-инвариантную замкнутую k-мерную поверхность V в $\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$, где $\mathcal{K}$ - некоторая подгруппа группы G. Обозначим через ξ тот элемент из Λ_K^{SI}, с которым ассоциирован единственный G-инвариантный K-поток S_ξ, принадлежащий классу $[V]_R$. Тогда V имеет минимальную массу в $[V]_R$ в том и только в том случае, когда существует подмножество N полной меры в $V^*/\mathcal{K} \subset \mathcal{M}/\mathcal{K}$ для которого выполняется условие: для каждой орбиты $u \in N$ найдётся точка $x_u \in u \subset V^*$ такая, что $\vec{V}_{x_u} \in F^S_{x_u}(\xi)$, где V^* обозначает объединение точек всех главных орбит действия $\mathcal{K}$ на V.

В §I3 показано, что вполне геодезические подмногообразия удовлетворяют условию теоремы IУ, и установлена глобальная минимальность следующих серий подмногообразий:

$U(n')/U(m')\times U(n'-m')$ в $U(n)/U(m)\times U(n-m)$; $n'<n$, $m'\leq m$.
$SO(n')/SO(2)\times SO(n'-2)$ в $SO(n)/SO(2)\times SO(n-2)$; $n'<n$
$Sp(2n')/U(n')$ в $Sp(2n)/U(n)$; $n'<n$
$SO(2n')/U(n')$ в $SO(2n)/U(n)$; $n'<n$

где все рассматриваемые вложения "стандартны".

Глава Ш представляет собой продолжение исследования в главе П в важнейшем классе симметрических пространств: группы Ли. В §I4 рассматриваются связи между двумя типами вполне геодезических вложений: подгруппа и картановская модель. Приводятся примеры применения теорем П и IУ положительного и отрицательного характера. В частности, полностью описаны глобально минимальные поверхности в группе $SO(4)$.

В §I5 исследуются примитивные циклы Понтрягина [26] на глобальную минимальность. Доказывается следующая теорема

Теорема УI. Пусть V поверхность, построенная по конструкции Дынкина [27] для получения примитивных классов гомологий компактной группы Ли $\mathcal{G}$ с помощью замкнутой одномерной подгруппы $\mathcal{K}$. Обозначим через $Z(\mathcal{K})$ связную компоненту единицы централизатора $\mathcal{K}$. Пусть $Z(\mathcal{K})=\mathcal{K}\times Q$ - полупрямое произведение, причём $\mathcal{K}$ и Q ортогональны в точке e. Тогда V имеет минимальную массу в $[V]_R$ в том и только в том случае, когда Q имеет минимальную массу в $[Q]_R$.

В §16 построены и исследуются на глобальную минимальность "двойные конусы" $\widetilde{P}_n$ в $SU(n)$, похожие на циклы Понтрягина. Доказывается утверждение, аналогичное теореме VI, где в качестве подгруппы Q выступает $SU(n-1)$.

Замечание. Цикл Понтрягина $T_4\subset Sp(4)$ и цикл $\widetilde{P}_3\subset SU(3)$ являются глобально минимальными. Тем самым мы получаем примеры замкнутых минимальных "конусов" коразмерности 3 в вещественных группах Ли.

Автор выражает глубокую благодарность А.Т.Фоменко за постановку задачи и руководство работой.

Глава I. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ ПОТОКОВ

§I. Грассмановы алгебры

В этом параграфе собраны нужные нам сведения о грассмановых алгебрах.

Пусть $\mathbb{R}^n$ - n-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел. С пространством $\mathbb{R}^n$ связываются двойственные пространства $\Lambda_k \mathbb{R}^n$ и $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ k-векторов и k-ковекторов, здесь $\Lambda^0 \mathbb{R}^n = \mathbb{R} = \Lambda_0 \mathbb{R}^n$ и $\Lambda_k \mathbb{R}^n = \{0\} = \Lambda^k \mathbb{R}^n$ в случае $k > n$ или $k < 0$. Прямые суммы

$$\Lambda_* \mathbb{R}^n = \bigoplus_k \Lambda_k \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \Lambda^* \mathbb{R}^n = \bigoplus_k \Lambda^k \mathbb{R}^n$$

образуют контравариантную и ковариантную грассмановы алгебры пространства $\mathbb{R}^n$ с операцией внешнего умножения $\wedge$. Пусть $\mathbb{R}^n$ - евклидово пространство. Тогда скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и соответствующая норма $|\cdot|$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ индуцируют скалярное произведение и норму в пространствах $\Lambda_* \mathbb{R}^n$ и $\Lambda^* \mathbb{R}^n$, которые также обозначаются через $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$. Двойственные ортонормированные базисы в пространствах образуются из двойственных ортонормированных базисов в этих пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\Lambda^1 \mathbb{R}^n$ с помощью внешнего умножения. В дальнейшем мы будем отождествлять $\Lambda_* \mathbb{R}^n$ и $\Lambda^* \mathbb{R}^n$ относительно скалярного произведения. Нам требуются новые нормы в $\Lambda_* \mathbb{R}^n$ $(\Lambda^* \mathbb{R}^n)$, определенные следующим образом.

Определение I.I. Массой k-вектора $\xi \in \Lambda_k \mathbb{R}^n$ называется следующая величина

$$\|\xi\| = \inf\Big\{ \sum_{\beta \in B} |\beta| : B \text{ - конечное множество простых } k\text{-векторов и } \xi = \sum_{\beta \in B} \beta \Big\}.$$

Определение I.2. Комассой k-вектора ξ называется величина $\|\xi\|^* = \sup\{(\xi, \eta) : \eta$ - простой k-вектор и $|\eta| \leq 1\}$.

Величина $\|\xi\|$ достигается для некоторого множества B, содержащего не более чем $\binom{n}{k}$ элементов и величина $\|\xi\|^*$ достигается для некоторого простого k-вектора η (см. [2]). Кроме того, новые нормы связаны с обычными нормами следующим образом

$$\|\xi\| \geqslant |\xi| \quad \text{и} \quad \|\xi\|^* \leq |\xi| \tag{I.I}$$

причём равенства имеют место тогда и только тогда, когда ξ прост (см. [I7]).

Масса и комасса являются сопряженными нормами в пространстве $\Lambda_k \mathbb{R}^n (\Lambda^k \mathbb{R}^n)$. Поэтому мы имеем

$$\|\xi\| = \sup\{(\xi, \eta) : \eta \in \Lambda_k \mathbb{R}^n \text{ и } \|\eta\|^* \leq 1\} \tag{I.2}$$

$$\|\xi\|^* = \sup\{(\xi, \eta) : \eta \in \Lambda_k \mathbb{R}^n \text{ и } \|\eta\| \leq 1\} \tag{I.3}$$

для каждого $\xi \in \Lambda_k \mathbb{R}^n$.

§2. Дифференциальные формы и потоки.

Рассмотрим риманово многообразие $\mathcal{M}$ класса C^∞. Через $E^k(\mathcal{M})$ обозначим векторное пространство всех вещественных дифференциальных k-форм класса C^∞ на $\mathcal{M}$. Сходимость в $E^k(\mathcal{M})$ означает равномерную сходимость всех частных производных на каждом компактном подмножестве $K\subset\mathcal{M}$. Прямая сумма

$$E^*(\mathcal{M}) = \bigoplus_k E^k(\mathcal{M})$$

является градуированной дифференциальной алгеброй с операцией внешнего умножения $\wedge$ и внешним дифференцированием d. Носителем $\operatorname{spt}\varphi$ k-формы $\varphi\in E^k(\mathcal{M})$ назовём замыкание множества $\{x : x\in\mathcal{M}$ и $\varphi(x)\neq 0\}$.

Через $E_k(\mathcal{M})$ обозначим пространство вещественных непрерывных линейных функционалов на $E^k(\mathcal{M})$, наделенное слабой топологией. Для каждого $S\in E_k(\mathcal{M})$ носителем $\operatorname{spt} S$ называется наименьшее замкнутое множество K такое, что $S(\varphi)=0$ для всех $\varphi\in E^k(\mathcal{M})$, причём $\operatorname{spt}\varphi\subset\mathcal{M}\setminus K$. Множество $\operatorname{spt} S$ всегда компактно и S называется k-потоком с компактным носителем. Прямая сумма

$$E_*(\mathcal{M}) = \bigoplus_k E_k(\mathcal{M})$$

является цепным комплексом с граничным оператором ∂, который определяется формулой $\partial S(\varphi)=S(d\varphi)$, где φ - произвольная k-форма.

Определение 2.1. Комассой k-формы $\varphi\in E^k(\mathcal{M})$ называется величина $M^*(\varphi)=\sup\{\|\varphi_x\|^* : x\in\mathcal{M}\}$.

Определение 2.2. Массой k-потока $S\in E_k(\mathcal{M})$

называется величина $M(S) = \sup\{ S(\varphi) : \varphi \in E^k(\mathcal{M})$ и $M^*(\varphi) \leq 1 \}$.

Известно, что если $M(S) < \infty$, то k-потоку S соответствует полная вариационная мера $\|S\|$

$$\|S\|(F) = \sup\{ S(\varphi) : \varphi \in E^k(\mathcal{M}) \text{ и } \|\varphi_x\|^* \leq F(x) \text{ для всех } x \in \mathcal{M} \}$$

для произвольной вещественной неотрицательной непрерывной функции F на $\mathcal{M}$. По теореме Радона-Никодима существует $\|S\|$-измеримое сечение $\vec{S}$ расслоения $\Lambda_k T\mathcal{M}$ с $\|\vec{S}_x\| = 1$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$ и такое, что

$$S(\varphi) = \int_{\mathcal{M}} \varphi(\vec{S}_x)\, d\|S\|(x) \qquad (2.I)$$

для произвольной k-формы $\varphi \in E^k(\mathcal{M})$. Здесь $T\mathcal{M}$ обозначает касательное расслоение многообразия $\mathcal{M}$.

§3. Гомологии целных комплексов потоков. Постановка задачи.

В работе Г.Федерера и У.Х.Флеминга [2] доказано, что определенные компактные семейства потоков можно использовать для определения гомологий на римановым многообразии $\mathcal{M}$. Положим

$$N_k(\mathcal{M}) = \{ S \in E_k(\mathcal{M}) : M(S) + M(\partial S) < \infty \}$$

Обозначим через $\mathcal{R}_k(\mathcal{M})$ множество всех спрямляемых k-потоков на $\mathcal{M}$ (см., например, [I], [2]). Положим

$$I_k(\mathcal{M}) = \{ S \in \mathcal{R}_k(\mathcal{M}) : \partial S \in \mathcal{R}_{k-1}(\mathcal{M}) \} \cap N_k(\mathcal{M}) .$$

Прямые суммы

$$N_*(\mathcal{M}) = \underset{k}{\oplus} N_k(\mathcal{M}) \quad \text{и} \quad I_*(\mathcal{M}) = \underset{k}{\oplus} I_k(\mathcal{M})$$

образуют, соответственно, цепные комплексы нормальных и целочисленных потоков с граничным оператором ∂. В работе [2] утверждается, что существуют естественные изоморфизмы

$$H_k(N_*(\mathcal{M})) \cong H_k(\mathcal{M}; R) \quad \text{и} \quad H_k(I_*(\mathcal{M})) \cong H_k(\mathcal{M}; Z).$$

Более того, если $\mathcal{M}$ компактно, то для каждого $\alpha \in H_k(N_*(\mathcal{M}))$ (или $H_k(I_*(\mathcal{M}))$) существует поток $S_0 \in \alpha$ минимальной массы в классе α, то есть $M(S_0) \leq M(S)$ для любого $S \in \alpha$. Положим $\|\alpha\| = M(S_0)$. Каждый класс $\alpha \in H_k(I_*(\mathcal{M}))$ однозначно определяет класс $\alpha_R \in H_k(N_*(\mathcal{M}))$ такой, что $\alpha \subset \alpha_R$. Ясно, что $\|\alpha\| \geq \|\alpha_R\|$. Имеем $\|m\alpha\| \geq \|m\alpha_R\| = m\|\alpha_R\|$ для каждого положительного целого числа m. Г.Федерер [12] доказал, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m}\|m\alpha\| = \|\alpha_R\|$.

Определение 3.1. Класс $\alpha \in H_k(I_*(\mathcal{M}))$ компактного риманова многообразия $\mathcal{M}$ называется стабильным, если существует натуральное число m такое, что $\|m\alpha\| = m\|\alpha_R\|$.

Рассмотрим, теперь, произвольное риманово многообразие $\mathcal{M}$ класса C^∞. Пусть $P \in N_k(\mathcal{M})$ (соответственно $P \in I_k(\mathcal{M})$) Рассмотрим множество всех k-потоков Q из $N_k(\mathcal{M})$ (соответственно, из $I_k(\mathcal{M})$) таких, что $\partial Q = \partial P$ и $P - Q$ гомологичен нулю. Это множество мы обозначим через $H(P; N_k(\mathcal{M}))$ (соответственно $H(P; I_k(\mathcal{M}))$). В частности, если $\partial P = 0$, то $H(P; N_k(\mathcal{M}))$ (соответственно, $H(P; I_k(\mathcal{M}))$) совпадает с классом гомологий из $H_k(N_*(\mathcal{M}))$ (соответственно, $H_k(I_*(\mathcal{M}))$) содержащим замкнутый k-поток P.

Пусть S - произвольный k-поток из $N_k(\mathcal{M})$ (соответственно, из $I_k(\mathcal{M})$). Задача, изучению которой посвящена настоящая работа, заключается в следующем: выяснить когда поток S имеет минимальную массу в множестве $H(S; N_k(\mathcal{M}))$ (соответственно, в $H(S; I_k(\mathcal{M}))$), то есть $M(S) \leq M(P)$ для любого $P \in H(S; N_k(\mathcal{M}))$ (соответственно, $P \in H(S; I_k(\mathcal{M}))$). Кстати, когда $\mathcal{M}$ компактно, мы будем рассматривать вопрос о стабильности гомологий многообразия $\mathcal{M}$.

§4. Условия глобальной минимальности потоков. Общий случай.

I. Рассмотрим произвольную замкнутую дифференциальную k-форму ω на $\mathcal{M}$. Форма ω в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ определяет k-ковектор ω_x касательного пространства $T_x\mathcal{M}$. Риманова метрика на $\mathcal{M}$ индуцирует евклидову метрику на $T_x\mathcal{M}$. Положим

$$\Sigma_x(\omega) = \{\eta \in \Lambda_k T_x\mathcal{M} : \|\eta\| = 1 \text{ и } (\omega_x, \eta) = \|\omega_x\|^*\}$$

и $\Sigma'_x(\omega) = \Sigma_x(\omega) \cap G_x^k$, где G_x^k обозначает множество всех единичных простых k-векторов из $\Lambda_k T_x\mathcal{M}$.

Т е о р е м а 4.I. Предположим, что ω есть замкнутая k-форма на $\mathcal{M}$ и $\|\omega_x\|^* = 1$ для каждого $x \in \mathcal{M}$. Пусть $S \in N_k(\mathcal{M})$ ($I_k(\mathcal{M})$) такой, что $\vec{S}_x \in \Sigma_x(\omega) (\Sigma'_x(\omega))$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Тогда k-поток S имеет минимальную массу в множестве $H(S; N_k(\mathcal{M}))(H(S; I_k(\mathcal{M})))$. Причём, если $P \in H(S; N_k(\mathcal{M}))(H(S; I_k(\mathcal{M})))$, то P имеет минимальную массу в множестве $H(S; N_k(\mathcal{M}))(H(S; I_k(\mathcal{M})))$ тогда и только тогда, когда $\vec{P}_x \in \Sigma_x(\omega)(\Sigma'_x(\omega))$ почти всюду в смысле меры $\|P\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Рассмотрим случай $S \in N_k(\mathcal{M})$. Допустим, что $P \in H(S; N_k(\mathcal{M}))$. Поскольку $P - S \sim 0$ и ω замкнута, $P(\omega) = S(\omega)$. По формуле (2.I) имеем

$$P(\omega) = \int_{\mathcal{M}} (\omega_x, \vec{P}_x)\, d\|P\|(x) \le \qquad (4.\mathrm{I})$$
$$\le \int_{\mathcal{M}} \|\omega_x\|^* d\|P\|(x) = \int_{\mathcal{M}} d\|P\|(x) = M(P)$$

Из предположения теоремы следует, что $(\omega_x, \vec{S}_x) = 1$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Подставив в (4.I) $P = S$, получим $S(\omega) = M(S)$. Окончательно имеем $M(S) = S(\omega) = P(\omega) \le M(P)$, то есть S имеет минимальную массу в $H(S; N_k(\mathcal{M}))$. Вообще равенство в (4.I) имеет место в том и только в том случае, когда $(\omega_x, \vec{P}_x) = 1$, то есть $\vec{P}_x \in \Sigma_x(\omega)$, почти всюду в смысле меры $\|P\|$. Таким образом для рассматриваемого случая теорема доказана.

б) Если $S \in I_k(\mathcal{M})$, то $\vec{S}_x$ являются простыми k-векторами для почти всех $x \in \mathcal{M}$ в смысле меры $\|S\|$. Это замечание вместе с доказательством случая а) полностью доказывают теорему 4.I.

2. Рассмотрим k-форму ω, имеющую нулевую ковариантную производную, то есть $\nabla\omega = 0$, где ∇ обозначает абсолютное дифференцирование заданной римановой структуры на $\mathcal{M}$. Предположим, что $\mathcal{M}$ связно. Обозначим через Ψ_x группу голономий многообразия $\mathcal{M}$ в точке x

Предложение 4.I (см. [I6]). Пусть $\mathcal{M}$ - связное риманово многообразие. Всякая k-форма ω, имеющая нулевую ковариантную производную, определяет в произвольной точке $x \in \mathcal{M}$

k-ковектор $\omega_x \in \Lambda^k T_x \mathcal{M}$, инвариантный относительно действия группы голономий Ψ_x. Обратно, всякий k-ковектор $\omega_x \in \Lambda^k T_x \mathcal{M}$, инвариантный относительно действия группы Ψ_x, порождает при параллельном переносе определенную на $\mathcal{M}$ k-форму ω такую, что $\nabla\omega = 0$.

Ясно, что если $\nabla\omega = 0$, то $d\omega = 0$. Пусть e – некоторая фиксированная точка на $\mathcal{M}$, а x – произвольная точка. Рассмотрим для касательных пространств $T_e\mathcal{M}$ и $T_x\mathcal{M}$ соответственно ортонормированные реперы $R(e)$ и $R(x)$, получаемые один из другого параллельным переносом вдоль пути $l_1(e,x)$, соединяющего точку e с точкой x. По отношению к этим реперам группы голономий Ψ_e и Ψ_x имеют одинаковые матричные представления. Заметим, что множества $\Sigma_x(\omega)$ и $\Sigma'_x(\omega)$ выдерживают действия группы Ψ_x. Действительно, пусть $\eta \in \Sigma_x(\omega)$ и $g \in \Psi_x$. По определению множества $\Sigma_x(\omega)$ мы имеем $\|\eta\| \leq 1$ и $(\omega_x, \eta) = \|\omega_x\|^*$. По предложению 4.1 ω_x инвариантен относительно действия группы $\Psi_x \subset SO(n)$ ($n = \dim \mathcal{M}$). Следовательно, $\|g(\eta)\| = 1$ и $(\omega_x, g(\eta)) = (g^{-1}(\omega_x), \eta) = (\omega_x, \eta) = \|\omega_x\|^* = \|g(\omega_x)\|^*$, то есть $g(\eta) \in \Sigma_x(\omega)$. Далее g переводит простые k-векторы в простые. Поэтому если $\eta \in \Sigma'_x(\omega)$, то $g(\eta) \in \Sigma'_x(\omega)$. Тем самым мы доказали, что $\Sigma_x(\omega)$ и $\Sigma'_x(\omega)$ выдерживают действие группы Ψ_x. Перенесем элементы множества $\Sigma_e(\omega)$ $(\Sigma'_e(\omega))$ вдоль пути $l_1(e,x)$ и получим множество $\widetilde{\Sigma}_x(\omega)$ $(\widetilde{\Sigma}'_x(\omega))$ в пространстве $\Lambda_k T_x \mathcal{M}$. В рассматриваемых реперах $R(e)$ и $R(x)$ элементы множеств $\Sigma_e(\omega)$ и $\widetilde{\Sigma}_x(\omega)$ ($\Sigma'_e(\omega)$ и $\widetilde{\Sigma}'_x(\omega)$) имеют одинаковые координатные записи. В частности, множество $\widetilde{\Sigma}'_x(\omega)$ $(\widetilde{\Sigma}'_x(\omega))$ выдерживает действие группы Ψ_x. С другой стороны в реперах $R(e)$ и $R(x)$ k-векторы ω_e и ω_x, а следовательно и элементы множеств $\Sigma_e(\omega)$ и $\Sigma_x(\omega)$, имеют одинаковые координатные записи. Таким образом множество $\tilde{\Sigma}_x(\omega)\left(\tilde{\Sigma}'_x(\omega)\right)$ совпадает со множеством $\Sigma_x(\omega)\left(\Sigma'_x(\omega)\right)$. Если мы перенесем $\Sigma_e(\omega)\left(\Sigma'_e(\omega)\right)$ в точку x вдоль другого пути $l_2(e,x)$, то это равносильно переносу $\tilde{\Sigma}_x(\omega)\left(\tilde{\Sigma}'_x(\omega)\right)$ вдоль петли $l_2(e,x)\,l_1(e,x)^{-1}$, где $l_1(e,x)^{-1}$ есть путь $l_1(e,x)$, взятый с обратным направлением. Поскольку $\tilde{\Sigma}_x(\omega)\left(\tilde{\Sigma}'_x(\omega)\right)$ инвариантно относительно группы Ψ_x, оно переводится в себя при параллельном переносе вдоль любой петли в точке x. Тем самым доказано, что множество $\Sigma_x(\omega)\left(\Sigma'_x(\omega)\right)$ для произвольной точки x получается от множества $\Sigma_e(\omega)$ $\left(\Sigma'_e(\omega)\right)$ параллельным переносом вдоль любого пути, соединяющего точку e с точкой x. Заметим, что $\|\omega_e\|^* = \|\omega_x\|^*$ для произвольной точки. Поэтому, если $\omega \neq 0$, то после подходящей нормировки ω удовлетворяет условию теоремы 4.I.

§5. Условия глобальной минимальности потоков. Компактный случай.

Рассмотрим теперь связное компактное односвязное риманово многообразие $\mathcal{M}$. По теореме де Рама-Ходжа в каждом классе когомологий многообразия $\mathcal{M}$ существует единственная гармоническая форма (см. I9). Среди гармонических форм на $\mathcal{M}$ мы выделим формы, имеющие нулевую ковариантную производную.

Профиксируем некоторую точку e на $\mathcal{M}$. Рассмотрим множество Λ^I_k всех Ψ_e-инвариантных k-векторов в пространстве $\Lambda_k T_e \mathcal{M}$. Тогда прямая сумма $\Lambda^I_* = \bigoplus_k \Lambda^I_k$ образует подалгебру в грассмановой алгебре $\Lambda_* T_e \mathcal{M}$. Действительно, для $\xi, \eta, \gamma \in \Lambda^I_*$, $g \in \Psi_e$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ мы имеем $g(\xi+\eta) = g\xi + g\eta = \xi + \eta$, $g(\xi \wedge \eta) =$

$g\xi \wedge g\eta = \xi\wedge\eta$ и $g(\lambda\gamma) = \lambda g(\gamma) = \lambda\gamma$. Из предложения 4.I вытекает, что между множеством всех форм с нулевой ковариантной производной и множеством Λ^I_* имеется взаимно однозначное соответствие; причём это соответствие согласовано с внешним умножением, то есть оно является изоморфизмом алгебр. Таким образом, формы с нулевой ковариантной производной на $\mathcal{M}$ образуют подалгебру алгебры когомологий многообразия $\mathcal{M}$ и эта подалгебра канонически изоморфна подалгебре Λ^I_*. В дальнейшем мы будем отождествлять эти подалгебры.

