МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Борисенко Алексей Александрович

УДК 514.752.4

ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНО-МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ МЕТОДОМ ФОРМ КАЛИБРОВКИ

01.01.04 — *геометрия и топология*

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН
профессор А. Т. Фоменко

МОСКВА — 1996

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тема работы находится на стыке двух важных разделов современной дифференциальной геометрии: *теории минимальных подмногообразий и теории гармонических отображений*. Настоящая диссертация посвящена исследованию некоторых классов глобально минимальных подмногообразий и гармонических морфизмов.

Построение конкретных примеров глобально-минимальных (в том или ином смысле) подмногообразий Риманова многообразия равно как и построение новых примеров гармонических морфизмов между Римановыми многообразиями является глубоко нетривиальной геометрической и топологической проблемой вызывающей в последнее десятилетие огромный интерес.

Одним из наиболее мощных методов, позволяющих строить явные примеры глобально-минимальных в своем классе гомологий подмногообразий Риманова многообразия является метод форм калибровки (формой калибровки называется замкнутая дифференциальня форма комассы 1), разработанный Р. Харви и Б. Лоусоном. Этот метод был успешно применен в работах Харви и Лоусона [H-L1,H-L2], Ле Хонг Вана [Ле1-Ле4,Le1], Лавлора [Lwl], Моргана [Mrg1,Mrg2] и др.

В частности Харви и Лоусоном был введен класс Специально-Лагранжевых (минимальных Лагранжевых) подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и доказано, что вложение нормального расслоения $N(M^k) \subset T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$ подмногообразия M^k Евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ является Специально-Лагранжевым (SL-) если и только если все инварианты нечетного порядка второй квадратичной формы M^k равны нулю. Такие подмногообразия называются простыми. В силу вышесказанного изучение таких подмногообразий Евклидова пространства также представляет интерес.

В последние годы весьма интенсивно изучался класс так называемых сильно-параболических подмногообразий Риманова многообразия. В частности следует упомянуть результаты Черна-Кейпера [Che-Kui], А.А.Борисенко [Бо1-

Бо4], Дачзера-Громолла [DG1-DG2] о строении таких подмногообразий. Так Дачзер и Громолл [DG1] определили так называемую Гауссову параметризацию сильно-параболических гиперповерхностей в Евклидовом пространстве, а А.А.Борисенко [Бо3,Бо4] и Мальц [Mal] изучали строение параболических подмногообразий Риманова многообразия при выполнении некоторых дополнительных условий на тензор кривизны объемлющего многообразия вдоль параболического подмногообразия. Эти результаты могут быть применены для исследования строения некоторых классов минимальных сильно-параболических подмногообразий Римановых многообразий и построения явных примеров деформации Специально-Лагранжевых (SL-) нормальных расслоений (обобщение результатов Харви и Лоусона) и гармонических морфизмов (или что то же самое *гармонических (слабо) горизонтально-конформных субмерсий*), интенсивно изучаемых в работах Бейрда [Brd,Brd-Wo1–Brd-Wo5], Вуда[Wo1,Wo2], Гудмунссона [Brd-Gu,Gu1,Gu2,Gu-Wo], Эллса-Ратто [Brd-Ra,Brd-El,El-Ra].

Большой интерес вызывает также построение конретных примеров глобально-минимальных в своем классе гомологий однородных подмногообразий в однородных пространствах. Здесь необходимо упомянуть работы А.Т.Фоменко [Фом1-Фом7], Дао Чонг Тхи[Дао1-Дао3,Дао-Фом], Ле Хонг Ван [Ле1-Ле4,Ле-Фом3], А.Иванова[Iv],Глюка-Моргана-Зиллера [G-M-Z] и др.

В первой главе содержится обзор литературы и основных результатов теории форм калибровки, являющейся инструментом построения нетривиальных примеров глобально-минимальных поверхностей.

Формой калибровки на римановом многообразии X^n называется замкнутая дифференциальная k-форма φ комассы 1. Подмногообразие M^k риманова многообразия X^n называется φ-калибрируемым если φ достигает своего максимального значения на касательных плоскостях к M^k.

Основным результатом этого метода является то, что калибрируемые подмногообразия являются глобально минимальными в своем классе гомологий.

Вторая глава посвящена изучению Специально-Лагранжевых поверхностей в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ и простых поверхностей в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

В 1 и 2 параграфах главы 2 содержится обзор результатов теории Специально-Лагранжевых (SL-) подмногообразий и Специально-Лагранжевых нормальных расслоений.

В параграфе 3 построены деформации SL-нормальных расслоений над двумерной минимальной поверхностью в Евклидовом пространстве в классе SL-подмногообразий, обобщающие результаты Харви и Лоусона о нормальных расслоениях над двумерными минимальными поверхностями.

А именно, пусть M^2 – регулярная минимальная ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$ и ρ – гармоническая функция на M^2. Определим в каждой точке $p \in M^2$ два вектора $\tau(p)$ и $n_0(p)$. Пусть (x,y) локальные координаты в окрестности p индуцирующие заданную ориентацию на $M^2, r(x,y)$ – радиус-вектор M^2 и $\times$ стандартное векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Положим

$$n_0(p) = \frac{r_x \times r_y}{|r_x \times r_y|}$$

– вектор единичной нормали, согласованный с ориентацией и

$$\tau(p) = \frac{\rho_x r_y - \rho_y r_x}{|r_x \times r_y|} = sgrad\rho$$

– косой градиент функции ρ относительно формы обьема на M^2, которая определяет симплектическую структуру M^2.

Теорема 2.3.1. *Пусть M^2 – регулярная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$ и ρ – гармоническая функция на M^2.Рассмотрим следующее подмногообразие (возможно с особеностями) в $\mathbb{C}^3$:*

$$N^3_\rho = \{(p; \tau(p) \times n_0(p) + tn_0(p)) \in \mathbb{C}^3 : p \in M^2, t \in \mathbb{R}\}$$

Тогда N^3 – SL-подмногообразие $\mathbb{C}^3$ и SL-форма имеет вид $\alpha = Re(dz)$ в стандартном унитарном базисе.

Эта теорема имеет следующий многомерный аналог:

Теорема 2.3.11. *Пусть M^2 – ориентируемая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ и ρ – гармоническая на M^2 функция. Тогда поверхность*

$$N^n_\rho = \{(r(P), sgrad\rho(P) + \sum_{k=3,n} t_k \nu_k(P)) | P \in M^2, t_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$$

– SL-подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, где $r(P)$ – радиус-вектор M^2, $(\nu_k(P))_3^n$ – ортонормированный базис в нормальном пространстве к M^2, $sgrad\rho$ – косой градиент функции ρ относительно формы обьема на M^2.

Кроме того имеет место следующая теорема типа Лиувилля:

Пусть $f = \nabla F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – градиентное отображение с потенциалом F определенным на всем $\mathbb{R}^3$. Из результатов Харви и Лоусона следует, что график f является SL-поверхностью если $\Delta F = \det HessF$, в частности если выполнены условия :

(1) $\Delta F = 0$

(2) $\det HessF = 0$

Оказывается, что при некоторых ограничениях на F, эта поверхность – цилиндр над комплексной кривой в $\mathbb{C}^2$. А именно, допустим, что

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{для любого } x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

Из условия $\det HessF = 0$ следует, что поверхность $M^3 = \{(x, F(x)) | x \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$ расслоена на прямолинейные образующие и условие $\Delta \neq 0$ означает, что все эти образующие трансверсальны к сечению M^3 гиперплоскостью $\{x_3 = 0\}$

Теорема 2.3.10. *Пусть $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

(1) $\Delta F = 0$

(2) $\det HessF = 0$

(3) $|\Delta| \geq C^2$ *для любого* $x = (x_1, x_2, 0)$

(4) $|F_{33}|(x_1, x_2, 0) \leq C$

Тогда график M^3 функции F – цилиндр в $\mathbb{R}^4$ и график $N^3 \subset \mathbb{C}^3$ градиентного отображения ∇F – цилиндр над комплексной кривой $V^1 \subset \mathbb{C}^2$

В 4 параграфе исследована структура минимальных сильно 1-параболических трехмерных подмногообразий Евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ и построены SL-деформации нормальных расслоений над этими поверхностями .

В работе [DG1] М.Дачзер и Д.Громолл изучали строение минимальной (n-2)-параболической гиперповерхности $M^n \subset R^{n+1}$, которая также является простым подмногообразием. Они рассмотрели $V^2 \subset S^n$ – Гауссов образ M^n, – и используя специальную параметризацию произвольной (n-2)-параболической гиперповерхности посредством V^2 и некоторой функции γ на V^2, доказали следующую теорему.

Теорема [DG1].

Пусть $f : M^n \to R^{n+1}$ – (n-2)-параболическое изометрическое погружение и (V^2, γ) задает Гауссову параметризацию M^n.

Тогда M^n – минимально в R^{n+1} *если и только если*

(i) V^2 – минимальна в S^n

(ii) $\Delta\gamma + 2\gamma = 0$ *,где Δ – Лапласиан на V^2.*

Нам удалось доказать, что структура 3-мерного минимального сильно 1-параболического подмногообразия в $\mathbb{R}^{n+1}$ также определяется парой (V^2, λ), удовлетворяющей условиям (i),(ii) и описать множество особенностей такого подмногообразия. Оказывается, что множество особенностей определяется нулями λ.

Таким образом возникает взаимно-однозначное соответствие между 3 мерными минимальными сильно 1-параболическими подмногообразиями и минимальными (n 2)-параболическими гиперповерхностями в R^{n+1}, обобщающее хорошо известную сопряженность двумерных минимальных минимальных поверхностей в S^3.

Рассмотрим произвольное сильно 1-параболическое подмногообразие $F^3 \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда через каждую регулярную точку $Q \in F^3$, не являющуюся точкой уплощения, проходит прямая $\pi(Q)$, лежащая на F^3 вдоль которой касательное пространство к F^3 стационарно, и можно определить (по крайней мере локально) *"Гауссово" отображение* $\Gamma : F^3 \to S^n$, являющееся аналогом обычного Гауссова отображения для гиперповерхностей, и отображающее точку Q в единичный вектор в направлении $\pi(Q)$. Здесь и в дальнейшем всюду предполагается, что Γ может быть непрерывно продолжено в точки уплощения и *"Гаусс-образ"* $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярен в S^n.

Рассмотрим локальные координаты (u_1, u_2, u_3) на F^3, введенные в [Бо2], и специлизируем выбор (u_1, u_2) так, что они также будут являться парой декартовых координат на центральной проекции V^2. При таком выборе радиус-вектор F^3 имеет вид :

$$r(u_1, u_2, u_3) = \rho(u_1, u_2) + u_3 s(u_1, u_2) \tag{1}$$

где

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad s = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ e \end{pmatrix}$$

а вышеописанная параметризация V^2 :

$$n = \frac{s}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad \begin{matrix} \alpha = \|s\| = \sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2 + \sum\limits_{q=3,n} h_q^2} \\ \epsilon = \pm 1 \end{matrix} \qquad (2)$$

и будем называть параметризации (1),(2) F^3, V^2 стандартными.

Первым нетривиальным результатом является следующая теорема:

Теорема 2.4.1. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическое подмногообразие, существенно лежащее в $\mathbb{R}^{n+1} (n > 3)$ и "Гаусс-образ" $V^2 = \Gamma(F^3)$ регулярен в S^n.*

Тогда

$$F^3 \text{ – минимально в } \mathbb{R}^{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad V^2 \text{ – минимален в} S^n$$

Замечание : в случае n=3 Теорема 2.4.1 не верна, т.к. по теореме Дачзера-Громолла произвольная минимальная поверхность $V^2 \subset S^3$ и произвольная функция γ на V^2 определяют некоторую 1-параболическую поверхность $F^3 \subset \mathbb{R}^4$ минимальную тогда и только тогда, когда $\Delta\gamma + 2\gamma = 0$.

Функция λ, определяющая строение минимального сильно 1-параболического подмногообразия F^3, которую мы называем *скручивающей*, возникает в следующих двух леммах:

Лемма 2.4.5. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическое подмногообразие, существенно лежащее в $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n > 3)$, и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – ориентированная минимальная поверхность в S^n. Тогда существует функция λ, инвариантно определенная на V^2, такая, что в произвольной стандартной параметризации вида (1) на F^3 выполняются соотношения :*

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} &= \frac{1}{\alpha} g^{11}\sqrt{g}\hat{\lambda} \\ \rho_{2,2} - \rho_{1,1} &= 2\frac{1}{\alpha} g^{12}\sqrt{g}\hat{\lambda} \\ \rho_{2,1} &= -\frac{1}{\alpha} g^{22}\sqrt{g}\hat{\lambda} \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\hat{\lambda} = \pm\lambda$ в зависимости от ориентации V^2 в координатах (2).

Лемма 2.4.5′. *Пусть $F^3 \subset \mathbb{R}^4$ – минимальная параболическая гиперповерхность и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярен. Тогда выполняются соотношения (3) из леммы 2.4.5.*

Сформулируем теперь основные результаты данного параграфа

Теорема 2.4.8. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическое минимальное подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярна в S^n, λ – скручивающая функция для F^3.*

Тогда

$$\begin{aligned} &(i)\ V^2 \quad \text{– минимальна в } S^n \\ &(ii)\quad \Delta\lambda + 2\lambda = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Обратно: пусть V^2 – минимальная поверхность в S^n и λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.

Тогда существует единственное, с точностью до параллельного переноса, минимальное сильно 1-параболическое подмногообразие F^3 в $\mathbb{R}^{n+1}$ такое, что ;

$$(i)\ V^2 = \Gamma(F^3)$$

$$(ii)\ \lambda \quad \text{– скручивающая функция для } F^3$$

Рассмотрим теперь регулярно погруженное минимальное сильно 1-параболическое подмногообразие $\mathbb{R}^{n+1}$ с полными слоями.

Определение. Точка Q подмногообразия M^k Риманова многообразия X^n называется **точкой уплощения** если вторая фундаментальрая форма M^k в Q равна нулю.

Теорема 2.4.10. *Пусть F^3 – регулярно погруженное минимальное сильно 1-параболическое подмногообразие $\mathbb{R}^{n+1}$ с полными слоями и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярна в S^n. Тогда*

(i) если P – точка уплощения F^3, то прямая $\pi(P)$ целиком состоит из точек уплощения (т.е. множество точек уплощения насыщено) и $Q = \Gamma(P)$ – точка уплощения для V^2 в S^n.

