Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Браилов Юрий Андреевич

УДК 513:944

Геометрия особенностей интегрируемых систем на алгебрах Ли

01.01.04. – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители — академик А. Т. Фоменко,
д. ф.-м. н. А. В. Болсинов

МОСКВА – 2003

Оглавление

0

Введение

Настоящая диссертация посвящена исследованию критических точек отображения момента многомерных интегрируемых гамильтоновых систем на полупростых алгебрах Ли. Основной идеей диссертации является использование богатой алгебраической структуры таких систем для определения их геометрических и топологических свойств.

Семейство исследуемых в диссертации интегрируемых гамильтоновых систем построено в работе А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [18]. Предложенный ими метод сдвига аргумента позволяет получить полный коммутативный набор полиномиальных интегралов для уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли. Эти полиномиальные интегралы являются обобщениями интегралов, найденных С. В. Манаковым [17] в задаче о движении n-мерного твердого тела, закрепленного в центре масс, и представляют собой одну из самых больших и интересных серий нетривиальных интегрируемых систем.

Современный алгебро-геометрический подход в теории интегрируемых систем был заложен в работе С. П. Новикова [21], где конечнозонные решения уравнения Кортевега - де Фриза были получены путем их линеаризации на якобиане спектральной кривой уравнения Лакса. Как показывает развитие этого подхода, если для интегрируемых уравнений Гамильтона известно представление в форме Лакса со спектральным параметром, их решение обычно можно явно выписать в тэта-функциях. Конечно, здесь надо отметить, что некоторые классические системы, такие, например, как волчок Ковалевской, были проинтегрированы гораздо раньше, чем для них открыли соответствующие L–A пары [16].

Явные формулы в тета-функциях для решений интегрируемой системы мало говорят, однако, о ее глобальном поведении, особенно в тех случаях, когда рассматриваемая система вещественна. Поэтому нашей основной целью будет переход от интуитивного понимания свойств спектральной L–A пары и ее спектральной кривой к точным утверждениям о структуре вырождений рассматриваемого коммутативного набора сдвигов инвариантов.

Исторически большинство интегрируемых систем, для которых в настоящее время известна геометрия слоения Лиувилля, были исследованы методами гладкого анализа. Так, бифуркационные диаграммы отображения момента для основных интегрируемых случаев в динамике твердого тела вычислены в работе М. П. Харламова, [30]. Дальнейшее исследование этих случаев можно найти в работах А. А. Ошемкова [26],[27], [32], А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [7], О. Е. Орел [24] и целого ряда других авторов. Впоследствии некоторые из этих результатов были повторно получены алгебро-геометрическими методами в работе М. Оден [23]. Таким образом, для ряда интегрируемых систем де-факто установлена связь между вырождениями спектральной кривой представления Лакса и поведением торов Лиувилля, однако отсутствие каких-либо общих результатов в этом направлении говорит о том, что данная область теории интегрируемых систем пока еще изучена недостаточно. Среди тех работ, в которых геометрия интегрируемой системы впервые исследована именно алгебро-геометрическими методами, можно отметить лишь некоторые примеры [25],[33],[34].

Перейдем к краткому изложению результатов диссертации. Первая глава посвящена исследованию модельного примера — гамильтоновой системы, образованной сдвигами инвариантов на алгебре Ли $\mathrm{su}(3)$. Алгебра $\mathrm{su}(3)$ является минимальной среди тех полупростых алгебр Ли, на которых сдвиги инвариантов дают пример нетривиальной интегрируемой системы. Подробно исследуя структуру отображения момента в этой системе, мы получаем наглядный пример для иллюстрации основных результатов, относящихся к последующим главам диссертации. Бифуркационная диаграмма для алгебры Ли $\mathrm{su}(3)$ полностью описана следующей теоремой:

Теорема 1.

Бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из шести вершин, каждая из которых соединена с тремя другими прямолинейными ребрами, и четырех стенок, замыкание которых содержит восемь ребер из девяти. Общий вид диаграммы изображен на Рис. 1 и Рис. 2, а параметризации отдельных стратов содержатся в доказательстве.

Вторая глава диссертации посвящена теоремам, устанавливающим связь между сдвигами инвариантов алгебры Ли и сдвигами инвариантов ее подалгебры. Из этих теорем следует, что такие подалгебры, содержащие вектор сдвига, состоят целиком из критических точек отображения момента. В частности, для полупростых алгебр Ли выполняется

Теорема 3.

Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная полупростая алгебра Ли ранга r, $\mathfrak{l}$ – редуктивная подалгебра индекса r. Предположим, что a, x_0 регулярные элементы $\mathfrak{g}$, принадлежащие также подалгебре $\mathfrak{l}$. Обозначим линейную оболочку дифференциалов функций сдвигов инвариантов на $\mathfrak{g}$, ограниченных на орбиту $\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)$ в точке x_0 как $dF_a^{\mathfrak{g}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)}$. Дифференциалы сдвигов инвариантов подалгебры $\mathfrak{l}$ на тот же вектор a, ограниченных на меньшую орбиту $\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)$, обозначим как $dF_a^{\mathfrak{l}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)}$. Эти пространства совпадают:

$$dF_a^{\mathfrak{g}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)} = dF_a^{\mathfrak{l}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)},$$

и, в частности, совпадают их размерности.

Критические точки отображения момента любой интегрируемой системы образуют полиэдр, стратифицированный рангом дифференциала отображения момента. Его образом при отображении момента F является бифуркационная диаграмма Σ. При этом точки ранга 0 соответствуют вершинам бифуркационной диаграммы, а точки ранга 1 соответствуют ее ребрам. Замечательным фактом является то, что, в случае сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли, страты ранга 0 и 1 удается полностью описать в терминах корневого разложения рассматриваемой алгебры $\mathfrak{g}$ относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}_a$, содержащей вектор сдвига a. Для этого мы доказываем теорему 3 в обратную сторону — отдельно для точек ранга 0 и для точек ранга 1.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{h}_a \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра Картана, содержащая вектор сдвига a. Тогда точкам ранга 0 на регулярной орбите $\mathcal{O}$ являются точки ее пересечения с подалгеброй $\mathfrak{h}_a$:*

$$\operatorname{rank} d\mathcal{F}(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{h}_a.$$

Теорема 5. *Точки ранга 1 являются пересечениями орбиты и подалгебр вида $\mathfrak{h}_a + V_\alpha$:*

$$\operatorname{rank} d\mathcal{F}(x_0) \leq 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \Delta(\mathfrak{h}_a),\ x_0 \in \mathcal{O} \cap (\mathfrak{h}_a + V_\alpha).$$

Третья глава диссертации содержит обобщение результата об описании точек ранга 0 на случай задачи о движении n-мерного твердого тела, закрепленного в центре масс. Эта задача существенно отличается от обычных сдвигов инвариантов тем, что в качестве симплектического многообразия выступает орбита коприсоединенного представления в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, а вектор сдвига лежит в объемлющей алгебре $\mathrm{gl}(n)$. Несмотря на это, также удается полностью описать точки ранга 0 и, в частности, получить тот же ответ, который был известен в случае четырехмерного волчка Эйлера [26].

Теорема 6.

$$\operatorname{rk} dF(x_0) = 0 \Longleftrightarrow x_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & x_0^1 & \dots & 0 & 0 \\ -x_0^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_0^k \\ 0 & 0 & \dots & -x_0^k & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sim$ обозначает равенство матриц с точностью до одновременной перестановки строк и столбцов. Если n четно, то $k = n/2$. Если n нечетно, то $k = (n-1)/2$, а x_0 содержит одну нулевую строку и один нулевой столбец.

В четвертой главе настоящей диссертации содержится ее центральный результат. Для полупростой алгебры Ли $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ в стандартном матричном представлении определим спектральную кривую:

Определение. *Спектральной кривой элемента $X \in \mathfrak{g}$ называется алгебраическая кривая Γ_X, заданная в $\mathbb{C}^2$ с координатами (λ, μ) уравнением*

$$\Gamma_X : R_X(\lambda, \mu) \stackrel{def}{=} \det(X + \lambda a - \mu E) = 0.$$

Коммутативный набор сдвигов инвариантов состоит из коэффициентов многочлена R_X, и, следовательно, определяется только вектором $\xi = F(X) \in \mathbb{C}^N$. Дискриминантом D назовем множество таких векторов $\xi \in \mathbb{C}^N$, что соответствующая спектральная кривая имеет хотя бы одну особую точку P:

$$R(P) = \frac{\partial R}{\partial \lambda}(P) = \frac{\partial R}{\partial \mu}(P) = 0.$$

Бифуркационная диаграмма отображения момента определяется как множество его сингулярных значений:

$$\Sigma = \{ \, \xi \in \mathbb{C}^N \mid \exists X \in \mathfrak{g}, \ \mathrm{rk}\, dF_a(X) < N, \ \xi = F_a(X) \, \}$$

Теорема 8. *Бифуркационная диаграмма Σ совпадает с дискриминантом D.*

Доказательство этой теоремы является по сути конструктивным и основано на построении глобального обратного к отображению момента над дискриминантом D. При этом образ построенного обратного отображения $S : D \to \mathfrak{g}$ целиком состоит из критических точек отображения момента F, что и приводит к требуемому утверждению.

Анализируя полученный результат, можно сделать следующие выводы: 1) доказательство основано на свойствах жордановой нормальной формы, что позволяет надеяться на его обобщение для произвольной комплексной полупростой алгебры Ли; 2) мотивация появления именно такой конструкции остается пока совершенно не ясной, возможно для нее существует другое, более естественное и инвариантное описание; 3) доказательство существенно опирается на алгебраическую замкнутость основного поля, что не позволяет непосредственно применить его при рассмотрении компактных алгебр, где аналогичное утверждение представляется весьма правдоподобным. На данный момент сдвиги инвариантов на алгебре $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ представляют собой единственную серию интегрируемых систем, для которых вопрос о связи бифуркационной диаграммы и дискриминанта спектральной кривой полностью решен.

Пятая глава диссертации содержит основные результаты работы, касающиеся топологической структуры слоения Лиувилля для сдвигов инвариантов на компактных алгебрах Ли. Наиболее неожиданным свойством таких систем оказалась связность множества регулярных значений отображения момента.

Теорема 9. *Для почти всех регулярных векторов сдвига a множество неособых точек отображения момента F_a связно.*

Далее мы подробно рассматриваем малую окрестность одной точки максимального вырождения и, пользуясь связностью множества критических значений, доказываем следующий факт:

Теорема 10. *Любая неособая совместная поверхность уровня состоит ровно из одного тора.*

Таким образом, показано, что сдвиги инвариантов на компактных алгебрах Ли существенно отличаются от большинства известных интегрируемых систем, имеющих "седловые" критические значения, разбивающие множество регулярных значений на несвязные области.

Среди нетривиальных интегрируемых систем, обладающих связным множеством регулярных значений, можно отметить, пожалуй, только классический случай Лагранжа в динамике твердого тела (при определенных значениях параметров). Единственной изолированной критической точкой этой системы с двумя степенями свободы является так называемая, точка типа "фокус-фокус". Это единственная устойчивая невырожденная особенность интегрируемых систем, не сводящаяся к произведению одномерных особенностей. Ее подробное описание можно найти в [7].

Однопараметрическое семейство таких особенностей можно обнаружить уже на алгебре Ли su(3). Соответствующим вычислениям посвящена четвертая часть первой главы, где предъявляется невырожденная особая точка такого типа.

Основываясь на результатах пятой главы, можно выдвинуть гипотезу о том, что все невырожденные особенности компактных сдвигов инвариантов локально сводятся к минимаксным особенностям, точкам типа “фокус-фокус” и к их прямым произведениям.

Заметим, что сдвиги инвариантов определяются в терминах алгебры Ли, в то время как для определения спектральной кривой требуется выбрать некоторое конкретное представление этой алгебры. Последняя глава диссертации рассматривает сдвиги инвариантов на основных сериях компактных полупростых алгебр Ли, а также на их прямых суммах. Для минимальных представлений таких алгебр определяется понятие спектральной кривой и доказываются следующие утверждения:

Теорема 11. *Бифуркацонная диаграмма Σ принадлежит множеству $D \cap F(\mathfrak{g})$.*

Теорема 12. *Для почти всех векторов сдвига a*

$$\operatorname{codim}(D \cap F(\mathfrak{g}) - \Sigma) \geq 2.$$

Далее мы строим параметризацию множества D и сводим задачу о нахождении основного страта бифуркационной диаграммы к отбору ветвей дискриминанта, проходящих через образ отображения момента. Этот отбор является в каком-то смысле тривиальным, так как мы уже доказали в предыдущей главе, что множество регулярных значений связно, и основной страт Σ ограничивает ровно одну камеру в дополнении к дискриминанту. При этом вопрос о непустоте множества $(D \setminus \Sigma) \cap F(\mathfrak{g})$ остается открытым для компактных алгебр.

Автор выражает глубокую признательность своим научным руководителям — академику А. Т. Фоменко и профессору А. В. Болсинову за большое внимание к работе и ряд ценных замечаний, определивших направления ее развития.

Глава 1

Сдвиги инвариантов на алгебре su(3)

Минимальная компактная алгебра, на которой сдвиги инвариантов образуют нетривиальную интегрируемую систему – это su(3). В третьей главе приведена теорема 3, сводящая изучение ранга отображения момента в точках подалгебры к изучению ранга сдвигов инвариантов подалгебры. Так как su(3)-подалгебры есть почти во всех компактных полупростых алгебрах Ли, то мы проведем подробное исследование этого случая. На примере алгебры su(3) мы изучим основные геометрические свойства отображения момента, исследованию которых посвящена данная работа.