Известно (см. [16]), что для компактного односвязного многообразия $\mathcal{M}$ его группа голономий в произвольной точке x относительно некоторого ортонормированного репера является замкнутой подгруппой ортогональной группы $O(n)$. Таким образом, Ψ_x является компактной группой Ли. Ввиду компактности можно рассматривать на Ψ_x инвариантную меру такую, что мера всей группы Ψ_x конечна. После подходящей нормировки можно считать

$$\int_{\Psi_e} dg = 1 \tag{5.I}$$

2. Не уменьшая общности, можно предположить, что метрика многообразия $\mathcal{M}$ нормируется условием

$$\int_{\mathcal{M}} dx = 1 \tag{5.2}$$

Для каждого $\xi \in \Lambda^I_k$ построим k-поток S_ξ по формуле

$$S_\xi(\varphi) = \int_{\mathcal{M}} (\varphi, \xi)\, dx \,, \quad \varphi \in E^k(\mathcal{M}) \tag{5.3}$$

Ввиду Ψ_e-инвариантности ξ k-поток S_ξ замкнут. Заметим, что отображение $\xi \mapsto S_\xi$ задаёт мономорфизм группы Λ_k^I в группу $H_k(N_*(\mathcal{M}))$. Действительно, если $\xi, \eta \in \Lambda_k^I$, то по формуле (5.3) имеем $S_{\xi+\eta}(\varphi) = S_\xi(\varphi) + S_\eta(\varphi)$ для произвольной k-формы φ. Если S_ξ гомологичен нулю, то $S_\xi(\varphi) = 0$ для любой замкнутой k-формы φ на $\mathcal{M}$. В частности, $S_\xi(\xi) = (\xi, \xi) = 0$. Отсюда следует, что $\xi = 0$. Мы назовем S_ξ потоком, ассоциированным с формой ξ, а его класс гомологий – классом, ассоциированным с формой ξ.

Т е о р е м а 5.I. Для любого $\xi \in \Lambda_k^I$ поток S_ξ, ассоциированный с ξ, имеет минимальную массу в классе $\alpha \in H_k(N_*(\mathcal{M}))$, содержащем S_ξ; причём $M(S_\xi) = \|\xi\|$.

Для доказательства этой теоремы нам требуются следующие леммы.

Л е м м а 5.I. Пусть π обозначает отображение $\Lambda_* T_e \mathcal{M}$ в себя, определенное формулой

$$\pi\xi = \int_{\Psi_e} g\xi \, dg \quad , \quad \xi \in \Lambda_* T_e \mathcal{M} \tag{5.4}$$

Тогда π является линейным самосопряженным оператором.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что если $\xi, \eta \in \Lambda_* T_e \mathcal{M}$ и $\lambda \in R$, то по формуле (5.4) $\pi(\xi+\eta) = \pi\xi + \pi\eta$ и $\pi(\lambda\xi) = \lambda\pi\xi$. Тем самым π есть линейный оператор. Так как $g \in \Psi_e$ есть ортогональное преобразование, имеем $g^* = g^{-1}$. Тогда

$$(\pi\xi, \eta) = \Big(\int_{\Psi_e} g\xi \, dg, \eta\Big) = \int_{\Psi_e} (g\xi, \eta)\, dg$$

$$= \int_{\Psi_e} (\xi, g^{-1}\eta)\, dg = \Big(\xi, \int_{\Psi_e} g(\eta)\, dg\Big) = (\xi, \pi\eta).$$

Таким образом π есть линейный самосопряженный оператор.

Лемма 5.2. Для любого $\xi \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$ мы имеем $\|\pi\xi\| \le \|\xi\|$ и $\|\pi\xi\|^* \le \|\xi\|^*$.

Доказательство. Докажем, например, первое неравенство. Поскольку $g \in \Psi_e$ сохраняют метрику и переводят простые k-векторы в простые, мы имеем $\|g\xi\| = \|\xi\|$ для любого $g \in \Psi_e$ и любого $\xi \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$. Для произвольного $\eta \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$ такого, что $\|\eta\|^* \le 1$ имеет место неравенство $(g\xi, \eta) \le \|g\xi\| = \|\xi\|$. Проинтегрировав обе части последнего неравенства по всей группе Ψ_e получим

$$\int_{\Psi_e} (g\xi, \eta)\, dg \le \int_{\Psi_e} \|\xi\|\, dg = \|\xi\| \int_{\Psi_e} dg = \|\xi\| \tag{5.5}$$

С другой стороны

$$\int_{\Psi_e} (g\xi, \eta)\, dg = \Big(\int_{\Psi_e} g\xi\, dg, \eta\Big) = (\pi\xi, \eta) \tag{5.6}$$

Из (5.5) и (5.6) следует, что $(\pi\xi, \eta) \le \|\xi\|$ для любого $\eta \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$, $\|\eta\|^* \le 1$. По формуле (I.2) имеем $\|\pi\xi\| \le \|\xi\|$. Аналогично доказывается неравенство $\|\pi\xi\|^* \le \|\xi\|^*$.

Доказательство теоремы 5.I. Докажем сначала равенство $M(S_\xi) = \|\xi\|$. По формуле (5.3) имеем

$$S_\xi(\varphi) = \int_{\mathcal{H}} (\varphi, \xi)\, dx \le \|\xi\| \cdot \int_{\mathcal{H}} dx = \|\xi\| \tag{5.7}$$

для любой k-формы φ с комассой $M^*(\varphi) \le 1$. По формуле (I.2) имеем $\|\xi\| = \sup\{(\xi, \eta) : \eta \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$ и $\|\eta\|^* \le 1\}$. Ввиду компактности существует элемент $\eta_0 \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$ такой, что

$\|\eta_0\|^* = 1$ и $(\eta_0, \xi) = \|\xi\|$. Так как ξ — Ψ_e-инвариантный элемент по лемме 5.I имеем $(\pi\eta_0, \xi) = (\eta_0, \pi\xi) = (\eta_0, \xi) = \|\xi\|$. По лемме 5.2 $\|\pi\eta_0\|^* \leq \|\eta_0\|^* = 1$. Заметим, что $\pi\eta_0 \in \Lambda_k^I$. Действительно, для любого $g \in \Psi_e$ мы имеем

$$g(\pi\eta_0) = g\Big(\int\limits_{\Psi_e} h\eta_0\, dh\Big) = \int\limits_{\Psi_e} g(h\eta_0)\, dh = \pi\eta_0 .$$

Следовательно, мы можем рассматривать $\pi\eta_0$ как форму с нулевой ковариантной производной. $S_\xi(\pi\eta_0) = (\xi, \pi\eta_0) = \|\xi\|$. Принимая во внимание неравенство (5.7) и определение массы потока, получим $M(S_\xi) = \|\xi\|$.

Допустим, теперь, что S является произвольным замкнутым k-потоком, гомологичным потоку S_ξ. Поскольку $\pi\eta_0$ имеет нулевую ковариантную производную, она замкнута. Следовательно, $S_\xi(\pi\eta_0) = S(\pi\eta_0)$. Но $M^*(\pi\eta_0) = \|\pi\eta_0\|^* = 1$, тогда по определению массы потока $S(\pi\eta_0) \leq M(S)$. Окончательно мы получим $M(S_\xi) = S_\xi(\pi\eta_0) = S(\pi\eta_0) \leq M(S)$. Тем самым теорема 5.I доказана.

Замечание. Обозначим через α_R класс из $H_k(N_*(\mathcal{M}_0))$, содержащий S_ξ. Тогда по теореме 5.I $\|\alpha_R\| = M(S_\xi) = \|\xi\|$. Это означает, что мономорфизм Λ_k^I в $H_k(N_*(\mathcal{M}_0))$, отображающий ξ в S_ξ по формуле (5.3), является изометрией, если $H_k(N_*(\mathcal{M}_0))$ и Λ_k^I снабжены соответственно нормами $\|\alpha_R\|$ и $\|\xi\|$.

3. Для ненулевого Ψ_e-инвариантного элемента $\xi \in \Lambda_k^I$ положим

$$F_e^*(\xi) = \{\eta \in \Lambda_k^I : \|\eta\|^* = 1 \text{ и } (\eta, \xi) = \|\xi\|\}.$$

Из доказательства теоремы 5.I следует, что $F_e^*(\xi)$ не пусто. Тогда мы можем определить следующее множество

$$F_e(\xi) = \{ \eta \in \Lambda_k T_e \mathcal{M} : \|\eta\| = 1 \text{ и } (\eta, \gamma) = 1 \ \forall \gamma \in F_e^*(\xi) \}.$$

Заметим, что множество $F_e(\xi)$ инвариантно по отношению к действию группы Ψ_e. Действительно, пусть $g \in \Psi_e$, $\eta \in F_e(\xi)$ и $\gamma \in F_e^*(\xi)$. Тогда $\|g\eta\| = \|\eta\| = 1$, $(g\eta, \gamma) = (\eta, g^{-1}\gamma) = (\eta, \gamma) = 1$, следовательно $g\eta \in F_e(\xi)$. Рассмотрим произвольную точку x на $\mathcal{M}$ и выберем для касательных пространств $T_e \mathcal{M}$ и $T_x \mathcal{M}$ соответственно ортонормированные реперы $R(e)$ и $R(x)$, получаемые один из другого параллельным переносом вдоль пути $l_1(e, x)$, соединяющего точку e с точкой x. По отношению к этим реперам группы голономий Ψ_e и Ψ_x имеют одинаковые матричные представления. Параллельно перенесем элементы множества $F_e(\xi)$ вдоль пути $l_1(e, x)$ и получим множество $F_x(\xi) \subset \Lambda_k T_x \mathcal{M}$. В рассматриваемых реперах $R(e)$ и $R(x)$ элементы множеств $F_e(\xi)$ и $F_x(\xi)$ имеют одинаковые координатные записи. В частности, множество $F_x(\xi)$ выдерживает действие группы Ψ_x. Если мы перенесем $F_e(\xi)$ в точку x по другому пути $l_2(e, x)$, то это будет равносильно переносу $F_x(\xi)$ вдоль петли $l_2(e, x)\, l_1(e, x)^{-1}$, где $l_1(e, x)^{-1}$ есть путь $l_1(e, x)$, взятый с обратным направлением. Поскольку $F_x(\xi)$ инвариантно в отношении к действию группы Ψ_x, оно переводится в себя при переносе вдоль $l_2(e, x)\, l_1(e, x)^{-1}$. Таким образом множество $F_e(\xi)$ может переноситься по всему многообразию $\mathcal{M}$, причём получаемое при этом множество $F_x(\xi)$ для произвольной точки x не будет зависеть от пути перенесения.

Т е о р е м а 5.2. Пусть ξ, S_ξ и α такие же, что и в теореме 5.I. Пусть S - произвольный замкнутый поток в классе α. Тогда S является потоком минимальной массы в классе α в том и только в том случае, когда $\vec{S}_x \in F_x(\xi)$ почти для всех $x \in \mathcal{M}$ в смысле меры $\|S\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что S имеет минимальную массу в классе α. Для формы $\varphi \in F_e^*(\xi)$ из теоремы 5.I следует, что $M(S_\xi) = S_\xi(\varphi) = S(\varphi) = M(S)$. С другой стороны, по формуле (2.I) имеем

$$S(\varphi) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\varphi, \vec{S}_x)\, d\|S\|(x) \leq \int\limits_{\mathcal{M}} d\|S\|(x) = M(S). \tag{5.8}$$

Отсюда следует, что $(\varphi, \vec{S}_x) = 1$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Это означает, что $\vec{S}_x \in F_x(\xi)$ почти для всех $x \in \mathcal{M}$ в смысле меры $\|S\|$. Обратно, если $\vec{S}_x \in F_x(\xi)$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$, то для каждой $\varphi \in F_e^*(\xi)$ равенство $(\varphi, \vec{S}_x) = 1$ имеет место почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Тогда

$$S(\varphi) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\varphi, \vec{S}_x)\, d\|S\|(x) = \int\limits_{\mathcal{M}} d\|S\|(x) = M(S)$$

Следовательно, $M(S) = S(\varphi) = S_\xi(\varphi) = M(S_\xi)$. По теореме 5.1 S является потоком минимальной массы в классе α. Таким образом теорема 5.2 доказана.

Замечание. Из доказательства обратного утверждения теоремы 5.2 следует, что для того, чтобы S был потоком минимальной массы в классе α достаточно требовать, чтобы $(\varphi, \vec{S}_x) = 1$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$ для какой-нибудь формы φ

из $F_e^*(\xi)$ (а тогда подобное равенство, как показывает прямое утверждение теоремы, уже имеет место для любой формы из $F_e^*(\xi)$).

Если поток S спрямляем, то $\vec{S}_x$ является простым k-вектором почти для каждой точки $x \in \mathcal{M}$ в смысле меры $\|S\|$. Из теоремы 5.2 непосредственно вытекает

Следствие 5.I. Пусть $\alpha \in H_k(I_*(\mathcal{M}))$ – класс целочисленных k-потоков, удовлетворяющий условию $\|\alpha\| = \|\alpha_R\|$. Пусть S_ξ, ассоциированный с $\xi \in \Lambda_k^I$, принадлежит α_R. Тогда целочисленный поток $S \in \alpha$ имеет минимальную массу в классе α в том и только в том случае, когда $\vec{S}_x \in F_x(\xi) \cap G_x^k$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$, где G_x^k обозначает множество всех единичных простых k-векторов в пространстве $\Lambda_k T_x \mathcal{M}$.

Замечание. Видим, что условие $\|\alpha\| = \|\alpha_R\|$ равносильно существованию такого потока S, для которого $\vec{S}_x \in F_x(\xi) \cap G_x^k$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. В частности, если такой поток существует, то класс α стабилен.

Как мы уже доказали, множество $F_x(\xi)$ выдерживает действие группы Ψ_x. Более того $F_x(\xi)$ выпукло. Действительно, пусть $\eta, \gamma \in F_x(\xi)$. Тогда для любой пары действительных чисел α, β такой, что $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$ и $\alpha + \beta = 1$, мы имеем $(\alpha\eta + \beta\gamma, \zeta) = \alpha(\eta, \zeta) + \beta(\gamma, \zeta) = \alpha + \beta = 1$ для каждого элемента ζ из $F_e^*(\xi)$. Отсюда следует, что $\|\alpha\eta + \beta\gamma\| \ge 1$. С другой стороны, $\|\alpha\eta + \beta\gamma\| \le \|\alpha\eta\| + \|\beta\gamma\| = \alpha + \beta = 1$. Окончательно получаем $\|\alpha\eta + \beta\gamma\| = 1$, то есть $\alpha\eta + \beta\gamma \in F_x(\xi)$.

§6. Некоторые свойства изоморфизма двойственности Пуанкаре.

Пусть $\dim \mathcal{M} = n$. Рассмотрим отображение $D_k : \Lambda_k T_e \mathcal{M} \to$

$\to \Lambda_{n-k} T_e \mathcal{H}$,определенное формулой $(D_k \xi, \eta) = (\theta, \xi \wedge \eta)$ для любого $\eta \in \Lambda_{n-k} T_e \mathcal{H}$,где θ - единичный n-вектор из $\Lambda_n T_e \mathcal{H} = \mathbb{R}$.Очевидно, что D_k есть изоморфизм.

Л е м м а 6.I. I) D_k перестановочен с оператором π и переводит Ψ_e-инвариантные k-векторы в Ψ_e-инвариантные $(n-k)$ -векторы

2) D_k переводит простые k-векторы в простые

3) D_k есть изометрия между $\Lambda_k T_e \mathcal{H}$ и $\Lambda_{n-k} T_e \mathcal{H}$

4) D_k и D_{n-k} с точностью до знака есть взаимно обратные изоморфизмы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Пусть $\xi \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$.Тогда $(g D_k \xi, \eta) = (D_k \xi, g^* \eta) = (\theta, \xi \wedge g^* \eta) =$

$= (\theta, g^*(g\xi \wedge \eta)) = (g\theta, g\xi \wedge \eta) = (\theta, g\xi \wedge \eta) =$

$= (D_k g \xi, \eta)$.

Отсюда получим равенство

$$g D_k \xi = D_k g \xi \tag{6.I}$$

Проинтегрировав обе части равенства (6.I) по всей группе Ψ_e , получим

$$\pi D_k \xi = \int_{\Psi_e} g D_k \xi \, dg = \int_{\Psi_e} D_k g \xi \, dg$$

$$= D_k \Big(\int_{\Psi_e} g \xi \, dg \Big) = D_k \pi \xi$$

Таким образом π и D_k перестановочны друг с другом. Если $\xi \in \Lambda_k^I$,то $g\xi = \xi$ для каждого $g \in \Psi_e$.Тогда из равенства (6.I) вытекает, что $g D_k \xi = D_k g \xi = D_k \xi$,то есть $D_k \xi \in \Lambda^I_{n-k}$. Тем самым свойство I) доказано.

2) Пусть ξ - простой k-вектор. Выберем в $T_e \mathcal{H}$ ориентированный ортонормированный базис $v_1, v_2, \dots, v_n$ такой, что $\xi = \lambda v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$. Тогда непосредственным вычислением можно показать, что $D_k \xi = \lambda v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_n$, то есть $D_k \xi$ есть простой $(n-k)$-вектор.

3) Для того, чтобы доказать свойство 3) достаточно проверить, что D_k переводит некоторый ортонормированный базис пространства $\Lambda_k T_e \mathcal{H}$ в ортонормированный базис пространства $\Lambda_{n-k} T_e \mathcal{H}$. Выберем, например, стандартный ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в $T_e \mathcal{H}$ и ассоциированный с ним ортонормированные базисы $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n)$ и $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-k}}$ $(1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k} \le n)$ в $\Lambda_k T_e \mathcal{H}$ и $\Lambda_{n-k} T_e \mathcal{H}$ соответственно. Пользуясь явным видом действия изоморфизма D_k для простых k-векторов можно непосредственно доказать, что при D_k эти базисы (с точностью до ориентации) переходят друг в друга. Тем самым свойство 3) проверено.

4) Мы докажем, что $D_{n-k} \circ D_k = (-1)^{k(n-k)} E$, где E - тождественное преобразование пространства $\Lambda_k T_e \mathcal{H}$. Пусть ξ и η - произвольные k-векторы из $\Lambda_k T_e \mathcal{H}$. Тогда

$$(D_{n-k} \circ D_k \xi, \eta) = (\theta, D_k \xi \wedge \eta) = (-1)^{k(n-k)} (\theta, \eta \wedge D_k \xi)$$

$$= (-1)^{k(n-k)} (D_k \eta, D_k \xi) = (-1)^{k(n-k)} (D_k \xi, D_k \eta)$$

. Так как D_k есть изометрия, мы имеем $(D_k \xi, D_k \eta) = (\xi, \eta)$. Отсюда получим равенство $(D_{n-k} \circ D_k \xi, \eta) = (-1)^{k(n-k)} (\xi, \eta)$. Ввиду произвольности η мы имеем $D_{n-k} \circ D_k \xi = (-1)^{k(n-k)} \xi$ для любого ξ. Следовательно, $D_{n-k} \circ D_k = (-1)^{k(n-k)} E$. Таким образом лемма 6.I полностью доказана.

Т е о р е м а 6.I. Пусть $\xi \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$ и $\eta \in \Lambda_k^I$. Тогда имеют место следующие равенства

$$\|D_k \xi\|^* = \|\xi\|^* \quad , \|D_k \xi\| = \|\xi\| \; ,$$

$$F_e^*(D_k \eta) = D_k\left(F_e^*(\eta)\right) \; , \; F_e(D_k \eta) = D_k\left(F_e(\eta)\right) .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) По определению I.2 мы имеем

$$\|\xi\|^* = \sup\{(\xi, \gamma) : \gamma \text{ - простой } k\text{-вектор и } |\gamma| = 1\},$$

причём $\|\xi\|^* = (\xi, \gamma_0)$ для некоторого единичного простого k-вектора γ_0. По лемме 6.I $D_k \gamma_0$ есть простой $(n-k)$-вектор, $|D_k \gamma_0| = |\gamma_0| = 1$ и $(D_k \xi, D_k \gamma_0) = (\xi, \gamma_0) = \|\xi\|^*$. Следовательно,

$$\|D_k \xi\|^* \geqslant \|\xi\|^* \tag{6.2}$$

Если в (6.2) в качестве D_k рассмотрим D_{n-k}, а в качестве ξ – $D_k \xi$, то получим $\|D_{n-k}(D_k \xi)\|^* \geqslant \|D_k \xi\|^*$; следовательно

$$\|\xi\|^* = \|D_{n-k} \circ D_k \xi\|^* \geqslant \|D_k \xi\|^* \tag{6.3}$$

Сравнив неравенства (6.2) и (6.3), получим $\|D_k \xi\|^* = \|\xi\|^*$.

б) Напомним, что величину $\|\xi\|$ можно определить следующей формулой

$$\|\xi\| = \sup\{(\xi, \gamma) : \gamma \in \Lambda_k T_e \mathcal{H} \text{ и } \|\gamma\|^* \leq 1\},$$

причём супрем достигается при некотором γ_0 таком, что $\|\gamma_0\|^* = 1$. Воспользовавшись леммой 6.I мы получим, что $\|D_k \gamma_0\|^* = 1$ и $(D_k \xi, D_k \gamma_0) = (\xi, \gamma_0) = \|\xi\|$. Следовательно, $\|D_k \xi\| \geqslant \|\xi\|$.

Аналогично имеем $\|\xi\| = \|D_{n-k}(D_k\xi)\| \geq \|D_k\xi\|$. Таким образом получим $\|D_k\xi\| = \|\xi\|$.

в) Допустим, что $\gamma \in F_e^*(\eta)$. Тогда $\|\gamma\|^* = 1$ и $(\gamma,\eta) = \|\eta\|$. Применив лемму 6.I мы имеем $\|D_k\gamma\|^* = 1$ и $(D_k\gamma, D_k\eta) = (\gamma,\eta) = \|\eta\| = \|D_k\eta\|$. Поскольку $\gamma \in \Lambda_k^I$ из леммы 6.I следует $D_k\gamma \in \Lambda_{n-k}^I$. Таким образом $D_k\gamma \in F_e^*(D_k\eta)$, то есть мы доказали, что $D_k(F_e^*(\eta)) \subset F_e^*(D_k\eta)$. Аналогично доказывается, что $D_k(F_e^*(\eta)) \supset F_e^*(D_k\eta)$, и тем самым, $D_k(F_e^*(\eta)) = F_e^*(D_k\eta)$.

г) Наконец, докажем, что $F_e(D_k\eta) = D_k(F_e(\eta))$. Допустим, что $\xi \in F_e(\eta)$. Тогда $\|\xi\| = 1$ и $(\xi,\gamma) = \|\xi\|$ для каждого элемента γ из $F_e^*(\eta)$. Из леммы 6.I вытекает, что $\|D_k\xi\| = 1$ и $(D_k\xi, D_k\gamma) = (\xi,\gamma) = \|\xi\| = \|D_k\xi\|$, где по доказанному в пункте в) $D_k\gamma$ пробегает всё множество $F_e^*(D_k\eta)$. Это означает, что $D_k\xi \in F_e(D_k\eta)$. Тем самым мы доказали включение $D_k(F_e(\eta)) \subset F_e(D_k\eta)$. Аналогично доказывается обратное включение. Таким образом теорема 6.I полностью доказана.