(ii) скручивающая функция λ для F^3 нигде не обращается в ноль на V^2

Обратно : пусть V^2 – минимально погруженная (не вполне геодезическая) поверхность в S^n и λ – нигде не равная нулю функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.

Тогда поверхность F^3 из Теоремы 2.4.8 – регулярно погруженное минимальное сильно 1-параболическое подмногообразие с полными слоями. Более того, *прямые, являющиеся прообразами точек уплощения на V^2, целиком состоят из точек уплощения F^3.*

Теорема 2.4.14.
Пусть F^3 – регулярно погруженное минимальное сильно 1-параболическое подмногообразие $\mathbb{R}^{n+1}$ и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – полная минимальная поверхность в S^n. Тогда F^3 – вполне геодезично.

Сформулируем теперь теорему, дополняющую теорему 2.4.8 и дающую явное и вполне инвариантное описание структуры и множества особенностей F^3. Для этого нам необходима следующая лемма:

Лемма 2.4.16. *Пусть V^2 – ориентированная минимально погруженная поверхность поверхность в S^n и λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.
Тогда существует (многозначная) вектор-функция γ на V^2, такая, что в любых локальных координатах (u_1, u_2) на V^2 из заданного класса ориентации выполнены следующие соотношения :*

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= g^{12}\sqrt{g}(\lambda r_1 - \lambda_1 r) + g^{22}\sqrt{g}(\lambda r_2 - \lambda_2 r)\\ \gamma_2 &= -g^{11}\sqrt{g}(\lambda r_1 - \lambda_1 r) - g^{12}\sqrt{g}(\lambda r_2 - \lambda_2 r)\end{aligned}$$

где r – радиус-вектор V^2 в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 2.4.18. *Пусть V^2 минимальная поверхность в S^n, λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$ и $\gamma : V^2 \to \mathbb{R}^{n+1}$ – отображение, определенное в лемме 2.4.16. Тогда
(i) Поверхность F^3 в $\mathbb{R}^{n+1}$ определенная следующим образом :*

$$F^3 \quad : \quad \{\bar{r}(Q,t) = \gamma(Q) - tr(Q) \quad Q \in V^2 \; ; \; t \in R\} \tag{5}$$

*является минимальной сильно 1-параболической с "Гаусс-образом" V^2 и скручивающей функцией λ.
(ii) множество особенностей F^3 есть :*

$$\Sigma = \{\, \gamma(Q) : \lambda(Q) = 0 \,\}$$

В 4 параграфе также доказаны теоремы аналогичные теоремам 2.3.1 и 2.3.11 об SL-деформациях SL-нормальных расслоений.

Теорема 2.4.19. *Пусть V^2 минимальная поверхность в S^3, $V^2_* \subset S^3$ – двойственная минимальная поверхность, радиус-вектор которой является единичной нормалью к V^2 в S^3. $\lambda(\lambda_*)$ – функция на $V^2(V^2_*)$, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0(\Delta_*\lambda_* + 2\lambda_* = 0)$, где $\Delta(\Delta_*)$ – Лапласиан на $V^2(V^2_*)$. Тогда поверхность $N^4 \subset \mathbb{C}^4$ заданная по формуле*

$$N^4 : \{R(Q,t,t_*) = (\gamma(Q) + tr(Q); \gamma_*(Q_*) + t_*r_*(Q_*))|Q \in V^2; t, t_* \in \mathbb{R}\}$$

является SL-подмногообразием в $\mathbb{C}^4$, где $Q_* \in V^2_*$ соответствует $Q \in V^2$ при отображении двойственности и $\gamma(\gamma_*)$ определены в лемме 2.4.16.

Теорема 2.4.22. *Пусть V^2 – минимальная поверхность в S^n и λ, μ -функции на V^2, удовлетворяющие уравнениям $\Delta\lambda + 2\lambda = 0, \Delta\mu + 2\mu = 0$. Тогда поверхность N^{n+1} с радиус-вектором*

$$N^{n+1} : \left\{R(Q,t,s) = (\mu r(Q) + \nabla\mu(Q) + \sum_{k=3}^{n} t_k\nu_k(Q); \gamma(Q) + sr(Q))\right\}$$

является SL-подмногообразием $\mathbb{C}^{n+1}$, где r – радиус-вектор V^2, $\nabla\mu$ – градиент μ, рассматриваемый как вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$ касательный к V^2, $(\nu_k)^n_{k=3}$ – базис нормалей к V^2 в S^n, $t = (t_3, \dots, t_n)$ и γ задается по паре (V^2, λ) как в лемме 2.4.16.

В заключение параграфа приводится конструкция, позволяющая описать строение непараметрической минимальной параболической поверхности $M^3 \subset R^4$ аналогичная конструкции из параграфа 2.3.

В 5 параграфе построен новый класс ассоциативных подмногообразий в $\mathbb{R}^7$, т.е. трехмерных подмногообразий все касательные плоскости являются мнимыми частями кватернионных подалгебр алгебры чисел Кэли. Из результатов Харви и Лоусона известно, что такие подмногообразия глобально-минимальны в $R^7 = Im\mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – алгебра чисел Кэли.

Рассмотрим единичную сферу $S^6 \in Im\mathcal{O}$. На S^6 естественным образом вводится почти комплексная структура J, порожденная векторным произведением $\times$ (возникающим из умножения чисел Кэли). Поверхность $V^2 \in S^6$ называется **комплексной** если для любого $x \in V^2$ касательная плоскость T_xV^2 инвариантна относительно почти-комплексной структуры J

Из [Gr] следует, что всякая комплексная поверхность V^2 в (S^6, J) локально минимальна.

Оказывается, что имеет место следующая теорема:

Теорема 2.5.6. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическая поверхность в $\mathbb{R}^7 = Im\mathbb{O}$ и "Гаусс"-образ $V^2 = \Gamma(F^3)$ регулярен в S^6. Тогда F^3 ассоциативна, если и только если V^2 комплексна.*

Применив результаты параграфа 2.4, можно доказать также следующий результат:

Теорема 2.5.7. *Пусть*
(a) V^2 – погруженная комплексная поверхность в (S^6, J)
(b) λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta\lambda + 2\lambda = 0 \tag{2.5.2}$$

где Δ – Лапласиан на V^2.
Тогда

(1) *с точностью до параллельного переноса в $\mathbb{R}^7$ существует единственная ассоциативная сильно 1-параболическая поверхность $F^3(V^2, \lambda)$ такая, что $V^2 = \Gamma(F^3)$ и λ – скручивающая функция для F^3.*

(2) *если $\lambda(Q) \neq 0$ для любого $Q \in V^2$, то $F^3(V^2, \lambda)$ – регулярная погруженная поверхность с полными слоями.*

(3) $\lambda \equiv 0 \quad \leftrightarrow \quad F^3 = CV^2$ *–ассоциативный конус.*

(4) *радиус вектор F^3 имеет вид :*

$$\{r(Q,t) = \xi(Q) + tn(Q) | Q \in V^2, t \in \mathbb{R}\}$$

здесь $n(Q)$ – радиус-вектор V^2, $\xi(Q)$ – (многозначная) вектор-функция на V^2 со значениями в $\mathbb{R}^7$ частные производные которой в любой изотермической системе координат на V^2 имеют вид :

$$\xi_1 = +\lambda n_2 - \lambda_2 n$$
$$\xi_2 = -\lambda n_1 + \lambda_1 n$$

Более того данная конструкция обратима, т.е. для любой ассоциативной сильно 1-параболической поверхности F^3 в $\mathbb{R}^7$ ее "Гаусс"-образ и скручивающая функция удовлетворяют условиям (a),(b) соответственно.

В 6 параграфе изучаются круговые погружения почти-эрмитовых многообразий в Евклидово пространство, т.с погружения вторая квадратичная форма котороых удовлетворяет условию $B(X,JY) = B(JX,Y)$. В частности найдены необходимые условия на тензор кривизны почти-эрмитова многообразия допускающего круговое погружение в Евклидово пространство.

А именно, пусть (M^{2n},J,g) – почти-эрмитово многообразие, где g – метрика, J – почти комплексная структура (т.е. $J^2 = -\mathrm{Id}$) и $g(JX,JY) = g(X,Y)$. Обозначим через R тензор кривизны M^n в метрике g. Определим также *секционную* и *бисекционную голоморфную* кривизны M^{2n} по формулам

$$K(X,Y) = g(R_{XY}Y,X)$$
$$\tilde{K}(X,Y) = g(R_{XJX}JY,Y)$$

Заметим, что всякое круговое погружение минимально, так как средняя кривизна H погружения равна

$$H = \sum_{i=1,n}(B(e_i,e_i)+B(Je_i,Je_i)) = 0$$

поскольку $B(Je,Je) = B(e,J^2e) = -B(e,e)$.

Более того, всякое круговое погружение просто, поскольку условие $B(X,JY) = B(JX,Y)$ можно переписать в эквивалентной форме

$$A^{\nu}J = -JA^{\nu} \qquad \forall\, \nu \in T^{\perp}M^{2n}$$

и следовательно если e – собственный вектор A^{ν} с собственным значением λ, то Je – собственный вектор A^{ν} с собственным значением $-\lambda$. Имеет место результат:

Теорема 2.6.2. *Пусть $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^N$ – изометрическое круговое погружение почти-эрмитова многообразия в Евклидово пространство. Тогда*

$$\tilde{K}(X,Y) = \frac{1}{2}(K(X,Y)+K(X,JY)+(K(JX,Y)+K(JX,JY)) \qquad (*)$$

Обратно пусть кривизна M^{2n} удовлетворяет условию $(*)$, тогда всякое минимальное изометрическое погружение M^{2n} в Евклидово пространство круговое.

Следствие 2.6.3. Если кривизна почти-эрмитова многообразия M^{2n} не удовлетворяет условию $(*)$, то M^{2n} не допускает круговых изометрических погружений в Евклидово пространство.

Легко видеть, что условие $(*)$ выполнено для Кэлерова многообразия и в качестве следствия мы получаем результат Дачзера-Громолла:

Следствие 2.6.6 [DG2]. Пусть M^{2n} – Кэлерово, тогда всякое минимальное погружение M^{2n} в Евклидово пространство круговое.

В 7 параграфе исследуется класс простых гиперповерхностей в $\mathbb{R}^{2n+2}, n > 1$ имеющих в каждой регулярной точке следующий набор главных кривизн:

$$\{\lambda, \ldots, \lambda, 0, -\lambda, \ldots, -\lambda\} \tag{α}$$

Оказывается верна следующая теорема жесткости о строении таких гиперповерхностей:

Теорема 2.7.1.
Пусть $M^{2n+1} \subset R^{2n+2} (n > 1)$ – гиперповерхность множество главных кривизн которой в каждой регулярной точке имеет вид (α).
Тогда $M^{2n+1} = C(S^n \times S^n)$ – конус над $S^n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset S^{2n+1}(1)$.

В 8 параграфе результаты параграфа 4 обобщаются на случай пространства Минковского.

Глава 3 диссертации посвящена изучению гармонических морфизмов ассоциированных с минимальными сильно-параболическими подмногообразиями (псевдо) Римановых многообразий.

В параграфе 1 главы 3 приведены основные результаты и понятия теории гармонических морфизмов.

Определение. *Гладкое отображение $f : M^m \to N^n$ между Римановыми многообразиями называется гармоническим морфизмом если оно переводит росток гармонических функций на N^n в росток гармонических функций на M^m, т.е.если g произвольная гармоническая функция на открытом множестве $V \subset N$ такая,что $f^{-1}(V) \neq 0$,то $g \circ f$ гармоническая функция на M*

Следующая характеризация гармонических морфизмов получена Фугледе [Fug].

Теорема. *Гладкое отображение $f\colon M \to N$ является гармоническим морфизмом если и только если оно одновременно гармонично и (слабо) горизонтально конформно.*

Известно также, что корректно определено понятие гармонического морфизма в Риманову поверхность (под Римановой поверхностью мы понимаем двумерное многообразие с фиксированной ориентируемой конформной структурой,задающей комплексную координату z в любых изотермических координатах (x_1, x_2) по формуле $z = x_1 - ix_2$). Следующая теорема доказана в [Brd-El].

Теорема. *Слабо горизонтально конформное отображение $f : M^m \to N^2$ гармонично (и следовательно гармонический морфизм) если и только если все прообразы $f^{-1}(y) \subset M$ регулярных значений для f в N локально минимальны в M.*

Следствие. *Субмерсия $f : M^3 \to N^2$ – гармонический морфизм если и только если f горизонтально конформно и слои f – геодезические на M^3.*

В параграфах 2 и 3 изучаются гармонические морфизмы, ассоциированные с минимальными сильно (k-2)-параболическими k-мерными поверхностями в Евклидовом пространстве.
Имеет место следующий результат:

Теорема 3.2.4. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическая поверхность в R^{n+} и V^2 – "Гаусс-образ" F^3.*
Тогда отображение $\Gamma : F^3 \to V^2$ – гармонический морфизм если и только если выполнено одно из условий :
(a) F^3 – (локально) конус над V^2
(b) F^3 минимальна в $\mathbb{R}^{n+1}$

У гармонического морфизма, как и у всякого (слабо) горизонтально конформного отображения могут быть особенности, называемые обертывающими точками. Это точки, в которых коэффициент горизонтальной конформности равен бесконечности.

Из результатов параграфа 2.4 мы знаем структуру множества особснностей Σ минимальной сильно 1-параболической трехмерной поверхности в Евклидовом пространстве. Оказывается, что имеет место

Теорема 3.2.9. *Пусть F^3 – погруженная минимальная сильно 1-параболическая поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ с особенностями, имеющая регулярный "Гаусс-образ" V^2.*
Тогда $\Gamma: F^3 \setminus \Sigma \to V^2$ – гармонический морфизм, причем Σ – множество обертывающих точек.