1.1 Уравнения движения

Пусть X – элемент алгебры su(3),

$$a = \mathrm{diag}(ia_1, ia_2, ia_3), \quad b = \mathrm{diag}(ib_1, ib_2, ib_3),$$

фиксированные регулярные элементы из диагональной подалгебры $\mathfrak{h}$ в стандартном матричном представлении, D — симметричный оператор на $\mathfrak{h}$. Определим оператор φ следующим образом: на $\mathfrak{h}$ он совпадает с D, а на ортогональном дополнении к $\mathfrak{h}$ по биинвариантной форме имеет вид $(\mathrm{ad}_a)^{-1} \circ \mathrm{ad}_b$. Динамика системы задается уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial t} X = [X, \varphi(X)],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(X+\lambda a)=[X+\lambda a,\varphi(X)+\lambda b],$$

где λ — произвольный скалярный параметр [20].

Отметим, что коммутативный набор интегралов исследуемой системы полностью определяется вектором сдвига a. Значения b и D определяют выбор гамильтониана в этом наборе в соответствии с формулой $H_1=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(X\varphi(X))$. Так как в дальнейшем нам понадобится только сам гамильтониан, то мы не будем искать конкретный вид b и D.

Пусть матрица $X+\lambda a-\mu E$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} i(z_1+\lambda a_1-\mu) & x_3+iy_3 & x_2+iy_2 \\ -x_3+iy_3 & i(z_2+\lambda a_2-\mu) & x_1+iy_1 \\ -x_2+iy_2 & -x_1+iy_1 & i(z_3+\lambda a_3-\mu) \end{pmatrix}.$$

Так как $X,a,b\in\mathrm{su}(3)$, то $\sum z_i=\sum a_i=\sum b_i=0$. Положим

$$\psi_i=x_i+iy_i,\quad i=1,2,3.$$

При любом λ матрица $X+\lambda a$ испытывает изоспектральную деформацию, и поэтому коэффиценты характеристического полинома $-i\operatorname{Det}(X+\lambda a-\mu E)$ при различных мономах $\lambda^i\mu^j$ дают интегралы движения:

$$\begin{aligned}
&I_3=z_1z_2z_3+2\operatorname{Im}\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3-z_1\left|\psi_1\right|^2-z_2\left|\psi_2\right|^2-z_3\left|\psi_3\right|^2,\\
&I_2=-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1+\left|\psi_1\right|^2+\left|\psi_2\right|^2+\left|\psi_3\right|^2,\\
&H_1=a_1\left|\psi_1\right|^2+a_2\left|\psi_2\right|^2+a_3\left|\psi_3\right|^2-a_1z_2z_3-a_2z_3z_1-a_3z_1z_2,\\
&H_2=a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3,\\
&H_3=a_1a_2z_3+a_2a_3z_1+a_3a_1z_2.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Интегралы I_2 и I_3 являются инвариантами алгебры, H_1 — квадратичный гамильтониан, а H_2 и H_3 — линейные интегралы, задающие пуассоново действие двумерного тора.

1.2 Регулярные уровни отображения момента

Для изучения топологии слоения Лиувилля в данной задаче необходимо определить те значения интегралов, при которых инвариантное трехмерное многообразие не будет регулярным трехмерным тором. Классическим методом проверки регулярности уровня является вычисление ранга матрицы первых частных производных отображения момента

$$F : \mathrm{su}(3) \to \mathbb{R}^5, \quad F(X) = \{I_3(X), I_2(X), H_1(X), H_2(X), H_3(X)\}.$$

Кроме пяти указанных интегралов, в девятимерном пространстве с координатами x_i, y_i, z_i имеется одно уравнение связи: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Заметим, что в силу регулярности элемента a линейные функции H_2, H_3 и $z_1 + z_2 + z_3$ функционально независимы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2a_3 & a_3a_1 & a_1a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) \neq 0.$$

Таким образом, ранг отображения моментов зависит только от производных по переменным x_i и y_i. Запишем соответствующие векторы $\frac{1}{2}\partial I_2$, $\frac{1}{2}\partial H_1$ и $\frac{1}{2}\partial I_3$ в виде матрицы J размера 6×3 :

$$J = \begin{pmatrix} x_1 & a_1x_1 & -z_1x_1 + x_2y_3 - x_3y_2 \\ y_1 & a_1y_1 & -z_1y_1 + x_2x_3 - y_2y_3 \\ x_2 & a_2x_2 & -z_2x_2 + x_3y_1 + x_1y_3 \\ y_2 & a_2y_2 & -z_2y_2 - x_1x_3 + y_1y_3 \\ x_3 & a_3x_3 & -z_3x_3 + x_2y_1 - x_1y_2 \\ y_3 & a_3y_3 & -z_3y_3 + x_1x_2 + y_1y_2 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. *Бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из шести вершин, каждая из которых соединена с тремя другими прямолинейными ребрами, и четырех стенок, замыкание которых содержит восемь ребер из девяти. Общий вид диаграммы изображен на Рис. 1 и Рис. 2, а параметризации отдельных стратов содержатся в доказательстве.*

Доказательство.

- *Вершины бифуркационной диаграммы:*

  $rk\ J = 0 \Rightarrow\ \ \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0. \Rightarrow$

$$\begin{cases} I_3 = z_1 z_2 z_3 \\ I_2 = -z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 \\ H_1 = -a_1 z_2 z_3 - a_2 z_3 z_1 - a_3 z_1 z_2 \\ H_2 = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 \\ H_3 = a_1 a_2 z_3 + a_2 a_3 z_1 + a_3 a_1 z_2 \end{cases} \Rightarrow \forall i,\ z_i^3 - z_i I_2 - I_3 = 0.$$

Нетрудно видеть, что числа z_1, z_2 *и* z_3 *являются различными корнями многочлена*

$$F(t) = t^3 - tI_2 - I_3 = 0. \qquad (1.2)$$

Те значения I_2 *и* I_3, *при которых этот многочлен имеет три различных вещественных корня, в точности определяют регулярные орбиты коприсоединенного представления. В результате мы получаем шесть перестановок корней многочлена (1.2) и, соответственно, шесть вершин бифуркационной диаграммы. Отметим также, что соответствующие критические точки являются пересечениями рассматриваемой орбиты и диагональной картановской подалгебры* $\mathfrak{h}$.

- *Ребра бифуркационной диаграммы:* $rk\ J = 1$.

  Заметим, что если $\exists i, j,\ i \neq j$ *такие, что* $\psi_i \neq 0$ *и* $\psi_j \neq 0$, *то в силу регулярности элемента а два первых столбца матрицы* J *будут линейно независимы и ее ранг будет больше* 1.

  Не теряя общности, можно считать, что $\psi_1 = \psi_2 = 0$. *Тогда*

$$\begin{cases} I_3 = z_1 z_2 z_3 - z_3 \left|\psi_3\right|^2 \\ I_2 = -z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 + \left|\psi_3\right|^2 \end{cases} \Rightarrow z_3^3 - z_3 I_2 - I_3 = 0. \quad (1.3)$$

  Обозначим корни многочлена (1.2) как z_1^0, z_2^0 *и* z_3^0. *Таким образом* $z_3 = z_3^0$ *является фиксированным корнем. В силу (1.3) получаем, что числа* z_1, z_2, z_3 *удовлетворяют уравнению*

$$F(t) = t^3 - I_2 t - I_3 = -\left|\psi_3\right|^2 (t - z_3). \qquad (1.4)$$

  Геометрический смысл этого соотношения заключается в том, что z_1 *и* z_2 *являются точками пересечения графика* $t^3 - I_2 t - I_3$ *и подвижной прямой* $-\left|\psi_3\right|^2 (t - z_3)$ *с параметром*

$|\psi_3|^2$. Таким образом, изменение $|\psi_3|^2$ соответствует тому, что z_1 и z_2 меняются местами (см. рис. 1). Следовательно, это ребро ведет из вершины (z_1^0, z_2^0, z_3^0) в вершину (z_2^0, z_1^0, z_3^0). Выберем в качестве нового параметра $z_1 \in [z_1^0, z_2^0]$. Учитывая формулы $z_2 = -z_1 - z_3$ и $|\psi_3|^2 = I_2 + z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1$, получаем, что ребро является отрезком прямой и задается следующим образом:

$$\begin{cases} H_1 = a_3 I_2 + z_1 z_3 (a_1 - a_2) + z_3^2 (a_1 - a_3) \\ H_2 = z_1 (a_1 - a_2) + z_3 (a_3 - a_2) \\ H_3 = z_1 a_3 (a_2 - a_1) + z_3 a_1 (a_2 - a_3) \end{cases} \tag{1.5}$$

Аналогично доказывается, что любая другая вершина (z_i^0, z_j^0, z_k^0) соединена прямолинейными ребрами с вершинами (z_j^0, z_i^0, z_k^0), (z_i^0, z_k^0, z_j^0) и (z_k^0, z_j^0, z_i^0).

- *Стенки бифуркационной диаграммы: $rk\ J = 2$.*

  Пусть для $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\psi_i \neq 0$. Видно, что тогда для любого a векторы $\frac{1}{2}\partial I_2$ и $\frac{1}{2}\partial H_1$ линейно независимы, поэтому мы будем искать линейную зависимость столбцов в виде

$$\frac{1}{2}\alpha \partial I_2 + \frac{1}{2}\beta \partial H_1 = \frac{1}{2}\partial I_3. \tag{1.6}$$

Для упрощения последующих вычислений введем вспомогательные переменные

$$\omega_i = -\alpha - \beta a_i + z_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.7}$$

Тогда условие (1.6) принимает вид:

$$\begin{cases} \omega_1 x_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ \omega_1 y_1 = x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ \omega_2 x_2 = x_3 y_1 + x_1 y_3 \\ \omega_2 y_2 = -x_1 x_3 + y_1 y_3 \\ \omega_3 x_3 = x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ \omega_3 x_3 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_3 \omega_1 x_1 = |\psi_2|^2 x_1 \\ \omega_3 \omega_1 y_1 = |\psi_2|^2 y_1 \\ \omega_3 \omega_2 x_2 = |\psi_1|^2 x_2 \\ \omega_3 \omega_2 y_2 = |\psi_1|^2 y_2 \\ \omega_3 \psi_3 = i\bar{\psi}_1 \psi_2 \end{cases}. \tag{1.8}$$

Учитывая полученые соотношения, получим, что

$$|\psi_i|^2 = \omega_j\omega_k, \quad i \neq j \neq k \neq i, \tag{1.9}$$

и формулы для инвариантов можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{array}{l} I_3 = z_1z_2z_3 + 2\omega_1\omega_2\omega_3 - z_1\omega_2\omega_3 - z_2\omega_3\omega_1 - z_3\omega_1\omega_2, \\ I_2 = -z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 + \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1. \end{array}$$

Подставим выражения для ω_i *в предыдущие формулы и убедимся, что после приведения подобных членов они становятся линейными по* z_i. *Дополним их соотношением* $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ *до системы трех линейных уравнений, решив которую мы выразим* z_1, z_2 *и* z_3 *через* α *и* β.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1,2,3} (\alpha^2 + a_ja_k\beta^2 - a_i\alpha\beta)z_i = I_3 + 2\alpha^3 + 2\beta^3a_1a_2a_3 + 2\alpha\beta^2 \sum a_ia_j \\ \sum\limits_{i=1,2,3} (-2\alpha + a_i\beta)z_i = I_2 - 3\alpha^2 - \beta^2 \sum a_ia_j \\ \sum\limits_{i=1,2,3} z_i = 0 \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$z_i = \frac{(I_3 - \alpha^3 + \alpha I_2 + \beta I_2 - 3a_i\alpha^2\beta + a_i\beta^3(a_i^2 + a_ja_k) + \alpha\beta^2(-a_i^2 + a_ja_k))}{\beta^2(a_i - a_j)(a_i - a_k)},$$

где j *и* k *таковы,что* (i, j, k) *— положительная перестановка. Для того, чтобы получить искомую параметризацию стенок бифуркационной диаграммы, используем формулы:*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = a_1\omega_2\omega_3 + a_2\omega_3\omega_1 + a_3\omega_1\omega_2 - a_1z_2z_3 - a_2z_3z_1 - a_3z_1z_2, \\ H_2 = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3, \\ H_3 = a_1a_2z_3 + a_2a_3z_1 + a_3a_1z_2 \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Подставляя в эти формулывыражения для z_i, *получим:*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = -\frac{\alpha^3}{\beta} - \alpha\beta \sum a_ia_j - \frac{\alpha I_2}{\beta} - a_1a_2a_3\beta^2 - \frac{2I_3}{\beta}, \\ H_2 = -\frac{3\alpha^2}{\beta} - \beta \sum a_ia_j + \frac{I_2}{\beta}, \\ H_3 = -\frac{\alpha^3}{\beta^2} + \alpha \sum a_ia_j + \frac{\alpha I_2}{\beta^2} + 2a_1a_2a_3\beta + \frac{I_3}{\beta^2}, \end{array} \right. \tag{1.11}$$

$\sum a_i a_j \overset{def}{=} a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1.$

Область изменения параметров α *и* β *в силу (1.9) определяется условиями*

$$\omega_1\omega_2 > 0,\ \omega_2\omega_3 > 0,\ \omega_3\omega_1 > 0. \tag{1.12}$$