§7. Минимальные потоки на кэлеровых многообразиях

I. Рассмотрим связное кэлерово многообразие $\mathcal{K}$ с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω. Мы покажем, что известный результат Г.Федерера [II], относящийся к минимальным потокам на кэлеровом многообразии, можно получить из теоремы 4.I как весьма частный случай. Известно [I6], что 2-форма Ω имеет нулевую ковариантную производную; следовательно, любая внешняя степень Ω^k формы Ω ковариантно постоянна. Поэтому мы можем применить теорему 4.I. Вычислим множества $\Sigma_x(\Omega^k)$, $1 \leq k \leq \frac{1}{2}\dim\mathcal{K}$. Рассмотрим касательное пространство $T_x\mathcal{K}$ и обозначим структурное ортогональное преобразование кэлеровы структуры в точке x через $J_x: T_x\mathcal{M} \to T_x\mathcal{M}$. Фундаментальная 2-форма Ω в точке x выражается через J_x формулой $\Omega_x(v_1, v_2) = (Jv_1, v_2)$, где v_1, v_2 - произвольные векторы из $T_x\mathcal{M}$. Преобразование J_x индуцирует ортогональное преобразование пространства $\Lambda_* T_x\mathcal{M}$, которое мы снова обозначим через J_x. Множество всех $2k$-векторов $\xi \in \Lambda_{2k} T_x\mathcal{M}$ таких, что $J_x\xi = \xi$ образует линейное подпространство (k,k)-векторов и обозначается через $\Lambda_{k,k} T_x\mathcal{M}$. Заметим, что простой $2k$-вектор имеет тип (k,k) тогда и только тогда, когда он соответствует J_x-инвариантному подпространству размерности $2k$. Каждое такое подпространство обладает канонической ориентацией, индуцированной преобразованием J_x. Простой $2k$-вектор $\xi \in \Lambda_{2k} T_x\mathcal{M}$ называется положительным, если

$$\xi = v_1 \wedge J_x v_1 \wedge v_2 \wedge J_x v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge J_x v_k$$

для векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ из $T_x\mathcal{M}$. В общем случае, $2k$-вектор $\xi \in \Lambda_{k,k} T_x\mathcal{M}$ называется положительным, если он может представляться в виде конечной суммы положительных простых $2k$-векторов. Множество всех положительных $2k$-векторов представляет собой замкнутый конус в пространстве $\Lambda_{k,k} T_x\mathcal{M}$.

П р е д л о ж е н и е 7.1 (см. [14]). Для любого $\xi \in \Lambda_{2k} T_x\mathcal{M}$

$$\left(\frac{1}{k!}\right) \Omega^k(\xi) \leq \|\xi\| \qquad (7.1)$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда ξ является положительным $2k$-вектором.

Положим $\omega_k = \frac{1}{k!}\Omega^k$. Из предложения 7.I следует, что $\|\omega_k\|^* = 1$, $1 \le k \le \frac{1}{2}\dim \mathcal{K}$. Множества $\Sigma_x(\omega_k)$ и $\Sigma'_x(\omega_k)$ теперь легко вычисляются при помощи предложения 7.I. Действительно, из неравенства (7.I) вытекает, что $\omega_k(\xi) \le \|\omega_k\|^* = 1$ для любого единичного $2k$-вектора ξ из $\Lambda_{2k} T_x \mathcal{K}$; причём равенство достигается в том и только в том случае, когда ξ является единичным положительным $2k$-вектором. Таким образом справедливо следующее

С л е д с т в и е 7.I. Если обозначим множество всех положительных $2k$-векторов в пространстве $\Lambda_{2k} T_x \mathcal{K}$ через $\Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{K}$ ($\subset \Lambda_{k,k} T_x \mathcal{K}$), то $\Sigma_x(\omega_k) = \Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{K}$ и $\Sigma'_x(\omega_k) = \Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{K} \cap G^{2k}_x$.

Из теорема 4.I и следствия 7.I непосредственно вытекает

С л е д с т в и е 7.2. Пусть $S \in N_{2k}(\mathcal{K})$ $(I_{2k}(\mathcal{K}))$ такой, что $\vec{S}_x \in \Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{K}$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Тогда поток S имеет минимальную массу в множестве $H(S; N_{2k}(\mathcal{K}))$ $(H(S; I_{2k}(\mathcal{K})))$; причём, если $P \in H(S; N_{2k}(\mathcal{K}))$ $(H(S; I_{2k}(\mathcal{K})))$ то P имеет минимальную массу в указанном множестве тогда и только тогда, когда $\vec{P}_x \in \Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{K}$ почти всюду в смысле меры $\|P\|$.

Замечание. В случае, когда $S \in I_{2k}(\mathcal{K})$ следствие 7.2 даёт известный результат Г.Федерера [II].

Допустим, теперь, что кэлерово многообразие $\mathcal{K}$ компактно и односвязно. Тогда по теореме 5.I $2k$-поток S_{ω_k}, ассоциированный с формой ω_k, имеет минимальную массу в классе $\alpha \in H_{2k}(N_*(\mathcal{K}))$, содержащем S_{ω_k}. Выберем ортонормированный базис $v_1, v_2, \ldots, v_{2p-1}, v_{2p}$ пространства $T_x \mathcal{K}$ $(\dim \mathcal{K} = 2p)$

и неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ такие, что

$$\Omega_x = \lambda_1 v_1 \wedge v_2 + \lambda_2 v_3 \wedge v_4 + \dots + \lambda_p v_{2p-1} \wedge v_{2p} \tag{7.2}$$

Так как $\|\Omega_x\|^* = \|\omega_1\|^* = 1$, мы имеем $\lambda_i \leq 1$ для $i = 1, 2, \dots, p$. Пусть $J_x v_i = \sum_{j=1}^{2p} \alpha_{ij} v_j$, где $|\alpha_{ij}| \leq 1$; причём $|\alpha_{ik}| = 1$ тогда и только тогда, когда $J_x v_i = \pm v_k$. Положим $\xi = v_{2i-1} \wedge J_x v_{2i-1}$. По формуле (7.2) имеем

$$(\Omega_x, \xi) = \lambda_i \alpha_{2i-1, 2i} \tag{7.3}$$

С другой стороны

$$(\Omega_x, \xi) = (J_x v_{2i-1}, J_x v_{2i-1}) = (v_{2i-1}, v_{2i-1}) = 1. \tag{7.4}$$

Из (7.3) и (7.4) вытекает, что $\lambda_i \alpha_{2i-1, 2i} = 1$, следовательно, $\lambda_i = 1$ и $\alpha_{2i-1, 2i} = 1$. Последнее равенство означает, что $J_x v_{2i-1} = v_{2i}$. Поскольку i берется произвольно, мы имеем $J_x v_{2i-1} = v_{2i}$ для $i = 1, 2, \dots, p$. Таким образом Ω_x является положительным вектором. Следовательно, $\omega_k \in \Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{M}$ для $k = 1, 2, \dots, p$. По предложению 7.I $(\omega_k, \omega_k) = \|\omega_k\|$, поэтому $\omega_k \in F^*_e(\omega_k)$. Видим, что $\vec{S}_{\omega_k} \in \Sigma_x(\omega_k) = \Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{M}$ для всех $x \in \mathcal{M}$. Из теоремы 4.I (см. также замечание к теореме 5.2) вытекает следующее

С л е д с т в и е 7.3. Пусть S – произвольный замкнутый поток из класса $\alpha \in H_{2k}(N_*(\mathcal{M}))$, ассоциированного с ω_k. Тогда S имеет минимальную массу в классе α в том и только в том случае, когда $\vec{S}_x \in \Lambda^+_{k,k} T_x \mathcal{M}$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$.

Глава II. УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ ПОТОКОВ И ПОВЕРХНОСТЕЙ В СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§8. Симметрические пространства.

В этом параграфе мы собрали нужные нам для дальнейшего некоторые факты о симметрических пространства.

Определение 8.I. Связное риманово многообразие $\mathcal{M}$ называется римановым глобально симметрическим пространством, если для каждой точки $p \in \mathcal{M}$ существует инволютивная изометрия $S_p : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, отличная от тождественной, для которой точка является изолированной неподвижной точкой.

Известно, что такая изометрия является с необходимостью геодезической изометрией в точке p. Всякое связное риманово глобально симметрическое пространство является полным многообразием. Любое глобально симметрическое пространство является и локально симметрическим. Обратно, если $\mathcal{M}$ полное односвязное риманово локально симметрическое пространство, то оно является римановым глобально симметрическим пространством.

В дальнейшем мы будем называть глобально симметрическое пространство просто симметрическим пространством.

Римановы симметрические пространства допускают представление в виде $\mathcal{M} = G/H$, где G - связная группа Ли с инволютивным автоморфизмом σ, множество неподвижных точек которого совпадает со связной компонентой единицы подгруппы H.

Обозначим через $I(\mathcal{M})$ множество всех изометрий симметрического пространства $\mathcal{M}$; тогда $I(\mathcal{M})$ превращается в аналитическую группу Ли преобразований многообразия $\mathfrak{M}$.

Предложение 8.I (см. [I8]). Пусть p_0 - некоторая точка в римановом симметрическом пространстве $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{G} = I(\mathfrak{M})_0$ - связная компонента единицы группы $I(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{H}$ - подгруппа группы $\mathfrak{G}$, оставляющая точку p_0 неподвижной, то $\mathfrak{H}$ есть компактная подгруппа и отображение $g\mathfrak{H} \mapsto g(p_0)$ является диффеоморфизмом $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ на многообразие $\mathfrak{M}$. Отображение σ : $g \mapsto s_{p_0} g s_{p_0}$ является инволютивным автоморфизмом группы $\mathfrak{G}$, причём $\mathfrak{H}$ содержится в замкнутой подгруппе $\mathfrak{H}_\sigma$ всех неподвижных точек автоморфизма и содержит компоненту единицы группы $\mathfrak{H}_\sigma$. Группа $\mathfrak{H}$ не содержит нетривиальных нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через G и H алгебры Ли групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда $H = \{X \in G : (d\sigma)_e X = X\}$. Если $B = \{X \in G : (d\sigma)_e X = -X\}$, то G есть прямая сумма подпространств H и B.

Определение 8.2. Пусть $\mathfrak{G}$ - связная группа Ли и $\mathfrak{H}$ - замкнутая подгруппа. Пара $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ называется симметрической парой, если существует такой инволютивный автоморфизм σ группы $\mathfrak{G}$, что $(\mathfrak{H}_\sigma)_0 \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_\sigma$, где $\mathfrak{H}_\sigma$ - замкнутая подгруппа всех неподвижных точек автоморфизма σ, а $(\mathfrak{H}_\sigma)_0$ - её компонента единицы. Если, кроме того, группа $Ad_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})$ компактна, то пара $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ называется римановой симметрической парой.

Предложение 8.2 (см. [I8]). Пусть $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ - риманова симметрическая пара. Обозначим через p естественное отображение группы $\mathfrak{G}$ на многообразие $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и положим $p_0 = p(e)$. Пусть $\mathfrak{G}$ некоторый аналитический инволютивный автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, такой, что $(\mathfrak{H}_\sigma)_0 \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_\sigma$. Тогда для каждой $\mathfrak{G}$-инвариантной римановы структуры на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ многообразие

$\mathcal{G}/\mathcal{H}$ является римановым симметрическим пространством.

Симметрическое пространство $\mathcal{M}$ порождает пару (G,θ) , где:

1) G - алгебра Ли (над полем $\mathbb{R}$)

2) θ - инволютивный автоморфизм алгебры G $(\theta=(d\sigma)_e)$

3) H - множество всех неподвижных точек автоморфизма θ, являющееся компактно вложенной подалгеброй алгебры G.

4) $H\cap Z=\{0\}$,где Z - центр алгебры G .

Определение 8.3. Пара (G,θ) ,обладающая свойствами 1),2), 3) называется ортогональной симметрической алгеброй Ли. Если выполнено и свойство 4), то она называется эффективной.

Оказывается, что произвольная ортогональная симметрическая пара допускает разложение на пары следующих трёх типов: компактный, некомпактный и евклидов.

Рассмотрим группу голономий Ψ_x многообразия $\mathcal{M}$ в точке x .Если $\mathcal{M}$ является компактным римановым симметрическим пространством, то любое преобразование касательного пространства $T_x\mathcal{M}$ из группы Ψ_x индуцируется некоторым преобразованием из группы изометрий $I(\mathcal{M})$,оставляющим неподвижной точку x . Вообще, группы Ψ_x и $\mathcal{H}$ (где $\mathcal{M}=\mathcal{G}/\mathcal{H}$)тесно связаны друг с другом, а в случае, когда $\mathcal{G}$ - полупроста , их связные компоненты единицы просто совпадают [20]

Для римановых симметрических пространств $\mathcal{M}=\mathcal{G}/\mathcal{H}$ разумно рассматривать вместо группы Ψ_x группу $\mathcal{H}$,а вместо ковариантно постоянных дифференциальных форм - $\mathcal{G}$-инвариантные формы (Напомним,что $\mathcal{G}=I(\mathcal{M})_0$ - связная группа изометрий многообразия $\mathcal{M}$).

Как увидим в дальнейшем использование в "симметрическом случае" группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{J}$-инвариантных форм позволяет нам снять условие односвязности, наложенное на $\mathcal{M}$ в общем случае. Более того, если $\mathcal{M}$ компактно, то в каждом классе когомологий существует (единственная) $\mathcal{J}$-инвариантная форма, и следовательно, необходимое и достаточное условие, подобное утверждению теоремы 5.2, имеет место в любом классе гомологий многообразия $\mathcal{M}$.

§9. Структура когомологий компактных симметрических пространств

Цель этого параграфа - построить изоморфизм между алгеброй вещественных когомологий компактного симметрического пространства и алгеброй инвариантных дифференциальных форм на нём.

I. Рассмотрим, сначала, любое компактное риманово многообразие $\mathcal{M}$. На линейном пространстве $E^k(\mathcal{M})$ всех k-форм на $\mathcal{M}$ можно определить глобальное скалярное произведение с числовыми значениями, полагая

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_{\mathcal{M}} (\varphi, \psi)_x \, dx \tag{9.I}$$

для любой пары k-форм φ и ψ из $E^k(\mathcal{M})$. Заметим, что соотношение $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ влечёт за собой обращение в нуль на многообразии $\mathcal{M}$ непрерывной функции с неотрицательными значениями $(\varphi, \varphi)_x$ и, следовательно, приводит к тождественному обращению в нуль на многообразии $\mathcal{M}$ k-формы φ. Мы будем говорить, что две k-формы φ и ψ ортогональны, если $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$

Определим на $E^k(\mathcal{M})$ линейный оператор δ, сопряженный к оператору d по отношению к $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то есть

$$\langle \delta\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, d\psi \rangle \tag{9.2}$$

где φ и ψ - формы соответственно степени $k+1$ и k

Мы введём, наконец, оператор Лапласа Δ, который всякой k-форме φ сопоставляет k-форму $\Delta\varphi$ и определяется формулой

$$\Delta = d\delta + \delta d \tag{9.3}$$

форма φ называется гармонической, если $\Delta\varphi = 0$. Если φ и ψ - две k-формы, то

$$\langle \Delta\varphi, \psi \rangle = \langle d\delta\varphi, \psi \rangle + \langle \delta d\varphi, \psi \rangle = \langle \delta\varphi, \delta\psi \rangle + \langle d\varphi, d\psi \rangle .$$

Более того, если $\psi = \varphi$, то $\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle = \langle \delta\varphi, \delta\varphi \rangle + \langle d\varphi, d\varphi \rangle$. Отсюда следует, что $d\varphi = \delta\varphi = 0$. Обратно, если $d\varphi = \delta\varphi = 0$, то по формуле (9.3) $\Delta\varphi = 0$, то есть φ является гармонической формой.

Рассмотрим в $E^*(\mathcal{M})$ линейные подпространства $E_d = \{d\varphi\}$ и $E_\delta = \{\delta\psi\}$, где φ и ψ пробегают всё пространство $E^*(\mathcal{M})$. Далее обозначим подпространство всех гармонических k-форм на $\mathcal{M}$ через H^k и положим $H^* = \bigoplus_k H^k$. Очевидно, что E_d, E_δ и H^* попарно ортогональны.

Теорема Де Рама-Ходжа (см. [19]). Пространство дифференциальных форм $E^*(\mathcal{M})$ на компактном римановом многообразии $\mathcal{M}$ допускает разложение в прямую сумму ортогональных подпространств

$$E^*(\mathcal{M}) = H^* \oplus E_d \oplus E_\delta \tag{9.4}$$

Причём каждая замкнутая форма гомологична единственной гармониформе.

2. Предположим, что $\mathcal{M}$ - компактное риманово симметрическое пространство. Действие элемента g из группы $\mathcal{G} = I(\mathcal{M})_0$ на $\mathcal{M}$ индуцирует его действие на пространстве $E^*(\mathcal{M})$, которое снова обозначим через g. Пусть φ - замкнутая k-форма на $\mathcal{M}$. Тогда для любого $g \in \mathcal{G}$, $g(\varphi)$ гомологично φ. Действительно, группа Ли $\mathcal{G}$ связна, так что от единичного элемента e до элемента g в $\mathcal{G}$ всегда возможен гладкий переход посредством $g(t)$ ($0 \le t \le 1$; $g(0) = e$, $g(1) = g$). Воспользовавшись свойством гомотопической инвариантности когомологий, мы получим

$$g\varphi \sim \varphi , \quad g \in \mathcal{G} \tag{9.5}$$

форма φ называется $\mathcal{G}$-инвариантной, если $g\varphi = \varphi$ для любого элемента g из $\mathcal{G}$. Множество Λ^k_{SI} всех $\mathcal{G}$-инвариантных k-форм на $\mathcal{M}$ образует линейное подпространство в $E^k(\mathcal{M})$. Положим $\Lambda^*_{SI} = \bigoplus_k \Lambda^k_{SI}$. Заметим, что Λ^*_{SI} является подалгеброй в алгебре $E^*(\mathcal{M})$ с внешним умножением.

Л е м м а 9.1. Для компактного симметрического пространства $\mathcal{M}$ имеет место соотношение $H^* \subset \Lambda^*_{SI}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $\varphi \in H^*$. Тогда $d\varphi = \delta\varphi = 0$. Рассмотрим форму $g\varphi$. Мы имеем $d(g\varphi) = g(d\varphi) = 0$. Докажем, что $\delta(g\varphi)$ тоже равна нулю. Действительно, для любой $(k-1)$-формы ψ имеем

$$\langle \delta(g\varphi), \psi \rangle = \langle g\varphi, d\psi \rangle = \langle \varphi, g^* d\psi \rangle =$$
$$= \langle \varphi, d g^* \psi \rangle = \langle \delta\varphi, g^* \psi \rangle = 0 .$$

Следовательно, $\delta(g\varphi) = 0$. Таким образом $g\varphi$ является гармонической формой. По соотношению (9.5) мы имеем $g\varphi \sim \varphi$. С другой стороны, по теореме де Рама-Ходжа, каждая замкнутая форма гомологична единственной гармонической форме. Отсюда следует: $g\varphi \equiv \varphi$. Так как g произвольное преобразование из группы $\mathcal{G}$, то φ $\mathcal{G}$-инвариантна. Тем самым доказано, что $H^k \subset \Lambda^k_{SI}$.

3. Гладкое подмногообразие $\mathcal{N}$ гладкого полного риманова многообразия $\mathcal{M}$ называется вполне геодезическим, если все геодезические подмногообразия $\mathcal{N}$ являются в тоже время и геодезическими объемлющего многообразия $\mathcal{M}$. Любое компактное симметрическое пространство может быть вложено в группу преобразований в виде "картановской модели" следующим образом.

Предложение 9.I (Э.Картан, [2I]). Пусть σ - инволютивный автоморфизм компактной связной группы Ли $\mathcal{G}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество всех его неподвижных точек и предположим, что на $\mathcal{G}$ задана инвариантная метрика. Тогда отображение $g\mathcal{H} \mapsto g\sigma(g^{-1})$ является диффеоморфизмом многообразия $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ на замкнутое вполне геодезическое подмногообразие $\mathcal{M}$ в группе $\mathcal{G}$, которое является симметрическим пространством в индуцированной римановой структуре.

Если группа $\mathcal{G}$ односвязна, то и многообразие $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ также односвязно. Заметим, что действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{M}$ можно представить следующим образом: $g(a) = ga\sigma(g^{-1})$, где $a \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{G}$. Если $g \in \mathcal{M}$, то $g(a) = gag$; если $g \in \mathcal{H}$, то $g(a) = gag^{-1}$, то есть подгруппа $\mathcal{H}$ действует посредством вращений.

Определение 9.I. Пусть (G, θ) - эффективная ортогональная симметрическая алгебра Ли. Если алгебра G компактна и полупроста, то пара (G, θ) называется алгеброй компактного типа.

Рассмотрим риманову симметрическую пару $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, для которой $\mathcal{G}$ является компактной группой Ли. Обозначим через σ соответствующий инволютивный автоморфизм группы $\mathcal{G}$. Пара $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ порождает эффективную ортогональную симметрическую алгебру (G,θ), которая разлагается в прямую сумму двух пар (G_1, θ_1) и (G_2, θ_2), где (G_1, θ_1) имеет евклидов тип, а (G_2, θ_2) - компактный тип.

Пусть односвязное симметрическое пространство $\tilde{\mathcal{M}}$, соответствующее паре (G, θ), определяется симметрической парой $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{H}})$. Тогда $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ и $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{G}_2$, где $\mathcal{G}_1$ есть евклидово пространство, а $\mathcal{G}_2$ - компактная полупростая группа Ли; причём $\tilde{\mathcal{M}}$ разлагается в прямое произведение $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{G}_1$, $\mathcal{M}_2 \cong \mathcal{G}_2/\tilde{\mathcal{H}}$. Вложим $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ в группу $\tilde{\mathcal{G}}$ так, чтобы $\mathcal{M}_1$ совпадало с $\mathcal{G}_1$, а $\mathcal{M}_2$ было "картановской моделью" в $\mathcal{G}_2$. Обозначим это вложение через $\tilde{i}: \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{G}}$. Пусть компактное симметрическое пространство $\mathcal{M}$, локально изометричное $\tilde{\mathcal{M}}$, определяется симметрической парой $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Обозначим через $i: \mathcal{M} \to \mathcal{G}$ картановское вложение $\mathcal{M}$ в $\mathcal{G}$. Тогда существует дискретная центральная подгруппа U в группе $\tilde{\mathcal{G}}$ такая, что следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{\mathcal{G}} \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{i} & \mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}/U \end{array}$$

коммутативна, где $p': \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ есть естественная проекция.

Л е м м а 9.2. Для компактного симметрического пространства $\mathcal{M}$ имеет место соотношение $H^* \supset \Lambda^*_{SI}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала односвязное симметрическое пространство $\tilde{\mathcal{M}}$, локально изометричное $\mathcal{M}$.

Группа голономий $\Psi_{\tilde e}$ для некоторой точки $\tilde e \in \tilde{\mathcal{M}}$ совпадает с связной компонентой единицы группы $\tilde{\mathcal{G}}$ (см. [20]). Следовательно, любая $\tilde{\mathcal{G}}$-инвариантная k-форма $\tilde\omega$ задаёт в каждой точке $\tilde x \in \tilde{\mathcal{M}}$ k-ковектор, инвариантный по отношению к действию группы голономий $\Psi_{\tilde x}$ многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$,то есть k-форма $\tilde\omega$ имеет нулевую ковариантную производную. В частности, k-форма $\tilde\omega$ замкнута.