Используя эту идеологию можно дать новую характеризацию гармонических морфизмов из $\mathbb{R}^3$ в S^2 и описать множество обертывающих точек таких морфизмов. А именно,

Следствие 3.2.10. Пусть V^2 – часть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, λ – функция на V^2, удовлетворяющая $\Delta_{S^2}\lambda + 2\lambda = 0$ и ξ определена с точностью до постоянного вектора посредством системы уравнений (в любых изотермических координатах (u_1, u_2) на V^2)

$$\begin{aligned} \partial\xi/\partial u_1 &= \ \ \partial\lambda/\partial u_2 n - \lambda\partial n/\partial u_2 \\ \partial\xi/\partial u_2 &= -\partial\lambda/\partial u_1 n + \lambda\partial n/\partial u_1 \end{aligned} \qquad n \text{ – радиус-вектор } V^2$$

Тогда геодезическое слоение $\mathbb{R}^3$ посредством

$$\mathbb{R}^3: \{r(Q,t) = \xi(Q) + tn(Q) | Q \in V^2, t \in \mathbb{R}\}$$

задает гармонический морфизм из $\mathbb{R}^3$ в S^2, причем множество обертывающих точек Σ имеет вид:

$$\Sigma = \xi(Q \in V^2: \lambda(Q) = 0)$$

Рассмотрим теперь сильно (l-2)-параболическую поверхность $F^l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и определим (по крайней мере локально) *"Гаусс-образ"* V^2, являющийся образом F^l при отображении $\Gamma: F^l \setminus \{\text{точки уплощения}\} \to G(l-2, \mathbb{R}^{n+1})$ – Грассманиан (ориентированных) (l-2)-плоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $\Gamma(P) = \Delta(P)$ – нуль-распределение F^l в точке P . Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что Γ может быть непрерывно продолжено в точки уплощения F^l и $\Gamma(F^l) - V^2$ – регулярная поверхность в $G(l-2, \mathbb{R}^{n+1})$. Тогда имеет место следующее обобщение теоремы 3.2.4

Теорема 3.3.1. *"Гауссово" отображение сильно (l-2)-параболической поверхности $F^l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является гармоническим морфизмом тогда и только тогда когда выполнено одно из условий :*

(a) F^l – цилиндр над конусом CV^2 ($V^2 \subset S^n$)

(b) F^l минимальна в $\mathbb{R}^{n+1}$

В параграфе 4 гармонический морфизм ассоциируется с минимальным сильно (k-2)-параболическим подмногообразием произвольного Риманова многообразия, если тензор кривизны обьемлющего многооборазия удовлетворяет некоторому естественному ограничению вдоль подмногообразия, гарантирующему интегрируемость ноль-распределения. А именно, пусть вдоль сильно k-параболического подмногообразия F^l тензор кривизны обьемлющего многообразия M^n удовлетворяет условию :

$$< \overline{R}_{XY}Z, \eta >= 0 \qquad \forall X, Y, Z \in T_xF^l, \eta \in T_x^{\perp}F^l \tag{A}$$

тогда ноль-слоение интегрируемо и F^l расслоено на вполне геодезические в M^n k-мерные подмногообразия и имеет место следующая теорема, обобщающая результаты параграфов 2 и 3

Теорема 3.4.4. *Пусть $F^l \subset M^n$ – сильно (l-2)-параболическое подмногообразие, вдоль которого тензор кривизны обьемлющего многообразия удовлетворяет условию (A). Тогда ноль-слоение конформно (и следовательно всякая выделенная субмерсия – гармонический морфизм с вполне геодезическими слоями) тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий :*

i) F^l – минимальное подмногообразие в M^n.

ii) горизонтальное распределение F^l интегрируемо и его слои омбиличны.

В главе 4 найдены новые примеры глобально-минимальных в своем классе гомологий однородных подмногообразий Римановых многообразий.

В параграфе 1 доказана для случая простой группы G_2 гипотеза А.Т.Фоменко о том, что вложение однородного пространства G/T_G, индуцированное неприводимым представлением минимальной размерности простой группы G глобально-минимально в своем классе гомологий. Для классических групп эта гипотеза была доказана Ле Хонг Ван [Ле4].

В параграфе 2 доказано, что вложения кватернионных грассманианов друг в друга также дают примеры глобально-минимальных в своем гомологическом классе подмногообразий.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, а также благодарит Ал. Ан.Борисенко и А. В. Болсинова за критические замечания и полезные советы.

ГЛАВА 1

ФОРМЫ КАЛИБРОВКИ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

§1.1. Грассманова алгебра. Комасса и грань k-формы в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $< , >$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ ($\Lambda_k\mathbb{R}^n$) линейное пространство k-форм (k-векторов) в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим скалярное произведение в этих пространствах индуцированное скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$. Именно, множество k-векторов $\{e_{i_1} \wedge \dots e_{i_k} | 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ образует ортонормированный базис $\Lambda_k\mathbb{R}^n$ и множество k-форм $\{e^*_{i_1} \wedge \dots e^*_{i_k}\}$ образует ортонормированный базис $\Lambda^k\mathbb{R}^n$, где $\{e^*_i\}$ – базис 1-форм двойственный $\{e_i\}$.

Определение 1.1.1.

$$G(k, \mathbb{R}^n) = \{\xi \in \Lambda_k\mathbb{R}^n : \xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \quad \text{и} \quad < \xi, \xi >= 1\}$$

– множество единичных разложимых k-векторов, которое можно отждествить с Грассманианом k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.2. Число

$$||\varphi||^* = \sup\{\varphi(\xi) : \xi \in G(k, \mathbb{R}^n)\}$$

называется комассой k-формы $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.1.3. Множество

$$G(\varphi) = \{\xi \in G(k, \mathbb{R}^n) : \varphi(\xi) = ||\varphi||^*\}$$

называется гранью k-формы $\varphi \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$.

§1.2. Формы калибровки и глобально-минимальные подмногообразия.

Рассмотрим риманово многообразие X^n и дифференциальную k-форму φ. Тогда для любого $x \in X^n$ ограничение φ_x формы φ на касательное пространство T_xX^n является элементом $\Lambda^k(T_xX^n) = \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ и следовательно определены грань $G(\varphi_x)$ и комасса $||\varphi_x||^*$.

Определение 1.2.1. Число

$$||\varphi||^* = \sup\{||\varphi_x||^* : x \in X^n\}$$

называется комассой дифференциальной формы $\varphi \in \Lambda^k(X^n)$.

Определение 1.2.2. Подножество

$$G(\varphi) = \bigcup_{x \in X^n} G(\varphi_x) \subset TX^n$$

касательного расслоения X^n называется гранью дифференциальной формы $\varphi \in \Lambda^k(X^n)$.

Определение 1.2.3. Форма калибровки φ на Римановом многообразии X^n есть замкнутая ($d\varphi = 0$) дифференциальная k-форма комассы 1 ($||\varphi||^* = 1$).

Определение 1.2.4. Пусть φ – форма калибровки на Римановом многообразии X^n. Тогда подмногообразие (возможно имеющее край и особенности) $M^k \subset X^n$ называется φ-калибрируемым, если для почти всех (в смысле k-мерной меры Хаусдорфа) $x \in X^n$ касательная плоскость T_xM^k рассматриваемая как разложимый единичный k-вектор принадлежит грани $G(\varphi)$.

Одним из основных инструментов для построения глобально-минимальных в своем классе гомологий (либо в классе вариаций с компактным носителем) подмногообразий Риманова многообразия является следующий факт:

Основная Теорема теории форм калибровки.
Пусть $M^k \subset (X^n, \varphi)$ – φ-калибрируемое подмногообразие (возможно с особенностями). Тогда M^k – глобально минимально в своем классе гомологий. Если $X^n = \mathbb{R}^n$, то M^k – глобально минимально в классе вариаций с компактным носителем.
Доказательство : пусть $\tilde{M}^k \subset X^n$ гомологично M^k. Тогда мы имеем

$$vol_k M^k = \int_M 1 = \int_M \varphi = \int_{\tilde{M}} \varphi \leq \int \tilde{M} 1 = vol_k \tilde{M}^k$$

где второе равенство следует из того, что $T_xM^k \in G(\varphi_x)$ для почти всех $x \in M^k$, а третье равенство следствие формулы Стокса и замкнутости φ.
■

Замечание : всякая форма φ в $\mathbb{R}^n$ с постоянными коэффициентами после нормировки является формой калибровки и таким образом если $T_xM^k \in G(\varphi)$ доля почти всех $x \in M^k$, то M^k – глобально-минимальное подмногообразие $\mathbb{R}^n$ (в классе вариаций с компактным носителем).

ГЛАВА 2

СПЕЦИАЛЬНО-ЛАГРАНЖЕВЫ ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{C}^n$

§2.1. Специально-Лагранжевы поверхности в $\mathbb{C}^n$

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ с координатами $(z_1, \dots, z_n)$, где $z = x + iy$. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ подмножество $\mathbb{C}^n$ определяемое условием $y = 0$ со стандартной ориентацией.
Пусть

$$(\cdot, \cdot) = \sum_{j=1}^{n} dz_j \otimes d\bar{z}_j$$

– стандартная Эрмитова форма в $\mathbb{C}^n$, $J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ – комплексная структура на $\mathbb{C}^n$, $J(x + iy) = -y + ix$,

$$< \cdot, \cdot >= \sum_{j=1}^{n} (dx_j^2 + dy_j^2)$$

– скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ и

$$w = (i/2) \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

– стандартная симплектическая 2-форма.

Очевидно, что $(u, v) =< u, v > -iw(u, v)$ для любых $u, v \in \mathbb{C}^n$ и следовательно

$$< Ju, v >= Re(Ju, v) = Re[i(u, v)] = -Im(u, v) = w(u, v)$$

Определение 2.1.1. Ориентированная вещественная n-мерная плоскость ξ в $\mathbb{C}^n$ называется *Лагранжевой* если $w_{|\xi} = 0$ или, что то же самое $< Ju, v >= 0$ для любых $u, v \in \xi$.

Предложение 2.1.2. *Пусть ξ – Лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^n$. Тогда любой ортонормированный базис ξ является унитарным базисом в $\mathbb{C}^n$. Обратно если какой нибудь ортонормированный базис ξ является унитарным базисом $\mathbb{C}^n$, то ξ – Лагранжева плоскость.*

Доказательство: Пусть ξ – Лагранжева плоскость и $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис ξ. Тогда мы имеем:

$$(e_i, e_j) = < e_i, e_j > -iw(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Обратно,

$$w(e_i, e_j) = < Je_i, e_j > = i(e-i, e_j) - i < e_i, e_j > = 0 \quad \blacksquare$$

Следствие 2.1.3. *Группа $U(n)$ действует транзитивно на множестве Лагранжевых плоскостей.*

Замечание: Действие группы задается следующим образом:

$$A(f_1 \wedge \ldots \wedge f_n) = Af_1 \wedge \ldots \wedge Af_n$$

где n-мерная плоскость рассматривается как простой n-вектор.

Обозначим множество всех Лагранжевых плоскостей в $\mathbb{C}^n$ через Lag_n и через ξ_0 – единичный простой n-вектор соответствующий выделенному $\mathbb{R}^n$. В силу Предложения 2.1.2 $\xi_0 \in Lag_n$ и легко видеть, что группа изотропии действия $U(n)$ на Lag_n есть $SO(n)$ и таким образом мы получаем, что

$$Lag_n = U(n)/SO(n)$$

Определение 2.1.4. Ориентированная вещественная n-мерная плоскость ξ в $\mathbb{C}^n$ называется специально-Лагранжевой (SL) если

(1) $\xi \in Lag_n$

(2) $\xi = A\xi_0$ для некоторого $A \in SU(n)$

Очевидно, что множество $SLag_n$ всех специально Лагранжевых плоскостей является слоем расслоения $Lag_n = U(n)/SO(n) \stackrel{\pi = det}{\longrightarrow} S^1$. А именно

$$SLag_n = \pi^{-1}(1) = SU(n)/SO(n)$$

Это наблюдение приводит к следующему определению SL-плоскостей по модулю θ :

$$SLag_n(\theta) := \pi^{-1}(e^{i\theta})$$

Определение 2.1.5.

SL-формой в $\mathbb{C}^n$ называется вещественная n-форма

$$\alpha = Re(dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)$$

SL-формой по модулю θ – n-форма

$$\alpha_\theta = Re(e^{i\theta} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

Предложение 2.1.6 [H-L1]. *Для любого θ комасса $||\alpha_\theta||^* = 1$ и грань $G(\alpha_\theta) = SLag_n(-\theta)$.*

Определение 2.1.7. Поверхность $M^n \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ называется специально-Лангранжевой (SL-) поверхностью, если для некоторого фиксированного θ для любой регулярной точки $x \in M^n$ имеем $T_xM^n \in SLag_n(\theta)$.

Замечание: Поскольку при замене унитарного базиса семейство $\{\alpha_\theta\} \subset \Lambda^n\mathbb{R}^{2n}$ переходит в себя, то свойство специальной Лагранжевости не зависит от выбора унитарного базиса в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 2.1.8 [H-L1]. *Всякая SL-поверхность глобально-минимальна относительно вариаций с компактным носителем.*

Доказательство: следствие Основной Калибровочной Теоремы и предложения 2.1.6. ■

Поскольку в силу определения 2.1.4 всякая SL-поверхность является Лагранжевой, то локально она представима в виде графика градиентного отображения. Более точно, имеет место следующий результат:

Предложение 2.1.9. *Пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – C^1-отображение. Обозначим через M^n график f в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$. Тогда M^n Лагранжево подмногообразие C^n тогда и только тогда , когда существует функция $F \in C^2(\Omega)$ такая, что $f = \nabla F$.*

Оказывается, что для того чтобы график f являлся SL-поверхностью потенциал F должен удовлетворять некоторому уравнениюв частных производных.

Теорема 2.1.10 [H-L1]. *Допустим, что $F \in C^2(\Omega)$, где Ω открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $f = \nabla F$ и M^n – график F в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$. Тогда M^n специально-Лагранжево относительно SL-формы $\alpha = Re(dz)$ если и только если F является решением уравнения*

$$\sum_{k=o}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^k \sigma_{2k+1}(HessF) = 0 \tag{2.1}$$

где $HessF = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, $\sigma_j(A)$ – *j-я симметрическая функция собственных значений матрицы A.*

§2.2. Специально-Лагранжевы нормальные расслоения

Известно [Фом2], что для любого подмногообразия M^k Риманова многообразия X^n естественное вложение нормального расслоения $N(M)$ в кокасательное расслоение T^*X Лагранжево относительно естественной симплектической структуры на T^*X. Рассмотрим теперь поверхность M^k в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Определим вложение $\psi : N(M) \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n = T^*\mathbb{R}^n$ как $\psi(\mu_x) = (x, \mu_x)$.