Это эквивалентно тому, что все ω_i *имеют одинаковый знак. Несложные выкладки позволяют убедиться в том, что*

$$(a_i - a_j)(a_i - a_k)\omega_i > 0 \Longleftrightarrow (\alpha + a_i\beta)^3 - I_2(\alpha + a_i\beta) - I_3 < 0.$$

Рассмотрим ось α *на плоскости* (α, β). *Эта ось разбивается корнями многочлена* $F(t)$ *на четыре интервала, два "положительных" и два "отрицательных" в соответствии со знаком* $F(t)$. *Пусть* $a_1 < a_2 < a_3$, *а* $z_1^0 < z_2^0 < z_3^0$ — *корни* $F(t)$. *Отметим, что*

$$\operatorname{sign}[(\alpha + a_i\beta)^3 - I_2(\alpha + a_i\beta) - I_3] = \operatorname{sign}[F(\pi(\alpha, \beta))],$$

где $\pi(\alpha, \beta)$ – *проекция точки* (α, β) *на ось* α *вдоль прямой* $\alpha + a_i\beta = const$. *Множество интересующих нас значений* α *и* β *состоит из двух частей. Первая часть проектируется вдоль прямых* $\alpha + a_1\beta = const$ *и* $\alpha + a_3\beta = const$ *в "положительные" интервалы, а вдоль* $\alpha + a_2\beta = const$ *в "отрицательные". Вторая область проектируется в точности наоборот. (Рис. 3)*

Замечание. Орбита, проходящая через вектор сдвига a, обладает более простой структурой стенок бифуркационной диаграммы, так как в этом случае три прямые

$$\alpha + a_i\beta - z_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

пересекаются в одной точке. Действительно, в этом случае $\forall i,\ F(a_i) = 0$, *и эта точка – точка* $(0, 1)$. *Из-за этого все грани бифуркационной диаграммы будут вложенными образами четырехугольников, а внутреннее ребро будет иметь только две общие точки с гранями.*

■

1.3 Спектральная кривая

Характеристический полином матрицы $X + \lambda a$, входящей в уравнение Лакса, определяет в $\mathbb{C}^2$ спектральную кривую

$$\Gamma_X : \ \mathrm{Det}(X + \lambda a - \mu E) = 0.$$

В нашей задаче спектральная кривая имеет вид $R(\lambda, \mu) = 0$, где

$$R(\lambda, \mu) = -i\, \mathrm{Det}(X + \lambda a - \mu E) =$$
$$= \mu^3 - I_2\mu - I_3 + \lambda H_1 - \lambda\mu H_2 - \lambda^2 H_3 + \lambda^2 \mu \sum a_i a_j - \lambda^3 a_1 a_2 a_3.$$

Отметим, что при описании бифуркационной диаграммы мы уже неоднократно пользовались многочленом $F(t) = R(0, t)$. Вообще, следуя идеям И.М. Кричевера и С.П. Новикова, часто удается доказать такой факт: динамика системы, обладающей представлением Лакса, линеаризуется с помощью отображения Абеля на якобиане спектральной кривой. Соответственно имеется прямая связь между бифуркационными значениями интегралов и появлением особенностей на спектральной кривой. Покажем, что таким образом можно легко получить найденную выше параметризацию.

Пусть аффинная кривая $R(\lambda, \mu) = 0$ имеет особую точку (λ_0, μ_0). Тогда многочлен $R(\lambda, \mu)$ представляется в виде:

$$R(\lambda, \mu) = (\lambda - \lambda_0)^2(-\lambda a_1 a_2 a_3 + \chi_1) + (\lambda - \lambda_0)(\mu - \mu_0)(\chi_2 +$$
$$+ (\sum a_i a_j)(\lambda - \lambda_0) + \chi_3(\mu - \mu_0)) + (\mu - \mu_0)^2(\mu + \chi_4),$$

где χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 — неизвестные параметры. Рассматривая коэффиценты при $1, \mu, \mu^2$ и $\lambda\mu^2$, получаем, что

$$\chi_1 = \frac{\mu_0^3 - \mu_0 I_2 - I_3}{\lambda_0^2}, \quad \chi_2 = \frac{-3\mu_0^2 + \lambda_0^2 \sum a_i a_j + I_2}{\lambda_0}, \quad \chi_3 = 0, \quad \chi_4 = 2\mu_0.$$

Остается выразить H_1, H_2 и H_3 с помощью коэффициентов при λ, λ^2 и $\lambda\mu$. Нетрудно видеть, что эти формулы совпадают с полученными ранее с точностью до замены μ_0 на α и λ_0 на $-\beta$:

$$\begin{cases} H_1 = \frac{\mu_0^3}{\lambda_0} + \lambda_0\mu_0 \sum a_i a_j + \frac{\mu_0 I_2}{\lambda_0} - a_1 a_2 a_3 \lambda_0^2 + \frac{2I_3}{\lambda_0}, \\ H_2 = \frac{3\mu_0^2}{\lambda_0} + \lambda_0 \sum a_i a_j - \frac{I_2}{\lambda_0}, \\ H_3 = -\frac{\mu_0^3}{\lambda_0^2} + \mu_0 \sum a_i a_j + \frac{\mu_0 I_2}{\lambda_0^2} - 2a_1 a_2 a_3 \lambda_0 + \frac{I_3}{\lambda_0^2}. \end{cases}$$

Этот эффект объясняется следующим образом. Рассматриваемая система представляется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_\lambda = [A_\lambda, f(A_\lambda, \lambda)_+], \tag{1.13}$$

где $A_\lambda = X + \lambda a$ и $f(A_\lambda, \lambda)$ – многочлен от A_λ, λ и λ^{-1}, а $(\;)_+$ обозначает полиномиальную часть разложения в ряд по степеням λ. Кроме того,

$$H_1 = \operatorname{Res}_{\lambda=0} \operatorname{Tr}(Q(A_\lambda, \lambda)), \quad f(\mu, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \mu} Q(\mu, \lambda). \tag{1.14}$$

В такой ситуации выполняется теорема [28] о линеаризации фазового потока, заданного в виде (1.13), на якобиане спектральной кривой Γ_X. Для su(3) функция $Q(\mu, \lambda)$ имеет вид $-\frac{1}{3}\mu^3\lambda^{-2}$.

При вырождении спектральной кривой ее якобиан вырождается и становится некомпактным. При этом линейный поток на якобиане становится непериодическим, а у слоения Лиувилля появляется особый слой. Конечно, таким методом можно получить только комплексную бифуркационную диаграмму комплексифицированной системы. Ее вещественная часть будет содержать диаграмму вещественной системы в виде подкомплекса коразмерности 0.

1.4 Точки типа “фокус-фокус”

Как был доказано выше, бифуркационная диаграмма сдвигов инвариантов для алгебры su(3) всегда содержит изолированный одномерный страт. Такая ситуация является типичной для сдвигов инвариантов на компактных алгебрах Ли, и поэтому мы подробно изучим строение одной невырожденной особой точки такого типа. Фактически мы исследуем единственную, с точностью до диффеоморфизма, нетривиальную невырожденную особенность коммутативного набора на su(3).

Рассмотрим следующий вектор сдвига $a = \mathrm{diag}(i, -i, 0)$ и выберем исследуемую точку в виде

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Так как эта точка принадлежит блочной $\mathrm{su}(2) \oplus \mathbb{R}$ подалгебре, содержащей вектор сдвига a, то ранг отображения момента в этой точке равен 1, (см. теорему 3). Докажем, что J является невырожденной точкой типа "фокус-фокус".

Введем в окрестности точки J на орбите присоединенного представления экспоненциальные координаты:

$$X = \mathrm{Ad}_{\exp x} J, \quad x \in Z(J)^{\perp}. \tag{1.16}$$

Элемент касательного пространства к орбите выберем в виде

$$x = \begin{pmatrix} ix_1 & ix_2 & x_3 + ix_4 \\ ix_2 & -ix_1 & x_5 + ix_6 \\ -x_3 + ix_4 & -x_5 + ix_6 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Симплектическая форма Кириллова-Костанта в этих координатах приобретает следующий вид:

$$\omega = 16 dx_1 \wedge dx_2 + 2 dx_3 \wedge dx_5 + 2 dx_4 \wedge dx_6. \tag{1.18}$$

Разложения интегралов в точке J с точностью до членов третьего порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} &H_1 = x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 + o(x^2), \\ &H_2 = -x_2 + o(x^2), \\ &H_3 = 2x_4 x_5 - 2x_3 x_6 + o(x^2). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Для того, чтобы получить приведенные формулы, достаточно подставить в (1.16) разложение $\exp x$ в ряд Тейлора с точностью до $o(x^2)$, а затем подставить результат в формулы для интегралов (1.1) и привести подобные члены. (Так как требовалось приведение нескольких сотен слагаемых, то был использован математический пакет Maple V.)

Как мы видим, рассматриваемая особенность распадается в прямое произведение неособой точки и четырехмерной особенности интегралов H_1 и H_3 на подпространстве $\langle x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$. Для определения типа этой особенности, согласно критерию 1.1.4, [7] и теореме Вильямсона [35], следует рассмотреть корни многочлена

$$\det(Ad^2H_1 + Bd^2H_3 - \lambda\omega). \tag{1.20}$$

Подставляя полученные выше формулы для d^2H_1, d^2H_3 и ω в (1.20), мы получаем, что

$$\lambda = \pm A \pm B.$$

Следовательно, рассматриваемая точка J — это действительно невырожденная особенность типа "фокус-фокус".

Глава 2

Точки сильного вырождения сдвигов инвариантов

2.1 Подалгебры, состоящие из критических точек

Рассмотрим сдвиги инвариантов на двойственном пространстве к некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Оказывается, что в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют целые подалгебры, состоящие из особых точек отображения момента F. Ниже мы опишем их строение в зависимости от вектора сдвига a.

Напомним, что для любого элемента a двойственного пространства $\mathfrak{g}^*$ к алгебре, его аннулятор определяется как:

$$\operatorname{Ann} a = \{\, x \in \mathfrak{g} \,|\, \forall \xi \in \mathfrak{g},\ \langle a, [x, \xi] \rangle = 0 \,\}. \tag{2.1}$$

Индексом алгебры $\mathfrak{g}$ по определению называется размерность ковектора общего положения в $\mathfrak{g}^*$.

Напомним также простую и полезную лемму:

Лемма 1. *([19]) Предположим, что x – регулярный элемент коалгебры $\mathfrak{g}^*$. Тогда линейная оболочка дифференциалов локальных инвариантов коприсоединенного представления в точке x совпадает с аннулятором* $\operatorname{Ann}(x)$ *.*

Теорема 2. *Рассмотрим произвольную алгебру $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и регулярные элементы $a \in \mathfrak{g}^*$ и $x_0 \in \mathfrak{g}^*$. Пусть $\mathfrak{l}$ — подалгебра $\mathfrak{g}$. Обозначим ограничения линейных функций a и x_0 на подалгебру $\mathfrak{l}$ как b и y_0. Предположим, что*

(1) $\operatorname{ind}\mathfrak{l} = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$*;*

(2) функциональная размерность кольца инвариантов коприсоединенного представления на $\mathfrak{g}^*$ *и на* $\mathfrak{l}^*$ *совпадает с индексом* $\mathfrak{g}$*;*

(3) существуют такие λ, μ*, что* $\mu x_0 + \lambda a$ *– регулярный элемент* $\mathfrak{g}^*$*, и* $\mu y_0 + \lambda b$ *– регулярный элемент* $\mathfrak{l}^*$*;*

(4) для любого регулярного элемента $z = \mu x_0 + \lambda a$ *выполняется:* $\operatorname{Ann}(z) \subset \mathfrak{l}$.

Тогда линейные пространства, порожденные дифференциалами сдвигов инвариантов $\mathfrak{g}^*$ *на ковектор* a*, и порожденные сдвигами инвариантов* $\mathfrak{l}^*$ *на ковектор* b*, совпадают.*

Доказательство. Пусть $z = x_0 + \lambda a$. Тогда

$$\operatorname{Ann}^{\mathfrak{g}}(z) \overset{def}{=} \{x \in \mathfrak{g} | \forall g \in \mathfrak{g},\ z([x,g]) = 0\} \overset{4}{=} \{x \in \mathfrak{l} | \forall g \in \mathfrak{g},\ z([x,g]) = 0\} \in \\ \in \{x \in \mathfrak{l} | \forall g \in \mathfrak{l},\ z([x,g]) = 0\} = \operatorname{Ann}(z|_{\mathfrak{l}}) \tag{2.2}$$

С другой стороны, по предположению теоремы, индекс $\mathfrak{l}$ и индекс $\mathfrak{g}$ совпадают. Следовательно, $\dim \operatorname{Ann}^{\mathfrak{g}}(z) = \dim \operatorname{Ann}^{\mathfrak{l}}(z|_{\mathfrak{l}})$.