Рассмотрим теперь многообразие $\mathcal{M}$ и проекцию $p: \tilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$; p есть локальная изометрия. Зафиксируем точку e на многообразии $\mathcal{M}$ и точку $\tilde e$ на $\tilde{\mathcal{M}}$; причём $p(\tilde e) = e$.Дифференциальное отображение $dp: T_{\tilde e}\tilde{\mathcal{M}} \to T_e\mathcal{M}$ является изометрией. Любая форма на связном симметрическом пространстве,инвариантная относительно действию связной группы преобразований, полностью определяется своими значениями в некоторой фиксированной точке. Пусть ω - произвольная $\mathcal{G}$-инвариантная k-форма. Тогда ω определяется k-ковектором ω_e в точке e ,которая,очевидно, выдерживает действие группы $\mathcal{G}$.Отображение p индуцирует отображение $p^*: E^*(\mathcal{M}) \to E^*(\tilde{\mathcal{M}})$,определенное формулой

$$(p^*\varphi)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \varphi(dp\xi_1, dp\xi_2, \dots, dp\xi_k) \quad (9.6)$$

где $\xi_i \in T_{\tilde x}\tilde{\mathcal{M}}$ ($1 \le i \le k$), и левая часть берётся в точке $\tilde x \in \tilde{\mathcal{M}}$, а правая часть - в точке $p(\tilde x) \in \mathcal{M}$.В частности, при $\tilde x = \tilde e$, $p(\tilde x) = e$ мы получим из формулы (9.6) отображение $p_e^*: \Lambda_*^{SI} T_e\mathcal{M} \to \Lambda_*^{SI} T_{\tilde e}\tilde{\mathcal{M}}$,где $\Lambda_*^{SI} T_e\mathcal{M}$ $(\Lambda_*^{SI} T_{\tilde e}\tilde{\mathcal{M}})$ обозначает подпространство всех $\mathcal{G}$-инвариантных ($\tilde{\mathcal{G}}$-инвариантных) элементов в $\Lambda_* T_e\mathcal{M}$ $(\Lambda_* T_{\tilde e}\tilde{\mathcal{M}})$. Для заданной $\mathcal{G}$-инвариантной k-формы ω имеем $\omega_e \in \Lambda_k^{SI} T_e \mathfrak{M}$. Поэтому $p_e^*(\omega_e) \in \Lambda_k^{SI} T_{\tilde e} \tilde{\mathfrak{M}}$. Следовательно, $p^*(\omega)$ является $\tilde{\mathfrak{G}}$-инвариантной k-формой, в частности $dp^*(\omega) = 0$. Отображения p^* и p_e^*, очевидно, есть изоморфизмы, причём p^* переставляется с оператором d. Отсюда следует: $p^*(d\omega) = dp^*(\omega) = 0$. Таким образом любая $\mathfrak{G}$-инвариантная форма на $\mathfrak{M}$ замкнута: $d\omega = 0$. Докажем, что $\delta\omega = 0$. Действительно, заметим сначала, что δ перестановочен с любым преобразованием $g \in \mathfrak{G}$. Отсюда так как ω $\mathfrak{G}$ - инвариантна, то $g\omega = \omega$ для любого g, и следовательно, $g(\delta\omega) = \delta g\omega = \delta\omega$, то есть $\delta\omega$ тоже $\mathfrak{G}$-инвариантна. Осталось доказать, что $\langle \delta\omega, \varphi \rangle = 0$ для произвольной $\mathfrak{G}$-инвариантной формы φ. Это следует из равенства $\langle \delta\omega, \varphi \rangle = \langle \omega, d\varphi \rangle$ и того, что $d\varphi = 0$. Таким образом мы доказали, что ω - гармоническая форма. Лемма 9.2 доказана.

Из лемм 9.I и 9.2 вытекает следующая

Т е о р е м а 9.I. Пусть $\mathfrak{M}$ связное компактное риманово симметрическое пространство с группой Ли преобразований $\mathfrak{G} = I(\mathfrak{M})_0$. Пусть σ обозначает инволютивный автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{H}$ - подгруппа всех неподвижных точек автоморфизма σ. Тогда в каждом классе когомологий многообразия $\mathfrak{M}$ существует единственная $\mathfrak{G}$-инвариантная форма. Алгебра $\mathfrak{G}$-инвариантных форм на $\mathfrak{M}$ с операцией внешнего умножения канонически изоморфна подалгебре Λ_{SI}^* всех $\mathfrak{H}$-инвариантных элементов грассмановой алгебры $\Lambda^* T_e \mathfrak{M}$, где e – некоторая фиксированная точка на $\mathfrak{M}$.

Замечание. Для случая, когда $\mathfrak{M}$ есть компактная группа Ли, теорема 9.I была доказана в [22].

§10. Инвариантные потоки в компактных симметрических пространствах

В этом параграфе мы установим связь между группами гомологий компактного симметрического пространства $\mathcal{M}$ и множеством инвариантных потоков на $\mathcal{M}$.

Напомним, что через $\mathcal{G} = I(\mathcal{M})_0$ обозначим связную группу изометрий симметрического пространства $\mathcal{M}$. Определим действие группы $\mathcal{G}$ на пространстве потоков $E_*(\mathcal{M})$ следующим образом. Если $g \in \mathcal{G}$, $S \in E_k(\mathcal{M})$, то $gS(\varphi) = S(g^*\varphi) = S(g^{-1}\varphi)$ для произвольной k-формы φ из $E^k(\mathcal{M})$.

Определение 10.1. k-поток $S \in E_k(\mathcal{M})$ называется $\mathcal{G}$-инвариантным, если $gS = S$ для каждого $g \in \mathcal{G}$.

Обозначим множество всех $\mathcal{G}$-инвариантных k-потоков на $\mathcal{M}$ через $E_k^I(\mathcal{M})$. Очевидно, что $E_k^I(\mathcal{M})$ является линейным подпространством в пространстве $E_k(\mathcal{M})$. Положим $E_*^I(\mathcal{M}) = \bigoplus_k E_k^I(\mathcal{M})$. $E_*^I(\mathcal{M})$ представляет собой цепной подкомплекс в цепном комплексе $E_*(\mathcal{M})$ с граничным оператором ∂.

Л е м м а 10.1. Пусть $\mathcal{M}$ – компактное симметрическое пространство. Тогда в каждом классе гомологий k-потоков существует по крайней мере один $\mathcal{G}$-инвариантный k-поток.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S – произвольный замкнутый k-поток. Покажем сначала, что gS также замкнутый и $gS \sim S$ для произвольного $g \in \mathcal{G}$. Действительно, для любой $(k-1)$-формы φ имеем $\partial(gS)(\varphi) = gS(d\varphi) = S(g^*d\varphi) = S(dg^*\varphi) = \partial S(g^*\varphi) = g(\partial S)(\varphi)$. Тем самым

$\partial g = g\partial$, то есть ∂ переставляется с любым преобразованием g из $\mathcal{G}$. В частности, из $\partial S = 0$ следует, что $\partial(gS) = g(\partial S) = 0$, то есть gS также замкнут. Ввиду связности группы Ли $\mathcal{G}$ можно соединить элемент g с единичным элементом гладким путём $g(t)$: $g(0) = e$, $g(1) = g$. Тогда семейство преобразований $g(t)$ задаёт гомотопию, соединяющую преобразование g с тождественным преобразованием. Из свойства гомотопической инвариантности гомологий вытекает, что для замкнутого потока S имеем

$$gS \sim S \tag{10.1}$$

Группа $\mathcal{G}$, очевидно, компактна. Рассмотрим на ней инвариантную меру и обозначим через ρ меру всей группы $\mathcal{G}$, то есть

$$\rho = \int_{\mathcal{G}} dg \tag{10.2}$$

Из (9.5) и (9.6) легко проверяется, что

$$\pi_c S = \frac{1}{\rho}\int_{\mathcal{G}} gS\,dg \sim S \tag{10.3}$$

Операцию π_c будем называть усреднением по компактной группе $\mathcal{G}$. Очевидно, π_c является линейным отображением линейного пространства $E_k(\mathcal{H})$ в себя. Осталось доказать, что $\pi_c S$ является $\mathcal{G}$-инвариантным k-потоком. Пусть g' - произвольное преобразование из $\mathcal{G}$, тогда

$$g'(\pi_c S) = g'\left(\frac{1}{\rho}\int_{\mathcal{G}} gS\,dg\right) = \frac{1}{\rho}\int_{\mathcal{G}} (g'g)S\,dg =$$

$$= \frac{1}{\varrho} \int_{\mathcal{G}} \tilde{g} S \, d\tilde{g} = \pi_c S \tag{10.4}$$

Таким образом $\pi_c S$ является $\mathcal{G}$-инвариантным k-потоком и лемма 10.1 доказана.

Лемма 10.2. Если два замкнутых $\mathcal{G}$-инвариантных k-потоков S_1 и S_2 гомологичны, то $S_1 = S_2$

Доказательство. Докажем сначала, что если S является $\mathcal{G}$-инвариантным k-потоком, то $\partial S = 0$. Рассмотрим операцию усреднения по компактной группе $\mathcal{G}$ над формами, определенную формулой

$$\pi_c^*(\varphi) = \frac{1}{\varrho} \int_{\mathcal{G}} g\varphi \, dg \tag{10.5}$$

для произвольной формы φ из $E^*(\mathcal{M})$. Очевидно, что π_c^* является линейным отображением линейного пространства $E^*(\mathcal{M})$ в себя. Более того, $\pi_c^*(\varphi)$ является $\mathcal{G}$-инвариантной формой для произвольной формы φ. Действительно, если g' – любое преобразование из $\mathcal{G}$, то имеем

$$g'(\pi_c^* \varphi) = g'\left(\frac{1}{\varrho} \int_{\mathcal{G}} g\varphi \, dg\right) = \left(\frac{1}{\varrho} \int_{\mathcal{G}} (g'g)\varphi \, dg\right) =$$

$$= \frac{1}{\varrho} \int_{\mathcal{G}} \tilde{g}\varphi \, d\tilde{g} = \pi_c^*(\varphi)$$

Заметим также, что так как операторы d и δ линейны, а группа G компактна, то d и δ перестановочны с интегрированием по G, и следовательно, с оператором π_c^*. Если P - произвольный k-поток, а φ - произвольная k-форма, то мы имеем

$$\pi_c P(\varphi) = \frac{1}{\varsigma}\int\limits_G gP(\varphi)\,dg = \frac{1}{\varsigma}\int\limits_G P(g^{-1}\varphi)\,dg$$

$$= \frac{1}{\varsigma}\int\limits_G P(\tilde{g}\varphi)\,d\tilde{g} = P\left(\frac{1}{\varsigma}\int\limits_G \tilde{g}\varphi\,d\tilde{g}\right) = P(\pi_c^*\varphi) \tag{10.6}$$

Положим в равенстве (10.6) $P = \partial S$, получим

$$\pi_c(\partial S)(\varphi) = \partial S(\pi_c^*\varphi) = S(d\pi_c^*\varphi) = 0 \tag{10.7}$$

так как $\pi_c^*(\varphi)$ G-инвариантна. С другой стороны, ввиду G-инвариантности потока S мы имеем

$$\pi_c(\partial S) = \partial(\pi_c S) = \partial S \tag{10.8}$$

Из (10.7) и (10.8) следует, что $\partial S = 0$.

Допустим теперь, что S_1 и S_2 — гомологичные замкнутые G-инвариантные k-потоки. Тогда существует $(k+1)$-поток Q такой, что $S_1 - S_2 = \partial Q$. Поток Q вообще не является G-инвариантным. Применив к обеим частям этого равенства операцию усреднения π_c получим

$$S_1 - S_2 = \pi_c(S_1 - S_2) = \pi_c(\partial Q) = \partial(\pi_c Q) \tag{10.9}$$

$\pi_c Q$ уже G-инвариантен. Следовательно $\partial(\pi_c Q) = 0$. Отсюда мы имеем $S_1 - S_2 = 0$, то есть $S_1 = S_2$. Лемма 10.2 доказана.

Из лемм 10.1 и 10.2 непосредственно вытекает

Теорема 10.1. Пусть $\mathfrak{M}$ является компактным симметрическим пространством. Тогда в каждом классе вещественных гомологий многообразия $\mathfrak{M}$ существует, причём единственный, $\mathcal{G}$-инвариантный поток. Иными словами, пространства $H_k(N_*(\mathfrak{M}))$ и $E^I_k(\mathfrak{M})$ изоморфны для любого k.

Замечание. Из теоремы де Рама-Ходжа и теоремы 9.1 следует, что любая k-форма φ на компактном симметрическом пространстве $\mathfrak{M}$ допускает единственное разложение вида $\varphi = \alpha + d\beta + \delta\gamma$, где $\alpha \in \Lambda^k_{SI}$, $\beta \in E^{k-1}(\mathfrak{M})$ и $\gamma \in E^{k+1}(\mathfrak{M})$. Применив к k-форме φ операцию усреднения по группе $\mathcal{G}$, получим

$$\pi^*_c(\varphi) = \pi^*_c(\alpha) + \pi^*_c(d\beta) + \pi^*_c(\delta\gamma) \tag{10.10}$$

Однако $\pi^*_c(\alpha) = \alpha$, $\pi^*_c(d\beta) = d\pi^*_c(\beta) = 0$, $\pi^*_c(\delta\gamma) = \delta\pi^*_c(\gamma) = 0$. Подставив это в равенство (10.10) мы имеем: $\pi^*_c\varphi = \alpha$. Таким образом оператор π^*_c является ортогональным проектированием пространства $E^*(\mathfrak{M})$ на подпространство Λ^*_{SI}.

Рассмотрим, теперь, $\mathcal{G}$-инвариантный k-поток S. Покажем, что S полностью определяется своими значениями на $\mathcal{G}$-инвариантных k-формах. Действительно, если S' - другой $\mathcal{G}$-инвариантный k-поток и $S'(\alpha) = S(\alpha)$ для любой $\mathcal{G}$-инвариантной формы, то для произвольной k-формы φ мы имеем

$$S'(\varphi) = \pi_c S'(\varphi) = S'(\pi^*_c\varphi) = S(\pi^*_c\varphi) = \pi_c S(\varphi) = S(\varphi),$$

и следовательно, $S' = S$.

§II. Необходимые и достаточные условия глобальной минимальности потоков на симметрических пространствах

Рассмотрим связное компактное риманово симметрическое пространство $\mathcal{M}$. По теореме 9.I в каждом классе когомологий многообразия $\mathcal{M}$ существует единственная форма, инвариантная по отношению к действию максимальной связной группы изометрий $\mathcal{G}$ многообразия $\mathcal{M}$. Пусть e - фиксированная точка на $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ замкнутую подгруппу группы $\mathcal{G}$, оставляющую неподвижной точку e. Действие группы $\mathcal{H}$ на $\mathcal{M}$ индуцирует присоединенное действие на касательном пространстве $T_e\mathcal{M}$, которое является ортогональным. Мы снова обозначим это присоединенное действие через $\mathcal{H}$. Рассмотрим в пространстве $\Lambda_k T_e\mathcal{M}$ множество всех $\mathcal{H}$-инвариантных k-векторов $\Lambda_k^{SI} (=\Lambda^k_{SI})$. Очевидно Λ_k^{SI} является линейным подпространством. Положим $\Lambda_*^{SI}=\bigoplus_k \Lambda_k^{SI}$. Λ_*^{SI} является подалгеброй грассмановы алгебры $\Lambda_* T_e\mathcal{M}$. Ясно, что любая $\mathcal{G}$-инвариантная k-форма на $\mathcal{M}$ задаёт в точке e k-ковектор, инвариантный относительно группы $\mathcal{H}$. Обратно, если в точке e задан некоторый $\mathcal{H}$-инвариантный k-ковектор, то он при помощи группы $\mathcal{G}$, действующей транзитивно на $\mathcal{M}$, порождает $\mathcal{G}$-инвариантную k-форму на всём $\mathcal{M}$; причём $\mathcal{H}$-инвариантность заданного k-ковектора гарантирует, чтобы перенесение этого k-ковектора из точки e в произвольную точку x разными преобразованиями из $\mathcal{G}$ даёт одинаковый результативный k-ковектор в точке x. Таким образом, алгебра Λ_*^{SI} каноничесски изоморфна алгебре $\mathcal{G}$-инвариантных форм на $\mathcal{M}$. Следовательно, согласно теореме 9.I, Λ_*^{SI} канонически изоморфна алгебре когомологий многообразия $\mathcal{M}$. В дальнейшем мы будем отождествлять эти алгебры.

$\mathcal{H}$ является замкнутой подгруппой компактной группы $\mathcal{G}$; поэтому она сама компактна. Рассмотрим на $\mathcal{H}$ инвариантную меру. Ввиду компактности мера всей группы $\mathcal{H}$ конечна. После подходящей нормировки можно считать

$$\int_{\mathcal{H}} dh = 1 \tag{II.I}$$

Предположим, что метрика симметрического пространства $\mathcal{M}$ нормируется условием

$$\int_{\mathcal{M}} dx = 1 \tag{II.2}$$

Если $\xi \in \Lambda_k^{SI}$, то ассоциированный с ξ k-поток S_ξ, построенный по формуле

$$S_\xi(\varphi) = \int_{\mathcal{M}} (\varphi, \xi)\, dx, \quad \varphi \in E^k(\mathcal{M}) \tag{II.3}$$

$\mathcal{G}$-инвариантен. Действительно, для любого преобразования $g \in \mathcal{G}$ и любой k-формы φ мы имеем

$$gS_\xi(\varphi) = S_\xi(g^{-1}\varphi) = \int_{\mathcal{M}} (g^{-1}\varphi, \xi)\, dx =$$

$$= \int_{\mathcal{M}} (\varphi, g\xi)\, dx = \int_{\mathcal{M}} (\varphi, \xi)\, dx = S_\xi(\varphi)$$

Учитывая теоремы 9.I и IO.I заметим, что отображение $\xi \mapsto S_\xi$ задаёт изоморфизм группы Λ_k^{SI} на группу $H_k(N_*(\mathcal{H}))$. Поток S_ξ называется потоком, ассоциированным с ξ, а его класс гомологий – классом, ассоциированным с ξ.

Л е м м а II.I. Пусть через π_S обозначается отображение $\Lambda_* T_e \mathcal{H}$ в себя, определенное формулой

$$\pi_S \xi = \int_{\mathcal{G}} h\xi\, dh, \quad \xi \in \Lambda_* T_e \mathcal{H} \qquad \text{(II.4)}$$

тогда π_S является линейным самосопряженным оператором.

Л е м м а II.2. Для любого $\xi \in \Lambda_k T_e \mathcal{H}$ мы имеем неравенства

$$\|\pi_S \xi\| \leq \|\xi\| \quad \text{и} \quad \|\pi_S \xi\|^* \leq \|\xi\|^*$$

Т е о р е м а II.I. Для любого $\xi \in \Lambda_k^{SI}$ поток S_ξ, ассоциированный с ξ, имеет минимальную массу в классе $\alpha \in H_k(N_*(\mathcal{H}))$, содержащем S_ξ; причём $M(S_\xi) = \|\xi\|$.

Мы опустим доказательства лемм II.I, II.2 и теоремы II.I, поскольку они совершенно аналогичных доказательствам лемм 5.I, 5.2 и теоремы 5.I, если только заменим группу Ψ_e на группу $\mathcal{G}$.

Для ненулевого $\mathcal{G}$-инвариантного k-вектора $\xi \in \Lambda_k^{SI}$ положим

$$F_e^{S*}(\xi) = \{\eta \in \Lambda_k^{SI} : \|\eta\|^* = 1 \text{ и } (\eta, \xi) = \|\xi\|\}.$$

Как и множество $F_e^*(\zeta)$ для Ψ_e-инвариантного k-вектора $\zeta \in \Lambda_k^I$, множество $F_e^{S*}(\xi)$ не пусто. Тогда мы можем определить следующее множество

$$F_e^S(\xi)=\{\eta\in\Lambda_k T_e \mathcal{H} : \|\eta\|=1 \text{ и } (\eta,\gamma)=1 \ \forall\gamma\in F_e^{S*}(\xi)\}.$$

Множество $F_e^S(\xi)$, очевидно, выдерживает действие группы $\mathcal{G}$. Рассмотрим произвольную точку x на $\mathcal{H}$ и некоторый фиксированный ортонормированный базис $R(e)$ пространства $T_e\mathcal{H}$. Пусть g – произвольное преобразование из группы $\mathcal{J}$, переводящее точку e в точку x. Тогда касательное отображение $dg: T_e\mathcal{H}\to T_x\mathcal{H}$ переводит ортонормированный базис $R(e)$ в ортонормированный базис $R(x)$. Пусть $F_g^S(\xi)$ является образом множества $F_e^S(\xi)$ при отображении dg. Тогда в рассматриваемых базисах $R(e)$ и $R(x)$ элементы множеств $F_e^S(\xi)$ и $F_g^S(\xi)$ имеют одинаковые координатные записи. Допустим теперь, что g' – другое преобразование из группы $\mathcal{J}$, переводящее точку e в точку x. Повторив сделанный выше процесс, мы получим от $F_e^S(\xi)$ другое множество $F_{g'}^S(\xi)\subset\Lambda_k T_x\mathcal{H}$. Покажем, что множества $F_g^S(\xi)$ и $F_{g'}^S(\xi)$ совпадают. Действительно, если $\eta\in F_g^S(\xi)$, то $dg^{-1}(\eta)\in F_e^S(\xi)$. Рассмотрим преобразование $g'^{-1}g\in\mathcal{J}$. Оно переводит точку e в себя, следовательно, принадлежит подгруппе $\mathcal{G}$. Тогда, поскольку множество $F_e^S(\xi)$ инвариантно по отношению к действию группы $\mathcal{G}$, отображение $d(g'^{-1}g)=dg'^{-1}\circ dg$ переводит $F_e^S(\xi)$ на себя. В частности, $(dg'^{-1}\circ dg)(dg^{-1}\eta)\in F_e^S(\xi)$. Наконец, по определению множества $F_{g'}^S(\xi)$ мы имеем $dg'(dg'^{-1}\circ dg)(dg^{-1}\eta)\in F_{g'}^S(\xi)$. Это означает, что $\eta\in F_{g'}^S(\xi)$. Таким образом $F_g^S(\xi)\subset F_{g'}^S(\xi)$. Так как g и g' выбираются произвольно, то мы имеем и обратное включение $F_{g'}^S(\xi)\subset F_g^S(\xi)$. Тем самым $F_g^S(\xi)=F_{g'}^S(\xi)$. Итак, множество $F_g^S(\xi)$ не зависит от выбора преобразования g, переводящего точку e в точку x. Положим $F_x^S(\xi)=$

$F^S_g(\xi)$ $(= F^S_{g'}(\xi))$. Мы видели, что множество $F^S_x(\xi)$ полностью определяется множеством $F^S_e(\xi)$.

Теорема II.2. Пусть ξ, S_ξ и α такие, что и в теореме II.I. Пусть S - произвольный замкнутый поток в классе α. Тогда S является потоком минимальной массы в классе α в том и только в том случае, когда $\vec{S}_x \in F^S_x(\xi)$ почти для всех $x \in \mathcal{M}$ в смысле меры $\|S\|$.

Следствие II.I. Пусть $\alpha \in H_k(I_*(\mathcal{M}))$ - класс целочисленных k-потоков, удовлетворяющий условию $\|\alpha\| = \|\alpha_R\|$. Пусть S_ξ, ассоциированный с $\xi \in \Lambda^{SI}_k$, принадлежит классу α_R. Тогда целочисленный поток $S \in \alpha$ имеет минимальную массу в классе α в том и только в том случае, когда $\vec{S}_x \in F^S_x(\xi) \cap G^k_x$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$.

Замечание. Условие $\|\alpha\| = \|\alpha_R\|$ эквивалентно существованию такого потока S из класса α, для которого $\vec{S}_x \in F^S_x(\xi) \cap G^k_x$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$.

Доказательства теоремы II.2 и следствия II.I аналогичны доказательствам теоремы 5.2 и следствия 5.I, поэтому мы опустим их.

Наконец, мы сформулируем некоторые свойства множеств $F^{S*}_e(\xi)$ и $F^S_e(\xi)$, связанные с изоморфизмом двойственности Пуанкаре (см. §6). Мы не будем доказывать этих свойств, поскольку их доказательства дословно повторяют доказательства леммы 6.I и теоремы 6.I.

Теорема II.3. I) Изоморфизм двойственности Пуанкаре перестановочен с оператором π_S и переводит $\mathcal{G}$-инвавариантные k-векторы в $\mathcal{G}$-инвариантные $(n-k)$-векторы, где $n = \dim \mathcal{M}$.

2) Если $\eta \in \Lambda_k^{SI}$, то имеют место равенства

$$F_e^{S*}(D_k \eta) = D_k(F_e^{S*}(\eta)); \quad F_e^S(D_k\eta) = D_k(F_e^S(\eta)).$$

§I2. Условия глобальной минимальности для некоторых специальных классов поверхностей

I. В этом параграфе мы будем рассматривать некоторые классы поверхностей в компактном симметрическом пространстве, для которых условия минимальности в теореме II.2 и следствии II.I принимают гораздо более простой вид.