Определение 2.2.1. *Второй фундаментальной формой* подмногообразия M^k Риманова многообразия X^n по направлению нормали μ в точке x называется симметрическое линейное преобразование $A^\mu : T_xM^k \to T_xM^k$, определяемое как

$$A^\mu(X) = -(\overline{\nabla}_X\mu)^T$$

где $\overline{\nabla}$ – ковариантная производная на многообразии X^n, а $()^T$ – проекция на касательное пространство T_xM^k.

Определение 2.2.2. Подмногообразие M^k Риманова многообразия X^n называется *простым* (austere), если для любой нормали μ все инварианты нечетного порядка второй фундаментальной формы A^μ равны нулю (т.е. множество собственных значений A^μ имеет вид $(\lambda_1, -\lambda_1, \ldots, \lambda_p, -\lambda_p, 0, \ldots, 0)$.

Следующая теорема Харви и Лоусона дает ответ на вопрос, когда изометрическое погружение $N(M^k) \subset \mathbb{C}^n$ – SL-поверхность.

Теорема 2.2.3. *Пусть M^k – подмногообразие Евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $N^n = N(M^k) \subset \mathbb{R}^{2n}$ – изометрическое погружение его нормального расслоения в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Тогда N – SL-подмногообразие тогда и только тогда, когда M^k – простое.*
Если в качестве унитарного базиса в $\mathbb{C}^n$ взять ортонормированный базис первого $\mathbb{R}^n$, то SL-форма будет иметь вид $\alpha = Re(i^{k-n}dz)$.

Следствие 2.2.4. *Пусть M^2 – минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда каноническое погружение нормального расслоения над M^2 в $\mathbb{C}^n$ специально-Лагран- жево.*

§2.3. Деформации SL-нормальных расслоений

В этом параграфе мы докажем обобщение Следствия 2.2.4 и явно построим семейство деформаций SL-нормального расслоения над минимальной поверхностью $M^2 \subset \mathbb{R}^n$ в класс SL-подмногообразий $\mathbb{C}^n$.

Пусть M^2 – регулярная минимальная ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$ и ρ – гармоническая функция на M^2. Определим в каждой точке $p \in M^2$ два вектора $\tau(p)$ и $n_0(p)$. Пусть (x,y) локальные координаты в окрестности p индуцирующие заданную ориентацию на M^2,$r(x,y)$ – радиус-вектор M^2 и $\times$ – стандартное векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Положим

$$n_0(p) = \frac{r_x \times r_y}{|r_x \times r_y|}$$

– вектор единичной нормали, согласованный с ориетацией и

$$\tau(p) = \frac{\rho_x r_y - \rho_y r_x}{|r_x \times r_y|} = sgrad\rho$$

– косой градиент функции ρ относительно формы обьема на M^2, которая определяет симплектическую структуру M^2.

Теорема 2.3.1 [Bor1]. *Пусть M^2 – регулярная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$ и ρ – гармоническая функция на M^2. Рассмотрим следующее подмногообразие (возможно с особеностями) в $\mathbb{C}^3$:*

$$N^3_\rho = \{(p; \tau(p) \times n_0(p) + in_0(p)) \in \mathbb{C}^3 : p \in M^2, t \in \mathbb{R}\}$$

Тогда N^3 – SL-подмногообразие $\mathbb{C}^3$ и SL-форма имеет вид $\alpha = Re(dz)$ в стандартном унитарном базисе.

Замечание 1: легко видеть, что если ρ – линейная функция компонент радиус-вектора M^2, то $N^3 = N(M^2)$ – нормальное расслоение над M^2.

Замечание 2: пусть $M^2 = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Тогда ρ – обычная гармоническая функция на плоскости и N^3 имеет форму :

$$N^3 = \{(x, y, 0, \rho_x, \rho_y, t) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$$

и является цилиндром над комплексной кривой $F^1 \subset \mathbb{C}^2(z_1, z_2)$, поскольку $\Delta\rho = 0$. Ясно, что цилиндр является нормальным расслоением если и только если ρ линейна и значит конструкция теоремы выводит нас из класса нормальных расслоений.

Доказательство Теоремы 2.3.1:

Заметим, что N^3 – "график" отображения $M^2 \ni p \to l(p) \in \mathbb{R}^3$, где направляющий вектор прямой $l(p)$ является ориентированной нормалью к M^2. Поэтому мы можем произвольным образом выбирать базовую точку на $l(p)$.

Лемма 2.3.2. *Допустим, что пара декартовых координат (x_1, x_2) является локальной системой координат в окрестности точки $P_0 \in M^2 \subset \mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$. Положим*

$$\rho = \rho(x_1, x_2)$$
$$x_3 = q(x_1, x_2)$$
$$r(P) = (x_1, x_2, x_3) \in M^2$$

Тогда

$$R(P) = (\rho_{x_1}, \rho_{x_2}, 0) \in l(P)$$

Доказательство леммы 2.3.2: если (x_1, x_2) – локальные координаты на M^2, то из определений получаем:

$$n_0(P) = \frac{(-q_1, -q_2, 1)}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}}$$

$$\tau(P) = \frac{(-\rho_2, \rho_1, \rho_1 q_2 - \rho_2 q_1)}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}}$$

где $q_i = \frac{\partial q}{\partial x_i}, \rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$.
Следовательно мы получаем:

$$l(P) \ni \tilde{R}(P) = \tau(P) \times n_0(P) = \begin{pmatrix} \rho_1 + q_2(\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1) \\ \rho_2 - q_1(\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1) \\ \rho_2 q_2 + \rho_1 q_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1 + q_1^2 + q_2^2}$$

Откуда

$$R(P) = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{R}(P) - \frac{\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}} n_0(P)$$

и следовательно $R(P) \in l(P)$■.

Следствие 2.3.3.
Положим

$$\tilde{N}^3 = \{(x_1, x_2, q(x_1, x_2), \rho_1 + tq_1, \rho_2 + tq_2, \quad t)\} \qquad (*)$$

Тогда многообразие N^3, построенное в Теореме 2.3.1 совпадает с $\tilde{N}^3$ на множестве $((P,t) \in M^2 \times \mathbb{R} : (x_1, x_2)$ – локальные координаты *на $M^2)$*,т.е. $(*)$ – *перепараметризация N^3.*
Замечание 2.3.4: аналогичным образом, если $x_2 = \tilde{q}(x_1, x_3)$, $\rho = \tilde{\rho}(x_1, x_3)$ мы можем определить

$$\tilde{\tilde{N}}^3 = \{(x_1, \tilde{q}(x_1, x_3), x_3, \tilde{\rho}_1 + t\tilde{q}_1, -t, \tilde{\rho}_3 + t\tilde{q}_3)\}$$

и привести те же аргументы, что и выше.

Предложение 2.3.5. *$\tilde{N}^3$ – SL-многообразие относительно 3-формы*

$$\alpha = Re(idz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)$$

Доказательство Предложения 2.3.5: рассмотрим форму

$$\begin{aligned} \alpha &= Re[i(dx_1 + idy_1) \wedge (dx_2 + idy_2) \wedge (dx_3 + idy_3)] \\ &= Re[(dx_1 + idy_1) \wedge (dx_2 + idy_2) \wedge (-dy_3 + idx_3)] \end{aligned}$$

и введем новые координаты в $\mathbb{R}^6$: $\tilde{x}_1 = x_1, \tilde{x}_2 = x_2, \tilde{x}_3 = -y_3, \tilde{y}_1 = y_1, \tilde{y}_2 = y_2, \tilde{y}_3 = x_3$. В этих координатах α принимает стандартный вид : $\alpha = Re(d\tilde{z})$, а $\tilde{N}^3$ принимает вид

$$\tilde{N}^3 = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \rho_1 + \tilde{x}_3 q_1, \rho_2 + \tilde{x}_3 q_2, q)\}$$

Заметим, что $\tilde{N}^3$ – график градиентного отображения с потенциалом

$$F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \rho(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \tilde{x}_3 q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

По теореме 2.1.10 $\tilde{N}^3$ – SL-подмногообразие $\mathbb{C}^3$ если и только если потенциал F удовлетворяет уравнению :

$$\Delta F = \det \mathrm{Hess}(F)$$

В рассматриваемом случае, когда F линейна по одной переменной это условие принимает вид системы 2 уравнений в частных производных для функций ρ и q:

$$\begin{cases} (1+q_2^2)q_{11} - 2q_1q_2q_{12} + (1-q_1^2)q_{22} = 0 \\ (1+q_2^2)\rho_{11} - 2q_1q_2\rho_{12} + (1+q_1^2)\rho_{22} = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Первое уравнение системы $(**)$ эквивалентно тому, что график функции q – минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$ и следовательно в нашем случае это условие выполнено. Второе уравнение системы $(**)$ можно переписать в виде:

$$\sum_{i,j=1,2} g^{ij}\rho_{ij} = 0 \qquad (***)$$

где (g^{ij}) – контравариантный метрический тензор в координатах (x_1, x_2) на M^2. Предложение 2.3.5 следует теперь из следующей леммы.

Лемма 2.3.6. *Уравнение $(***)$ есть условие гармоничности функции ρ на минимальной поверхности M^2, определенной как график функции q.*

Определение 2.3.7. Лапласианом Δ на Римановом многообразии M называется (эллиптческий) оператор сопоставляющий каждой дифференцируемой функции f функцию $\Delta f = div(gradf)$.

Замечание: в локальных координатах (x_i)мы имеем: $(gradf)^j = g^{ij}f_i$, где $f_i = \partial f/\partial x_i$ и $\Delta f = g^{ij}f_{i,j}$, где $f_{i,j}$ – ковариантные производные компонент вектора f_i, т.е. $f_{i,j} = f_{ij} + \Gamma^k_{ij}f_k$ где Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля.

Доказательство леммы 2.3.6: мы имеем $\Delta\rho = g^{ij}\rho_{ij} + g^{ij}\Gamma^k_{ij}\rho_k$, и таким образом достаточно доказать, что $g^{ij}\Gamma^k_{ij} = 0$ для любого k. Действительно, пусть $r = (x_1, x_2, q(x_1, x_2))$ – радиус-вектор M^2. По формулам Вейнгартена имеем:

$$r_{ij} = \Gamma^k_{ij}r_k + h_{ij}n_0$$

где (h_{ij}) – коэффициенты второй квадратичной формы M^2. Поскольку M^2 минимальна, мы имеем

$$g^{ij}\rho_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g^{ij}q_{ij} \end{pmatrix} = 0$$

Следовательно $g^{ij}\Gamma^k_{ij}r_j + g^{ij}h_{ij}n_0 = 0$ и в силу линейной независимости r_1 и r_2 получаем $g^{ij}\Gamma^k_{ij} = 0$ $k = 1,2$. ■

Вернемся к доказательству Теоремы 2.3.1.

Поскольку M^2 регулярна, мы можем выбрать пару декартовых координат в качестве локальных координат на M^2. В силу замечания 2.3.4 можно не меняя общности считать, что это (x_1, x_2). Теорема 2.3.1 вытекает теперь из Следствия 2.3.3 и Предложения 2.3.4. ■

Пример 1. Рассмотрим катеноид в качестве M^2

$$M^2 = \begin{pmatrix} x_1 = a \\ x_2 = \cosh a \cos \phi \\ x_3 = \cosh a \sin \phi \end{pmatrix}$$

Положим также $\rho = \sinh a \cos \phi$.
В кординатах (a, ϕ) имеем :

$$\rho_a = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh a \cos \phi \\ \sinh a \sin \phi \end{pmatrix} \qquad \rho_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cosh a \sin \phi \\ \cosh a \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$n_0 = \frac{1}{\cosh a} \begin{pmatrix} \sinh a \\ -\cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \qquad \tau(P) \times n_0 = \frac{1}{\cosh a} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sinh a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$N^3 = \Big(a, \cosh a \cos \phi, \cosh a \sin \phi, \frac{\cos \phi}{\cosh a} + \gamma \tanh a, \\ \tanh a - \gamma \frac{\cos \phi}{\cosh a}, -\gamma \frac{\sin \phi}{\cosh a}\Big)$$

Пример 2. Пусть M^2 – полная,регулярная односвязная минимальная поверхность в R^3. Тогда M^2 допускает представление Вейерштрасса и существуют голоморфная функция f и мероморфная функция g такие, что нули f совпадают с полюсами g и кратности нулей f вдвое больше порядков соответствующих полюсов g. Положим $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, где

$$\phi_1 = f(1 - g^2)/2$$
$$\phi_2 = if(1 + g^2)/2$$
$$\phi_3 = fg$$

Тогда радиус-вектор M^2 записывается в виде:

$$r(z) = Re \int_0^z \Phi(\xi) d\xi$$

мы также имеем $\phi_k(z) = \partial r_k / \partial x - i \partial r_k / \partial y$, $z = x + iy$ и (x, y) – конформные координаты на M^2.

Пусть ρ – гармоническая функция на M^2. В силу конформности (x, y) $\Delta\rho(x, y) = 0$, где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – обычный Лапласиан. Выразим теперь n_0 и $\tau \times n_0$ в терминах f,g. Легко видеть, что

$$n_0(z) = \frac{1}{1+g^2}\begin{pmatrix} 2Reg \\ 2Img \\ |g|^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Далее в силу конформности (x, y)

$$|r_x \times r_y| = (|r_x|^2 + |r_y|^2)/2 = |\Phi|^2/2 = |f|^2(1 + |g|^2)^2/4$$

Кроме того в силу конформности (x, y)

$$\tau \times n_0 = \frac{(\rho_x r_y - \rho_y r_x) \times (r_x \times r_y)}{|r_x \times r_y|^2} = \frac{\rho_x r_x + \rho_y r_y}{|r_x \times r_y|^2}$$

Положим $\lambda = \rho_x - i\rho_y = \partial\tilde{\rho}/\partial z$ где $\rho = Re\tilde{\rho}$. Тогда из Теоремы 2.3.1

$$N^3 = \{r(z), \frac{4Re(\lambda\overline{\Phi})}{|f|^2(1+|g|^2)^2} + t(Reg, Img, |g|^2 - 1)\}$$

является SL-подмногообразием.