Заметим, что дифференциалы инвариантов являются непрерывными функциями. Сингулярные точки прямой $x_0 + \lambda a$ образуют на ней множество нулевой меры и поэтому не влияют на рассматриваемую линейную оболочку. Применение леммы 1 завершает доказательство:

$$\begin{aligned} \langle \bigcup_{\substack{I \in I(\mathfrak{g}^*) \\ x_0 + \lambda a \in Reg(\mathfrak{g}^*)}} dI(x_0 + \lambda a) \rangle = \langle \bigcup_{x_0 + \lambda a \in Reg(\mathfrak{g}^*)} \operatorname{Ann}^{\mathfrak{g}}(x_0 + \lambda a) \rangle = \\ = \langle \bigcup_{y_0 + \lambda b \in Reg(\mathfrak{l}^*)} \operatorname{Ann}^{\mathfrak{l}}(x_0 + \lambda a) \rangle = \langle \bigcup_{\substack{J \in I(\mathfrak{l}^*) \\ y_0 + \lambda b \in Reg(\mathfrak{l}^*)}} dJ(y_0 + \lambda b) \rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

■

Следствие 1. *Предположим, что в условиях теоремы 2 элементы x_0 и y_0 регулярны. Тогда пространства, порожденные дифференциалами ограничений рассматриваемого инволютивного набора на орбиты $\mathcal{O}(x_0) \in \mathfrak{g}^*$ и $\mathcal{O}(y_0) \in \mathfrak{l}^*$, совпадают:*

$$\langle \bigcup_{I \in I(\mathfrak{g}^*),\, \forall \lambda} dI|_{\mathcal{O}(x_0)}(x_0 + \lambda a)\rangle = \langle \bigcup_{J \in I(\mathfrak{l}^*),\, \forall \lambda} dJ|_{\mathcal{O}(y_0)}(y_0 + \lambda b)\rangle. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 2, мы видим, что теперь $\operatorname{Ann} x_0 = \operatorname{Ann} y_0$. Это подпространство принадлежит обеим частям (2.3). Касательное пространство к орбите коприсоединенного представления канонически отождествляется с факторпространством алгебры по аннулятору рассматриваемой точки. Поэтому, факторизуя (2.3) по $\operatorname{Ann} x_0$, мы получаем (2.4). ■

Рассмотрим класс редуктивных алгебр. Инвариантная метрика позволяет отождествить присоединенное и коприсоединенное представления, а также аннуляторы и централизаторы элементов алгебры.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная полупростая алгебра Ли ранга r, $\mathfrak{l}$ — редуктивная подалгебра индекса r. Предположим, что a, x_0 — регулярные элементы $\mathfrak{g}$, принадлежащие также подалгебре $\mathfrak{l}$. Обозначим линейную оболочку дифференциалов функций сдвигов инвариантов на $\mathfrak{g}$, ограниченных на орбиту $\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)$, в точке x_0 как $dF_a^{\mathfrak{g}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)}$. Дифференциалы сдвигов инвариантов подалгебры $\mathfrak{l}$ на тот же вектор a, ограниченных на меньшую орбиту $\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)$, обозначим как $dF_a^{\mathfrak{l}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)}$. Эти пространства совпадают:*

$$dF_a^{\mathfrak{g}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}(x_0)} = dF_a^{\mathfrak{l}}|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{l}}(x_0)}, \qquad (2.5)$$

и, в частности, совпадают их размерности.

Эта теорема также является простым следствием теоремы 2, так как в редуктивном случае условия 1) - 3) выполняются автоматически, а условие 4) следует из условия 1). Таким образом, редуктивные подалгебры максимального индекса содержащие вектор сдвига a, состоят целиком из критических точек коммутативного набора на $\mathfrak{g}$. Ранг отображения момента падает в этих точках до ранга коммутативного набора сдвигов инвариантов полупростой части подалгебры $\mathfrak{l}$.

Нетрудно построить пример описываемой ситуации. Для этого рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(n)$ в стандартном матричном представлении. Регулярный элемент a возьмем диагональным. Теперь любая блочно-диагональная подалгебра

$$\mathfrak{l} = \mathrm{u}(n_1) \times \mathrm{u}(n_2) \times \ldots \times \mathrm{u}(n_k) \cap \mathrm{su}(n), \quad n_1 + \ldots + n_k = n$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.

2.2 Вершины и ребра бифуркационной диаграммы

Теорема 3 позволяет найти большое количество критических точек отображения момента F_a. Не все критические точки могут быть описаны подобным образом, однако для точек максимального вырождения мы получаем полную классификацию.

Замечание 1. *До конца этого параграфа будем рассматривать коммутативный набор сдвигов инвариантов в ограничении на некоторую регулярную орбиту присоединенного представления компактной полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Будем называть рангом критической точки x ранг дифференциала отображения момента dF_a, вычисленный в этой точке. Для точек ранга 0 и 1 утверждение теоремы 3 может быть доказано в обратную сторону.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{h}_a \subset \mathfrak{g}$ *– подалгебра Картана, содержащая вектор сдвига* a*. Тогда точкам ранга* 0 *на регулярной орбите* $\mathcal{O}$ *являются точки ее пересечения с подалгеброй* $\mathfrak{h}_a$*:*

$$\operatorname{rank} d\mathcal{F}(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{h}_a.$$

Доказательство.

Применим теорему 3 к подалгебре $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}_a \subset \mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{h}_a$ коммутативна, то орбиты присоединенного представления являются точками, и ранг набора сдвигов инвариантов падает до 0. Следовательно, ранг сдвигов инвариантов на $\mathfrak{g}$ также равен нулю в любой точке $x_0 \in (\mathfrak{h}_a \cap \mathcal{O})$.

Обратно: предположим, что $x_0 \notin \mathfrak{h}_a$. Так как x_0 и a — регулярные элементы, то существует такое $\lambda \neq 0$, что $z_0 = x_0 + \lambda a$ также регулярный элемент. Рассмотрим подалгебру Картана $\mathfrak{h}_{z_0}$, содержащую z_0. Известно (см. лемму 3), что векторы $\operatorname{grad} I_k(z)|_{z=z_0}$ образуют базис этой подалгебры, и, поэтому можно выбрать такие константы $c_1, \ldots, c_r$, что $h = \sum_k c_k(\operatorname{grad} I_k(z)|_{z=z_0})$ регулярен. Положим

$f(x)=\sum_k c_k I_k(x+\lambda a)$. По условию теоремы градиент этой функции ортогонален любому вектору $v=[x_0,g]$, касающемуся орбиты в точке x_0.

$$\forall g\in\mathfrak{g},\ 0=\ \langle \operatorname{grad} f|_{x_0},[x_0,g]\rangle=\langle [h,x_0],g\rangle\Rightarrow\ [h,x_0]=0. \tag{2.6}$$

Так как элемент h регулярен по построению, то $x_0\in\mathfrak{h}_{z_0}$. Окончательно, $a=\frac{1}{\lambda}(z_0-x_0)\in\mathfrak{h}_{z_0}$, что означает $\mathfrak{h}_{z_0}=\mathfrak{h}_a$ and $x_0\in\mathfrak{h}_a$. ■

Рассмотрим систему корней Δ на подалгебре $\mathfrak{h}_a$. Обозначим соответствующие двумерные вещественные подпространства как V_α, где $\alpha\in\Delta$.

Лемма 2. *Пусть a и g — регулярные элементы компактной полупростой алгебры $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{h}_a$, $\mathfrak{h}_g$ — содержащие их картановские подалгебры. Если $\mathfrak{h}_g\subset\mathfrak{h}_a+\langle g\rangle$, то существует корень $\alpha\in\Delta(\mathfrak{h}_a)$, такой, что $g\in\mathfrak{h}_a+V_\alpha$, где V_α — двумерное вещественное $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_a}$-инвариантное подпространство, соответствующее этому корню α.*

Доказательство. Коразмерность $\mathfrak{h}_g$ в $\mathfrak{h}_a+\langle g\rangle$ равна 1, и централизатор любого элемента из $\mathfrak{h}_g\cap\mathfrak{h}_a$ содержит по крайней мере пространство $\mathfrak{h}_g+\mathfrak{h}_a$, размерность которого превосходит ранг алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, гиперплоскость $\mathfrak{h}_g\cap\mathfrak{h}_a$ состоит из сингулярных элементов, и существует корень $\alpha\in\Delta$, такой, что $\mathfrak{h}_g\cap\mathfrak{h}_a=\ker\alpha|_{\mathfrak{h}_a}$. Соответственно, существует такой вектор h_α, что $\forall h\in\mathfrak{h}_a$, $[h,g]=\alpha(h)[h_\alpha,g]$. Это означает, что образ элемента g под действием $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_a}$ имеет размерность 1.

Предположим, что $g\notin\mathfrak{h}_a+V_\alpha$. Рассмотрим корневое разложение

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_a+V_\alpha+V_\beta+\ldots+V_\gamma. \tag{2.7}$$

Соответствующее разложение элемента g имеет вид:

$$g=h^0+v_\alpha^1+v_\alpha^2+v_\beta^1+v_\beta^2+\ldots, \tag{2.8}$$

где

$$h^0\in\mathfrak{h}_a,\ v_\alpha^1,v_\alpha^2\in V_\alpha,\ v_\beta^1,v_\beta^2\in V_\beta\ldots. \tag{2.9}$$

Возьмем такие h_1, $h_2\in\mathfrak{h}_a$, что выполняются следующие условия:

$$h_1\in\ker\alpha,\ h_1\notin\ker\beta,\ h_2\in\ker\beta,\ h_1\notin\ker\alpha. \tag{2.10}$$

Таким образом, $[h_1, g]|_{V_\alpha + V_\beta} \in V_\beta \setminus 0$ и $[h_2, g]|_{V_\alpha + V_\beta} \in V_\alpha \setminus 0$, что противоречит тому факту, что размерность образа элемента g под действием $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_a}$ равна 1. ■

Лемма 3. *Рассмотрим инвариант $I(x)$ полупростой компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и некоторый регулярный элемент x_0. Тогда* $\operatorname{grad} I(x)|_{x=x_0} \in \mathfrak{h}_{x_0}$. *Более того, градиенты инвариантов порождают всю картановскую подалгебру $\mathfrak{h}_{x_0}$.*

Теорема 5. *Точки ранга 1 являются пересечениями орбиты и подалгебр вида $\mathfrak{h}_a + V_\alpha$:*

$$\operatorname{rank} d\mathcal{F}(x_0) \le 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \Delta(\mathfrak{h}_a),\ x_0 \in \mathcal{O} \cap (\mathfrak{h}_a + V_\alpha).$$

Доказательство. Предположим, что x_0 принадлежит подпространству $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}_a + V_\alpha$. Подпространство $\mathfrak{l}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$ и изоморфно $\mathbb{R}^{r-1} \oplus \mathrm{su}(2)$, $r = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$. Очевидно, что $\operatorname{ind} \mathfrak{l} = r$, и теорема 3 может быть применена к этой подалгебре. Так как $\mathfrak{h}_a$ — коммутативная алгебра, то максимальная размерность орбит присоединенного представления в $\mathfrak{l}$ равняется 2, и ранг коммутативного набора на этих орбитах равен 0 или 1. Следовательно, ранг исходного коммутативного набора на $\mathfrak{g}$ также равен 0 или 1.

Обратно. Случай точек нулевого ранга уже рассмотрен в теореме 4. Теперь предположим, что $\operatorname{rank} d\mathcal{F}|_{x_0} = 1$. Это означает, что существует такой вектор v, что $\langle \operatorname{sgrad} f|_{x_0} \rangle \subset \langle v \rangle$, и $x_0 \notin \mathfrak{h}_a + V_\alpha$ для некоторых $\alpha \in \Delta$. Также рассмотрим такое λ, что $g_1 = x_0 + \lambda a$ — регулярный элемент. Обозначим его централизатор как $\mathfrak{h}_{g_1}$. По лемме 2 имеем:

$$\mathfrak{h}_{g_1} \notin \mathfrak{h}_a + \langle g_1 \rangle \Rightarrow \exists g_2 \in \mathfrak{h}_{g_1},\ g_2 \notin \mathfrak{h}_a + \langle g_1 \rangle. \tag{2.11}$$

Заметим, что для $\forall g_i \in \mathfrak{h}_{g_1}$, $i = 1, 2$ существуют (см. лемму 3) соответствующие функции f_i вида $I(x + \lambda a)$, что $[x_0, g_i] = \operatorname{sgrad} f_i|_{x_0}$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$\exists k,\ [x_0, g_1 + k g_2] = 0, \quad g_1 + k g_2 \notin \mathfrak{h}_a. \tag{2.12}$$

Получаем противоречие, так как с одной стороны $g_1 + k g_2 \notin \mathfrak{h}_a$, а с другой стороны

$$\begin{gathered} [a, g_1 + k g_2] \ = \ \tfrac{1}{\lambda} \left([\lambda a, g_1 + k g_2] + [x_0, g_1 + k g_2] \right) \ = \\ = \tfrac{1}{\lambda} [x_0 + \lambda a, g_1 + k g_2] = [g_1, g_1 + k g_2] = 0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

■

Замечание 2. *Из теоремы 4 следует, что точки полного вырождения коммутативного набора на орбите инвариантны относительно действия группы Вейля* $W(\mathfrak{g})$*. Так как это действие свободно и транзитивно, то число точек ранга 0 равно порядку группы* $W(\mathfrak{g})$*.*

Глава 3

Классическое n-мерное твердое тело

3.1 Точки максимального падения ранга отображения момента

Задачей о движении n-мерного твердого тела [17], закрепленного в центре масс, называется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x + \lambda a) = [x + \lambda a, \phi(x) + \lambda b],$$

где, как и раньше, $\varphi = (\mathrm{ad}_a)^{-1} \circ \mathrm{ad}_b$. При этом предполагается, что $\mathrm{so}(n)$ стандартно вложено в $\mathrm{su}(n)$ с помощью стандартной матричной реализации. $x \in \mathrm{so}(n)$, $a \in \mathrm{su}(n)$ — фиксированный диагональный регулярный вектор. Обозначим, для краткости, алгебру $\mathrm{su}(n)$ как $\mathfrak{g}$ и алгебру $\mathrm{so}(n)$ как $\mathfrak{s}$. Пусть x_0 — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{s}$, $O^{\mathfrak{s}}(x_0)$ — проходящая через него орбита присоединенного представления. В качестве коммутативного набора на $O^{\mathfrak{s}}(x_0)$ рассмотрим сдвиги инвариантов $\mathfrak{g}$ на вектор a, ограниченные на подалгебру $\mathfrak{s}$. Коммутативность и полнота этого набора также доказаны в работе [20].