Пусть $\mathcal{M}$ – связное компактное риманово симметрическое многообразие. По-прежнему обозначим через $\mathcal{G}$ его связную максимальную группу изометрий, а через $\mathcal{G}$ – стационарную подгруппу. Если V – произвольная k-мерная замкнутая поверхность в многообразии $\mathcal{M}$, то с V можно связать целочисленный k-поток $V \in I_k(\mathcal{M})$, определенный формулой

$$V(\varphi) = \int_V \varphi \quad , \varphi \in E^k(\mathcal{M}) \quad . \qquad (I2.I)$$

Заметим, что масса $M(V)$ k-потока V совпадает с k-мерным объемом поверхности V. Так как поверхность V замкнута, то k-поток V замкнут. Обозначим через $[V] \in H_k(I_*(\mathcal{M}))$ фундаментальный класс поверхности V в многообразии $\mathcal{M}$.

целочисленный класс $[V]$ однозначно определяет вещественный класс $[V]_R \in H_k(N_*(\mathcal{M}))$ такой, что $[V] \subset [V]_R$. Мы будем изучать вопрос о том, когда поток V является потоком минимальной массы в классе $[V]_R$. Заметим, что если поток V имеет минимальную массу в вещественном классе $[V]_R$, то тем более он имеет минимальную массу в целочисленном классе $[V]$ и целочисленный класс гомологий $[V]$ стабилен.

2. Рассмотрим класс замкнутых поверхностей $V \subset \mathcal{M}$ таких, что для любой пары регулярных точек x, x' из V найдётся по крайней мере одно преобразование g из группы $\mathcal{G}$, для которого выполняется следующее условие

$$g(x) = x' \quad , \quad g\vec{V}_x = \vec{V}_{x'} \tag{12.2}$$

Т е о р е м а 12.1. Если замкнутая k-мерная поверхность V в симметрическом пространстве $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (12.2), то поток V, заданный формулой (12.1), имеет минимальную массу в классе $[V]_R$ тогда и только тогда, когда $\vec{V}_{x_0} \in F^S_{x_0}(\xi)$ для какой-нибудь регулярной точки x_0 поверхности V, где ξ обозначает тот элемент из Λ^{SI}_*, с которым ассоциирован $\mathcal{G}$-инвариантный поток S_ξ, принадлежащий классу $[V]_R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что с каждым простым k-вектором ξ' из $\Lambda_k \mathbb{R}^n$ ассоциировано k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех векторов v таких, что $\xi' \wedge v = 0$. Кроме того, k-вектор ξ' определяется указанным k-мерным подпространством однозначно с точностью до ненулевого множителя.

Заметим, что носитель потока V совпадает с поверхностью V и $\vec{V}_x$ для каждой регулярной точки x поверхности V совпадает с k-вектором из пространства $\Lambda_k T_x \mathcal{M}$, с которым ассоциировано касательное пространство к поверхности в точке x. Из определения вариационной меры $\|V\|$ следует, что она сосредоточена в поверхности V. Иными словами, V является подмножеством полной меры в $\mathcal{M}$ в смысле меры $\|V\|$.

Допустим, что поток V удовлетворяет условию $\vec{V}_{x_0} \in F^S_{x_0}(\xi)$ для регулярной точки x_0. Пусть x - любая другая регулярная точка поверхности V. Так как V удовлетворяет условию (I2.2), то существует преобразование $g \in \mathcal{G}$ такое, что $gx_0 = x$ и $g\vec{V}_{x_0} = \vec{V}_x$. С другой стороны, если $\omega \in F^{S*}_e(\xi)$, то ввиду $\mathcal{G}$-инвариантности формы ω, мы имеем: $(\omega, g\vec{V}_{x_0}) = (g^{-1}\omega, \vec{V}_{x_0}) = (\omega, \vec{V}_{x_0})$. Следовательно, $(\omega, \vec{V}_x) = (\omega, g\vec{V}_{x_0}) = (\omega, \vec{V}_{x_0}) = 1$. Таким образом, $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$ для любой регулярной точки x поверхности V. Это означает, что $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$ почти всюду в смысле меры $\|V\|$. Согласно теореме II.2 поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$.

Обратно, допустим, что поток V является потоком минимальной массы в классе $[V]_R$. Из теоремы II.2 следует, что $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$ почти всюду в смысле меры $\|V\|$. Поскольку мера $\|V\|$ сосредоточена в поверхности V, можно найти такую регулярную точку x_0 поверхности V, что $\vec{V}_{x_0} \in F^S_{x_0}(\xi)$. Тем самым теорема I2.I доказана.

Т е о р е м а I2.2. Пусть замкнутая k-мерная поверхность $V \subset \mathcal{M}$ имеет e регулярной точкой и удовлетворяет условию (I2.2). Тогда если через $vol(V)$ обозначим k-мерный объем поверхности V, то единственный $\mathcal{G}$-инвариантный поток $\tilde{V}$, гомологичный V, ассоциирован с $\mathcal{G}$-инвариантным k-вектором $\xi = vol(V)\pi_S \vec{V}_e$. Более того k-поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$ тогда и только тогда, когда $\|\pi_S \vec{V}_e\| = 1$.

Замечание. Требование того, что e является регулярной точкой поверхности V, не существенно. Действительно, выберем какую-нибудь регулярную точку $v \in V$ и какое-нибудь преобразование g из $\mathcal{G}$, переводящее точку v в точку e. Тогда поверхность $g(V)$ уже имеет e регулярной точкой. Поверхности $g(V)$ и V гомологичны и изометричны, поэтому мы можем их и не различать.

Доказательство. Рассмотрим поток S_ξ, ассоциированный с ξ. По формуле (II.3) мы имеем

$$S_\xi(\varphi) = \int_{\mathcal{M}} (\xi, \varphi)\, dx \tag{I2.3}$$

для произвольной k-формы на $\mathcal{M}$. Если ψ является $\mathcal{G}$-инвариантной k-формой, то

$$S_\xi(\psi) = (\xi, \psi) \int_{\mathcal{M}} dx = (\xi, \psi) \tag{I2.4}$$

С другой стороны, согласно формуле (I2.I) мы имеем

$$V(\psi) = \int_V (\vec{V}_x, \psi)\, dx \tag{I2.5}$$

Поверхность V удовлетворяет условию (I2.2), поэтому для каждой регулярной точки $x \in V$ существует преобразование $g \in \mathcal{G}$ такое, что $g(e) = x$ и $g\vec{V}_e = \vec{V}_x$. Ввиду $\mathcal{G}$-инвариантности формы ψ мы имеем:

$$(\vec{V}_x, \psi) = (g\vec{V}_e, \psi) = (\vec{V}_e, \psi) = (\pi_S \vec{V}_e, \psi) \qquad (12.6)$$

Подставим значение $(\vec{V}_x, \psi)$ из равенства (12.6) в (12.5) мы получим

$$V(\psi) = \int_V (\pi_S \vec{V}_e, \psi)\, dx = (\pi_S \vec{V}_e, \psi) \int_V dx$$

$$= vol(V)(\pi_S \vec{V}_e, \psi) = (\xi, \psi) \qquad (12.7)$$

Из того, что потоки V и $\tilde{V}$ гомологичны между собой и G-инвариантная форма ψ замкнута следует, что $V(\psi) = \tilde{V}(\psi)$. Сравнив равенства (12.4) и (12.7) мы получим

$$\tilde{V}(\psi) = V(\psi) = S_\xi(\psi) \qquad (12.8)$$

Так как S_ξ и $\tilde{V}$ есть G-инвариантные потоки, то согласно замечанию к теореме 10.1 мы имеем $S_\xi = \tilde{V}$. Таким образом первая часть теоремы 12.2 доказана. Допустим теперь, что поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$. По теореме 12.1 $\vec{V}_e$ принадлежит $F_e^S(\xi)$, то есть для каждой формы $\omega \in F_e^{S*}(\xi)$ выполняется равенство $(\vec{V}_e, \omega) = 1$. Ввиду G-инвариантности формы ω мы имеем $(\pi_S \vec{V}_e, \omega) = (\vec{V}_e, \omega) = 1$. Согласно формуле (1.2) $\|\pi_S \vec{V}_e\| \geq 1$. С другой стороны по лемме 11.2 $\|\pi_S \vec{V}_e\| \leq \|\vec{V}_e\| = 1$. Следовательно, $\|\pi_S \vec{V}_e\| = 1$. Обратно, допустим, что $\|\pi_S \vec{V}_e\| = 1$. Для каждой $\omega \in F_e^{S*}(\xi)$ мы имеем

$$(\omega, \xi) = \|\xi\| = vol(V) \|\pi_S \vec{V}_e\| = vol(V) \qquad (12.9)$$

С другой стороны

$$(\omega, \xi) = (\omega, vol(V)\pi_S \vec{V}_e) = vol(V)(\omega, \vec{V}_e) \qquad (12.10)$$

Сравнив (I2.9) и (I2.I0) мы получим: $(\omega, \vec{V}_e) = 1$. Следовательно $\vec{V}_e \in F_e^S(\xi)$. Согласно теореме I2.I поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$. Тем самым теорема I2.2 доказана.

Теорема I2.3. Положим $\dim \mathcal{H} = n$. Пусть замкнутые поверхности U и V в $\mathcal{H}$ ($\dim U = k$, $\dim V = n-k$) обе удовлетворяют условию (I2.2) Если существуют регулярные точки $x \in U$ и $y \in V$, и преобразование $g \in G$ такие, что $gx = y$ и $g(T_x U)$ представляет собой ортогональное дополнение к $T_y V$ в касательном пространстве $T_y \mathcal{H}$, то поток U имеет минимальную массу в классе $[U]_R$ в том и только в том случае, когда поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$, где через $T_x U$ и $T_y V$ обозначаются касательные пространства к поверхностям U и V соответственно в точках x и y.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $x = y = e$, то есть поверхности U и V проходят через точку e, причём существует преобразование $h \in G$ такое, что $h(T_e U)$ является ортогональным дополнением к $T_e V$ (см. замечание к теореме I2.2). Выберем для пространства $T_e \mathcal{H}$ ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$

так, чтобы $e_1, e_2, \dots, e_k$ образуют ортонормированный базис подпространства $h(T_e U)$, а $e_{k+1}, \dots, e_n$ – ортонормированный базис подпространства $T_e V$. Ясно, что $h(\vec{U}_e) = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k$ и $\vec{V}_e = e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n$. Рассмотрим изоморфизм двойственности Пуанкаре D_k. Очевидно, что $D_k h(\vec{U}_e) = \vec{V}_e$. По теореме II.3 $\pi_S \vec{V}_e = \pi_S D_k h(\vec{U}_e) = D_k \pi_S \underset{\rightarrow}{h}(\vec{U}_e) = D_k \pi_S \vec{U}_e$. Из теоремы II.3 также следует, что $\vec{V}_e \in F_e^S(\pi_S \vec{V}_e)$ равносильно тому, что $h(\vec{U}_e) \in F_e^S(\pi_S \vec{U}_e)$, а последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{U}_e \in F_e^S(\pi_S \vec{U}_e)$. Наконец, заметим, что из самого определения множества $F_e^S(\xi)$ следует, что $F_e^S(\pi_S \vec{U}_e)$ и $F_e^S(vol(U)\pi_S \vec{U}_e)$ (соответственно $F_e^S(\pi_S \vec{V}_e)$ и $F_e^S(vol(V)\pi_S \vec{V}_e)$) совпадают. Суммируя всё это мы можем заключить, что $\vec{U}_e \in F_e^S(vol(U)\pi_S \vec{U}_e)$ в том и только в том случае, когда $\vec{V}_e \in F_e^S(vol(V)\pi_S \vec{V}_e)$. Применив теоремы I2.I и I2.2 мы получим доказательство теоремы I2.3.

3. Рассмотрим замкнутую поверхность V в симметрическом пространстве $\mathcal{M}$. Если существует подгруппа $\mathcal{K}$ группы $\mathcal{G}$ такая, что поверхность V выдерживает действие подгруппы $\mathcal{K}$, причём $\mathcal{K}$ действует на V транзитивно, то V является подмногообразием и удовлетворяет условию (I2.2). Действительно, выберем произвольную регулярную точку x на поверхности, и пусть y – любая другая точка на V. Ввиду транзитивности действия подгруппы $\mathcal{K}$ на V вытекает, что существует преобразование h из $\mathcal{K}$ такое, что $h: V \to V$ и $hx = y$. Отсюда следует, что y тоже является регулярной точкой V, причём $h(T_x V) = T_y V$ или $h\vec{V}_x = \vec{V}_y$. Согласно теореме I2.I условие минимальности для V сводится к требованию к положению касатель-

ного пространства $T_{x_0}V$ в какой-нибудь точке поверхности V. Естественно распространить этот эффект на более общий случай, когда подгруппа $\mathcal{K}$ действует на V, вообще говоря, не транзитивно. К этому мы и переходим.

Определение I2.I. Пусть $\mathcal{K}$ - некоторая подгруппа группы $\mathcal{G}$. Поверхность $V \subset \mathcal{M}$ называется $\mathcal{K}$-инвариантной, если V выдерживает действие группы $\mathcal{K}$.

Для любой точки $x \in \mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{K}_x$ стационарную подгруппу точки x, а через $\mathcal{K}(x) \cong \mathcal{K}/\mathcal{K}_x$ - орбиту точки x под действием группы $\mathcal{K}$. Отсюда имеем $\mathcal{K}_x$- расслоение

$$\mathcal{K}_x \to \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{K}_x \cong \mathcal{K}(x)$$

Две орбиты $\mathcal{K}(x)$ и $\mathcal{K}(y)$ отнесем к одному и тому же типу, если соответствующие подгруппы $\mathcal{K}_x$ и $\mathcal{K}_y$ сопряжены между собой в группе $\mathcal{K}$. Введём частичное упорядочение в множестве орбитальных типов многообразия $\mathcal{M}$ следующим образом

$$(H) \geqslant (K) \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{K} : K \supseteq gHg^{-1}$$

где (H) обозначает сопряженный класс подгруппы $H \subset \mathcal{K}$.

Предложение I2.I (см. [23]). Пусть $\mathcal{K}$ - некоторая подгруппа группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{M}$ расслаивается на орбиты под действием $\mathcal{K}$. Тогда существует единственный орбитальный тип (H) такой, что $(H) \geqslant (K)$ для всех орбитальных типов (K) этого действия. Более того объединение всех орбит типа (H), то есть множество $\mathcal{M}^* = \{x \in \mathcal{M} : \mathcal{K}_x \in (H)\}$ является открытым, всюду плотным подмногообразием многообразия $\mathcal{M}$.

Класс (H) , о котором говорится в предложении I2.I,назовём главным орбитальным типом. Те классы (H') ,для которых $(H')\neq(H)$, но $\dim H' = \dim H$,назовём исключительными типами. Все остальные типы называются особыми.

Видим, что сингулярное подмножество $\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}^*$ является замкнутым, нигде неплотным подмножеством с дифференциальной стратификацией. Пусть (H') - неглавный орбитальный тип и пусть $\mathcal{M}_{(H')}=\{x\in\mathcal{M} : \mathcal{K}_x\in(H')\}$.Тогда каждая компонента $\mathcal{M}_{(H')}$ является подмногообразием в $\mathcal{M}$.

Обозначим через $\mathcal{M}/\mathcal{K}$ пространство орбит и через $p:\mathcal{M}\to\mathcal{M}/\mathcal{K}$ - каноническое проектирование. Подмножество $\mathcal{M}^*/\mathcal{K}$ является многообразием. Определим дифференциальную структуру на нём. Пусть H обозначает главную стационарную подгруппу. Тогда

$$\mathcal{K}/H \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{K}$$

является дифференциальным расслоением. Более того, если мы стратифицируем $\mathcal{M}$ компонентами множеств $\mathcal{M}_{(H')}=\{x\in\mathcal{M} : \mathcal{K}_x\in(H')\}$, где (H') пробегает все орбитальные типы, то $\mathcal{M}/\mathcal{K}$ переходит в дифференциальную стратификацию такую, что отображение p , ограниченное на компонентах множеств $\mathcal{M}_{(H')}$,представляет собой дифференцируемое расслоение.

Построим риманову структуру на $\mathcal{M}^*/\mathcal{K}$ следующим образом. Пусть $\mathcal{D}$ обозначает распределение нормальных плоскостей орбит. Пусть $x\in\mathcal{M}^*/\mathcal{K}$ и $x'\in p^{-1}(x)$.Тогда каждому касательному вектору X в точке x соответствует единственный касательный вектор X' в $\mathcal{D}_{x'}$ такой, что $dp(X')=X$.Определим метрику g многообразия $\mathcal{M}^*/\mathcal{K}$ в точке x формулой

$$g(X,Y) = g'(X',Y')$$

где g' - заданная метрика симметрического пространства $\mathcal{M}$.

Описанный процесс, очевидно, также позволит построить гладкую метрическую структуру на всём $\mathcal{M}/\mathcal{K}$ в том смысле, что каждая компонента стратификации превращается в риманово многообразие. Подробное описание пространства орбит содержится в [23] и [24].

Вернемся к нашей задаче. Пусть V является $\mathcal{K}$-инвариантной поверхностью в $\mathcal{M}$. Обозначим через V° множество всех регулярных точек поверхности V. Множество V° открыто и всюду плотно в V; причём V° есть многообразие. Под действием преобразований из $\mathcal{K}$ регулярная точка поверхности V переходит в регулярную, поэтому V° само является $\mathcal{K}$-инвариантным. Под действием группы $\mathcal{K}$ многообразие V° расслаивается на орбиты. Обозначим через V^* объединение всех точек орбит главного типа действия группы $\mathcal{K}$ на V°. V^* является открытым, всюду плотным подмногообразием многообразия V°, и следовательно, подмножеством полной меры в поверхности V.

Т е о р е м а 12.4. Пусть V является $\mathcal{K}$-инвариантной замкнутой k-мерной поверхностью в связном компактном симметрическом пространстве $\mathcal{M}$. Обозначим через ξ тот элемент из Λ_k^{SI}, с которым ассоциирован единственный $\mathcal{G}$-инвариантный поток S_ξ, принадлежащий классу $[V]_R$. Тогда V является потоком минимальной массы в классе $[V]_R$ в том и только в том случае, когда существует подмножество N полной меры в $V^*/\mathcal{K}$

$\subset \mathcal{M}/\mathcal{K}$, для которого выполняется следующее условие: для каждой орбиты $u \in N$ найдется по крайней мере одна точка $x_u \in u \subset V^*$ такая, что $\vec{V}_{x_u} \in F^S_{x_u}(\xi)$.

Доказательство. Заметим, что носитель спрямляемого потока V совпадает с поверхностью; поэтому мера $\|V\|$ сосредоточена в V, и следовательно, V является множеством полной меры в $\mathcal{M}$ в смысле меры $\|V\|$. Более того, любое подмножество полной меры в V (в смысле заданной римановы метрики) является в то время также множеством полной меры в $\mathcal{M}$ в смысле меры $\|V\|$ и обратно. Если $x' \in \mathcal{K}(x)$, то есть существует $h \in \mathcal{K}$ такое, что $hx = x'$, то $h\vec{V}_x = \vec{V}_{x'}$. Допустим, что $\omega \in F^{S*}_e(\xi)$. Форма ω инвариантна по отношению к действию группы $\mathcal{G}$, следовательно, инвариантна и по отношению к действию подгруппы $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$. Отсюда мы имеем:

$$(\omega, \vec{V}_x) = (\omega, \vec{V}_{x'}), \quad x' \in \mathcal{K}(x) \qquad (12.11)$$

Пусть, теперь, V является потоком минимальной массы в классе $[V]_R$. Согласно теореме 11.2 $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$ почти всюду в смысле меры $\|V\|$. Это равнозначно существованию подмножества N_1 полной меры в V (в смысле заданной римановы метрики) такое, что для каждой $x \in N_1$ мы имеем $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$. Согласно равенству (12.11) $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$ влечёт за собой $\vec{V}_{x'} \in F^S_{x'}(\xi)$ для любой точки $x' \in \mathcal{K}(x)$. Поэтому мы можем считать N_1 $\mathcal{K}$-инвариантным подмножеством. Положим $N_2 = N_1 \cap V^*$. Так как N_1 и V^* оба являются $\mathcal{K}$-инвариантными множествами полной меры, то N_2 тоже обладает этими свойствами. Положим, наконец, $N = N_2/\mathcal{K}$. Очевидно, что N является подмножеством полной меры в $V^*/\mathcal{K}$ и N удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Обратно, допустим, что существует подмножество N полной меры в $V^*/\mathcal{K}$, для которого выполняется условие: для каждой орбиты $u \in N$ существует точка $x_u \in u$ такая, что $\vec{V}_{x_u} \in F^S_{x_u}(\xi)$. Тогда согласно равенству (I2.II), для любой точки $x' \in u$ мы имеем $\vec{V}_{x'} \in F^S_{x'}(\xi)$. Следовательно $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$ для всякой точки x из обьединения точек орбит из множества N. Так как N - множество полной меры в $V^*/\mathcal{K}$, то обьединение точек орбит из N представляет собой множество полной меры в V^*, следовательно, и в V. Таким образом $\vec{V}_x \in F^S_x(\xi)$ почти всюду в смысле меры $\|V\|$. Согласно теореме II.2 поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$. Теорема I2.4 доказана.

§I3. Некоторые серии примеров глобально минимальных вполне геодезических подмногообразий

Простейшими примерами поверхностей, удовлетворяющих условию (I2.2), являются вполне геодезические подмногообразия. Напомним, что компактное симметрическое пространство $\mathcal{M}$ можно вложить в группу преобразований $\mathcal{G} = I(\mathcal{M})_0$ в виде вполне геодезического подмногообразия как картановская модель (см. предложение 9.I). Если V является вполне геодезическим подмногообразием симметрического пространства $\mathcal{M}$, то само V также является симметрическим пространством. Обозначим картановское вложение $\mathcal{M}$ в группу $\mathcal{G}$ через $i: \mathcal{M} \to \mathcal{G}$. Тогда очевидно, что $i(V)$ является вполне геодезическим подмногообразием в $\mathcal{G}$. Максимальная связная группа изометрий $I(V)_0$ симметрического пространства V представляется собой подгруппу группы $\mathcal{G}$. С другой стороны, группа $I(V)_0$ действует на

V транзитивно. Это означает, что подмногообразие V удовлетворяет условию (I2.2). Из теорем I2.I и I2.2 непосредственно вытекает

Следствие I3.I. Пусть V замкнутое k-мерное вполне геодезическое подмногообразие в $\mathcal{M}$, проходящее через точку e. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$.
2) $\vec{V}_e \in F_e^S(\pi_S \vec{V}_e)$.
3) $\| \pi_S \vec{V}_e \| = 1$.

(Очевидно, что с k-вектором $\vec{V}_e$ ассоциировано касательное пространство к подмногообразию V в точке e)

Мы будем использовать следствие I3.I для установления глобальной минимальности довольно широких серий вполне геодезических подмногообразий в симметрических пространствах. Рассмотрим компактное симметрическое пространство $\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ и пусть σ является соответствующим инволютивным автоморфизмом группы $\mathcal{G}$, множество неподвижных точек которого совпадает с $\mathcal{H}$. Многообразие $\mathcal{M}$ допускает картановское вложение в группу $\mathcal{G}$ в виде $\{g\sigma(g^{-1})\}$, где g пробегает всю группу $\mathcal{G}$. Действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{M}$ имеет вид: $g(a) = ga\sigma(g^{-1})$, где $a \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{G}$. Если $h \in \mathcal{H}$, то $h(a) = hah^{-1}$. Обозначим алгебры Ли группы Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ соответственно через G и H. Положим $B = T_e\mathcal{M}$. Подпространства H и B являются собственными подпространствами автоморфизма $\theta = d\sigma$ соответственно с собственными значениями I и -I; кроме того, разложение $G = H \oplus B$ имеет следующие свойства: $[H,H] \subset H$, $[H,B] \subset B$, $[B,B] \subseteq H$.