Если теперь $\tilde{\rho} = \int_0^z f(\xi)d\xi$, то $\lambda = f$ и $\tau \times n_0$ не зависит от f, т.е. N^3 имеет вид

$$N^3 = \{r(z), \nu(g(z)) + t\mu(g(z))\}$$

Пусть теперь $f = \nabla F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – градиентное отображение с потенциалом F определенным на всем $\mathbb{R}^3$. По теореме 2.1.10 график f является SL-поверхностью если $\Delta F = \det HessF$, в частности если выполнены условия :

(1) $\Delta F = 0$

(2) $\det HessF = 0$

Оказывается, что при некоторых ограничениях на F, эта поверхность – цилиндр над комплексной кривой $V^1 \subset C^2$.

Пусть M^3 – график функции $z = F(x_1, x_2, x_3)$. В силу условия (2) вторая фундаментальная форма M^3, которая пропорциональна $HessF$, всюду вырождена. Если в точке x_0 выполнено условие $F_{11}F_{22} - F_{12}^2 \neq 0$, то в окрестности x_0 можно сделать следующую замену координат :

$$u_1 = \partial F/\partial x_1$$
$$u_2 = \partial F/\partial x_2$$
$$u_3 = x_3$$

Из условия (2) легко следует, что $\partial F/\partial x_3 = q(u_1, u_2)$ не зависит от u_3. Далее

$$dF = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

следовательно

$$0 = d(dF) = du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + dq \wedge dx_3$$

Используя соотношения

$$dx_i = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \qquad dq = \frac{\partial q}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial q}{\partial u_2} du_2$$

легко получаем

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2} - \frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right) du_1 \wedge du_2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_3} + \frac{\partial q_1}{\partial u_1}\right) du_1 \wedge du_3 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_3} + \frac{\partial q_2}{\partial u_2}\right) du_2 \wedge du_3 = 0$$

Откуда $\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \frac{\partial x_1}{\partial u_3} = -q_1, \frac{\partial x_2}{\partial u_3} = -q_2, \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_3^2} = 0 \quad i = 1,2$ и следовательно существует функция ρ такая, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 - u_3 q_1 \\ x_2 &= \rho_2 - u_3 q_2 \\ x_3 &= u_3 \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Определение 2.3.7. *Преобразованием Лежандра функции* $f(u_1, u_2)$ *называется функция* $L(f)$ *определяемая как*

$$L(f) = -f + u_1 f_1 + u_2 f_2$$

где $f_i = \partial f/\partial u_i$.

Лемма 2.3.8. *В координатах* (u_1, u_2, u_3) *имеем*

$$z = L(\rho) - u_3 L(q)$$

Доказательство леммы 2.3.8:

По определению (u_i) и в силу (α) имеем

$$\begin{aligned} z_{u_3} &= F_{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_3} + F_{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_3} + F_{x_3} \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \\ &= -u_1 q_1 - u_2 q_2 + q = -L(q) \end{aligned}$$

И следовательно $\partial^2 z/\partial u_3^2 = 0$.

Аналогичным образом проверяется, что

$$\begin{aligned} z_{u_1} &= u_1(\rho_{11} - u_3 q_{11}) + u_2(\rho_{12} - u_3 q_{12}) \\ z_{u_2} &= u_1(\rho_{12} - u_3 q_{12}) + u_2(\rho_{22} - u_3 q_{22}) \end{aligned}$$

откуда сразу следует, что $z(u) = L(\rho) - u_3 L(q)$. ∎

Лемма 2.3.9[Lew]. *Пусть* $\Delta F = 0, \det HessF = 0$ *и* $(F_{11}F_{22} - F_{12}^2)_{|x_0} \neq 0$. *Тогда функции* ρ *и* q *возникающие пр изамене координат* $u_1 = F_{x_1}, u_2 = f_{x_2}, u_3 = x_3$ *удовлетворяют системе* (**).

Доказательство леммы 2.3.9:

В силу (α) имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \partial u_i/\partial x_j & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & \\ & \partial x_j/\partial u_k & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho_{11} - u_3 q_{11} & \rho_{12} - u_3 q_{12} & -q_1 \\ \rho_{12} - u_3 q_{12} & \rho_{22} - u_3 q_{22} & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из того, что $\Delta F = 0$ следует

$$\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial q/\partial x_3 = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + q_1 \partial u_1/\partial x_3 + q_2 \partial u_2/\partial x_3 = 0$$

учитывая матричное равенство и то, что $\Delta = \det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta F = \Delta\big[\rho_{22} - u_3 q_{22} + \rho_{11} - u_3 q_{11} \\ + q_1(q_1(\rho_{22} - u_3 q_{22}) - q_2(\rho_{12} - u_3 q_{12})) \\ + q_2(q_2(\rho_{11} - u_3 q_{11}) - q_1(\rho_{12} - u_3 q_{12}))\big] = 0 \end{aligned}$$

и следовательно

$$(1 + q_2^2)(\rho_{11} - u_3 q_{11}) - 2q_1 q_2(\rho_{12} - u_3 q_{12}) + (1 + q_1^2)(\rho_{22} - u_3 q_{22}) = 0 \quad \blacksquare$$

Допустим теперь, что $\Delta = \det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ для любого $x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Из условия $\det HessF = 0$ следует (см. например лемму 2.3.8), что поверхность $M^3 = \{(x, F(x)) | x \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$ расслоена на прямолинейные образующие и условие $\Delta \neq 0$ означает, что все эти образующие трансверсальны к сечению M^3 гиперплоскостью $\{x_3 = 0\}$

Теорема 2.3.10. *Пусть* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям*

(1) $\Delta F = 0$

(2) $\det HessF = 0$

(3) $|\Delta| \geq C^2$ *для любого* $x = (x_1, x_2, 0)$

(4) $|F_{33}(x_1, x_2, 0) \leq C$

Тогда график M^3 *функции* F *– цилиндр в* $\mathbb{R}^4$ *и график* $N^3 \subset \mathbb{C}^3$ *градиентного отображения* ∇F *– цилиндр над комплексной кривой* $V^1 \subset \mathbb{C}^2$

Доказательство Теоремы 2.3.10 : Из результатов [Ал] следует, что при замене координат $u_i = F_i(x_1, x_2, 0)$ $i = 1, 2$ удовлетворяющей условиям (3) и

$|F_{11}+F_{22}| \le C$, которое в силу $\Delta F = 0$ эквивалентно (4), отображает гомеоморфно $\mathbb{R}^2(x_1,x_2)$ на $\mathbb{R}^2(u_1,u_2)$. Из леммы 2.3.9 и теоремы Бернштейна следует, что $q(u_1,u_2)$ – линейная функция и ρ – гармоническая функция на плоскости. Следовательно радиус-вектор M^3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \rho_1 + u_3c_1 \\ \rho_2 + u_3c_2 \\ u_3c_3 \\ L(\rho) + u_3c_4 \end{pmatrix}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 1 \\ q - u_1q_1 - u_2q_2 \end{pmatrix} = \mathrm{const}$$

в силу линейности q.■

В заключение данного параграфа докажем следующее обобщение Теоремы 2.3.1

Теорема 2.3.11. *Пусть M^2 – ориентируемая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ и ρ – гармоническая на M^2 функция. Тогда поверхность*

$$N^n_\rho = \{(r(P), \mathrm{sgrad}\rho(P) + \sum_{k=3..n} t_k\nu_k(P)) | P \in M^2, t_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$$

– SL подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, где $r(P)$ – радиус-вектор M^2, $(\nu_k(P))_3^n$ – ортонормированный базис в нормальном пространстве к M^2, sgradρ – косой градиент функции ρ относительно формы обьема на M^2.

Доказательство теоремы 2.3.11 :

Введем на M^2 в окрестности точки P изотермическую систему координат (x_1,x_2) согласованную с ориентацией. Тогда имеем

$$\mathrm{sgrad}\rho = \frac{\rho_1 r_2 - \rho_2 r_1}{\lambda}$$

где $\lambda = |r_1|^2 = |r_2|^2$ и $< r_1, r_2 >= 0$.

из минимальности M^2 и гармоничности ρ на M^2 следует, что в этих координатах $\Delta r = \Delta\rho = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{x_2^2}$ – обычный Лапласиан.

Из минимальности M^2 следует также, что

$$[\nu_{k,x_1}]^T = a_k r_1 + b_k r_2$$
$$[\nu_{k,x_2}]^T = b_k r_1 - a_k r_2$$

где $[\,]^T$ – проекция на касательную плоскость к M^2.

Дифференцируя по x_i, t_k находим базис в касательном пространстве к N^n :

$$\begin{aligned}
X_1 &= (r_1, \tfrac{\rho_{11}r_2-\rho_1 r_{12}-\rho_{12}r_1-\rho_2 r_{11}}{\lambda} - \tfrac{\lambda_1(\rho_1 r_2-\rho_2 r_1)}{\lambda^2} + \textstyle\sum_{k=3}^n t_k(a_k r_1 + b_k r_2))\\
X_2 &= (r_2, \tfrac{\rho_{12}r_2+\rho_1 r_{22}-\rho_{22}r_1-\rho_2 r_{12}}{\lambda} - \tfrac{\lambda_2(\rho_1 r_2-\rho_2 r_1)}{\lambda^2} + \textstyle\sum_{k=3}^n t_k(b_k r_1 - a_k r_2))\\
X_k &= (0, \nu_k) \quad k = 3, n
\end{aligned}$$

Проверим теперь лагранжевость N^n, т.е. $< Jx_\alpha, X_\beta >= 0$, где $J : \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \oplus iR^n$ стандартная комплексная структура : $J(x, y) = (-y, x)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Из вида X_α ясно, что единственным нетривиальным равенством является $< JX_1, X_2 >= 0$ (поскольку $< JX_i, X_k >=< r_i, \nu_k >= 0$ для i=1,2 и k=3,n). Используя конформность системы координат получаем, что это равенство сводится к следующему :

$$\frac{+\rho_1 < r_{22}, r_1 > -\rho_{22}|r_1|^2 - \rho_2 < r_{12}, r_1 > +\lambda_2\rho_2}{\lambda} + \sum_{k=3}^n t_k b_k |r_1|^2 =$$

$$\frac{-\rho_2 < r_{11}, r_2 > +\rho_{11}|r_2|^2 + \rho_1 < r_{12}, r_2 > -\lambda_1\rho_1}{\lambda} + \sum_{k=3}^n t_k b_k |r_2|^2$$

Используя соотношения $< r_{11}, r_2 >= -\lambda_2/2, < r_{22}, r_1 >= -\lambda_1/2$ получаем, что $< JX_1, X_2 >= 0$ переписывается в виде :

$$\frac{-\rho_1\lambda_1 + \rho_2\lambda_2}{2\lambda} - \rho_{22} = \frac{\rho_2\lambda_2 - \rho_1\lambda_1}{2\lambda} + \rho_{11}$$

или $\Delta\rho = 0$, что в нашем случае выполнено. Таким образом мы доказали, что N^n_ρ – лагранжева если и только если ρ – гармонична.
Не меняя общности, можно считать, что в данной точке $P \in M^2$ $\lambda(P) = 1$. Тогда $(e_1 = r_1; e_2 = r_2; e_k = \nu_k \quad k = 3, n)$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Из вышесказанного ясно,что в $T_{(P,t)}N^n$ можно выбрать базис вида

$$\begin{aligned}
X_1 &= e_1 + i(ae_1 + be_2)\\
X_2 &= e_2 + i(ce_1 + de_2)\\
X_k &= ie_k \quad k = 3, n
\end{aligned}$$

причем $b = c$ в силу Лагранжевости.

Лемма 2.3.12.

$$a = -d$$

Доказательство : учитывая $\lambda(P) = 1$ получаем :

$$a = -\rho_1 < r_{12}, r_1 > -\rho_{12} - \rho_2 < r_{11}, r_1 > +\rho_2\lambda_1 + \sum t_k a_k$$

$$d = -\rho_2 < r_{12}, r_2 > +\rho_{12} + \rho_1 < r_{22}, r_2 > -\rho_1\lambda_2 - \sum t_k a_k$$

Откуда используя $< r_{12}, r_1 > = < r_{22}, r_2 > = \lambda_2/2$ и $< r_{11}, r_1 > = < r_{12}, r_2 > = \lambda_1/2$ немедленно получаем :

$$a = \frac{\rho_1\lambda_2 - \rho_2\lambda_1}{2} - \rho_{12} + \sum t_k a_k = -d \quad \blacksquare$$

Таким образом в качестве ортонормированного базиса в $T_{(\rho,t)}N^n$ можно взять $(X_1/|X_1|, X_2/|X_2|, X_3, \dots, X_n)$ при этом матрица перехода от (e) к (X) имеет вид :

$$A = \frac{1}{1+a^2+b^2}\begin{pmatrix} 1+ia & ib & 0 & 0 & 0 \\ ib & 1-ia & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Следовательно $\det(A) = i^{n-k}$ =const и N^n – SL-подмногообразие $\mathbb{C}^n$ относительно SL-формы $\alpha = Re(i^{k-n}dz)$. $\blacksquare$

§2.4. Строение трехмерных минимальных сильно 1-параболических подмногообразий Евклидова пространства

В своей фундаментальной работе [H-L1] Р.Харви и Б.Лоусон доказали, что погружение нормального расслоения $N(M^k) \subset T^*R^n = C^n$ поверхности $M^k \subset R^n$ является *Специально-Лагранжевым* (в частности $N(M^k)$ – глобально-минимально в R^{2n}) если и только если M^k – *простая* поверхность (см. Опр.2.2),т.е. для любой нормали ν к M^k множество собственных значений второй фундаментальной формы A^ν инвариантно относительно умножения на -1,или, что то же самое, все инварианты A^ν нечетного порядка равны нулю. Этот результат мотивирует интерес к изучению простых поверхностей.

В данном разделе рассматривается случай $k = 3$. В этом случае условие простоты эквивалентно одновременной минимальности и параболичности M^3, где параболичность означает наличие нуля среди собственных значений A^ν (см. определение 2.4.2 по поводу понятия сильной параболичности).