Предположим, что вектор сдвига a регулярен и представлен диагональной матрицей. Пусть $(f_1, \ldots, f_N)$ — функциональный базис коммутативного набора сдвига инвариантов. Обозначим отображение момента как $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$.

Теорема 6.

$$\operatorname{rk} dF(x_0) = 0 \Longleftrightarrow x_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & x_0^1 & \dots & 0 & 0 \\ -x_0^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_0^k \\ 0 & 0 & \dots & -x_0^k & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sim$ обозначает равенство матриц с точностью до одновременной перестановки строк и столбцов. Если n четно, то $k = n/2$. Если n нечетно, то $k = (n-1)/2$, а x_0 содержит одну нулевую строку и один нулевой столбец.

Доказательство. Пусть элемент x_0 выражается матрицей указанного вида. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что эта матрица блочно-диагональна и состоит из указанных блоков 2×2. Рассмотрим матричную алгебру $\mathfrak{l} = \mathrm{u}(2) \times \mathrm{u}(2) \times \cdots \times \mathrm{u}(2) \cap \mathrm{su}(n)$, состоящую из таких же блоков. Нетрудно видеть, что индекс алгебры $\mathfrak{l}$ равен индексу алгебры $\mathfrak{g}$. Так как $x_0, a \in \mathfrak{l}$, то (см. доказательство теоремы 2), $\operatorname{grad} I|_{\mathfrak{g}}(x_0 + \lambda a) \in \mathfrak{l}$. Градиент ограничения $I|_{\mathfrak{s}}(x_0 + \lambda a)$ является проекцией $\operatorname{grad} I|_{\mathfrak{g}}(x_0 + \lambda a)$ на $\mathfrak{s}$ и поэтому принадлежит проекции всей подалгебры L на подалгебру $\mathfrak{s}$. Эта проекция состоит из матриц того же вида, что и x_0, но со всеми возможными значениями x_0^1, x_0^2, $\cdots$ x_0^k, то есть является централизатором элемента x_0. Централизатор x_0 ортогонален проходящей через него орбите $O(x_0)$, следовательно, градиенты всех рассматриваемых функций, ограниченных на $O(x_0)$, вырождаются в точке x_0.

Пусть ранг коммутативного набора в точке x_0 упал до нуля, т.е.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall I \in I(\mathfrak{g}), \quad \operatorname{Pr}_{T_{x_0} 0(x_0)} dI(x_0 + \lambda a) = 0.$$

Тогда условие

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall I \in I(\mathfrak{g}),\ \operatorname{Pr}_{\mathfrak{s}} dI(x_0 + \lambda a) \subset \operatorname{Ann}^{\mathfrak{s}}(x_0)$$

равносильно условию

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \operatorname{Pr}_{\mathfrak{s}} \operatorname{Ann}^{\mathfrak{g}}(x_0 + \lambda a) \subset \operatorname{Ann}^{\mathfrak{s}}(x_0).$$

При $\lambda \to \infty$ пространство $\mathrm{Ann}^{\mathfrak{g}}(x_0 + \lambda a)$ переходит в $\mathrm{Ann}^{\mathfrak{g}}(a)$. Следовательно, существует такое $\lambda \neq 0$, что $\mathrm{Ann}^{\mathfrak{g}}(x_0+\lambda a)$ сюрьективно проектируется на $\mathrm{Ann}^{\mathfrak{g}}(a)$. Зафиксируем это значение λ.

Заметим, что алгебра $\mathfrak{g}$ имеет $\mathbb{Z}_2$-градуировку $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + V$, где V обозначает пространство мнимых симметрических матриц. Важно, что $\mathrm{Ann}^{\mathfrak{g}}(a)$ состоит из диагональных матриц и лежит в V. Рассмотрим произвольный элемент $y = y_0 + y_1$, $y_0 \in \mathfrak{s}$, $y_1 \in V$, коммутирующий с $x_0 + \lambda a$. Так как, по предположению,

$$\mathrm{Pr}_{\mathfrak{s}} \mathrm{Ann}^{\mathfrak{g}}(x_0 + \lambda a) \subset \mathrm{Ann}^{\mathfrak{s}}(x_0),$$

то $[y_0, x_0] = 0$. Расписывая по градуировке условие того, что коммутатор $[y_0 + y_1, x_0 + \lambda a]$ равен нулю, получаем:

$$\begin{cases} [y_1, a] = 0, & (*) \\ [y_0, \lambda a] + [y_1, x_0] = 0 & (**) \end{cases}.$$

Из $(*)$ следует то, что y_1 — любой диагональный элемент. Выполнение $(**)$ дает следующее уравнение:

$$\forall y_1, \quad [(\mathrm{ad}_a)^{-1} \circ \mathrm{ad}_{y_1} x_0, x_0] = 0.$$

Для решения этого уравнения достаточно рассмотреть базисные элементы y_1, имеющие единственный ненулевой матричный элемент на месте (i,i), $1 \le i \le n$. Для простоты рассмотрим $i = 1$. Обозначим матричные элементы x_0 как x^{mk}, $1 \le m, k \le n$, и положим $a = \mathrm{diag}(ia_1, ia_2, ..., ia_n)$. Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что матричные элементы уравнения $[(\mathrm{ad}_a)^{-1} \circ \mathrm{ad}_{y_1} x_0, x_0] = 0$ при имеют $m, k \ge 2$ вид:

$$x^{1m} x^{1k} \left(\frac{1}{a_1 - a_k} - \frac{1}{a_1 - a_m} \right) = 0.$$

Так как элемент a регулярен, то числа $a_1, a_2, ..., a_n$ различны. Следовательно для любого m существует не более одного такого значения k, что $x^{mk} \neq 0$, что и завершает доказательство. ■

Замечание 3. *Группа Вейля алгебры* $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(n)$ *свободно и транзитивно действует на критических точках ранга 0, однако ее действие на образе этих точек, т.е. на вершинах бифуркационной диаграммы, имеет естественный стабилизатор — группу Вейля полупростой части алгебры* $\mathfrak{l}$. *Следовательно, если в качестве интегралов задачи о движении* n*-мерного твердого тела выбраны сдвиги образующих кольца инвариантов* $I(\mathfrak{g})$, *то бифуркационная диаграмма будет иметь* $\frac{n!}{2^k}$ *вершин кратности* $2^{[(n-1)/2]}$.

Глава 4

Спектральная кривая алгебры $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$

Рассмотрим простую алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ в стандартном матричном представлении. Отождествим двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ с самой алгеброй $\mathfrak{g}$ при помощи метрики Киллинга $\langle\ ,\ \rangle$. При этом мы получаем на алгебре $\mathfrak{g}$ стандартную пуассонову структуру:

$$\{f, g\}(X) = \langle X, [df(X), dg(X)]\rangle, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}). \tag{4.1}$$

Заметим, что эта пуассонова структура имеет центр, состоящий из инвариантов присоединенного представления соответствующей группы Ли, причем совместные поверхности уровня этих инвариантов являются многообразиями, на которых данная пуассонова структура невырождена.

В кольце инвариантов присоединенного представления $I(\mathfrak{g})$ можно выбрать систему порождающих элементов $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$, взяв нетривиальные коэффициенты характеристического многочлена матрицы X:

$$L(\mu) = \det(X - \mu E), \quad X \in \mathfrak{g}, \tag{4.2}$$

где E — единичная матрица.

Выберем некоторый фиксированный регулярный полупростой элемент $a \in \mathfrak{g}$, который мы будем далее считать диагональным:

$$a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Рассмотрим кольцо B_a, порожденное всеми функциями вида

$$f(X) = I(X + \lambda a), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad f \in I(\mathfrak{g}). \tag{4.3}$$

Это кольцо B_a замечательно тем, что по теореме Мищенко и Фоменко [20] оно является коммутативным относительно рассматриваемой скобки Пуассона. Кроме того, для регулярных элементов a в кольце B_a содержится максимально возможное количество попарно коммутирующих и функционально независимых функций. Это число $N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Определение 1. *Спектральной кривой элемента* $X \in \mathfrak{g}$ *называется алгебраическая кривая* Γ_X, *заданная в* $\mathbb{C}^2$ *с координатами* (λ, μ) *уравнением*

$$\Gamma_X : R_X(\lambda, \mu) \stackrel{def}{=} \det(X + \lambda a - \mu E) = 0. \tag{4.4}$$

Коэффициентами старшей части многочлена R_X являются постоянные величины $c_1 = I_1(a), \ldots, c_{n-1} = I_{n-1}(a)$. Остальные коэффициенты многочлена R_X — это полиномиальные функции $f_1(X), \ldots, f_N(X)$, образующие в совокупности функциональный базис Φ_a — базис коммутативного набора, среди которых первые $n-1$ функции являются инвариами орбиты

$$I_1(X) = f_1(X), \ldots, I_{n-1}(X) = f_{n-1}(X).$$

Пример 1. *Алгебра* $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$:

$$R(\lambda, \mu) = (\mu^3 + c_1\mu\lambda^2 + c_2\lambda^3) + I_1 + I_2\mu + f_3\lambda\mu + f_4\lambda + f_5\lambda^2.$$

Для анализа коммутативного набора сдвигов инвариантов мы исследуем вырождения отображения момента

$$F_a : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^N, \quad X \mapsto (f_1(X), \ldots, f_N(X)). \tag{4.5}$$

Для этого определим его бифуркационную диаграмму:

$$\Sigma = \{\, \xi \in \mathbb{C}^N \mid \exists X \in \mathfrak{g},\ \mathrm{rk}\, dF_a(X) < N,\ \xi = F_a(X) \,\} \tag{4.6}$$

Заметим теперь, что спектральная кривая Γ_X полностью определяется вектором ξ и, следовательно, ее можно доопределить для любого элемента линейного пространства $\mathbb{C}^N$. Обозначим такую кривую как Γ_ξ.

Будем говорить, что кривая $\Gamma_\xi : R(\lambda, \mu) = 0$ имеет особую точку $P = (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{C}^2$, если

$$R(P) = \frac{\partial R}{\partial \lambda}(P) = \frac{\partial R}{\partial \mu}(P) = 0. \tag{4.7}$$

Назовем следующее множество дискриминантом:

$$D = \{ \, \xi \in \mathbb{C}^N \mid \exists P \in \mathrm{Sing}(\Gamma_\xi) \, \}. \tag{4.8}$$

Приведенная ниже лемма составляет первую часть теоремы о совпадении дискриминанта и бифуркационной диаграммы отображения момента.

Лемма 4. *Пусть $X, a \in \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$, и существуют неколлинеарные собственные векторы v, w матрицы X с собственным значением μ_0. Тогда спектральный многочлен $R(\lambda, \mu) = \det(X + \lambda a - \mu E)$ вырождается в точке $P = (0, \mu_0)$.*

Доказательство. Так как спектральный многочлен инвариантен относительно замены базиса в пространстве $\mathbb{C}^n$, то мы можем считать, что векторы v и w входят в этот базис как первые векторы. Тогда матрица $X - \mu_0 E$ имеет два первых нулевых столбца, а матрица $X - \mu_0 a + \lambda a - (\mu - \mu_0)E$ в этих же столбцах имеет элементы вида $c\lambda + d(\mu - \mu_0)$. Разлагая определитель по двум первым столбцам, получаем, что каждое слагаемое начинается с некоторой квадратичной функции $(c_1\lambda + d_1(\mu - \mu_0))(c_2\lambda + d_2(\mu - \mu_0))$ и удовлетворяет условию (4.7) как многочлен от λ и μ. Следовательно, весь определитель, являясь суммой таких слагаемых, также удовлетворяет условию (4.7). ■

Будем говорить, что коммутативный набор функций является полным в некоторой точке алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если ранг соответствующего отображения момента максимален и равен $N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{rk}\, \mathfrak{g})$. Коммутативный набор B_a, рассматриваемый в этой работе, происходит из пары согласованных скобок Пуассона – скобки (4.1) из скобки Ли-Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ и постоянной скобки

$$\{f, g\}_a(X) = \langle a, [df(X), dg(X)] \rangle, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}). \tag{4.9}$$

Для согласованных скобок Пуассона имеется общий критерий полноты коммутативного набора, полученный Болсиновым [5]. В нашем случае этот критерий имеет вид:

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли. Коммутативный набор B_a является полным в точке X тогда и только тогда, когда a и X не пропорциональны, и плоскость*

$\{\, \lambda a + \delta X \mid \lambda, \delta \in \mathbb{C} \,\}$ *не содержит ненулевых сингулярных элементов алгебры* $\mathfrak{g}$.

Теорема 8. *Бифуркационная диаграмма* Σ *совпадает с дискриминантом* D.