I. Симметрическое пространство типа

$$\mathcal{M} = U(n)/U(m)\times U(n-m)\ ,\ n \geq 2\ ,\ 1 \leq m \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Полином Пуанкаре

$$P(\mathcal{M};t) = \frac{[1-t^{2(n-m+1)}][1-t^{2(n-m+2)}]\ldots[1-t^{2n}]}{(1-t^2)(1-t^4)\ldots(1-t^{2m})}$$

В этом случае $\mathcal{G} = U(n)$, $\mathcal{H} = U(m)\times U(n-m)$, $G = u(n)$ и $H = u(m)\oplus u(n-m)$. Для подпространства $B = T_e\mathcal{M}$ выберем ортонормированный базис, состоящий из матриц $E_{ij} = (a_k^l)$ и $F_{ij} = (b_k^l)$ $(1 \leq i \leq m\ ;\ m+1 \leq j \leq n)$, где

$$a_k^l = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{, если } l=i,\ k=j \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{, если } l=j,\ k=i \\ 0 & \text{, для остальных случаев} \end{cases}$$

$$b_k^l = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \text{, если } l=i,\ k=j \text{ или } l=j,\ k=i \\ 0 & \text{ для остальных случаев} \end{cases}$$

Рассмотрим косоэрмитову матрицу

$$J = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -i \end{matrix} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \end{array}$$

Очевидно, что матрица J перестановочна со всеми матрицами из подгруппы $\mathcal{H} = U(m)\times U(n-m)$.

Л е м м а I3.I. Трилинейная функция $Re\{Tr\,ABC\}$, где $A, B, C \in u(n)$, является $Ad_{U(n)}$-инвариантной внешней 3-формой из $\Lambda^3 u(n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что трилинейная функция $Re\{Tr\,ABC\}$ инвариантна относительно преобразований из группы $Ad_{U(n)}$ непосредственно вытекает из свойства следа. Докажем, что $Re\{Tr\,ABC\}$ является внешней формой. Докажем, например,

$$Re\{Tr\,ABC\} = -Re\{Tr\,BAC\}$$

Действительно, так как для любой матрицы $X \in u(n)$ имеет место $X^* = -X$, то полагая $A=(a^i_j)$, $B=(b^i_j)$, $C=(c^i_j)$ мы имеем

$$Tr\,BAC = \sum_{i,j,k} b^i_j a^j_k c^k_i = -\sum_{i,j,k} \bar{b}^j_i \bar{a}^k_j \bar{c}^i_k =$$

$$= -\sum_{k,j,i} \bar{a}^k_j \bar{b}^j_i \bar{c}^i_k = -Tr(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = \tag{I3.I}$$

$$= -Tr(\overline{ABC}) = -\overline{Tr(ABC)}$$

Полагая $Tr(ABC) = \alpha + i\beta$, из (I3.I) мы получим: $Tr\,BAC = -\alpha + i\beta$. Отсюда имеет место соотношение

$$Re\{Tr\,ABC\} = \alpha = -Re\{Tr\,BAC\}$$

Таким образом лемма I3.I доказана.

Положим $\tilde{\omega}(A,B,C) = Re\{Tr\,ABC\}$, где $A, B, C \in u(n)$. Согласно лемме I3.I, $\tilde{\omega}$ является 3-формой, инвариантной относительно действия группы $Ad_{U(n)}$, и следовательно, инвариантна относительно действия группы $\mathcal{G}$. Определим 2-форму

$\omega(X,Y)=\tilde{\omega}(X,J,Y)$, где $X, Y \in B$. , J – определенная выше матрица. Проверим, что 2-форма ω инвариантна относительно действия группы $\mathcal{G}$. Пусть $h \in \mathcal{G}$. Тогда ввиду того, что матрица J перестановочна с h , мы имеем: $\omega(hXh^{-1}, hYh^{-1}) = \tilde{\omega}(hXh^{-1}, J, hYh^{-1}) = \tilde{\omega}(hXh^{-1}, hJh^{-1}, hYh^{-1}) = \tilde{\omega}(X,J,Y) = \omega(X,Y)$. Таким образом ω является $\mathcal{G}$ -инвариантным 2-ковектором из $\Lambda^2 B = \Lambda^2 T_e \mathcal{H}$.

Напомним, что инвариантная евклидова метрика в алгебре Ли $u(n)$ выражается следующей формулой

$$(X,Y) = Re\{Tr\, X Y^*\} , \quad (X,X) = |X|^2 \qquad (13.2)$$

где X, Y – произвольные матрицы из $u(n)$. Метрика (13.2) индуцирует на подпространстве B ту же евклидову метрику, которая индуцирована римановой метрикой многообразия $\mathcal{H}$. Заметим, что если $Y \in B$, то $JY \in B$, причём $JY = -YJ$. Если же $|X| \leq 1$, $|Y| \leq 1$, то $|JY| \leq |J| \cdot |Y| \leq |Y| \leq 1$ и мы имеем соотношение

$$\omega(X,Y) = Re\{Tr\, XJY\} = \\ = - Re\{Tr\, X(JY)^*\} = -(X, JY) \qquad (13.3)$$

Отсюда имеем: $|\omega(X,Y)| = |(X,JY)| \leq |X| \cdot |JY| \leq 1$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $JY = X^* = -X$.

Рассмотрим $\mathcal{G}$-инвариантные $2k$-ковекторы из $\Lambda^{2k} B$

$$\theta_k = \frac{1}{k!}\, \omega^k \qquad \left(1 \leq k \leq \tfrac{1}{2}\dim B\right)$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}, X_{2k}$ – ориентированная ортонормированная система векторов из B . Обозначим через S $2k$-мерную линейную оболочку $[X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}, X_{2k}]$, а через f - вложение S в B как подпространство. Выберем двойственные ориентированные ортонормированные базисы $X'_1, X'_2, \ldots, X'_{2k-1}, X'_{2k}$ и $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2k-1}, \omega_{2k}$ пространств S и $\Lambda^1 S$ и неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ такие, что

$$f^*\omega = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \omega_{2j-1} \wedge \omega_{2j}$$

Видим, что $\lambda_j = \omega(X'_{2j-1}, X'_{2j}) \leq 1$ для каждого j.

$$f^*\omega^k = (f^*\omega)^k = k!\,\lambda_1 \ldots \lambda_k \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_{2k-1} \wedge \omega_{2k}$$

$$f^*\theta_k = \frac{1}{k!} f^*\omega^k = \lambda_1 \ldots \lambda_k \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_{2k-1} \wedge \omega_{2k}$$

Следовательно, $\theta_k(X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}, X_{2k}) = \theta_k(X'_1, X'_2, \ldots, X'_{2k-1}, X'_{2k}) = \lambda_1 \ldots \lambda_k \leq 1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда все $\lambda_j = 1$, то есть $JX'_{2j} = -X'_{2j-1}$ для каждого j ($1 \leq j \leq k$). В частности, $\|\theta_k\|^* = 1$.

Рассмотрим теперь подмногообразие типа

$$V = U(n')/U(m') \times U(n'-m'), \quad n' < n, \; m' < m,$$

такое, что $U(n')$, $U(m')$ и $U(n'-m')$ стандартно вложены, соответственно, в $U(n)$, $U(m)$ и $U(n-m)$. Ясно, что V является вполне геодезическим подмногообразием. Для касательного пространства $T_e V$ выберем ортонормированный базис $\{E_{i'j'}, F_{i'j'}\}$ который является частью базиса $\{E_{ij}, F_{ij}\}$ пространства

$B = T_e\mathcal{M}$. Положим $2k = \dim V = 2m'(n'-m')$. Мы имеем $(\theta_k, \pi_S \vec{V_e}) = (\theta_k, \vec{V_e}) = 1$, поскольку θ_k – $\mathfrak{h}$-инвариантен и $JF_{i'j'} = -E_{i'j'}$, ($1 \le i' \le m'$; $m'+1 \le j' \le n'$). По определению $\|\pi_S \vec{V_e}\| \geqslant 1$. С другой стороны, согласно лемме II.2, $\|\pi_S \vec{V_e}\| \le \|\vec{V_e}\| = 1$. Тем самым $\|\pi_S \vec{V_e}\| = 1$. Применив следствие I3.I мы получили, что V является потоком минимальной массы в классе $[V]_R$.

Замечание. Глобальная минимальность указанной фильтрации подмногообразий типа V в симметрическом пространстве $\mathcal{M} = U(n)/U(n-1)\times U(1)$ $(= \mathbb{C}P^{n-1})$ была доказана ранее в работе А.Т.Фоменко [I0].

2. Симметрическое пространство типа

$$\mathcal{M} = SO(n)/SO(2)\times SO(n-2), \quad n \geqslant 3.$$

Полином Пуанкаре имеет вид

$$P(\mathcal{M};t) = 1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{4l-2}, \text{ если } n = 2l+1$$

$$P(\mathcal{M};t) = (1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2l-2})(1+t^{2l-2}), \text{ если } n = 2l$$

В этом случае $\mathfrak{g} = SO(n)$, $\mathfrak{h} = SO(n-2)\times SO(2)$, $G = so(n)$ и $H = so(n-2)\oplus so(2)$. Для подпространства $B = T_e\mathcal{M}$ выберем ортонормированный базис, состоящий из матриц $E_{ij} = (a^k_l)$ ($1 \le i \le 2$; $3 \le j \le n$), где

$$a^k_l = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{если } k=i,\ l=j \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{если } k=j,\ l=i \\ 0 & \text{для остальных случаев} \end{cases}$$

Рассмотрим [redacted] матрицу

$$J = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & 0 & & \\ \hline & & 1 & & & \\ & 0 & & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\end{array}}\right\}2 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\ \ddots\\1\end{array}}\right\}n-2 \end{array}$$

Очевидно, что J перестановочна со всеми матрицами из подгрупп $\mathcal{G} = SO(n-2) \times SO(2)$. Рассмотрим билинейную функцию $\omega(X,Y) = Tr(XJYJ^{-1})$, где $X, Y \in B$. Докажем, что она является внешней формой. Действительно, непосредственным вычислением можно показать, что для $X \in B$ всегда имеет место равенство

$$J^2 X J^{-2} = -X \tag{I3.4}$$

С другой стороны

$$\omega(X,Y) = Tr(XJYJ^{-1}) = Tr(YJ^{-1}XJ) \tag{I3.5}$$

Подставляя (I3.4) в (I3.5), получим

$$\omega(X,Y) = Tr(-YJ^{-1}J^2XJ^{-2}J) = -Tr(YJXJ^{-1}) = -\omega(Y,X).$$

Далее, проверим, что 2-форма ω инвариантна относительно действия группы $\mathcal{G}$. Если $h \in \mathcal{G}$, то

$$\omega(hXh^{-1}, hYh^{-1}) = Tr(hXh^{-1}JhYh^{-1}J^{-1}) =$$
$$= Tr(hXh^{-1}hJYJ^{-1}h^{-1}) = Tr(XJYJ^{-1}) = \omega(X,Y).$$

Тем самым 2-форма ω инвариантна. Пусть $X, Y \in B$ и

$|X| = |Y| = 1$. Как и в предыдущем случае, пользуясь связью функции следа с метрикой на пространстве матриц, легко показать, что $\|\omega\|^* = 1$, причём $\omega(X,Y) = 1$ в том и только в том случае, когда $JXJ^{-1} = -X$. Рассмотрим $2k$-ковекторы

$$\theta_k = \frac{1}{k!}\,\omega^k \quad , \; 1 \leq k \leq \frac{1}{2}\dim B$$

Очевидно, что θ_k является $\mathcal{G}$-инвариантным $2k$-ковектором из $\Lambda^{2k} B$. Точно как в предыдущем случае, можно проверить, что $\|\theta_k\|^* = 1$ и если ортонормированная система векторов $X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}, X_{2k}$ из пространства B такова, что $J X_{2j} J^{-1} = -X_{2j-1}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), то $\theta_k(X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}, X_{2k}) = 1$

Рассмотрим теперь подмногообразие типа

$$V = SO(n')/SO(2) \times SO(n'-2) \qquad (n' < n)$$

такое, что $SO(n')$ и $SO(n'-2)$ стандартно вложены, соответственно, в $SO(n)$ и $SO(n-2)$. Тогда V является вполне геодезическим подмногообразием. Для касательного пространство $T_e V$ выберем ортонормированный базис $\{E_{i'j'}\}$, который является частью базиса $\{E_{ij}\}$ пространства B. Положим $\dim V = 2k$. Заметим, что $J E_{2j} J^{-1} = -E_{1j}$ для $j = 3, 4, \ldots, n$. Учитывая $\mathcal{G}$-инвариантность θ_k мы имеем $(\theta_k, \pi_S \vec{V}_e) = 1$, и следовательно, $\|\pi_S \vec{V}_e\| \geq 1$. С другой стороны, по лемме II.2, $\|\pi_S \vec{V}_e\| \leq \|\vec{V}_e\| = 1$. Таким образом $\|\pi_S \vec{V}_e\| = 1$. Применив следствие I3.I мы можем заключить, что поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$.

3. Симметрическое пространство типа

$$\mathcal{M} = Sp(2n)/U(n) \quad , \; n \geq 2$$

Полином Пуанкаре

$$P(\mathcal{M};t)=(1+t^2)(1+t^4)\ldots(1+t^{2n}).$$

В этом случае $\mathcal{G}=Sp(2n)$, $\mathcal{H}=U(n)$, $G=sp(2n)$ и $H=u(n)$.

Опишем вложение подгруппы $U(n)$ в группу $Sp(2n)$. Группа $Sp(2n)$ рассматривается как подгруппа группы $SU(2n)$, состоящая из таких матриц g, что $gJ=J\bar{g}$, где

$$J=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & & 0\\ & -1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{matrix} & 0\end{array}\right]\begin{matrix}\}n\\ \\ \}n\end{matrix} \qquad (13.6)$$

Пусть $SO(2n)$ является подгруппой группы $SU(2n)$, состоящей из всех вещественных матриц, то есть таких матриц g, что $\bar{g}=g$. Тогда $U(n)=Sp(2n)\cap SO(2n)$. Заметим, что если $g\in U(n)$, то $gJ=Jg$, то есть J перестановочна со всеми матрицами из подгруппы $U(n)$. Изоморфизм $g\mapsto JgJ^{-1}$ представляет собой инволютивный автоморфизм группы $Sp(2n)$, подгруппой неподвижных точек которого совпадает с $U(n)$. Это нечто иное, как инволютивный автоморфизм σ, который вместе с группой $Sp(2n)$ задаёт симметрическое пространство $\mathcal{M}$. Следовательно, если $X\in B=T_e\mathcal{M}$, то $JXJ^{-1}=d\sigma(X)=-X$, то есть $JX=-XJ$.

Рассмотрим 2-форму $\omega(X,Y)=Re\{Tr\,XJY\}$, где $X,Y\in B$. Так как J перестановочна со всеми матрицами из $\mathcal{H}=U(n)$, то как и в пункте I, 2-форма ω инвариантна по отношению к действию группы $\mathcal{H}$. Положим

$$\theta_k = \frac{1}{k!}\,\omega^k \ , \quad 1 \le k \le \frac{1}{2}\dim T_e \mathcal{M} .$$

Точно как в пункте I мы можем доказать, что $\|\theta_k\|^* = 1$ и если ортонормированная система векторов $X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}, X_{2k}$ из пространства B такова, что $JX_{2j} = X_{2j-1}$ $(j=1,2,\ldots k)$, то $\theta_k(X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}, X_{2k}) = 1$.

Рассмотрим подмногообразие типа

$$V = Sp(2n')/U(n') \quad , n' < n$$

где $Sp(2n')$ и $U(n')$ вложены, соответственно, в $Sp(2n)$ и $U(n)$ следующим образом. Если $Q \in Sp(2n')$, то

$$i(Q) = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & Q & 0 \\ \hline 0 & & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-n' \\ \}\, 2n' \\ \}\, n-n' \end{array} \in Sp(2n)$$

где $i : Sp(2n') \to Sp(2n)$ обозначает определяемое вложение. $i(U(n')) = i(Sp(2n')) \cap U(n)$. Рассмотрим матрицу

$$J' = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{matrix} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n' \\ \}\, n' \end{array}$$

Тогда если $X \in B' = T_e V \subset T_e \mathcal{M} = B$, то

$$(iJ')X = JX \qquad (13.7)$$

Заметим, что J' для группы $Sp(2n')$ играет ту же роль, которую играет J для группы $Sp(2n)$. В частности, если $X \in B'$, то $J'X = -XJ'$. Выберем произвольную матрицу $X_1 \in B'$, $|X_1| = 1$. Положим $X_2 = J'X_1$. Покажем, что $X_2 \in B'$. Действительно, $(J'X_1)^* = X_1^* J'^* = (-X_1)(-J') = X_1 J' = -J'X_1$, то есть $J'X_1 \in su(2n')$. Далее $J'(J'X_1) = -J'(X_1 J') = -(J'X_1)J'$. С другой стороны так как $X_1 \in B'$, то $-J'X_1 = \overline{J'X_1}$. Таким образом $J'(J'X_1) = (\overline{J'X_1})J'$, то есть $J'X_1 \in sp(2n')$. Наконец, из того, что $J'(J'X_1)J'^{-1} = -J'X_1$, следует, что $J'X_1 \in B'$, поскольку отображение $J'XJ'^{-1}$, где $X \in sp(2n')$, совпадает с инволютивным автоморфизмом $d\sigma'$ алгебры $sp(2n')$ порождающий симметрическое пространство V.

Итак $X_2 \in B'$. Заметим, что X_1 и X_2 ортогональны между собой: $(X_1, X_2) = Re\{Tr X_1 X_2^*\} = -Re\{Tr X_1 J'X_1\} = 0$ (см. лемму 13.1). Легко проверяется, что $|X_2| = 1$. Далее выберем $X_3 \in B'$ так, чтобы X_3 ортогональны к X_1 и X_2. $|X_3| = 1$ и построим $X_4 = J'X_3$. Продолжая этот процесс мы можем построить ортонормированный базис $X_1, X_2, \dots, X_{2k-1}, X_{2k}$ ($k = \frac{1}{2}\dim V$) такой, что $J'X_{2j-1} = X_{2j}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) или $J'X_{2j} = -X_{2j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, k$). Принимая во внимание равенство (13.7) мы получим: $JX_{2j} = -X_{2j-1}$ $(j = 1, 2, \dots, k)$. Таким образом $\Theta_k(X_1, X_2, \dots, X_{2k-1}, X_{2k}) = 1$. Учитывая $\mathcal{G}$-инвариантность Θ_k мы имеем $(\Theta_k, \pi_5 \vec{V_e}) = (\Theta_k, \vec{V_e}) = 1$. Согласно формуле (1.2) $\|\pi_5 \vec{V_e}\| \geq 1$. С другой стороны, $\|\pi_5 \vec{V_e}\| \leq \|\vec{V_e}\| = 1$ (см. лемму 11.2). Следовательно, $\|\pi_5 \vec{V_e}\| = 1$. Из следствия 13.1 вытекает, что поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R$.

4. Симметрическое пространство типа

$$\mathcal{H} = SO(2n)/U(n) \quad , n \geq 2 .$$

Полином Пуанкаре

$$P(\mathcal{M};t)=(1+t^2)(1+t^4)\dots(1+t^{2n-2})$$

В этом случае $\mathcal{G}=SO(2n)$, $\mathcal{H}=U(n)$, $G=so(2n)$, и $H=u(n)$. Группа $U(n)$ вложена в $SO(2n)$ как в случае симметрического пространства $Sp(2n)/U(n)$, то есть если мы рассмотрим матрицу J, определенную в (I3.6), то $U(n)$ состоит из всех таких матриц g в $SO(2n)$, что $gJ=Jg$. Изоморфизм $g\mapsto JgJ^{-1}$ представляет собой инволютивный автоморфизм группы $SO(2n)$, подгруппой неподвижных точек которого совпадает с $U(n)$. Таким образом этот автоморфизм является инволютивным автоморфизмом σ, задающий симметрическое пространство $\mathcal{M}$. Рассмотрим подмногообразие типа

$$V=SO(2n')/U(n') \qquad (n'<n)$$

где $SO(2n')$ и $U(n')$ вложены, соответственно, в $SO(2n)$ и $U(n)$ следующим образом. Если $Q\in SO(2n')$, то

$$i(Q)=\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c|c|c}\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & 0 & 0\\ \hline 0 & Q & 0\\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\end{array}\right]\begin{array}{l}\}n-n'\\ \\ \}2n'\in SO(2n)\\ \\ \}n-n'\end{array}\end{array}$$

где $i:SO(2n')\to SO(2n)$ обозначает определяемое вложение. Тогда $i(U(n'))=i(SO(2n'))\cap U(n)$.

Далее, рассуждая совершенно аналогично случаю симметрического пространства типа $Sp(2n)/U(n)$ мы приходим к выводу: Поток V является потоком минимальной массы в классе $[V]_R$.

Глава III. ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВАЖНЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ В КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

§14. Подгруппы и картановские модели

1. Важнейшим классом симметрических пространств являются группы Ли. В этой главе мы будем использовать полученные в предыдущей главе результаты для изучения глобальной минимальности некоторых важных классов поверхностей в компактной группе Ли.

Рассмотрим связную компактную группу Ли G. Если группа Ли G снабжена инвариантной метрикой, то она превращается в симметрическое пространство. Пусть V является вполне геодезическим подмногообразием группы G. Тогда, как мы увидели (см. следствие 13.1), существует довольно простой критерий для исследования глобальной минимальности подмногообразия V в группе G. Обозначим через $A(V)$ минимальную подгруппу группы G, содержащую подмногообразие V (то есть такую подгруппу, которая сама содержится во всякой подгруппе, содержащей V).

Предложение 14.1 (см. [25]). Если V односвязно, то оно распадается на прямое произведение $V = K \times V'$, где K - компактная подгруппа группы G, а V' - вполне геодезическое подмногообразие группы G, не являющееся подгруппой. В этом случае $A(V)$ компактна и полупроста и если обозначим через $\tilde{A}(V)$ универсальную накрывающую группы $A(V)$, то $\tilde{A}(V) \cong K \times \hat{I}(V')_0$, причём V' вложена в $\hat{I}(V')_0$ в виде картановской модели (см. предложение 9.I).

Из предложения I4.I видно, что возможны только два типа вложения вполне геодезического подмногообразия в группу Ли: вложение в виде подгруппы и вложение в виде картановской модели.

Теорема I4.I. Пусть V - компактное замкнутое симметрическое пространство, вложенное в свою группу преобразований $\mathcal{G}=I(V)_0$ в виде картановской модели. Обозначим через соответствующий инволютивный автоморфизм, а через $\mathcal{H}$ - множество всех неподвижных точек автоморфизма. Тогда V имеет минимальную массу в классе $[V]_R\in H_*(N_*(\mathcal{G}))$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{H}$ является потоком минимальной массы в классе $[\mathcal{H}]_R\in H_*(N_*(\mathcal{G}))$.

Доказательство. Положим $\dim V=k$, $\dim\mathcal{G}=r$ и $\dim\mathcal{H}=r-k$. Обозначим через G и H алгебры Ли групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ соответственно. Положим $B=T_eV$. Тогда $G=H\oplus B$, причём $(X,Y)=0$ если $X\in H$ и $Y\in B$. Подгруппа $\mathcal{H}$ и подмногообразие V оба удовлетворяют условию (I2.2), причём их касательные пространства H и B в точке e являются ортогональными дополнениями друг к другу. Согласно теореме I2.3 они либо оба имеют минимальную массу каждый в своем классе гомологий, либо оба не являются потоками минимальной массы каждый в своем классе гомологий.