В работе [DG1] М.Дачзер и Д.Громолл изучали строение минимальной (n-2)-параболической гиперповерхности $M^n \subset R^{n+1}$,которая также является простой поверхностью. Они рассмотрели $V^2 \subset S^n$ – Гауссов образ M^n, – и, используя специальную параметризацию произвольной (n-2)-параболической гиперповерхности посредством V^2 и некоторой функции γ на V^2, доказали следующую теорему.

Теорема [DG1].
Пусть $f : M^n \to R^{n+1}$ – (n-2)-параболическое изометрическое погружение и (V^2, γ) задает Гауссову параметризацию M^n.
Тогда M^n – минимально в R^{n+1} *если и только если*

(i) V^2 – минимальна в S^n

(ii) $\Delta\gamma + 2\gamma = 0$ *,где* Δ – *Лапласиан на* V^2.

Наша основная цель доказать,что структура 3-мерной минимальной сильно 1-параболической поверхности также определяется парой (V^2, λ), удовлетворяющей условиям (i),(ii) и описать множество особенностей такой поверхности.Оказывается, что множество особенностей определяется нулями λ.

Таким образом возникает взаимно-однозначное соответствие между 3-мерными минимальными сильно 1-параболическими поверхностями и минимальными (n-2)-параболическими гиперповерхностямив R^{n+1}, обобщающее хорошо известную сопряженность двумерных минимальных поверхностей в S^3.А именно , если рассмотреть минимальную поверхность $V^2 \subset S^3$, то единичная нормаль к V^2 в S^3 также определяет минимальную поверхность $V_*^2 \subset S^3$. Напомним теперь вкратце несколько необходимых определений.

Определение 2.4.1. Индексом сильной параболичности $\mu(Q)$ точки Q поверхности F^k в римановом многообразии X^n называется число

$$\mu(Q) = \dim\{Y \in T_Q F^k : A^\nu(Q)Y = 0 \ \ \forall\, \nu \in N_Q F^k\}$$

где A^ν – вторая фундаментальная форма F^k в X^n относительно нормали ν.

Определение 2.4.2.
Поверхность $F^k \subset X^n$ называется сильно l-параболической если

$$\mu(Q) \geq l \quad \forall\, Q \in F^k$$

Известно [Бо2], что через каждую точку Q сильно l-параболической поверхности $F^k \subset R^n$ с $\mu(Q) = l$ проходит l мерная плоскость $\pi_l(Q)$, лежащая на F^k, вдоль которой касательная плоскость к F^k стационарна. Следовательно в рассматриваемом случае через каждую точку $Q \in F^3$, не являющуюся точкой уплощения, проходит прямая $\pi(Q)$ и можно определить (по крайней мере локально) *"Гауссово" отображение* $\Gamma : F^3 \to S^n$, являющееся аналогом обычного Гауссова отображения для гиперповерхностей, и отображающее точку Q в единичный вектор в направлении $\pi(Q)$. Здесь и в дальнейшем всюду предполагается, что Γ может быть непрерывно продолжено в точки уплощения (т.е. точки с $\mu = 3$) и *"Гаусс-образ"* $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярен в S^n.

Пусть F^3 – произвольная сильно 1-параболическая поверхность в R^{n+1} и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – "Гаусс-образ" F^3.Рассмотрим локальные координаты (u_1, u_2, u_3) на F^3, введенные в [Бо2], и специализируем выбор (u_1, u_2) так, что они также будут являться парой декартовых координат на центральной проекции V^2.При таком выборе радиус-вектор F^3 имеет вид :

$$r(u_1, u_2, u_3) = \rho(u_1, u_2) + u_3 s(u_1, u_2) \qquad (2.4.1)$$

где

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad s = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

а вышеописанная параметризация V^2 :

$$n = \frac{s}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \alpha = ||s|| = \sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2 + \sum\limits_{q=3,n} h_q^2} \\ \epsilon = \pm 1 \end{array} \tag{2.4.2}$$

Замечание : мы будем называть параметризации (2.4.1),(2.4.2) F^3, V^2 стандартными.
Теперь условие сильной параболичности запишется в виде (см. [Бо2]) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_i} = b_i^1 \frac{\partial s}{\partial u_1} + b_i^2 \frac{\partial s}{\partial u_2} \tag{2.4.3}$$

и после подстановки (2.4.1) в (2.4.3) мы получаем :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_i}{\partial u_j} = b_j^i \\ &\frac{\partial \rho_q}{\partial u_j} = \sum_{i=1,2} \frac{\partial h_q}{\partial u_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial u_j} \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Условия согласования для системы (2.4.4) имеют вид :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial u_2} h_{q,11} + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} \right) h_{q,12} - \frac{\partial \rho_2}{\partial u_1} h_{q,22} = 0 \tag{2.4.5}$$

Здесь и далее f_i, f_{ij} обозначают частные производные функции f по u_1, u_2.
Рассмотрим теперь вопрос о минимальности F^3.

Определение 2.4.3.
Говорят, что поверхность F^k *существенно лежит* в $R^n(S^n)$ если она не лежит ни в каком вполне-геодезическом $R^p(S^p)$ $p < n$.

Теорема 2.4.1. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическая поверхность существенно лежащая в $R^{n+1}(n > 3)$ и $V^2 = G(F^3)$ регулярна в S^n.*
Тогда

$$F^3 \text{ – минимальна в } R^{n-1} \iff V^2 \text{ – минимальна в } S^n$$

Замечание : в случае n=3 Теорема 2.4.1 не верна, т.к. по теореме Дажера-Громолла произвольная минимальная поверхность $V^2 \subset S^3$ и произвольная функция γ на V^2 определяют некоторую 1-параболическую поверхность $F^3 \subset R^4$ минимальную тогда и только тогда, когда $\Delta\gamma + 2\gamma = 0$.

Доказательство Теоремы 2.4.1.

Лемма 2.4.2. *Пусть $V^2 \subset S^n$ – минимально погруженная поверхность. Тогда в любых стандартных координатах на V^2 выполнены следующие равенства :*

$$(i)\ g^{ij}h_{q,ij} = 0 \quad \forall q = 3,n \tag{2.4.6}$$

$$(ii)\ 2g^{ki}(\frac{1}{\alpha})_i = g^{ij}\Gamma^k_{ij}\frac{1}{\alpha} \tag{2.4.7}$$

где g^{ij} – *контравариантная метрика на V^2 и Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля в этих координатах.*
Более того, условие (i) эквивалентно минимальности V^2.
Доказательство леммы 2.4.2 :
(i) Пусть $r = s/\alpha$ – радиус-вектор V^2 в R^{n+1}. Заметим, что мы можем выбрать следующий базис в нормальном пространстве к V^2 в S^n :

$$\nu_q = \begin{pmatrix} h_{q,1} \\ h_{q,2} \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \\ h_q - u_1 h_{q,1} - u_2 h_{q,2} \end{pmatrix} \qquad q = 3,n$$

Тогда условие минимальности V^2 есть

$$g^{ij}h^q_{ij} = 0 \qquad q = 3,n \tag{2.4.8}$$

где $h^q_{ij} = < r_{ij}, \nu_q >$
Используя (2.4.2) и (2.4.8) немедленно получаем :

$$0 = g^{ij}h^q_{ij} = < g^{ij}r_{ij}, \nu_q > = \frac{1}{\alpha} < g^{ij}s_{ij}, \nu_q > = -\frac{1}{\alpha}g^{ij}h_{q,ij}$$

и таким образом условие (i) эквивалентно минимальности V^2.
(ii) Хорошо известно [Ко-Но], что если $V^2 \subset S^n$ – минимальна, то компоненты радиус-вектора V^2 в R^{n+1} удовлетворяют уравнению :

$$\Delta x_i + 2x_i = 0 \qquad i = 1, n+1 \tag{2.4.9}$$

где

$$\Delta f = g^{ij} f_{ij} - g^{ij}\Gamma^k_{ij} f_k \quad \text{– Лапласиан функции } f \text{ на } V^2 \tag{2.4.10}$$

Применяя (2.4.9),(2.4.10) к $x_t = u_t/\alpha$ (t=1,2), получаем :

$$g^{ij}(u_t/\alpha)_{ij} - g^{ij}\Gamma^k_{ij}(u_t/\alpha)_k + 2u_t/\alpha = 0$$

что можно переписать в виде :

$$2g^{ij}(1/\alpha)_j - g^{ij}\Gamma^t_{ij} 1/\alpha + u_t(\Delta(1/\alpha) + 2(1/\alpha)) = 0$$

Применяя (2.4.9) к $x_{n+1} = 1/\alpha$, получаем (ii) ■

Лемма 2.4.2 доказана.

Лемма 2.4.3. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическая поверхность, существенно лежащая в R^{n+1}, и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярна. Тогда V^2 существенно лежит в S^n.*

Доказательство леммы 2.4.3 : Если V^2 лежит существенно в некотором S^p ($p < n$), то существует $q : h_q \equiv 0$.Используя (2.4.4) мы получаем, что ρ_q =const. Отсюда немедленно следует, что F^3 лежит в некотором R^{p+1}. ■

лемма 2.4.3 доказана.

Лемма 2.4.4. *Пусть V^2 – существенно лежащая в S^n ($n > 3$) минимальная поверхность.*
Тогда для любых точки $Q \in V^2$ и окрестности $U(Q)$ существует $P \in U(Q)$ и числа q, q' такие, что векторы $(h_{q,11}, h_{q,12}, h_{q,22})$ и $(h_{q',11}, h_{q',12}, h_{q',22})$ не коллинеарны в P.

Доказательство леммы 2.4.4 : Допустим, что существуют такие Q и $U(Q)$, что условия леммы 2.4.4 не выполняются, т.е. мы можем написать в $U(Q)$:

$$h_{q,ij} = \lambda_q h_{3,ij} \quad q = 4, n \tag{2.4.11}$$

Покажем, что существует $U' \subset U(Q)$ такая, что $\lambda_q|_{U'} \equiv const$ для любого q и следовательно

$$h_q = \lambda_q h_3 + a_q u_1 + b_q u_2 + c_q \quad (q = 4, n) \qquad \text{на } U' \tag{2.4.11'}$$

Из (2.4.11) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda_{q,1} h_{3,12} - \lambda_{q,2} h_{3,11} = 0 \\ \lambda_{q,1} h_{3,22} - \lambda_{q,2} h_{3,12} = 0 \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Если $h_{3,ij} \equiv 0$ на U, то доказывать нечего.Следовательно мы можем предполагать, что существует $U' \subset U : (h_{3,11}, h_{3,12}, h_{3,22})_{U'} \neq 0$.

Пусть $\lambda_q|U' \neq const$ для некоторого q. Тогда из (2.4.12) следует, что существует $P \in U' : h_{3,11}h_{3,22} - h_{3,12}^2 = 0$ и тогда из (2.4.6) легко следует, что

$$\left[(g^{11}h_{3,11} - g^{22}h_{3,22})^2 + 4(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2)h_{3,12} \right] |_P = 0 \tag{2.4.13}$$

В силу положительной определенности (g^{ij}) :

$$h_{3,12|P} = 0 \quad \text{и} \quad g^{11}h_{3,11|P} = g^{22}h_{3,22|P}$$

и, учитывая (2.4.6), мы получаем :

$$(h_{3,11}, h_{3,12}, h_{3,22})_{|P} = 0$$

что противоречит тому, что $P \in U'$. Таким образом $\lambda_{q|U'} = const \ \ \forall q$ и соотношения (2.4.11′) выполняются.
Произведя невырожденный линейный эндоморфизм R^{n+1}

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_2 \\
y_3 &= x_3 \\
y_q &= x_q - a_q x_1 - b_q x_2 - \lambda_q x_3 - c_q \quad {\scriptstyle q=4,n} \\
y_{n+1} &= x_{n+1}
\end{aligned}$$

мы получим, что $U' \subset S^3 \subset R^4(y_1, y_2, y_3, y_{n+1})$ и в силу аналитичности (V^2 – минимальна) $V^2 \subset S^3$, что противоречит условию $n > 3$ в лемме 2.4.4. ■

лемма 2.4.4 доказана.

Лемма 2.4.5. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическая поверхность, существенно лежащая в R^{n+1} $(n > 3)$, и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – ориентирована и минимальна в S^n. Тогда существует функция λ, определенная на V^2, такая, что в произвольной стандартной параметризации вида (2.4.1) на F^3 выполняются соотношения :*

$$\begin{aligned}
\rho_{1,2} &= \frac{1}{\alpha} g^{11}\sqrt{g}\hat{\lambda} \\
\rho_{2,2} - \rho_{1,1} &= 2\frac{1}{\alpha} g^{12}\sqrt{g}\hat{\lambda} \\
\rho_{2,1} &= -\frac{1}{\alpha} g^{22}\sqrt{g}\hat{\lambda}
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

где $\hat{\lambda} = \pm\lambda$ в зависимости от ориентации V^2 в координатах (u_1, u_2).
Замечание : если V^2 неориентирована, то мы можем заменить V^2 на $\hat{V}^2$ – ориентированное двулистное накрытие и лемма 2.4.5 остается верна. Если например $V^2 = RP^2 \subset S^4$, то $\hat{V}^2 = S^2$ и λ определена на S^2.
Доказательство леммы 2.4.5 : В силу (2.4.5) и (2.4.6) мы получаем из лемм

2.4.3,2.4.4,что в произвольной точке $Q \in V^2$ векторы $(\rho_{1,2}, \rho_{2,2} - \rho_{1,1}, -\rho_{2,1})$ и $(g^{11}, 2g^{12}, g^{22})$ коллинеарны и следовательно соотношения (2.4.14) выполняются. Единственное, что нужно проверить – инвариантность функции λ на V^2, определяемой при помощи (2.4.14), т.е. что эта функция не зависит от выбора стандартных координат.

Мы докажем инвариантность в двух основных случаях.Остальные случаи могут быть рассмотрены по аналогии.