Доказательство. Докажем, что $\Sigma \in D$, т.е. проверим следующий факт: если отображение момента вырождено в точке $X \in \mathfrak{g}$, то спектральная кривая Γ_X имеет особую точку. Действительно, по теореме 7 существует такое λ_0, что $x + \lambda_0 a$ — сингулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. В силу леммы 4 существует такое значение μ_0, что многочлен $P(\lambda, \mu) = \det(X + \lambda a - \mu E)$ имеет особую точку (λ_0, μ_0).

Обратное утверждение является менее очевидным, и его доказательство состоит в построении отображения $S : \Sigma \to \mathfrak{g}$ такого, что $F_a \circ S = \mathrm{Id}|_{\Sigma}$, и обладающего следующим свойством:

$$\xi \in D \;\Rightarrow\; \operatorname{corank} dF|_{S(\xi)} \geq 1.$$

Рассмотрим произвольную точку дискриминанта $\xi \in D$. Пусть (λ_0, μ_0) – особая точка кривой Γ_ξ. Предположим, что мы нашли такие b и Y, что $I_1(Y) = \xi_1, \ldots, I_{n-1}(Y) = \xi_{n-1}$, элемент b сопряжен элементу a в $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : b = PaP^{-1}$, и $\det(Y + \lambda b - \mu E) = R_\xi$, причем если (λ_0, μ_0) — особая точка кривой Γ_ξ, то $Y_0 = Y + \lambda_0 b \in \mathrm{Sing}(\mathfrak{g})$. Тогда $P^{-1}YP + \lambda_0 a \in \mathrm{Sing}(\mathfrak{g})$, и $S(\xi) = P^{-1}YP$ является искомым решением. Заметим, что если такие элементы b и Y_0 найдены, то они удовлеворяют условию

$$\begin{aligned} \det(Y_0 + \lambda b - \mu E) &= \det(Y + (\lambda_0 + \lambda) b - \mu E) = \\ &= R_\xi(\lambda_0 + \lambda, \mu) \stackrel{def}{=} \phi_{\lambda_0} R_\xi(\lambda, \mu). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Преобразование сдвига ϕ_{λ_0} линейно, обратимо и сохраняет старшую часть многочлена R_ξ. Если ξ_{ij} – коэффициент при мономе $\lambda^i \mu^j$, а ξ^*_{ij} – соответствующий базисный вектор в $\mathbb{C}^N$, то

$$\phi_{\lambda_0} \xi^*_{ij} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k {\lambda_0}^{i-k} \xi^*_{kj}. \tag{4.11}$$

Применив преобразование ϕ_{λ_0}, мы получаем, что отображение $S(\xi)$ достаточно построить только для таких ξ, что кривая Γ_ξ имеет особую точку $(0, \mu_0)$.

Будем искать элементы b и Y_0 в следующем виде:

$$b = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Диагональная часть матрицы b должна совпадать с вектором сдвига a с точностью до перестановки ее элементов. Это обеспечивает требуемый вид старшей части многочлена R_ξ. Так как элемент a регулярен, то из этого следует также, что b и a сопряжены. Диагональные элементы Y_0 являются корнями уравнения

$$(\phi_{\lambda_0} R_\xi)(0, \mu) = R_\xi(\lambda_0, \mu) = 0, \tag{4.12}$$

и среди них по предположению есть кратное значение μ_0. Теперь нам остается определить значения внедиагональных элементов a_{ij} матрицы b.

Обозначим стандартный базис из матричных единиц в $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ как $\{e_{ij}\}$. Пространство V, в котором мы ищем матрицу b, обладает следующей фильтрацией:

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_{n-2}, \tag{4.13}$$

где V_0 является диагональной подалгеброй, а V_i определено как линейная оболочка $V_i = \langle e_{2+i,1}, e_{2+i,2}, e_{3+i,3}, \ldots, e_{n,n-i} \rangle$. Соответствующее разложение b обозначим

$$b = A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-2}.$$

Лемма 5. *Пусть $i + j = k,\ i \geq 1,\ k \geq 1$, тогда коэффициент f_{ij} при мономе $\lambda^i \mu^j$ многочлена $\det(Y_0 + \lambda b - \mu E)$ имеет вид:*

$$f_{ij}(b) = \Lambda_{ij}(A_{n-k}) + F_{ij}(A_{n-k-1}, A_{n-k-2}, \ldots, A_1), \tag{4.14}$$

где $\Lambda_{ij}(A_{n-k})$ — линейные функции.

Доказательство. Пусть ψ_{pq} – базис коалгебры $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})^*$, двойственный базису матричных единиц. Назовем высотой базисной функции ψ_{pq} число

$$\mathrm{ht}(\psi_{pq}) = q - p. \tag{4.15}$$

Соответственно, высотой монома от переменных ψ_{pq} назовем сумму высот его сомножителей. Коэффициенты характеристического многочлена матрицы являются суммами ее главных миноров, т.е. одночленов высоты 0. Заметим, что матрица $Y_0+\lambda b$ содержит только один (ненулевой) элемент высоты 2 и $n-2$ элемента высоты 1; остальные ее элементы имеют неположительную высоту. Следовательно, разлагая главный минор порядка k, не содержащий первого столбца и первой строки матрицы, мы получаем единственный моном высоты $(-k)$:

$$\pm a_{pq}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1, \quad q-p=-k. \tag{4.16}$$

Рассмотрим теперь главный минор, содержащий первый столбец матрицы $Y_0+\lambda b$. В разложении этого минора есть единственное слагаемое, в которое входит $\psi_{k+1,1}$, так как $\mathrm{ht}(\psi_{k+1,1})=-k$. Других мономов, содержащих элементы A^*_{n-k}, в рассматриваемом миноре нет. Докажем это.

Если в рассматриваемый моном входит $\psi_{1,1}(Y_0+\lambda b)$, то мы возвращаемся к предыдущему случаю. В противном случае, мы имеем в некотором мономе, кроме элемента A^*_{n-k} высоты $-k+1$, еще один элемент высоты -2 или меньше, так как $(Y_0+\lambda b)_{11}$ уже рассмотрено, а $(Y_0+\lambda b)_{21}=0$ по построению.

Для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что функция f_{ij} является линейной комбинацией главных миноров матрицы $Y_0-\lambda b$, каждый из которых линейно зависит от A_{n-k}. ■

Лемма 6. *Функции $\Lambda_{ij}(A_k)$ линейно независимы и их число равно размерности подпространства V_k. Определитель D^k_n, образованный их коэффициентами, вычисляется по формуле:*

$$D^k_n=\prod_{(i,j)\in M}(a_i-a_j), \tag{4.17}$$

где множество индексов M имеет вид

$$M=\{(i,j)|i-j\geq k\}\cup(1,2)\backslash(1+k,1). \tag{4.18}$$

Доказательство. Пусть S – множество из s переменных $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$. Обозначим коэффициент многочлена

$$P(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_s)$$

при t^{s-k} как $\sigma_k(S)$.

Каждая переменная из V_k входит в единственный главный минор порядка $k+1$. Пусть множество его индексов — это S_+, $S_+ \sqcup S_- = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Тогда данный минор входит в функции f_{ij} степени k с коэффициентами $\sigma_0(S_-), \ldots, \sigma_{k-1}(S_-)$. Выпишем явно множества S_- для всех переменных из V_k:

$$\begin{array}{ll}
a_{k+2,1}: & S_1 = (a_2, a_{k+3}, \ldots, a_n), \\
a_{k+2,2}: & S_2 = (a_1, a_{k+3}, \ldots, a_n), \\
a_{k+3,3}: & S_3 = (a_1, a_2, a_{k+4}, \ldots, a_n), \\
\ldots & \\
a_{n-1,n-k-1}: & S_{n-k-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-k-2}, a_n), \\
a_{n,n-k}: & S_{n-k} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-k-1}).
\end{array}$$

Определитель D_n^k матрицы коэффициентов линейных функций M_n^k принимает в таких обозначения следующий вид:

$$D_n^k = \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_0(S_1) & \sigma_0(S_2) & \ldots & \sigma_0(S_{n-k}) \\ \sigma_1(S_1) & \sigma_1(S_2) & \ldots & \sigma_1(S_{n-k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n-k-1}(S_1) & \sigma_{n-k-1}(S_2) & \ldots & \sigma_{n-k-1}(S_{n-k}) \end{array} \right\|. \tag{4.19}$$

Формулу (4.17) нетрудно доказать индукцией по размерности алгебры n. Действительно, при $n = k+2$ определитель имеет порядок 2 и равен $a_1 - a_2$. Шаг индукции:

$$\begin{aligned} D_n^k = D_{n-1}^k(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_k) = \\ = D_{n-1}^k(a_n^k + \sigma_1 a_n^{k-1} + \ldots + \sigma_{k-1}), \end{aligned} \tag{4.20}$$

где симметрические многочлены σ_i вычислены от переменных $a_1, \ldots, a_k$. Разлагая определитель (4.19) по первому столбцу, получаем, что нам достаточно доказать следующий факт: алгебраическое дополнение к элементу строки с номером i равно $(-1)^i D_{n-1}^k a_n^{k-i}$. Заметим, что

$$\sigma_i(S \sqcup a_n) = \sigma_i(S) - \sigma_{i-1}(S) a_n. \tag{4.21}$$

Поэтому матрица $\tilde{M}_n^k$, полученная из M_n^k вычеркиванием первого столбца, представляется в виде:

$$\tilde{M}_n^k = \begin{pmatrix} M_{n-1}^k \\ \hline 0 \end{pmatrix} + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \hline M_{n-1}^k \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

После того, как из этой матрицы вычеркивается строка с номером i, ее определитель легко вычисляется. Для этого нужно заметить, что производя элементарные преобразования над строками матрицы, мы можем привести ее к такому виду, в котором первые $i-1$ строк совпадают с первыми $i-1$ строками в первом слагаемом разложения (4.22), а последние $k-i$ строк совпадают с последними $k-i$ строками второго слагаемого. Вынося из последних $k-i$ строк множитель a^{k-i}, мы завершаем доказательство индукционного перехода. Лемма доказана. ■

Доказательство основной теоремы теперь завершено, так как по вектору ξ можно, двигаясь по градуировке, вычислить все элементы искомой матрицы b. ■

Глава 5

Регулярные точки отображения момента на компактных алгебрах Ли

Рассмотрим инволютивный набор функций $(f_1, \ldots, f_N)$, полученный методом сдвига инвариантов на компактной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В силу полноты данного набора функций, его неособые совместные поверхности уровня являются объединениями торов. Докажем следующие утверждения о строении множества особых точек.

Теорема 9. *Для почти всех регулярных векторов сдвига a множество неособых точек отображения момента F_a связно.*

Теорема 10. *Любая неособая совместная поверхность уровня состоит ровно из одного тора.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Sing}(\mathfrak{g})$ обозначает множество сингулярных элементов алгебры. Определим множества

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1(a) &= \{\, x \in \mathfrak{g} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda a \in \mathrm{Sing}(\mathfrak{g}) \,\}, \\ \mathfrak{g}_2(a) &= \{\, x \in \mathfrak{g} \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, x + \lambda a \in \mathrm{Sing}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \,\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Критерий Болсинова (7) для компактной алгебры Ли имеет такой же вид, но сингулярные элементы надо рассматривать не только в алгебре $\mathfrak{g}$, но и в ее комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Поэтому, множество $\mathfrak{g}_1(a) \cup \mathfrak{g}_2(a)$ есть в точности множество сингулярных точек отображения момента F_a.

Коразмерности множества $\mathfrak{g}_1(a)$ равняется 2. Это сразу следует из того, что для полупростой алгебры $\operatorname{codim} \mathrm{Sing}(\mathfrak{g}) = 3$. Докажем,что для почти всех a коразмерность множества $\mathfrak{g}_2(a)$ не меньше 4. Действительно, пусть это не так. Множество ненулевых вещественных чисел обозначим как $\mathbb{R}^*$. Имеем $\operatorname{codim} \mathfrak{g}_2(a) \leq 3$. Тогда коразмерность множества

$$S(a) = \operatorname{Sing}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \cap (\mathfrak{g} + i\mathbb{R}^* a) \tag{5.2}$$

в $\mathfrak{g} + i\mathbb{R}^* a$ меньше или равна 4 для почти всех a, в силу того, что

$$\mathfrak{g}_2(a) = \operatorname{Pr}_{\mathfrak{g}}(S(a)) + \mathbb{R}a. \tag{5.3}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Sing}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \left(\bigcup_{a \in P\mathfrak{g}} S(a) \right) \cup \operatorname{Sing}(\mathfrak{g}), \tag{5.4}$$

где $P\mathfrak{g}$ — это проективизация алгебры $\mathfrak{g}$, $\dim P\mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g} - 1$. Получаем противоречие, так как вещественная коразмерность множества $\operatorname{Sing}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ равна 6.

Лемма 7. *Если x_1 принадлежит $\mathfrak{g}_1(a)$ и $F_a(x_2) = F_a(x_1)$, то x_2 также принадлежит $\mathfrak{g}_1(a)$, т.е. $F_a(\mathfrak{g}_1(a))$ не разделяет множества регулярных значений.*

Следствие 2. *Для почти всех векторов сдвига a регулярные точки отображения момента F_a образуют открытое связное множество.*

Доказательство. По условию существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что $y_1 = x_1 + \lambda_0 a \in \operatorname{Sing}(\mathfrak{g})$. Рассмотрим элемент $y_2 = x_2 + \lambda_0 a$. Инварианты алгебры принимают на нем те же значения, что и на y_1. Так как значения инвариантов однозначно определяют орбиту в компактной алгебре, то y_1 и y_2 лежат на одной и той же орбите и, следовательно, сингулярны одновременно.