Замечание. Согласно теореме I2.2, для любой замкнутой поверхности V компактного симметрического пространства $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (I2.2) и имеющей точку e регулярной точкой, мы имеем $V\sim S_\xi$, где $\xi=vol(V)\pi_S\vec{V_e}$, а S_ξ - поток, ассоциированный с ξ. По теореме II.I $M(S_\xi)=\|\xi\|=$

$= vol(V)\|\pi_S \vec{V}_e\|$. Тогда отношение

$$0 \leq \frac{M(S_\xi)}{M(V)} = \frac{vol(V)\|\pi_S \vec{V}_e\|}{vol(V)} = \|\pi_S \vec{V}_e\| \leq 1$$

является мерой отклонения массы потока V от минимальной массы своего класса гомологий; причём эта величина $\|\pi_S \vec{V}_e\|$ позволяет полностью определить массу потока V по массе потока S_ξ , который в явном виде предъявлен для каждого класса гомологий. Величина $\|\pi_S \vec{V}_e\|$ заключена между значениями 0 и I, причём если она равна I, то V является потоком минимальной массы в своем классе гомологий. Второй крайний случай (то есть когда $\|\pi_S \vec{V}_e\| = 0$) означает, что поток V гомологичен нулю. Если $\|\pi_S \vec{V}_e\| > 0$, то V реализует нетривиальный цикл в группе гомологий многообразия $\mathcal{H}$, так что условие " реализации нетривиального цикла" в этом случае представляется весьма слабым по сравнению с условием глобальной минимальности.

Вернёмся к ситуации, рассматриваемой в теореме I4.I. Видим, что подгруппа $\mathcal{G}$ реализует нетривиальный цикл гомологий группы $\mathcal{O}\!\!\!\!/$ тогда и только тогда, когда подмногообразие V обладает таким свойством. Этот факт был показан А.Т.Фоменко [25] путём исследования отдельных серий неприводимых симметрических пространств.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать некоторые простейшие примеры применения полученного необходимого и достаточного условия глобальной минимальности потока.

2. Рассмотрим случай, когда подгруппа $\mathcal{G}$ является нормальным делителем.

С л е д с т в и е 14.1. Если $\mathfrak{H}$ является замкнутым нормальным делителем связной компактной группы Ли $\mathfrak{G}$, то поток $\mathfrak{H}$ имеет минимальную массу в классе $[\mathfrak{H}]_R$; причём любой целочисленный поток минимальной массы из класса $[\mathfrak{H}]_R$, носитель которого содержит точку e, совпадает с подгруппой $\mathfrak{H}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathfrak{H}$ – нормальный делитель, то $Ad_g H = H$ для любого преобразования g из $\mathfrak{G}$. Следовательно, $Ad_g \vec{\mathfrak{H}}_e = \vec{\mathfrak{H}}_e$. Таким образом $\vec{\mathfrak{H}}_e \in \Lambda_*^{SI}$ и $\pi_S \vec{\mathfrak{H}}_e = \vec{\mathfrak{H}}_e$, и следовательно, $\|\pi_S \vec{\mathfrak{H}}_e\| = \|\vec{\mathfrak{H}}_e\| = 1$. По следствию 13.1, $\mathfrak{H}$ является потоком минимальной массы в классе $[\mathfrak{H}]_R$.

Заметим, что $F_e^S(\vec{\mathfrak{H}}_e) = \{\vec{\mathfrak{H}}_e\}$. Предположим, что целочисленный поток S имеет минимальную массу в классе $[\mathfrak{H}]_R$. По теореме 11.2 $\vec{S}_x \in F_x^S(\vec{\mathfrak{H}}_e)$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Мы будем рассматривать S как $(r-k)$-форму с коэффициентами в пространстве распределений следующим образом $(r = \dim \mathfrak{G},\ k = \dim \mathfrak{H})$. Пусть через $e_1, e_2, \ldots, e_r$ обозначается некоторый ортонормированный базис алгебры G, а через $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r$ – двойственный ему базис пространства $\Lambda^1 G$. Тогда можно выражать

$$S = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} u_{i_1 i_2 \ldots i_k} D_k(\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k})$$

где D_k – изоморфизм двойственности Пуанкаре, а $u_{i_1 \ldots i_k} \in E_0(\mathfrak{G})$ определяется формулой

$$u_{i_1 \ldots i_k}(f) = S(f\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k}), \quad f \in E^0(\mathfrak{G}).$$

Отсюда для произвольной k-формы $\varphi = \sum f_{i_1 \ldots i_k} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k}$ имеем

$$S(\varphi) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} u_{i_1 \ldots i_k}(f_{i_1 \ldots i_k})$$

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\partial S = (-1)^k \sum_{i=1}^{r} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le r} (\nabla_{e_i} u_{i_1\dots i_k})\,\omega^i D_k(\omega^{i_1}\wedge\dots\wedge\omega^{i_k}) \quad \text{(I4.I)}$$

Предположим теперь, что $e_1,\dots,e_r$ выбраны так, чтобы $\vec{\mathcal{G}}_e = e_1\wedge e_2\wedge\dots\wedge e_k$. Тогда $S = uD_k(\omega^1\wedge\dots\wedge\omega^k)$ Так как $\partial S = 0$ то по формуле (I4.I) мы имеем $\nabla_{e_i} u = 0$ для $i = 1, 2, \dots, k$. Это означает, что S и, тем более, $spt\,S$ инвариантны относительно левых сдвигов [redacted] $L_h, h\in\mathcal{G}$. Отсюда, если $g\in spt\,S$, то $spt\,S$ содержит $R_g(\mathcal{G})$, где R_g – правый сдвиг на элемент $g\in\mathcal{G}$. Так как S является замкнутым целочисленным потоком минимальной массы, то k-мерная хаусдорфова мера $spt\,S$ конечна. Следовательно $spt\,S$ является объединением конечного числа компонент вида $R_g(\mathcal{G})$. В [2] утверждается, что любой замкнутый целочисленный k-поток носитель которого есть k-мерное подмногообразие, с точностью до целого множителя задаётся интегрированием по этому подмногообразию. Наконец, так как $S\sim\mathcal{G}$, то ясно, что $spt\,S = \mathcal{G}$ и $S = \mathcal{G}$. Следствие I4.I доказано.

Для группы $SO(4)$ изучение потоков минимальной массы можно довести до конца. Группа $SO(4)$ не проста. Её алгебра Ли $so(4)$ разлагается на прямую сумму $so(3)\oplus so(3)$. Обозначим через A и B нормальные делители, соответствующие этим идеалам. Фундаментальные классы $[A]$ и $[B]$ представляют собой примитивные образующие кольца $H_*(SO(4);\mathbb{R}) = \Lambda(x_3, y_3)$. Имеем $H_3(SO(4);\mathbb{Z}) = H_3(I_*(SO(4))) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} = \{m[A]+n[B];\, m,n\in\mathbb{Z}\}$.

С л е д с т в и е I4.2. Любой класс α из $H_3(I_*(SO(4)))$ стабилен, причём $\|\alpha_R\| = \|\alpha\|$. Пусть целочисленный поток $S\in\alpha =$

$= m[A]+n[B]$. Тогда S имеет минимальную массу в классе α в том и только в том случае, когда S является подмногообразием, состоящим из m компонент вида $L_g(A)$ и n компонент вида $L_{g'}(B)$, где $L_g(A)$ и $L_{g'}(B)$ обозначают образы подгрупп A и B при левых сдвигах L_g и $L_{g'}$ $(g, g' \in SO(4))$ соответственно.

Доказательство. В случае, когда α совпадает с $m[A]$ или $n[B]$, утверждение непосредственно вытекает из следствия I4.I. Рассмотрим $\alpha = m[A]+n[B]$ $(m,n \neq 0)$. Обозначим через ω_A и ω_B простые $SO(4)$-инвариантные 3-формы, двойственные 3-векторам $\vec{A}_e$ и $\vec{B}_e$ соответственно. Легко проверяется, что $\|\omega_A+\omega_B\|^* = 1$ и $\|m\vec{A}_e+n\vec{B}_e\| = m\|\vec{A}_e\| + n\|\vec{B}_e\| = m+n$. Отсюда мы имеем: $F_e^S(m\vec{A}_e+n\vec{B}_e)\cap G_e^3 = \{\vec{A}_e, \vec{B}_e\}$, где через G_e^3 обозначается множество всех единичных простых 3-векторов из $\Lambda_3\{so(4)\}$. Видно, что если целочисленный поток S является объединением компонент вида $L_g(A)$ и $L_{g'}(B)$ то $\vec{S}_x$ в каждой точке его носителя совпадает либо с $L_x\vec{A}_e$ либо с $L_x\vec{B}_e$, то есть $\vec{S}_x \in F_x^S(m\vec{A}_e+n\vec{B}_e)$ почти всюду в смысле меры $\|S\|$. Согласно теореме II.2 поток S имеет минимальную массу в классе α_R. Отсюда следует также, что $\|\alpha\| = \|\alpha_R\|$.

Доказательство обратного утверждения аналогично доказательству следствия I4.I.

Замечание. Согласно следствию I4.2, подгруппа $SO(3)$, стандартно вложенная в группу $SO(4)$, а также проективное пространство, вложенное в $SO(4)$ в виде картановой модели, не являются потоками минимальной массы в своем классе гомологий.

3. Рассмотрим вложение $SU(2)$ в $SU(n)$. Напомним,

что в алгебре Ли всех косоэрмитовых матриц порядка n существует инвариантная метрика

$$(A,B) = Re\{Tr\, AB^*\}\ ,\ (A,A) = |A|^2 \qquad (14.2)$$

Согласно лемме 13.1 трилинейная функция $\sqrt{2}\,Re\{Tr\, ABC\}, A,B,C \in su(n)$, является внешней инвариантной 3-формой.

Лемма 14.1. Комасса 3-формы $\sqrt{2}\,Re\{Tr\, ABC\}$ в алгебре Ли $su(n)$ равна 1, причём $\sqrt{2}\,Re\{Tr\, ABC\} = 1$ для $|A| \leq 1$, $|B| \leq 1$, $|C| \leq 1$ тогда и только тогда, когда систему векторов A,B,C можно получить от ортонормированной системы векторов E_1, E_2, E_3 при некотором преобразовании типа Ad_g, $g \in SU(n)$, где

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Доказательство. Пусть $A,B,C \in su(n)$ и $|A| = |B| = |C| = 1$. Известно, что можно выбрать $D \in SU(n)$ такую, что

$$DAD^{-1} = \begin{bmatrix} i\varphi_1 & & & 0 \\ & i\varphi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & i\varphi_n \end{bmatrix} \qquad (14.3)$$

где $\varphi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$; и $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$. Ввиду инвариантности метрики мы имеем $|DAD^{-1}| = |A| = 1$. Следовательно $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = 1$.

Так как форма $Re\{Tr\,ABC\}$ инвариантна, то можно предположить, что A имеет диагональный вид (I4.3).

Положим $S=BC$. Докажем, что $Im\{Tr\,S\}=Im\{Tr\,ABC\}=0$. Действительно, как выше, мы можем предполагать, что B имеет вид

$$B=\begin{bmatrix} i\varrho_1 & & & \\ & i\varrho_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & i\varrho_n \end{bmatrix},\ \varrho_i\in\mathbb{R}.$$

Так как $C=(c^i_j)\in su(n)$, то диагональные элементы c^i_i $(i=1,2,\dots,n)$ чисто мнимы. Отсюда $Tr(ABC)$ действителен и $Im\{Tr\,S\}=0$. Положим $S=(s^i_j)_n$, $s^i_i=P_i+iQ_i$, где $P_i, Q_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,\dots,n)$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i=Im\{Tr\,S\}=0$ и

$$p=\sum_{i=1}^{n}|Q_i|\leq\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}b^i_jc^j_i\right|\leq\sum_{1\leq i,j\leq n}|b^i_j||c^j_i| \tag{I4.4}$$

$$\leq\sqrt{\Big(\sum_{i,j}|b^i_j|^2\Big)\Big(\sum_{i,j}|c^j_i|^2\Big)}=|B|\cdot|C|=1.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i=0$, то среди Q_i есть неотрицательные. Не уменьшая общности можно считать, что $Q_i\geq 0$, $i=1,2,\dots,m$ и $Q_j<0$ при $j=m+1,\dots,n$. Тогда мы имеем

$$|Q_1|+|Q_2|+\dots+|Q_m|-|Q_{m+1}|-\dots-|Q_n|=0$$

или $\sum\limits_{i=1}^{m}|Q_i|=\sum\limits_{j=m+1}^{n}|Q_j|$. Отсюда $1\geq p=\sum\limits_{i=1}^{n}|Q_i|=2\sum\limits_{i=1}^{m}|Q_i|$.

$$\sum_{i=1}^{m}|Q_i|^2\leq\Big(\sum_{i=1}^{m}|Q_i|\Big)^2\leq\frac{1}{4} \tag{I4.5}$$

$$\sum_{j=m+1}^{n}|Q_j|^2\leq\Big(\sum_{j=m+1}^{n}|Q_j|\Big)^2=\Big(\sum_{i=1}^{m}|Q_i|\Big)^2\leq\frac{1}{4} \tag{I4.6}$$

Из (I4.5) и (I4.6) вытекает

$$\sum_{i=1}^{n}|Q_i|^2=\sum_{i=1}^{m}|Q_i|^2+\sum_{j=m+1}^{n}|Q_j|^2\leq\frac{1}{2} \qquad (I4.7)$$

Итак мы получим

$$|\sqrt{2}\,Re\{Tr\,ABC\}=\sqrt{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i Q_i\right|\leq$$

$$\leq\sqrt{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}Q_i^2}\leq 1 \qquad (I4.8)$$

Допустим теперь, что $\sqrt{2}Re\{Tr\,ABC\}=1$. Тогда требуются, чтобы равенства в (I4.8), (I4.6),(I4.5) и (I4.4) достигаются при A, B, C. Равенство в соотношении (I4.8) достигается в том и только в том случае, когда $\varphi_i=\theta Q_i$ $(i=1,2,\dots,n)$, где $\theta=\pm\sqrt{2}$. Равенство в (I4.6) и (I4.5) достигаются тогда и только тогда, когда для некоторого $r: 1\leq r\leq m$, и некоторого $s: m+1\leq s\leq n$, имеем $Q_r=-Q_s=\frac{1}{2}$, а все остальные $Q_i=0$ $(1\leq i\leq m;\ i\neq r)$ и $Q_j=0$ $(m+1\leq j\leq n, j\neq s)$. Допустим, что равенства в соотношениях (I4.6) и (I4.5) уже достигнуты. Тогда легко проверяется, что равенство в соотношении (I4.4) достигается для таких и только таких матриц $B,C\in su(n)$, для которых $b_s^r=\bar{b}_r^s\neq 0$, $c_r^s=\varepsilon\bar{b}_s^r$, $c_s^r=\varepsilon\bar{b}_r^s$ и все остальные элементы b_j^i, c_j^i равны нулю, где $\varepsilon=\pm i$. Наконец, систему векторов A, B, C, удовлетворяющую всем перечисленным требованиям, можно привести к системе векторов E_1, E_2 и E_3 при помощи некоторого преобразования типа Ad_g, где $g\in SU(n)$. Тем самым лемма I4.I доказана.

С л е д с т в и е I4.3. Пусть подгруппа $SU(2)$ стандартным образом вложена в группу $SU(n)$ и положим $\alpha=[SU(2)]\in H_3(I_*(SU(n)))$. Тогда поток $SU(2)$ имеет минимальную массу в классе α_R, причём $\|\alpha_R\| = \|\alpha\|$ и класс α стабилен.

Доказательство. Положим $\xi = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \in \Lambda_3 su(n)$. Из леммы I4.I следует, что $F_e^{S*}(\mathcal{J}_S \xi) = \{\sqrt{2}\, Re\, Tr(ABC)\}$ и $F_e^S(\mathcal{J}_S \xi) = \{Ad_g \xi, g \in SU(n)\}$. В частности, $\xi \in F_e^S(\mathcal{J}_S \xi)$, то

есть $SU(2)$ имеет минимальную массу в классе $\alpha_R = [SU(2)]_R$ (см. следствие I3.I). Тем самым следствие I4.3 доказано.

Замечание. Опираясь на лемму I4.I можно доказать, что если $SO(3)$ вложена в $SO(n)$ стандартным образом, то поток $SO(3)$ не имеет минимальную массу в классе $[SO(3)]_R$ (см. также замечание к следствию I4.2). На этом мы не будем останавливаться.

4. Рассмотрим вложения подгрупп $U(k)$ в группу $U(n)$.

Следствие I4.4. Для любых целых чисел k и n $(0 < k < n)$ поток $U(k)$, где $U(k)$ стандартно вложена в $U(n)$, не имеет минимальную массу в классе $[U(k)]_R \in H_*(N_*(U(n)))$.

Доказательство. Выберем в алгебре Ли $u(n)$ ортонормированный базис из матриц e_{ij} $(1 \le i \le j \le n)$ и f_{sl} $(1 \le s < l \le n)$, определенным следующим образом. Если положим $e_{ij} = (v_q^p)$ и $f_{sl} = (u_q^p)$, то

$$v_q^p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\, i & \text{если } p=i, q=j \text{ или } p=j, q=i \\ 0 & \text{для всех остальных случаев} \end{cases}$$

$$u_q^p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{если } p=s,\ q=l \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{если } p=l,\ q=s \\ 0 & \text{для всех остальных случаев} \end{cases}$$

Группа $U(n)$ разлагается на полупрямое произведение $U(n) = U^*(1)\times SU(n)$, где $U^*(1)$ состоит из скалярных матриц с определителем единичного модуля, а $SU(n)$ – из всех матриц в $U(n)$, имеющих определитель I. Соответственно алгебра Ли $u(n)$ разлагается на прямую сумму $u(n)=u^*(1)\oplus su(n)$. В пространстве $\Lambda^1\{u(n)\}$ выберем базис ω^{ij} $(1\leq i\leq j\leq n)$, θ^{sl} $(1\leq s<l\leq n)$, двойственный базису $\{e_{ij}, f_{se}\}$. Положим $\omega=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\omega^{ii}$. Очевидно, что ω есть инвариантная I-форма на группе $U(n)$, причём $(\omega,\eta)\leq 1$ для любого вектора $\eta : |\eta|=1$ и равенство достигается в единственном случае, когда $\eta=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}e_{ii}$. В дальнейшем положим $\eta=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}e_{ii}$.

Рассмотрим стандартное вложение $U(k)$ в $U(n)$. $U(k)$ допускает разложение в полупрямое произведение $U(k)=U^{**}(1)\times SU(k)$, где $U^{**}(1)$ состоит из скалярных матриц в $U(k)$. Видно, что $SU(k)$ вложена в $SU(n)$ стандартным образом. Положим $U=U(k)$, $V=SU(k)$. Пусть (k^2-1)-форма $\Omega\in F_e^{S*}(\pi_S\vec{V}_e)$. Тогда $\omega\wedge\Omega\in F_e^{S*}(\eta\wedge\pi_S\vec{V}_e)$. Положим $\eta'=\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k}e_{ii}$. Очевидно $\omega(\eta)>\omega(\eta')$. Отсюда мы имеем $\omega\wedge\Omega(\eta\wedge\vec{V}_e)>\omega\wedge\Omega(\eta'\wedge\vec{V}_e)=\omega\wedge\Omega(\vec{U}_e)$. Это означает, что $\vec{U}_e\notin F_e^S(\pi_S\vec{U}_e)$. Согласно следствию I3.I, $U(k)$ не имеет минимальную массу в классе $[U(k)]_R$. Тем самым следствие I4.4 доказано.

§I5. Примитивные циклы Понтрягина в компактных группах Ли

В этом параграфе мы применим теоремы I2.I – I2.4 к исследованию глобальной минимальности примитивных циклов гомологий компактных групп Ли, построенных Л.С.Понтрягиным [26] (см.также

[27]).

I. Пусть G связная компактная группа Ли и пусть K – её замкнутая одномерная подгруппа. Обозначим через $Z(K)$ связную компоненту единицы в централизаторе подгруппы K. Пространство левых классов смежности группы G по подгруппе $Z(K)$ обозначим через M. Рассмотрим отображение $M\times K$ в G, задаваемое формулой

$$\varphi(X,h) = xhx^{-1} \tag{I5.I}$$

где $X\in M$, $h\in K$, и x – произвольный элемент группы G, входящий в класс X. Очевидно, что значение xhx^{-1} не зависит от выбора $x\in X$. Е.Б.Дынкин [27] показал, что поверхность $V=\varphi(M\times K)\subset G$ реализует примитивный элемент в алгебре гомологий $H_*(N_*(G)))$. Поверхность V регулярна во всех её точках за исключением точки e, которая является единственной особой точкой поверхности V. В окрестности точки e поверхность V представляет собой конус с вершиной в точке e и основанием M.

Для групп $U(n), SO(2n+1)$ и $Sp(2n)$ описанная выше конструкция позволяет получить все примитивные классы гомологий, в том числе все циклы, построенные Л.С.Понтрягиным. Для группы $SO(2n)$ циклы, построенные по этой конструкции, вместе с вполне геодезическим проективным пространством RP^{2n-1} вложенным в $SO(2n)$ в виде картановской модели, дают полный список примитивных классов гомологий.

Из формулы (I5.I) следует, что $Int_g V\subset V$ для каждого элемента $g\in G$, то есть поверхность V выдерживает действие группы внутренних автоморфизмов группы G. Под действием этой группы поверхности V расслаивается на орбиты, пространство которых служит окружность $\mathcal{K}$. Орбита точки e содержит только одну точку, и следовательно, является особой. Все остальные орбиты главные (относительно поверхности V) и гомеоморфны M. Так как $\mathcal{K}$ содержится в своём централизаторе $Z(\mathcal{K})$, то $\mathcal{K}$ содержится в центре подгруппы $Z(\mathcal{K})$. Обозначим через H и K алгебры Ли групп $Z(\mathcal{K})$ и $\mathcal{K}$ соответственно и выберем подалгебру $H' \subset H$ такую, что $H = K \oplus H'$, причём K и H' ортогональны. Пусть через Q обозначается подгруппа в $Z(\mathcal{K})$, соответствующая подалгебре H'.

Теорема I5.I. I) Поверхность V удовлетворяет условию (I2.2).

2) Поток V имеет минимальную массу в классе $[V]_R \in H_*(N_*(\mathcal{G}))$ тогда и только тогда, когда поток Q имеет минимальную массу в классе $[Q]_R \in H_*(N_*(\mathcal{G}))$.

Доказательство. Обозначим через X_0 класс из M, содержащий единицу e группы $\mathcal{G}$ (то есть класс смежности подгруппы $Z(\mathcal{K})$). Для любых $X \in M$ и $h \in \mathcal{K}$ мы имеем

$$\varphi(X,h) = c(X)\, h\, c(X)^{-1} \qquad \text{(I5.2)}$$

где $c(X)$ - произвольный элемент из класса X. Очевидно, что правая часть формулы (I5.2) не зависит от выбора $c(X)$. Заметим, что $\varphi(X_0,h) = h \in \mathcal{K}$. Положим $c(X_0) = e$ и для X из некоторой достаточной малой окрестности X_0 в пространстве M выберем $c(X)$ так, чтобы $c(X)$ было дифференцируемым отображением этой окрестности в группу $\mathcal{G}$. Докажем, сначала, что касательное пространство к поверхности V в произвольной точке $a \in \mathcal{K} \setminus \{e\}$, отнесенное к точке e сдвигом $L_{a^{-1}}$, представляет собой ортогональное дополнение к касательному пространству к подгруппе Q, то есть к H'. Продифференцировав обе части равенства (I5.2) и положив $X = X_0$, $h = a$, получим

$$d\varphi\big|_{X_0 \times a} = R_a\, dc\big|_{X=X_0} + dh\big|_{h=a} + L_a\, dc^{-1}\big|_{X=X_0} \qquad (I5.3)$$

Следовательно,

$$L_{a^{-1}}\left(d\varphi\big|_{X_0 \times a}\right) = L_{a^{-1}} R_a\left(dc\big|_{X=X_0}\right) + dh\big|_{h=e} + dc^{-1}\big|_{X=X_0} \qquad (I5.4)$$

Из того, что $c(X)c(X)^{-1} = e$ и $c(X_0) = e$ следует

$$dc\big|_{X=X_0} + dc^{-1}\big|_{X=X_0} = 0 \qquad (I5.5)$$

Заметим, что действие присоединенной группы $Ad_{Z(\mathcal{K})}$ на алгебре Ли G группы $\mathcal{G}$ оставляет инвариантными подпространство H и его ортогональное дополнение B: $G = H \oplus B$. Пусть $dc\big|_{X=X_0}$ разлагается в сумму $u + v$, где $u \in H$, $v \in B$. Так как a принадлежит центру подгруппы $Z(\mathcal{K})$, то $L_{a^{-1}} R_a u = Ad_{a^{-1}} u = u$, $u \in H$. Отсюда мы имеем $L_{a^{-1}} R_a (dc\big|_{X=X_0}) = L_{a^{-1}} R_a v + u$. Принимая во внимание равенство (I5.5) мы получим

$$L_{a^{-1}} R_a\left(dc\big|_{X=X_0}\right) + dc^{-1}\big|_{X=X_0} = L_{a^{-1}} R_a v - v \in B \qquad (I5.6)$$

Подставив значение в (I5.6) в формулу (I5.4) получим

$$L_{a^{-1}}\left(d\varphi\big|_{X_0 \times a}\right) \in B \oplus K \qquad (I5.7)$$

Это означает, что касательное пространство к V в точке a, отнесенное к точке e сдвигом $L_{a^{-1}}$, является ортогональным дополнением к H'.