Случай 1 : Стандартные параметризации V^2 в окрестности некоторой точки имеют вид :

$$n = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ \epsilon \end{pmatrix} \qquad n' = \frac{1}{\alpha'}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ h_3' \\ \vdots \\ \epsilon' \\ h_n' \end{pmatrix} \tag{2.4.2'}$$

Тогда $u_1' = \frac{\epsilon'}{h_n}u_1$ and $u_2' = \frac{\epsilon'}{h_n}u_2$ и мы получаем для ρ, ρ' : $\rho - u_3 s = \rho' + u_3 s'$

Таким образом :

$$\rho'_{1,2'} = \rho_{1,2'} \pm u_1'\rho_{n,2'} = (\rho_{1,1} - \frac{u_1}{h_n})u_{1,2'} + (\rho_{1,2} - \frac{u_1}{h_n}\rho_{n,2})u_{2,2'}$$

подставляя выражения (2.4.4) для $\rho_{n,i}$ получаем :

$$\begin{aligned} \rho'_{1,2'} &= \left[\rho_{1,1}(1 - \frac{u_1}{h_n}h_{n,1}) + \rho_{2,1}(-\frac{u_1}{h_n}h_{n,2})\right]u_{1,2'} \\ &+ \left[\rho_{1,2}(1 - \frac{u_1}{h_n}h_{n,1}) + \rho_{2,2}(-\frac{u_1}{h_n}h_{n,2})\right]u_{2,2'} \\ &= |h_n| \det\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)\left[\rho_{1,2}(u'_{1,1})^2 + (\rho_{2,2} - \rho_{1,1})u'_{1,1}u'_{1,2} - \rho_{2,1}(u'_{1,2})^2\right] \end{aligned}$$

подставляя (2.4.14), имеем

$$\rho_{1,2'} = |h_n| \det\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)(\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda)[g^{ij}u'_{1,i}u'_{1,j}]$$

используя соотношения

$$\begin{aligned} g'^{11} &= g^{ij}u'_{1,i}u'_{1,j} \\ \sqrt{g'} &= \left|\det\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)\right|\sqrt{g} \\ \frac{1}{\alpha'} &= \frac{1}{\alpha}|h_n| \end{aligned}$$

мы получим :

$$\rho'_{1,2'} = sgn\left[\det\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)\right]g'^{11}\frac{1}{\alpha'}\sqrt{g'}\lambda$$

и таким образом

$$\lambda_q \equiv \lambda_{q'}$$

Случай 2 : Параметризации V^2 имеют вид :

$$n = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ \epsilon \end{pmatrix} \qquad n' = \frac{1}{\alpha'}\begin{pmatrix} u'_1 \\ h'_3 \\ u'_2 \\ \vdots \\ h'_n \\ \epsilon \end{pmatrix} \tag{2.4.2''}$$

Действуя, как в случае 1 можно получить :

$$u'_1 = u_1 \quad ; \quad u'_2 = h_3(u_1, u_2) \quad ; \quad u'_3 = u_3 \quad \text{и следовательно} \quad \rho'_1 = \rho_1$$

$$\alpha' = \alpha \quad ; \quad \det\left(\tfrac{\partial u}{\partial u'}\right) = \tfrac{\partial u_2}{\partial u'_2} \quad ; \qquad g'^{11} = g^{ij} u'_{1,i} u'_{1,j} = g^{11}$$

откуда следует, что

$$\rho'_{1,2'} = \rho_{1,1} u_{1,2'} + \rho_{1,2} u_{2,2'} = \rho_{1,2} u_{2,2'}$$

и, подставляя $\rho_{1,2}$ из (2.4.14) мы находим :

$$\rho'_{1,2'} = \det\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right) g^{11} \frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda = sgn\left[\det\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)\right] g'^{11} \frac{1}{\alpha'}\sqrt{g'}\lambda$$

Значит, в силу (2.4.14), $\quad \lambda \equiv \lambda' \quad \blacksquare$

лемма 2.4.5 доказана.

Лемма 2.4.5'. *Пусть $F^3 \subset R^4$ – минимальная параболическая поверхность и $V^2 = \Gamma(F^3)$ регулярна. Следовательно соотношения (2.4.14) из леммы 2.4.5 выполнены.*

Доказательство этой леммы будет проведено после леммы 2.4.7.

Пусть F^3 – минимальная сильно 1-параболическая поверхность в R^{n+1} параметризованная (2.4.1).Тогда нормальное пространство к F^3 в точке P совпадает с нормальным пространством к V^2 в S^n в точке $Q = \Gamma(P)$.
Следовательно условие минимальности F^3 имеет вид :

$$< \sum_{i,j=1,3} \hat{g}^{ij} r_{ij}, \nu_q >= 0 \qquad \forall\, q = 3, n \tag{2.4.15}$$

где $(\hat{g}^{ij})$ – контравариантный метрический тензор на F^3.
Заметим, что в силу (2.4.1), можно заменить (2.4.15) на

$$< \sum_{i,j=1,2} \hat{g}^{ij} r_{ij}, \nu_q >= 0 \tag{2.4.15'}$$

и в силу (2.4.3) мы имеем также :

$$\begin{aligned} r_1 &= (b_1^1 + u_3)s_1 + b_1^2 s_2 \\ r_2 &= b_2^1 s_1 + (b_2^2 + u_3)s_2 \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Лемма 2.4.6. *Следующие два вектора коллинеарны :*

$$\begin{pmatrix} \hat{g}^{11} \\ \hat{g}^{12} \\ \hat{g}^{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (b_2^1)^2 g^{22} - 2b_2^1(u_3 + b_2^2)g^{12} + (u_3 + b_2^2)^2 g^{11} \\ -(u_3 + b_1^1)b_2^1 g^{22} + [(u_3 + b_2^2)(u_3 + b_1^1) + b_2^1 b_1^2]g^{12} - (u_3 + b_2^2)b_1^2 g^{11} \\ (u_3 + b_1^1)^2 g^{22} - 2b_1^2(u_3 + b_1^1)g^{12} + (b_1^2)^2 g^{11} \end{pmatrix}$$

Доказательство : прямые вычисления с использованием (2.4.16).

Таким образом в силу (2.4.16) система (2.4.15) принимает вид :

$$< \sum_{i,j,k=1,2} \hat{g}^{ij}(\delta_i^k u_3 + b_i^k)s_{kj}, \nu_q >= 0 \tag{2.4.17}$$

и в силу леммы 2.4.6 (2.4.17) является полиномом степени 3 по u_3.

Теорема 2.4.1 теперь следует из леммы 2.4.7.

Лемма 2.4.7. *Пусть (2.4.17) записаны в виде :*

$$< u_3^3 a + u_3^2 b + u_3 c + d, \nu_q >= 0$$

и F^3 существенно лежит в R^{n+1} ($n > 3$).

Тогда

$$\begin{aligned} &(i)\ a = t g^{ij} s_{ij} \\ &(ii)\ b = \frac{3}{2}(b_1^1 + b_2^2)a \\ &(iii)\ c = [\frac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2)^2 + (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)]a \\ &(iv)\ d = [\frac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2)(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)]a \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Доказательство леммы 2.4.7 :

(i) очевидно

При доказательстве (ii)-(iv) существенно используются следующие соотношения, легко выводящиеся из (2.4.14) :

$$\begin{aligned} g^{12} b_2^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(b_2^2 - b_1^1) \\ g^{22} b_2^1 + g^{11} b_1^2 &= 0 \\ g^{12} b_1^2 &= \frac{1}{2} g^{22}(b_1^1 - b_2^2) \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

(ii) В силу леммы 2.4.6 из (2.4.17),(2.4.19) находим :

$$\begin{aligned} b = t\ &[g^{11}(b_1^1 s_{11} + b_1^2 s_{12}) + g^{12}(b_1^1 s_{12} + b_1^2 s_{22} + \\ &+ b_2^1 s_{11} + b_2^2 s_{12}) + g^{22}(b_2^2 s_{22} + b_2^1 s_{12}) - s_{11}(2b_2^2 g^{11} - 2b_2^1 g^{12}) + \\ &+ 2s_{12}(-b_2^1 g^{22} - b_1^2 g^{11} + (b_1^1 + b_2^2)g^{12}) + s_{22}(2b_1^1 g^{22} - 2b_1^2 g^{12})] \\ = t\ &[s_{11}((2b_2^2 + b_1^1)g^{11} - b_2^1 g^{12}) + s_{12}(-(g^{11} b_1^2 + g^{22} b_2^1) + 3g^{12}(b_1^1 + b_2^2)) + \\ &+ s_{22}(-g^{12} b_1^2 + g^{22}(b_2^2 + 2b_1^1))] \\ = t\ &(g^{ij} s_{ij})\frac{3}{2}(b_1^1 + b_2^2) \end{aligned}$$

(iii) В силу леммы 2.4.6 из (2.4.17) находим (считая не меняя общности t=1) :

$$\begin{aligned}
c = &((b_2^1)^2 g^{22} - 2b_2^1 b_2^2 g^{12} + (b_2^2)^2 g^{11})s_{11} + ((b_1^1)^2 g^{22} - 2b_1^2 b_1^1 g^{12} + (b_1^2)^2 g^{11})s_{22} \\
&+2(-b_2^1 b_1^1 g^{22} + (b_2^1 b_1^2 + b_2^2 b_1^1)g^{12} - b_2^2 b_1^2 g^{11})s_{12} \\
&+s_{11}(b_1^1(-2b_2^1 g^{12} + 2b_2^2 g^{11}) + b_2^1(-b_2^1 g^{22} - b_1^2 g^{11} + (b_2^2 + b_1^1)g^{12}) \\
&+s_{22}(b_2^2(-2b_1^2 g^{12} + 2b_1^1 g^{22}) - b_1^2(-b_2^1 g^{22} - b_1^2 g^{11} + (b_2^2 + b_1^1)g^{12}) \\
&+s_{12}(b_1^2(-2b_2^1 g^{12} + 2b_2^2 g^{11}) + b_2^1(-2b_1^2 g^{12} + 2b_1^1 g^{22}) \\
&+(b_1^1 - b_2^2)(-b_2^1 g^{22} - b_1^2 g^{11} + (b_2^2 - b_1^1)g^{12}))
\end{aligned}$$

Найдем коэффициент при s_{11}, он равен

$$g^{11}[(b_2^2)^2 + 2b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2] + g^{12}[-2b_2^1 b_2^2 - 2b_2^1 b_1^1 + b_2^1(b_1^1 + b_2^2)] + g^{22}[(b_2^1)^2 - (b_2^1)^2]$$

$$= g^{11}[\frac{(b_1^1 + b_2^2)^2}{2} + b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2] + g^{11}\frac{(b_2^2)^2 - (b_1^1)^2}{2} - g^{12} b_2^1(b_1^1 + b_2^2)$$

Применяя 2.4.19 находим, что этот коэффициент равен :

$$g^{11}(\frac{(b_1^1)^2 + (b_2^2)^2}{2} + b_2^2 b_1^1 - b_2^1 b_1^2)$$

Аналогичным образом (и в силу симметрии), коэффициент при s_{22} равен

$$g^{22}(\frac{(b_1^1)^2 + (b_2^2)^2}{2} + b_2^2 b_1^1 - b_2^1 b_1^2)$$

Коэффициент при s_{12} равен :

$$\begin{aligned}
&g^{11}[-2b_2^2 b_2^1 + 2b_2^2 b_2^1 - b_1^2(b_2^2 + b_1^1)] + g^{22}[-2b_2^1 b_1^1 + 2b_2^1 b_1^1 - b_2^1(b_2^2 + b_1^1)] + \\
&+g^{12}[2b_2^1 b_1^2 + b_2^2 b_1^1 - 2b_2^1 b_1^2 - 2b_2^1 b_1^2 + (b_1^1 + b_2^2)^2] = \\
&= -(b_2^2 + b_1^1)(b_1^2 g^{11} + b_2^1 g^{22}) + 2g^{12}(\frac{(b_1^1 + b_2^2)^2}{2} + b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)
\end{aligned}$$

Учитывая 2.4.19 получаем, что и этот коэффициент равен

$$2g^{12}(\frac{(b_1^1 + b_2^2)^2}{2} + b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)$$

и таким образом :

$$c = t(g^{ij} s_{ij})(\frac{(b_1^1 + b_2^2)^2}{2} + b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)$$

(iv) Действуя по аналогии с предыдущими случаями находим :

$$\begin{aligned}
d = &s_{11}[((b_2^1)^2 g^{22} - 2b_2^1 b_2^2 g^{12} + (b_2^2)^2 g^{11})b_1^1 + \\
&\qquad +(-b_1^1 b_2^1 g^{22} + (b_2^2 b_1^1 + b_2^1 b_1^2)g^{12} - b_2^2 b_1^2 g^{11})b_2^1] + \\
&+s_{22}[((b_1^1)^2 g^{22} - 2b_1^2 b_1^1 g^{12} + (b_1^2)^2 g^{11})b_2^2 + \\
&\qquad +(-b_1^1 b_2^1 g^{22} + (b_2^2 b_1^1 + b_2^1 b_1^2)g^{12} - b_2^2 b_1^2 g^{11})b_1^2] + \\
&+s_{12}[((b_2^1)^2 g^{22} - 2b_2^1 b_2^2 g^{12} + (b_2^2)^2 g^{11})b_1^2 + \\
&\qquad +(-b_1^1 b_2^1 g^{22} + (b_2^2 b_1^1 + b_2^1 b_1^2)g^{12} - b_2^2 b_1^2 g^{11})(b_1^1 + b_2^2) + \\
&\qquad +((b_1^1)^2 g^{22} - 2b_1^2 b_1^1 g^{12} + (b_1^2)^2 g^{11})b_2^1]
\end{aligned}$$

Таким образом коэффициент в d при s_{11} равен :

$$g^{11}((b_2^2)^2b_1^1 - b_2^2b_1^2b_2^1) + g^{22}((b_2^1)^2b_1^1 - b_1^1(b_2^1)^2) +$$
$$+g^{12}(-2b_2^1b_2^2b_1^1 + (b_2^2b_1^1 + b_2^1b_1^2)b_2^1) =$$
$$= g^{11}(b_2^2b_1^1 - b_2^1b_1^2)\left[\frac{b_2^2+b_1^1}{2} + \frac{b_2^2-b_1^1}{2}\right] - g^{12}b_2^1(b_2^2b_1^1 - b_2^1b_1^2)$$

Применяя 2.4.19 находим , что этот коэффициент равен :

$$g^{11}(b_2^2b_1^1 - b_2^1b_1^2)\frac{(b_2^2+b_1^1)}{2}$$

Аналогично находим коэффициент при s_{22} :

$$g^{22}(b_2^2b_1^1 - b_2^1b_1^2)\frac{(b_2^2+b_1^1)}{2}$$

Коэффициент при s_{12} равен

$$g^{11}((b_2^2)^2b_1^2 - (b_2^2+b_1^1)b_2^2b_1^2 + (b_1^2)^2b_2^1) +$$
$$+g^{22}((b_2^1)^2b_1^2 - (b_2^2+b_1^1)b_1^1b_1^2 + (b_1^1)^2b_2^1) -$$
$$+g^{12}(-2b_2^1b_2^2b_1^2 + (b_1^1+b_2^2)(b_2^2b_1^1 + b_2^1b_1^2) - 2b_1^2b_1^1b_2^1) =$$
$$=(g^{11}b_1^2 + g^{22}b_2^1)(b_2^1b_1^2 - b_1^1b_2^2) + g^{12}(b_1^1 - b_2^2)(b_1^1b_2^2 - b_2^1b_1^2)$$

и используя 2.4.19 находим что этот коэффициент равен

$$2g^{12}\frac{(b_1^1+b_2^2)}{2}(b_1^1b_2^2 - b_2^1b_1^2)$$

и значит

$$d = t(g^{ij}s_{ij})\frac{(b_1^1+b_2^2)}{2}(b_1^1b_2^2 - b_2^1b_1^2)$$

лемма 2.4.7 доказана.