Пусть aтаково, что $\operatorname{codim} \mathfrak{g}_2(a) \geq 4$. Рассмотрим два регулярных значения $\xi_1 = F_a(x_1)$ и $\xi_2 = F_a(x_2)$. Точки x_1 и x_2 можно соединить непрерывным путем $\gamma(t)$, проходящим только через регулярные точки. Путь $F_a(\gamma(t))$ соединяет ξ_1 и ξ_2. При этом он не может пересекать $F_a(\mathfrak{g}_1(a))$ в силу только что доказаной леммы. Также можно считать, что этот путь не пересекает $F_a(\mathfrak{g}_2(a))$, так как в точках $\mathfrak{g}_2(a)$ ранг отображения момента падает не менее чем на 2, и соответственно $\operatorname{codim} F_a(\mathfrak{g}_2(a)) \geq 2$. Следствие 2 доказано. ■

Докажем теперь теорему 10. Так как для почти всех a у нас уже есть связность множества регулярных значений, то остается проверить утверждение теоремы 10 хотя бы в одной точке. В качестве такой точки мы возьмем точку максимального падения ранга инволютивного набора на регулярной орбите и докажем ее невырожденность в смысле теории интегрируемых систем (см. [7]). Окончательное доказательство теоремы следует из леммы 8 и соображений непрерывности.

Зафиксируем некоторую картановскую подалгебру H и соответствующее разложение алгебры в прямую сумму $\mathfrak{g} = H \oplus V$. Для вектора сдвига $a \in H$ любой регулярный элемент $x_0 \in H$ является точкой максимального вырождения коммутативного набора на регулярной орбите $O(x_0)$ (см. теорему 4).

Лемма 8. *Пусть прямая $x_0 + \lambda a$ находится в общем положении с гиперплоскостями $\operatorname{Ker} \alpha, \alpha \in \Delta(H)$. Тогда инволютивный набор $(f_1, \ldots, f_N)$ имеет в точке x_0 невырожденную особенность типа "центр-центр-...-центр".*

Доказательство. Касательное пространство к орбите $O(x_0)$ канонически отождествляется с пространством V, которое является прямой суммой двумерных вещественных корневых подпространств вида

$$V_\alpha = \langle E_\alpha + E_{-\alpha}, i(E_\alpha - E_{-\alpha}) \rangle, \quad \alpha \in \Delta_+(H).$$

Определим число λ_i условием $\alpha_i(x_0 + \lambda_i a) = 0$. Рассмотрим на пространстве H многочлен, который в точке $y_i = x_0 + \lambda_i a$ имеет вид $\alpha_i^2(h) + o(h^2)$ и вид $0 + o(h^2)$ в точках $W y_i$, где W — группа Вейля. Усреднив этот многочлен по дествию группы W, мы можем продолжить его до некоторого инварианта алгебры I, $\operatorname{grad} I(y_i) = 0$. Разлагая этот инвариант в ряд Тейлора в точке y_i, мы видим, что его квадратичная часть совпадает с квадратичным инвариантом централизатора элемента y_i и имеет вид $\alpha_i^2(h) + p_\alpha^2 + q_\alpha^2$, где p_α и q_α — координаты на V_α.

Для доказательства этого факта достаточно дважды продифференцировать соотношение $I(\operatorname{Ad}_{\exp(v)} y_i) = const$

по v и получить, что $\langle d^2 I(y_i), \mathrm{ad}_v\, y_i \rangle = 0$, т.е. квадратичная часть рассматриваемого инварианта равна нулю на подпространстве $V_\alpha^\perp \subset V$. Таким образом, для каждого $i = 1, \ldots, \frac{1}{2}\dim O$ построена функция вида $I(x + \lambda_i a)$, принадлежащая кольцу сдвигов инвариантов и имеющая вид $p_\alpha^2 + q_\alpha^2 + o(v^2)$ на касательном пространстве к орбите. Из линейной независимости квадратичных форм $p_\alpha^2 + q_\alpha^2$ следует утверждение леммы.

■

Для завершения доказательства теоремы 10 рассмотрим поверхность уровня M_ξ. Она является компактным подмножеством некоторой орбиты O. Рассмотрим сходящуюся последовательность $\{a_i\} \to a$, такую, что для любого i поверхность уровня $F_{a_i}^{-1}(\xi)$ — регулярный тор.

Если M_ξ имеет хотя бы две компоненты связности M_1 и M_2, то они имеют непересекающиеся открытые ε-окрестности $U_\varepsilon(M_1)$ и $U_\varepsilon(M_2)$. Так все $F_{a_i}^{-1}(\xi)$ связны, то они имеют непустое пересечение с замкнутым множеством $O \setminus (U_\varepsilon(M_1) \cap U_\varepsilon(M_2))$. Следовательно, существует последовательность $\{x_i\}$, $x_i \in F_{a_i}^{-1}(\xi)$, из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к M_ξ. Это противоречит непрерывной зависимости компонент отображения F_a от a. Теорема доказана. ■

Глава 6

Компактные полупростые алгебры Ли и спектральные кривые

Рассмотрим компактную простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ ранга r, принадлежащую одной из основных серий A_r, B_r, C_r или D_r, в матричном представлении минимальной размерности n.

В кольце инвариантов присоединенного представления $I(\mathfrak{g})$ можно выбрать систему порождающих элементов $I_1, I_2, \ldots, I_r$, взяв нетривиальные коэффициенты характеристического многочлена

$$L(\mu) = i^n \det(x - i\mu E), \quad x \in \mathfrak{g} \tag{6.1}$$

с той оговоркой, что для алгебры $\mathrm{so}(2r)$ в качестве последнего инварианта нужно взять вместо определителя матрицы ее пфаффиан.

Пусть a — вектор сдвига, который мы, как и раньше, выберем в диагональной подалгебре.

Определение 2. *Спектральной кривой элемента $x \in \mathfrak{g}$ называется алгебраическая кривая Γ_x, заданная в $\mathbb{C}^2$ с координатами (λ, μ) уравнением*

$$R_x(\lambda, \mu) \overset{def}{=} i^n \det(x + \lambda a - i\mu E) = 0. \tag{6.2}$$

В том случае, если $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(2r+1)$, спектральная кривая всегда приводима и имеет тривиальную компоненту $\{\mu = 0\}$. Поэтому мы модифицируем определение для данного случая, поделив многочлен R на μ.

Теперь нужно сделать еще одну процедуру — для алгебры $\mathrm{so}(2n)$ многочлен R содержит μ только в четных степенях. Заменим в этом случае μ^2 на μ.

Указанный вид многочленов (6.1) и (6.2) обеспечивает то, что их коэффициенты являются вещественными многочленами от вещественных и мнимых частей матричных элементов. Базисные функции кольца сдвигов инвариантов — это сами инварианты $I_1(x), \ldots, I_r(x)$ и полиномиальные функции $f_1(x), \ldots, f_N(x)$.

Пример 2. *Алгебра* $\mathrm{so}(5)$:

$$R(\lambda, \mu) = (\mu^4 + c_1\mu^2\lambda^2 + c_2\lambda^4) + I_1 + I_2\mu^2 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + f_3\lambda^3 + f_4\mu^2\lambda.$$

Пример 3. *Алгебра* $\mathrm{so}(8)$:

$$\begin{gathered} R(\lambda, \mu) = (\mu^8 + c_2\mu^6\lambda^2 + c_3\mu^4\lambda^4 + c_4\mu^2\lambda^6) + I_2\mu^6 + I_3\mu^4 + I_4\mu^2 + \\ \mu^6\lambda f_1 + \mu^4\lambda f_2 + \mu^4\lambda^2 f_3 + \mu^4\lambda^3 f_4 + \mu^2\lambda f_5 + \mu^2\lambda^2 f_6 + \mu^2\lambda^3 f_7 + \\ + \mu^2\lambda^4 f_8 + \mu^2\lambda^5 f_9 + (I_1 + f_{10}\lambda + f_{11}\lambda^2 + f_{12}\lambda^3 + c_1\lambda^4)^2. \end{gathered}$$

Определим отображение момента и его бифуркационную диаграмму по обычным формулам:

$$\begin{gathered} F : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^{r+N}, \quad x \mapsto (I_1(x), \ldots, I_r(x), f_1(x), \ldots, f_N(x)). \\ \Sigma = \{\, \xi \in \mathbb{R}^{r+N} \mid \exists x \in \mathfrak{g},\ \mathrm{rk}\, dF(x) < r + N,\ \xi = F(x) \,\} \end{gathered}$$

Заметим теперь, что спектральная кривая Γ_x полностью определяется вектором $\xi(x)$ и, следовательно, ее можно доопределить для любого вектора из линейного пространства $\mathbb{R}^{r+N}$. Обозначим такую кривую как Γ_ξ.

Лемма 9. *Рассмотрим сингулярный элемент x классической комплексной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда в пространстве минимального представления $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ существуют неколлинеарные собственные векторы v, w:*

$$\rho(x)v = \mu_0 v, \quad \rho(x)w = \mu_0 w.$$

Доказательство. Элемент x называется сингулярным, если размерность его централизатора больше ранга алгебры. Для алгебры $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ утверждение леммы доказывается приведением матрицы $\rho(x)$ к жордановой нормальной форме, строение централизатора которой хорошо известно (см. [13]). Размерность централизатора больше n только в том случае, когда для некоторого μ_0 существует не менее двух жордановых клеток с таким собственным значением.

В случае алгебр $\mathrm{so}(n,\mathbb{C})$ и $\mathrm{sp}(n,\mathbb{C})$ нужно сделать то же самое — привести матрицу $\rho(x)$ к жордановой нормальной форме ортогональным [13] или симлектическим преобразованием. Предположив противное, т.е. что каждому собственному значению соответствует одна жорданова клетка, вычислим централизатор $Z(x)$ как пересечение централизатора $\rho(x)$ в $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ с алгеброй $\mathfrak{g}$, и убедимся, что его размерность равна рангу $\mathfrak{g}$.

Обозначим $\rho(x)$ за X. Для алгебр $\mathrm{so}(n,\mathbb{C})$ и $\mathrm{sp}(n,\mathbb{C})$ жорданова форма любого элемента симметрична в том смысле, что каждой клетке с ненулевым собственным значением μ соответствует такая же клетка с собственным значением $-\mu$. Это следует из того, что матрицы X и $-X$ имеют одинаковые наборы инвариантных множителей (см. [13]). Следовательно, в обоих случаях достаточно вычислить централизатор пары соответствующих клеток с собственными значениями μ и $-\mu$, а также централизатор клетки с нулевым собственным значением. Пусть жорданова форма X состоит из клеток $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ с собственными значениями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$. Тогда цетрализатор X в $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ имеет блочный вид $Z(Y_1) \oplus Z(Y_2) \oplus \ldots \oplus Z(Y_s)$.

Жорданову клетку размера $k \times k$ с собственным значением μ обозначим как $J(\mu)$. Вычислим $Z(y) = Z(Y_\mu) \oplus Z(Y_{-\mu}) \cap \mathfrak{g}$.

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} J(\mu) & 0 \\ \hline 0 & -J(\mu)^\top \end{array}\right), \quad Z(Y) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

где $B = C = 0$, $[A, J(\mu)] = 0$, $[C, -J(\mu)] = 0$. В случае $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(n,\mathbb{C})$, $Z(Y)$ надо пересечь с множеством $\{A = -D^\top, B = -B^\top, C = -C^\top\}$, а в случае $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}(n,\mathbb{C})$ с множеством $\{A = -D^\top, B = B^\top, C = C^\top\}$. В обоих случаях получаем $\dim Z(y) = k$.

Рассмотрим теперь нулевую клетку в $\mathrm{so}(n,\mathbb{C})$. При четном n эта клетка не может быть единственной, так как ранг матрицы X всегда четный. Если n нечетно, то может существовать единственная 0-клетка Y размера $(2k+1) \times (2k+1)$. В соответствующей блочной подалгебре $\mathrm{so}(2k+1,\mathbb{C})$ она является главным нильпотентным элементом, и, следовательно, размерность $Z(y) = Z(Y) \cap \mathrm{so}(2k+1,\mathbb{C})$ равна k (см. [14]). Аналогично доказывается, что централизатор 0-клетки размера $2k \times 2k$ в $\mathrm{sp}(2k,\mathbb{C})$ имеет размерность k.