Докажем теперь первое утверждение. Допустим, что x – произвольная регулярная точка поверхности и пусть x находится на орбите точки a. Тогда найдется такой элемент $g \in \mathcal{G}$, что $Int_g : V \to V$, причём $Int_g x = a$ и $Ad_g \vec{V}_x = \vec{V}_a$. Далее, из соотношения (15.7) вытекает, что $L_{a^{-1}} Ad_g \vec{V}_x = L_{a^{-1}} \vec{V}_a = \xi$, где с простым k-вектором $\xi \in \Lambda_k G$ ассоциировано подпространство $B \oplus K$. Если y – другая регулярная точка V, то существуют $b \in \mathcal{K} \setminus \{e\}$ и $p \in \mathcal{G}$ такие, что $L_{b^{-1}} Ad_p \vec{V}_y = \xi$. Следовательно, $(Ad_{p^{-1}} L_b L_{a^{-1}} Ad_g) \vec{V}_x = \vec{V}_y$. Таким образом поверхность V удовлетворяет условию (12.2).

Второе утверждение непосредственно следует из теоремы 12.3 и соотношения (15.7). Тем самым теорема 15.1 доказана.

2. Случай $\mathcal{G} = U(n)$. Рассмотрим n-мерное комплексное евклидово пространство C^n с ортонормированным базисом e_1, $e_2, \dots, e_n$. В качестве $\mathcal{K}$ возьмем одномерную подгруппу всех унитарных преобразований, которые переводят в себя прямую, натянутую на e_1 и оставляют неподвижным её ортогональное дополнение. В этом случае $Z(\mathcal{K})$ является прямым произведением $\mathcal{K} \times U(n-1)$, где $U(n-1)$ – подгруппа в $U(n)$, состоящая из всех преобразований, которые оставляют неподвижным вектор e_1 и переводят в себя $(n-1)$-мерное подпространство C^{n-1}, натянутое на векторах $e_2, e_3, \dots, e_n$. Очевидно, что в качестве Q можно взять подгруппу $U(n-1)$. Тогда примитивный цикл V, построенный по описанной выше общей конструкции, совпадает с $(2n-1)$-мерным циклом P_n, построенным Понтрягиным [26] (см. также [27]). Из теоремы 15.1 и следствия

I4.4 вытекает

Следствие I5.I. Поток P_n не имеет минимальной массы в классе $[P_n]_R \in H_{2n-1}(N_*(U(n)))$.

3. Случай $G = SO(n)$. Рассмотрим сначала, группу $SO(2l)$. Л.С.Понтрягин [26] построил цикл X_{2l-1}, реализующий примитивный элемент в кольце гомологий $H_*(SO(2l); R)$. А.Т.Фоменко [29] показал, что цикл X_{2l-1} является вполне геодезическим проективным пространством, вложенным в $SO(2l)$ картановским отображением. Согласно теореме I4.I поток X_{2l-1} имеет минимальную массу в классе $[X_{2l-1}]_R$ тогда и только тогда, когда $SO(2l-1)$, стандартно вложенная в $SO(2l)$, имеет минимальную массу в классе $[SO(2l-1)]_R$.

Перейдем к рассмотрению группы $SO(2l+1)$. Пусть R^{2l+1} — $(2l+1)$-мерное вещественное евклидово пространство с ортонормированным базисом $e_1, e_2, \dots, e_{2l+1}$. В качестве K возьмем одномерную подгруппу всех преобразований из $SO(2l+1)$, переводящих в себя плоскость, натянутую на векторах e_1 и e_2 и оставляющих неподвижным её ортогональное дополнение. В этом случае $Z(K)$ представляет собой прямое произведение $K \times SO(2l-1)$, где $SO(2l-1)$ — подгруппа, состоящая из всех ортогональных преобразований, переводящих в себя $(2l-1)$-мерное линейное подпространство, натянутое на векторах $e_3, e_4, \dots, e_{2l+1}$ и оставляющих его ортогональное дополнение неподвижным. Положим $Q = SO(2l-1)$. Тогда примитивный цикл V, построенный по общей конструкции, совпадает с $(4l-1)$-мерным циклом Σ_{2l}, построенным Понтрягиным [26] (см. также [27]). Из теоремы I5.I вытекает

Следствие I5.2. Поток Σ_{2l} имеет минимальную массу в классе $[\Sigma_{2l}]_R$ тогда и только тогда, когда $SO(2l-1)$, стандартно вложенная в $SO(2l+1)$, имеет минимальную массу в классе $[SO(2l-1)]_R$.

Замечание. Как мы показали, $SO(3)$ стандартно вложенная в $SO(5)$, не является потоком минимальной массы в своём классе гомологий. Следовательно, согласно следствию I5.2, цикл Σ_4 не имеет минимальной массы в классе $[\Sigma_4]_R \in H_7(N_*(SO(5)))$.

4. Случай $\mathcal{G} = Sp(2n)$. Симплектическую группу $Sp(2n)$ можно рассматривать как подгруппу всех унитарных преобразований комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^{2n}$, оставляющих инвариантной кососимметрическую билинейную форму

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \dots + x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}$$

где $(x_1, \dots, x_{2n})$ и $(y_1, \dots, y_{2n})$ - координаты двух векторов по некоторому фиксированному ортонормированному базису $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$. В качестве K возьмём одномерную подгруппу, состоящую из всех симплектических преобразований, переводящих в себя невырожденную плоскость натянутую на векторах e_1, e_2, и оставляющих неподвижным её ортогональное дополнение. В этом случае $Z(K)$ представляет собой прямое произведение $K \times Sp(2n-2)$, где через $Sp(2n-2)$ обозначается подгруппа всех симплектических преобразований, которые преобразуют в себя линейное подпространство, натянутое на векторах $e_3, e_4, \dots, e_{2n}$ и оставляют неподвижной плоскость, натянутую на векторах e_1, e_2. Положим $Q = Sp(2n-2)$. Тогда примитивный цикл V, полученный от общей конструкции, совпадает с $(4n-1)$-мерным циклом T_{2n}, построенным Понтрягиным [26] (см. также [27]). Из теоремы I5.I вытекает

С л е д с т в и е I5.3 . Поток T_{2n} имеет минимальную массу в классе $[T_{2n}]_R \in H_{4n-1}(N_*(Sp(2n)))$ в том и только в том случае, когда $Sp(2n-2)$ является потоком минимальной массы в классе $[Sp(2n-2)]_R \in H_*(N_*(Sp(2n)))$.

Заметим, что согласно следствию I4.3 подгруппа $Sp(2) = SU(2)$ стандартно вложенная в $SU(4)$,является потоком минимальной массы в классе $[Sp(2)]_R \in H_3(N_*(SU(4)))$, и следовательно, в классе $[Sp(2)]_R \in H_3(N_*(Sp(4)))$,где $Sp(4)$ считается подгруппой группы $SU(4)$. Этот факт вместе со следствием I5.3 доказывает следующее

С л е д с т в и е I5.4. Поток T_4 имеет минимальную массу в классе $[T_4]_R \in H_7(N_*(Sp(4)))$.

Замечание. Поверхность T_4 имеет единственную особую точку. Тем самым мы получили пример замкнутого глобально минимального"конуса", коразмерности 3 в вещественной группе Ли $Sp(4)$.

§I6. "Двойные конусы" в группе $SU(n)$

В отличие от групп $U(n)$, $SO(2n+1)$ и $Sp(2n)$ циклы в $SU(n)$, построенные Понтрягиным [26] , не получаются при помощи описанной в предыдущем параграфе общей конструкции для получения примитивных циклов. Л.С.Понтрягин [26] построил для $SU(n)$ цикл Y_{2n-1} ,который по существу является образом цикла $P_n \subset U(n)$ при отображении F группы $U(n)$ в группу $SU(n)$, определенном формулой

$$F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & |A|^{-1} \end{pmatrix}, \quad A \in U(n),$$

где через $|A|$ обозначается определитель матрицы A. Однако построенный таким образом Y_{2n-1} не выдерживает внутренние автоморфизмы. Мы построим новый цикл $\widetilde{P}_n$ в $SU(n)$, который, с одной стороны, реализует тот же класс гомологий, что и Y_{2n-1}, а с другой стороны, уже инвариантен относительно внутренних автоморфизмов.

Пусть $\mathbb{C}^n$ - n-мерное комплексное евклидово пространство. Каждому вектору z из $\mathbb{C}^n$, имеющему единичную длину, отнесем оператор P_z, определенный равенством

$$P_z x = (x, z) z .$$

Это оператор ортогонального проектирования на прямую вектора. Он обладает свойством: если $A \in U(n)$, то $P_{Az} = A P_z A^{-1}$, в частности $P_{\alpha z} = P_z$ для числа α такого, что $|\alpha| = 1$. В матричном виде P_z записывается формулой

$$P_z = z z^* \qquad (16.1)$$

где z - координаты в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Преобразование

$$\varphi(z, \lambda) = \lambda P_z + (E - P_z) \qquad (16.2)$$

при $|\lambda| = 1$ является унитарным преобразованием с определителем λ. Полагая $\lambda = e^{it} (0 \le t < 2\pi)$ мы построим новое отображение

$$\tilde{\varphi}(z, t) = e^{-\frac{it}{n}} \varphi(z, e^{it}) \qquad (16.3)$$

Рассмотрим множество всех единичных векторов z и отождествим векторы, отличающиеся численным множителем. Мы получим $(n-1)$-мерное комплексное проективное пространство M^{n-1}. Формула

(I6.3) определяет непрерывное отображение $\widetilde{\varphi}\ M^{n-1}\times I$ в группу $SU(n)$ и цикл $\widetilde{P}_n=\widetilde{\varphi}(M^{n-1}\times I), \dim\widetilde{P}_n=2n-1$, реализует примитивный элемент в кольце $H_*(N_*(SU(n)))$. Из формулы видно, что $\widetilde{P}_n$ выдерживает действие внутренних автоморфизмов. Под этим действием он расслаивается на орбиты, пространство которых представляет собой отрезок $\{\widetilde{\varphi}(e_1,t): 0\le t\le 2\pi\}$ с концами E и $e^{\frac{2\pi i}{n}}E$. E и $e^{\frac{2\pi i}{n}}E$ образуют особые орбиты, а все остальные орбиты главные (относительно поверхности $\widetilde{P}_n$) и диффеоморфны M^{n-1} . Поверхность $\widetilde{P}_n$ регулярна во всех своих точках, за исключением, быть может, двух точек E и $e^{\frac{2\pi i}{n}}E$. В случае $n=2$ $\widetilde{P}_n$ является подгруппа $SU(2)$, так что особые точки E и $e^{\frac{2\pi i}{n}}E$ в этом случае устранимы . Следующая теорема описывает поведение этих особых точек в случае

Т е о р е м а I6.I. При $n\geq 3$ поверхность $\widetilde{P}_n$ имеет две особые точки E и $e^{\frac{2\pi i}{n}}E$. В окрестности каждой из них представляет собой конус с основанием M^{n-1} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем, что при $n\geq 3$ точка E является существенной особой точкой поверхности $\widetilde{P}_n$. Для этого достаточно доказать, что линейная оболочка касательных лучей к $\widetilde{P}_n$ в точке E имеет размерность, строго превышающую размерность $\widetilde{P}_n$. Зафиксируем произвольный z и рассмотрим кривую $\widetilde{\varphi}(z,t)$.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\widetilde{\varphi}(z,t)=i\left(P_z-\frac{1}{n}E\right) \qquad \text{(I6.4)}$$

Выберем, в частности, $z'_i=\frac{\sqrt{2}}{2}, z'_j=\frac{\sqrt{2}}{2}, z'_k=0\ (k\neq i,j)$ для любой пары (i,j) , $1\le i<j\le n$. Подставляя это значение $z'=(z'_1,z'_2,\dots,z'_n)$ в формулу (I6.4), получим

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{\varphi}(z',t)=\frac{i}{2}\left(E_{ij}+E_{ji}+E_{ii}+E_{jj}-\frac{2}{n}E\right) \qquad (16.5)$$

Аналогично, выберем $z''_i=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z''_j=i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z''_k=0\ (k\neq i,j)$ для любой пары (i,j), $1\leq i<j\leq n$. Подставляя это значение $z''=(z''_1,z''_2,\dots z''_n)$ в формулу (I6.4), получим

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{\varphi}(z'',t)=\frac{i}{2}\left(-iE_{ij}+iE_{ji}+E_{ii}+E_{jj}-\frac{2}{n}E\right) \qquad (16.6)$$

где через E_{kl} ($1\leq k\leq n,\ 1\leq l\leq n$) обозначим матрицу (v^i_j), где

$$v^i_j \begin{cases} 1, & \text{если } i=k,\ j=l \\ 0 & \text{для всех остальных случаев} \end{cases}$$

Векторы, заданные формулами (I6.5) и (I6.6) линейно независимы. Их количество, при $n\geq 3$, превышает $\dim\tilde{P}_n=2n-1$. Следовательно, размерность линейной оболочки касательных лучей к поверхности $\tilde{P}_n$ в точке E превышает $\dim\tilde{P}_n$. Аналогично доказывается особенность точки $e^{\frac{2\pi i}{n}}E$. Таким образом теорема I6.I доказана.

Т е о р е м а I6.2. I) Поверхность $\tilde{P}_n$ удовлетворяет условию (I2.2).

2) Поток $\tilde{P}_n$ имеет минимальную массу в классе $[\tilde{P}_n]_R\in H_{2n-1}(N_*(SU(n)))$ в том и только в том случае, когда поток $SU(n-1)$, где подгруппа вложена в $SU(n)$ стандартным образом, имеет минимальную массу в классе $[SU(n-1)]_R\in H_*(N_*(SU(n)))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, сначала, что касательное пространство к поверхности $\tilde{P}_n$ в произвольной точке $a=\tilde{\varphi}(e_1,t_0)$ из $\{\tilde{\varphi}(e_1,t): 0<t<2\pi\}$, относенное к точке E сдвигом $L_{\bar{a}^{-1}}$, представляет собой ортогональное дополнение к касательному пространству к подгруппе $SU(n-1)$, стандартно вложенной в $SU(n)$. Проинтегрировав обе части равенства (I6.3) и положив $z=e_1,\ t=t_0$, мы получим

$$d\tilde{\varphi}(e_1,t_0)=e^{\frac{-it_0}{n}}d\varphi(e_1,e^{it_0})-\varphi(e_1,e^{it_0})e^{\frac{-it_0}{n}}\frac{idt}{n} \tag{I6.7}$$

Из формулы (I6.2) имеем

$$d\varphi(z,\lambda)=d\lambda\,P_z+(\lambda-1)\,dP_z \tag{I6.8}$$

Полагая $\lambda=e^{it}$, получим

$$d\lambda=ie^{it}dt \tag{I6.9}$$

Из формулы (I6.I) имеем

$$dP_z=(dz)z^*+z\cdot(dz^*) \tag{I6.I0}$$

Соответствие между единичными векторами

$$z=z_1e_1+z_2e_2+\dots+z_ne_n\quad\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\bar{z}_k=1\right)$$

и точками многообразия M^{n-1} становится взаимнооднозначным в окрестности точки, соответствующей вектору e_1, если нормировать вектор z условием $z_1>0$. Из этого условия следует

$$dz_1=d\bar{z}_1 \tag{I6.II}$$

Подставляя в формулу (I6.8) значения $d\lambda|_{\lambda=e^{it_0}}$ и $dP_z|_{z=e_1}$ из (I6.9) и (I6.I0) и принимая во внимание (I6.II) мы получим

$$d\varphi(e_1, e^{it_0}) = \begin{bmatrix} ie^{it_0}dt + 2(e^{it_0}-1)dz_1 & (e^{it_0}-1)d\bar{z}_2 & \dots & (e^{it_0}-1)d\bar{z}_n \\ (e^{it_0}-1)dz_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & O & \\ \vdots & & & \\ (e^{it_0}-1)dz_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (16.12)$$

Из (I6.I2) видно, что отображение φ, и следовательно, отображение $\tilde{\varphi}$ в достаточной малой окрестности точки $e_1 \times t_0$ являются диффеоморфизмами. Кроме того, так как $a = \tilde{\varphi}(e_1, t_0)$ имеет вид

$$a = \begin{bmatrix} e^{it_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} e^{-\frac{it_0}{n}}$$

то образ отображения $L_{\bar{a}^{-1}o}\{e^{-\frac{it_0}{n}} d\varphi(e_1, e^{it_0})\}$ ортогонален к касательному пространству к $SU(n-1)$ в точке E. Далее вектор $L_{\bar{a}^{-1}}\{\varphi(e_1, e^{it_0}) e^{-\frac{it_0}{n}} \frac{idt}{n}\} = \frac{idt}{n}$ тоже ортогонален к касательному пространству к $SU(n-1)$ в точке E. Тогда из формулы (I6.7) следует, что образ отображения $d\tilde{\varphi}(e_1, t_0)$ ортогонален к касательному пространству к $SU(n-1)$ в точке E. Это вместе с локальной диффеоморфностью отображения $\tilde{\varphi}$ в точке $e_1 \times t_0$ доказывает, что касательное пространство к $\tilde{P}_n$ в точке a, отнесенное к точке E сдвигом $L_{\bar{a}^{-1}}$, является ортогональным дополнением к алгебре Ли $su(n-1)$ подгруппы Ли $SU(n-1)$.

Приступим к доказательству утверждения I). Допустим, что x - любая регулярная точка $\widetilde{P}_n$ и предположим, что x находится на орбите точки a. Тогда существует $g \in SU(n)$ такой, что $Int_g : \widetilde{P}_n \to \widetilde{P}_n$; причём $Int_g x = a$ и $Ad_g(T_x\widetilde{P}_n) = T_a\widetilde{P}_n$, где через $T_x\widetilde{P}_n$ обозначается касательное пространство к поверхности $\widetilde{P}_n$ в точке x. Для другой регулярной точки y найдётся $p \in SU(n)$ такой, что $T_b\widetilde{P}_n = Ad_p(T_y\widetilde{P}_n)$, где $b \in \{\tilde{\varphi}(\xi,t) : 0 < t < 2\pi\}$. Согласно доказанному выше утверждению мы имеем $L_{a^{-1}}Ad_g(T_x\widetilde{P}_n) = L_{b^{-1}}Ad_p(T_y\widetilde{P}_n)$ или $(Ad_{p^{-1}}L_b L_{a^{-1}}Ad_g)(T_x\widetilde{P}_n) = T_y\widetilde{P}_n$. Таким образом $\widetilde{P}_n$ удовлетворяет условию (I2.2). Второе утверждение же теперь непосредственно вытекает из теоремы I2.3 и доказанного выше утверждения. Тем самым теорема I6.2 доказана.

С л е д с т в и е I6.I. 5-мерный цикл $\widetilde{P}_3$ в группе $SU(3)$ имеет минимальную массу в классе $[\widetilde{P}_3]_R \in H_5(N_*(SU(3)))$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы I6.2 и следствия I4.3.

Замечание. $\widetilde{P}_3$ представляет собой поверхность, единственными особыми точками которой являются E и $e^{\frac{2\pi i}{3}}E$, причём в окрестности каждой из этих точек $\widetilde{P}_3$ является конусом с основанием, диффеоморфным CP^2. Тем самым следствие I6.I даёт пример замкнутого глобального минимального "двойного конуса" коразмерности 3 в группе Ли $SU(3)$.

Литература

1. Federer H., Geometric measure theory, Berlin, Springer, Bd. 153, 1969.
2. Federer H., Fleming W.H., Normal and integral currents, "Ann. of Math.», 72, 458-520, 1960.
3. Almgren F. J., Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of varying topological type and singularity structure, "Ann. of Math." ser. 2, 87, №2, 321-391, 1968.
4. De Giorgi E., Frontiere orientate di misura minima, seminario di Matematica Scuola Normale superiore di Pisa (1960 - 1961), 1-56.
5. Morrey Ch. B., Multiple integrals in the calculus of variations, Berlin, Springer, Bd. 130, 1966.
6. Reifenberg E.R., Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type, "Acta Math.", 104, №1, 1-92, 1960.
7. Reifenberg E.R., An epiperimetric inequality related to analyticity of minimal surfaces, "Ann. of Math.», 80, №1, 1-14, 1964
8. Reifenberg E.R., On the analyticity of minimal surfaces, "Ann. of Math.", 80, №1, 15-21, 1964.
9. Фоменко А.Т. Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомологий и когомологий I, "Труды семинара по вект. и тенз.анализу", вып.16, 3-176, 1974.
10. Фоменко А.Т., Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга, "Известия АН СССР", сер.матем., 36, №5, 1049-1079, 1972.

11. Federer H., Some theorems on integral currents, "Trans. Amer. Math. Soc.", 117, №5, 43-67, 1965.

12. Federer H., Real flat chains, cochains, and variational problems, "Indiana univ. Math. J.», 24, №4, 351-407, 1974.

13. Lawson H. B., The equivariant Plateau problem and interior regularity," Trans. Amer. Math. Soc.", 173, 231-249, 1972.

14. Lawson H. B., The stable homology of a flat torus, "Math. Scand.", 36, №1, 49-73, 1975.

15. Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E., Minimal cones and the Bernstein problem," Invent. Math.", 7, №3, 243-268, 1969.

16. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, М., ИЛ, 1960.

17. Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, М., ИЛ., 1960.

18. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., "Мир", 1964.

19. Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, М., ИЛ, 1956.

20. Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., ИЛ., 1949.

21. Cartan E., La theorie des groupes finits et continus et l'analysis situs," Mem. sci. Math.", fasc. XLII, 1930.

22. Рашевский П. К., О вещественных когомологиях однородных пространств, УМН, 24, № 3, 23-90, 1969.

23. Montgomery P., Samelson H., Yang C.T., Exceptional orbits of highest dimension, "Ann. of Math.", 64, 131-141, 1956.

24. Lawson H. B., Hsiang W. Y., Minimal submanifolds of low cohomogeneity," J. Diff. Geom.», 5, №1, 1-38, 1971.

25. Фоменко А.Т., Вполне геодезические модели циклов, "Труды семинара по вект. и тенз.анализу", вып.16,14-98,1972.

26. Понтрягин Л.С., Homologies in compact Lie groups, "Матем.сб.", 6, 389-422, 1939.

27. Дынкин Е.Б., Гомологии компактных групп Ли, УМН,8, №5, 73-120, 1953.

28. Дао Чонг Тхи, О минимальных потоках и поверхностях в римановых многообразиях, "ДАН СССР", 233, № 1, 21- 22 ,1977.

29. Дао Чонг Тхи, Минимальные поверхности в компактных группах Ли, УМН, , № , ,1977.

30. Дао Чонг Тхи, О минимальных вещественных потоках на компактных римановых многообразиях, "Известия АН СССР",сер. матем., 41 , № 4 , 853-867 ,1977.

31. Дао Чонг Тхи, Вещественные минимальные потоки в компактных группах Ли, "Труды семинара по вект. и тенз.анализу", вып. 19, 1978.

32. Дао Чонг Тхи, Многомерная вариационная задача в симметрических пространствах, Функциональный анализ и его приложения,