Суммируя размерности централизаторов отдельных клеток, вычисленные выше, мы получаем, что $\dim Z(x) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, т. е. элемент x

сингулярен. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Для изучения дискримината D мы рассмотрим его комплексификацию $D_{\mathbb{C}}$ и построим ее параметризацию. Идея построения параметризации заключается в том, чтобы, зафиксировав вектор a, все координаты I, кроме двух (I_1, I_0), и все координаты ξ, кроме одной (h), выразить значения (I_1, I_0, h) через координаты особой точки (λ_0, μ_0). Вектор зафиксированных координат обозначим как $\nu \in \mathbb{C}_I^{r-2} \oplus \mathbb{C}_f^{N-1}$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(n)$. В качестве I_0 возьмем свободный член R, а в качестве I_1 и h — коэффициенты при μ и λ. Получаем, что многочлен R имеет вид:

$$R = P(\lambda, \mu) + h\lambda + I_1\mu + I_0, \tag{6.3}$$

где P — фиксированный многочлен, определяемый вектором его коэффициентов ν. Особая точка P определена уравнениями:

$$R(P) = \frac{\partial R}{\partial \lambda}(P) = \frac{\partial R}{\partial \mu}(P) = 0. \tag{6.4}$$

Решая эти уравнения, находим искомую параметризацию:

$$\begin{cases} h = -P_\lambda(\lambda_0, \mu_0), \\ I_1 = -P_\mu(\lambda_0, \mu_0), \\ I_0 = \lambda_0 P_\lambda(\lambda_0, \mu_0) + \mu_0 P_\mu(\lambda_0, \mu_0) - P(\lambda_0, \mu_0), \end{cases} \tag{6.5}$$

где P_λ — частная производная P по λ, а P_μ — частная производная P по μ.

Для простых алгебр $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(2r+1)$ и $\mathrm{sp}(r)$ в качестве I_0 опять возьмем свободный член R, а в качестве I_1 и h - коэффициенты при μ^2 и λ. Получаем, что многочлен R имеет вид

$$R = P(\lambda, \mu) + h\lambda + I_1\mu^2 + I_0, \tag{6.6}$$

где P — фиксированный многочлен, определяемый вектором его коэффициентов ν. Заметим, что многочлены R и P содержат переменную μ только в четных степенях.

Решая уравнения (6.4), находим искомую параметризацию:

$$\begin{cases} h = -P_\lambda(\lambda_0, \mu_0), \\ I_1 = -\frac{1}{2\mu_0} P_\mu(\lambda_0, \mu_0), \\ I_0 = \lambda_0 P_\lambda(\lambda_0, \mu_0) + \frac{1}{2}\mu_0 P_\mu(\lambda_0, \mu_0) - P(\lambda_0, \mu_0), \end{cases} \tag{6.7}$$

если $\mu_0 \neq 0$. При $\mu = 0$ получается еще одно решение: для $\forall \gamma \in \mathbb{C}$
$$h = -P_\lambda, \quad I_0 = -P + \lambda_0 P_\lambda, \quad I_1 = \gamma. \tag{6.8}$$

Рассмотрим последний случай: $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(2r)$. Многочлен R теперь имеет вид
$$R = P(\lambda, \mu) + I_1 \mu + (Q(\lambda) + h\lambda + I_0)^2, \tag{6.9}$$
где $P(\lambda, \mu)$ и $Q(\lambda)$ — многочлены с фиксированными коэффициентами. Решая систему (6.4), получаем
$$\begin{cases} h = \mp \frac{P_\lambda}{2\sqrt{\mu_0 P_\mu - P}} - Q_\lambda, \\ I_1 = -P_\mu, \\ I_0 = \pm \frac{\lambda_0 P_\lambda + 2\mu_0 P_\mu - 2P}{2\sqrt{\mu_0 P_\mu - P}} - Q + \lambda_0 Q_\lambda, \end{cases} \tag{6.10}$$
при $\mu_0 P_\mu - P \neq 0$. Остальные решения системы (6.4) существуют при условии $\mu_0 P_\mu - P = 0$, $P_\lambda = 0$ и даются формулами:
$$h = -Q_\lambda, \quad I_0 = -Q + \lambda_0 Q_\lambda, \quad I_1 = -P_\mu. \tag{6.11}$$

Тривиальная проверка показывает, что параметризации (6.5), (6.7) (6.8) и (6.10) почти всегда задают двумерную поверхность. Для этого достаточно рассмотреть $P = \mu^k + \lambda^2$ в первом случае, положив $k = 2r$ для $\mathrm{so}(2r+1)$ и $\mathrm{sp}(r)$, а также $k = r+1$ для $\mathrm{su}(r+1)$. Во втором случае положим $P = \mu^r$, $Q = \lambda^2$.

Таким образом мы убеждаемся в том, что для почти всех векторов сдвига a, комплексная коразмерность множества $D_{\mathbb{C}}$ равна 1. Следовательно, $\operatorname{codim} D \geq 1$, а равенство проверяется теми же самыми примерами в силу того, что все использованные в них функции были вещественными.

Рассмотрим подмножество дискриминанта, состоящее из кривых с несколькими особыми точками:
$$D_2 = \{\, \xi \in \mathbb{R}^{r+N} \mid \exists P, Q \in \Gamma_\xi,\ P, Q \in \mathrm{Sing}(\Gamma_\xi),\ P \neq Q \,\}.$$

Лемма 10. *Для почти всех векторов сдвига a* $\operatorname{codim} D_2 \geq 2$.

Доказательство. Также, как и в предыдущей лемме, рассмотрим комплексификацию $(D_2)_{\mathbb{C}} \subset D_{\mathbb{C}}$. Для проверки нашего утверждения достаточно показать, что для почти всех $\nu \in \mathbb{C}_I^{r-2} \oplus \mathbb{C}_f^{N-1}$ размерность множества точек самопересечения $S(M_\nu^2)$ двумерной поверхности M_ν^2, задаваемой парамеризациями (6.5, 6.7, 6.8, 6.7), равна 0 или 1.

Рассмотрим те же самые многочлены $P = \mu^k + \lambda^2$ для (6.5, 6.7) и $P = \mu^r$, $Q = \lambda^2$ для (6.10). Для поверхности (6.8) утверждение очевидно. Пусть, например, $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(r+1)$, $k = r+1$ и пары (λ_0, μ_0) и (λ_1, μ_1) задают одну и ту же точку M_ν^2. Тогда из (6.5) следует, что

$$\begin{cases} -2\lambda_1 = -2\lambda_0, \\ -k\mu_1^{k-1} = -k\mu_0^{k-1}, \\ \lambda_1^2 + (k-1)\mu_1^k = \lambda_0^2 + (k-1)\mu_0^k. \end{cases} \tag{6.12}$$

Соотношения (6.12) выполняются только для $(\lambda_0, \mu_0) = (\lambda_1, \mu_1)$. Следовательно, параметризация пробегает поверхность M_ν^2 однократно, и для почти всех ν размерность $S(M_\nu^2)$ не превышает $2\dim M_\nu^2 - 3 = 1$. Коразмерность страта, задаваемого формулами (6.11), не менее 3 и, переходя к вещественной части $(D_2)_\mathbb{C}$ также как и в предыдущей лемме, мы получаем требуемый результат. ■

Теорема 11. *Бифуркацонная диаграмма Σ принадлежит множеству $D \cap F(\mathfrak{g})$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить следующий факт: если отображение момента вырождено в точке $x \in \mathfrak{g}$, то спектральная кривая Γ_x имеет особую точку. Действительно, по критерию Болсинова [5] существует такое λ_0, что $x + \lambda_0 a$ — сингулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$. В силу леммы 9 существует такое значение μ_0, что многочлен $P(\lambda, \mu) = \det(x + \lambda a - \mu E)$ имеет особую точку (λ_0, μ_0). Таким образом теорема полностью доказана для $\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ или $\mathrm{sp}(n, \mathbb{C})$, а также в случае $\mu_0 \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(2n)$, $\mu_0 = 0$, и многочлен P не делится на μ^4. Следовательно, он делится только на μ^2, и матрица элемента $x + \lambda_0 a$ имеет ровно две одномерные жордановы клетки со значением 0. Так как централизатор нулевой матрицы в $\mathrm{so}(2)$ одномерен, а элемент $x_0 = x + \lambda_0 a$ должен быть сингулярным, то подсчитывая размерность централизатора $Z(x_0)$, получаем (см. лемму 9), что существует несколько жордановых клеток для некоторого ненулевого собственного числа. Подставляя соответствующие собственные векторы в лемму 4.7, получаем утверждение теоремы.

Для алгебры $\mathrm{so}(2n+1)$ необходимо доказать, что если $\mu_0 = 0$, то P делится на μ^3. Это следует из того, что в данном случае P

содержит только нечетные степени μ и в тоже время делится на μ^2. ■

Теорема 12. *Для почти всех векторов сдвига* a

$$\operatorname{codim}(D \cap F(\mathfrak{g}) - \Sigma) \geq 2.$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы и леммы 10 достаточно проверить, что для любого ξ из образа отображения момента, $\xi \in D \setminus D_2$ следует, что $\xi \in \Sigma$. Действительно, рассмотрим любой прообраз $x = F^{-1}(\xi)$. Единственная особая точка кривой Γ_x имеет вещественные координаты (λ_0, μ_0), так как в противном случае $(\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0)$ — также особая точка $\Gamma_{-\bar{x}} = \Gamma_x$. Следовательно, элемент $x_0 = x + \lambda_0 a$ полупрост и имеет двукратное собственное значение μ_0 (если $\mu_0 = 0$, то трехкратное для $\mathrm{so}(2n+1)$ и четырехкратное для $\mathrm{so}(2n)$). Таким образом, x_0 — сингулярный элемент, и применение критерия Болсинова завершает доказательство. ■

Литература

[1] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*, Москва, Наука, 1979.

[2] Браилов Ю. А. *Топология бифуркационных диаграмм интегрируемых систем на полупростых алгебрах Ли*, Докл. Акад. Наук, Сер. матем., **375**, No.2, 151-153, 2000.

[3] Браилов Ю. А. *Геометрия особенностей интегрируемых систем на алгебрах Ли*, Докл. Акад. Наук, Сер. матем., **393**, No.3, 300-303, 2003.

[4] Браилов Ю. А. *Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли*, Мат. Сборник, **194**, N.11, 3-16, 2003.

[5] Болсинов А. В. *Критерий полноты семейства функций в инволюции построенных методом сдвига аргумента*, Докл. Акад. Наук СССР, Сер. матем., **301**, N.5, 1037-1040, 1988.

[6] Болсинов А. В., Йованович Б. *Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах*, Мат. Сборник, **192**, N.7, 21-40, 2001.

[7] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Издательский дом "Удмуртский университет Ижевск, 1999.

[8] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Введение в топологию интегрируемых интегрируемыех гамильтоновых систем*, Москва, Наука, 1997.

[9] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Современные методы теории интегрируемых систем*, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

[10] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*, РХД, Издательский дом "Удмуртский университет Ижевск, 1999.

[11] Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли*, Москва, Мир, 1978.

[12] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Москва, Наука, 1988.

[13] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*, Москва. Наука. 1966.

[14] Диксмье Ж. *Универсальные обертывающие алгебры*, Москва, Мир, 1978.

[15] Дубровин Б. А., Кричивер И. М., Новиков С. П. *Интегрируемые системы I.* Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. т.4, М. ВИНИТИ, 179-288, 1985.

[16] Ковалевская С. В. *Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки*, В кн.: Ковалевская С. В. *Научные работы (Классики науки)*, Москва, 153-232, 1948.

[17] Манаков С. В. *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела,* Функциональный анализ и его приложения, **10**, N.4, 1976.

[18] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Об интегрируемости уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли*, Докл. Акад. Наук, **231**, 1976, N.3, 536-538.

[19] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли*, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем., **42**, N.2, 396-415, 1978.

[20] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли*, Труды сем. по вект. и тенз. анализу. **19**, Москва, Изд-во Моск. Унив. 3-94. 1979.

[21] Новиков С. П. *Периодическая задача Кортевега-де Фриза I*, Функц. анализ, **8**, вып. 3, 54-66, 1974.

[22] Нгуен. Т. З. *Топологические инварианты интегрируемых геодезических потоков на многомерном торе и сфере*, Труды МИРАН, **205**, 73-91, 1994.

[23] Оден М. *Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем*, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет 1999.

[24] Орел. О. Е. *Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнения Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина*, Матем. Сборник, **186**, вып. 2, 105-128, 1995.

[25] Орел. О. Е., Такахаши. Ш. *Траекторная классификация интегрируемых задач Горячева-Чаплыгина методами компьютерного анализа*, Матем. Сборник, **187**, вып. 1, 95-112, 1996.

[26] Ошемков А. А. *Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на SO(4)*, УМН, **42**, вып. 2, 199-200, 1990.

[27] Ошемков А. А. *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых систем с двумя степенями свободы*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 23, Москва, изд-во МГУ, 122-132, 1988.

[28] Рейман А. Г. *Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли*, Записки ЛОМИ, т. 95, 3-54, 1980.

[29] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, М., Факториал, Изд-во Удм. ун-та, 1995.

[30] Харламов М. П. *Топологический анализ классических интегрируемых случаев динамики твердого тела*, Докл. Акад. Наук СССР, Сер. матем., **273**, N.6, 1322-1325, 1983.

[31] Brailov Yu. A., Fomenko A. T. *Lie groups and integrable Hamiltonian systems*, Recent Advances in Lie Theory, Heldermann, 2002.

[32] Oshemkov A. A. *Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations*, Advances in Soviet Mathematics, AMS, **6**, 67-146, 1991.

[33] Mumford D. *Tata lectures on theta*, Birkhaüser, Boston, 1984. Пер. с англ.: Мамфорд Д. *Лекции о тэта-функциях,* Москва, Мир, 1988.

[34] Moser J. *Integrable Hamiltonian System and Spectral Theory*, Lezioni Fermiani, Pisa, 1981. Пер. с англ.: Мозер Ю. *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория,* М.-Иж., РХД, 184-254, 1999

[35] Williamson J. *On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dinamical systems*, American Journal of Mathematics, 1937, vol. 47, N.4, 719-733, 1995.