Теорема 2.4.1 доказана.

Доказательство леммы 2.4.5'. В этом случае мы имеем 2 уравнения на 1 функцию h :

$$g^{11}h_{11} + 2g^{12}h_{12} + g^{22}h_{22} = 0$$
$$\rho_{1,2}h_{11} + (\rho_{2,2} - \rho_{1,1})h_{12} - \rho_{2,1}h_{22} = 0$$

Таким образом

$$(h_{11}, h_{12}, h_{22}) = \mu[(g^{11}, 2g^{12}, g^{22}), (\rho_{1,2}, \rho_{2,2} - \rho_{1,1}, -\rho_{2,1})]$$

где [,] – стандартное векторное произведение в R^3.
Действуя как при доказательстве леммы 2.4.7 легко получаем :

$$b = \frac{3}{2}(b_1^1 + b_2^2)a + \mu(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)$$

и из минимальности F^3 следует, что $a = 0$ и значит

$$b = \mu(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) = 0$$

Действуя как при выводе (2.4.13) легко выводим, что $\mu \equiv 0$ и условия (2.4.14) выполнены. Инвариантность λ проверяется как в лемме 2.4.5. ■

лемма 2.4.5' доказана.

Определение 2.4.4. *Функция λ определенная в леммах 2.4.5,2.4.5' будет называться скручивающей (twisting) функцией минимальной сильно 1-параболической поверхности F^3.*

Теорема 2.4.8 (Основная). *Пусть F^3 – сильно 1-параболическая минимальная поверхность в R^{n+1} и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярна в S^n, λ – скручивающая функция для F^3.*
Тогда

$$\begin{aligned} &(i)\ V^2 \quad - \text{минимальна в } S^n \\ &(ii)\quad \Delta\lambda + 2\lambda = 0 \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Обратно: пусть V^2 – минимальная поверхность в S^n и λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.
Тогда существует единственная, с точностью до параллельного переноса, минимальная сильно 1 параболическая поверхность F^3 в R^{n+1} такая, что :

$$\begin{aligned} &(i)\ V^2 = \Gamma(F^3) \\ &(ii)\ \lambda \quad - \text{скручивающая функция для } F^3 \end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 2.4.8 :

Лемма 2.4.9. *Если V^2 – минимально погруженная поверхность в S^n, то условие согласования для системы (2.4.14) есть уравнение :*

$$\Delta\lambda + 2\lambda = 0$$

Доказательство леммы 2.4.9 :
Положим $\rho_{1,2} = \eta$; $\rho_{2,2} - \rho_{1,1} = \mu$; $-\rho_{2,1} = \nu$.Тогда условия согласования для (2.4.14) имеют вид :

$$\eta_{11} - \mu_{12} + \nu_{22} = 0 \tag{2.4.22}$$

Более того, функции ρ_1, ρ_2 определены с точностью до преобразования :

$$\hat{\rho}_i = \rho_i + cu_i + d,$$

которое соответствует следующей перепараметризации F^3 :

$$\hat{\rho} = \rho + cs + d \quad ; \quad \hat{s} = s$$

После подстановки (2.4.14) в (2.4.22) получаем следующее уравнение на λ :

$$\sum_{i,j=1,2} \left(g^{ij} \frac{1}{\alpha} \sqrt{g} \lambda \right)_{ij} = 0 \tag{2.4.23}$$

Лемма [Эйз].

$$(g^{kj}\sqrt{g})_j = -g^{ij}\Gamma^k_{ij}\sqrt{g} \qquad \forall \quad k = 1,2 \tag{2.4.24}$$

Доказательство : прямые вычисления или см.[Эйз]
Применяя (2.4.7) и (2.4.24) к (2.4.23) получаем :

$$\begin{aligned}
\left(g^{ij}\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda\right)_{ij} &= g^{ij}\lambda_{ij}\frac{1}{\alpha}\sqrt{g} + 2\left(g^{kj}\sqrt{g}\right)_j\frac{1}{\alpha}\lambda_k + 2\left(g^{kj}\frac{1}{\alpha}\right)_j\lambda_k\sqrt{g} + \\
&+ \left[g^{ij}(\frac{1}{\alpha})_{ij}\sqrt{g} + 2(g^{kj}\sqrt{g})_j(\frac{1}{\alpha})_k + \left((g^{kj}\sqrt{g})_j\right)_k\frac{1}{\alpha}\right]\lambda = \\
&= g^{ij}\lambda_{ij}\frac{1}{\alpha}\sqrt{g} - 2g^{ij}\Gamma^k_{ij}\frac{1}{\alpha}\lambda_k + g^{ij}\Gamma^k_{ij}\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda_k + \\
&+ \left[g^{ij}(\frac{1}{\alpha})_{ij}\sqrt{g} + 2(g^{kj}\sqrt{g})_j(\frac{1}{\alpha})_k - 2\left(g^{kj}(\frac{1}{\alpha})_j\sqrt{g}\alpha\right)_k\frac{1}{\alpha}\right]\lambda = \\
&= (g^{ij}\lambda_{ij} - g^{ij}\Gamma^k_{ij}\lambda_k)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g} + [g^{ij}(\frac{1}{\alpha})_{ij}\sqrt{g} + 2(g^{kj}\sqrt{g})_j(\frac{1}{\alpha})_k - \\
&- 2g^{kj}(\frac{1}{\alpha})_{jk}\sqrt{g} - 2(g^{kj}\sqrt{g})_k(\frac{1}{\alpha})_j + 2g^{kj}(\frac{1}{\alpha})_j\sqrt{g}\alpha(\frac{1}{\alpha})_k]\lambda = \\
&= \Delta\lambda\frac{1}{\alpha}\sqrt{g} + [-g^{kj}(\frac{1}{\alpha})_{jk} + g^{ij}\Gamma^k_{ij}(\frac{1}{\alpha})_k]\sqrt{g}\lambda = \\
&= \left(\Delta\lambda\frac{1}{\alpha} - \Delta(\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\lambda}\right)\sqrt{g}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание $\Delta(\frac{1}{\alpha}) + 2\frac{1}{\alpha} = 0$, получаем :

$$\left(g^{ij}\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda\right)_{ij} = (\Delta\lambda + 2\lambda)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}$$

лемма 2.4.9 доказана.

Теорема 2.4.8 следует теперь из Теоремы 2.4.1 и лемм 2.4.5 , 2.4.5', 2.4.9 если заметить, что в силу (2.4.6) условия согласования (2.4.5) для F^3 выполняются, если выполнены условия согласования для (2.4.14).

Теорема 2.4.8 доказана.

Рассмотрим теперь регулярную минимальную сильно 1-параболическую поверхность с полными слоями.

Определение 2.4.5. Точка Q подмногообразия M^k Риманова многообразия X^n называется **точкой уплощения** если вторая фундаментальрая форма M^k в Q равна нулю.

Теорема 2.4.10. *Пусть F^3 – регуляврно погруженная минимальная сильно 1-параболическая поверхность в R^{n+1} с полными слоями и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярна в S^n.*

Тогда
(i) если P – точка уплощения F^3, то прямая $\pi(P)$ целиком состоит из точек уплощения (т.е. можество точек уплощения насыщено) и $Q = \Gamma(P)$ – точка уплощения для V^2 в S^n.
(ii) скручивающая функция λ для F^3 нигде не обращается в ноль на V^2
Обратно : пусть V^2 – минимально погруженная (не вполне геодезическая) поверхность в S^n и λ – нигде не равная нулю функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.
Тогда поверхность F^3 построенная в Теореме 2.4.8 – регулярная минимально погруженная сильно 1-параболическая поверхность с полными слоями.Более того, прямые, являющиеся прообразами точек уплощения на V^2, целиком состоят из точек уплощения F^3.

Пример: пусть V^2 – полная минимальная регулярная поверхность в S^n. Для произвольной линейной функции α на R^{n+1} определим $V^2_\alpha = V^2 \cap \{Q \in S^n : \alpha(Q) > 0\}$.Тогда пара (V^2_α, α) удовлетворяет условиям теоремы 2.4.10 (см. [Bar,Bry1,Ej,Ken,Law1] о минимальных погружениях двумерных поверхностей в S^n).

Доказательство Теоремы 2.4.10 :

Лемма 2.4.11. *Пусть F^3 удовлетворяет условиям теоремы 2.4.10 и $\lambda(Q) = 0$ для некоторой $Q \in V^2$.Тогда Q – точка уплощения для V^2.*

Доказательство леммы 2.4.11 : допустим, что $\lambda(Q) = 0$ и Q не является точкой уплощения V^2. Значит существует $q : A^q(Q) = (h^q_{ij}) \neq 0$ и после подходящей линейной замены координат мы можем считать, что $h^q_{11} \neq 0$. Из $\lambda(Q) = 0$ и (2.4.14) следует, что на прямой $\pi(Q)$ лежит единственная точка P, в которой r_1 и r_2 линейно зависимы. Более того : $r_1(P) = r_2(P) = 0$ в стандартной параметризации. Докажем, что F^3 имеет особенность в P.

Рассмотрим в окрестности P параметризацию (2.4.1) и семейство кривых γ_t :

$$\gamma_t \quad : \quad r_t(u,0) = \rho(u,0) + ts(u,0)$$

Здесь $P = \rho(0,0)$; $Q = s(0,0)$.

Определим нормальную кривизну кривой на поверхности в Евклидовом пространстве как

$$k_\perp = \frac{|r''^\perp|}{|r'|^2}$$

где $r''^\perp$ – ортогональная проекция второй производной радиус-вектора кривой на нормальное пространство к поверхности.

В нашем случае получаем :

$$|r'_t|^2(0) = t^2|s_1(0,0)|^2$$

$$r''^\perp_t(0) = ts^\perp_{11}(0,0) \neq 0 \qquad \text{так как} \quad h^q_{11}(Q) = < s^\perp_{11}(0,0), \nu_q > \neq 0$$

и следовательно нормальная кривизна γ_t в точке $u = 0$ стремится к ∞, когда t стремится к нулю, что противоречит регулярности F^0.Следовательно Q – точка уплощения V^2.

лемма 2.4.11 доказана.

(i) Пусть P точка уплощения F^3 и F^3 параметризована (2.4.1) в окрестности P.

Тогда

$$< r_{ij}, \nu_q >_{|P} = < \rho_{ij}, \nu_q >_{|P} = - < \rho_i, \nu_{q,j} >_{|P} = 0 \quad q = \overline{3,n}$$

Подставляя ρ_i из (2.4.4), получим :

$$\begin{matrix} b_1^1 h_{11}^q + b_1^2 h_{12}^q = 0 & \qquad b_2^1 h_{11}^q + b_2^2 h_{12}^q = 0 \\ b_1^1 h_{12}^q + b_1^2 h_{12}^q = 0 & \qquad b_2^1 h_{12}^q + b_2^2 h_{22}^q = 0 \end{matrix} \tag{2.4.26}$$

где $\left(h_{ij}^q\right)$ – вторая фундаментальная форма V^2 в точке $Q = \Gamma(P)$ в направлении ν_q.

Если допустить, что Q не является точкой уплощения, мы получаем из (2.4.26) :

$$\Delta = \left(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2\right)_{|P} = 0$$

Следовательно : $(b_1^1 - b_2^2)^2 - 4\Delta = (b_1^1 - b_2^2)^2 + 4 b_2^1 b_1^2 \geq 0$

Подставляя (2.4.4) и (2.4.14) :

$$4\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda\right)^2 \left(\left(g^{12}\right)^2 - g^{11}g^{22}\right)_{|Q} \geq 0$$

и в силу положительной определенности $\left(g^{ij}\right)$: $\lambda(Q) = 0$ и по лемме 2.4.11 получаем противоречие.

Лемма 2.4.12. *Пусть V^2 – минимальная поверхность в S^n и $\gamma \subset V^2$ – кривая, состоящая из точек уплощения.*
Тогда V^2 – вполне геодезична в S^n.

Доказательство леммы 2.4.12 : Выберем базис n_q в нормальном пространстве к V^2 параллельный вдоль γ в нормальной связности. Следовательно из уравнений Вейнргартена получаем для любого q :

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} = -A^q(\gamma'(t)) = 0$$

здесь A^q – вторая фундаментальная форма в направлении n_q.

Следовательно $n_{q|\gamma} = const$ и интегрируя $< r_i, n_q > = 0$ получаем $< r, n_q > = 0$ для любого q.Таким образом $\gamma \subset R^3 \cap S^n = S^2$ и мы можем склеить вдоль γ куски минимальных поверхностей V^2 и S^2 (γ состоит из точек уплощения !).Получившаяся C^2-поверхность также минимальна и в силу аналитичности совпадает с частью S^2.

лемма 2.4.12 доказана.

Лемма 2.4.13. *Пусть V^2 – минимальная поверхность в S^n и $\lambda \neq 0$ удовлетворяет уравнению : $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.Если $\lambda(Q) = 0$, тогда через точку Q проходит кривая $\gamma : \lambda_{|\gamma} \equiv 0$.*

Доказательство леммы 2.4.13 :

Допустим, что существует окрестность $U(Q) : \lambda_{|U(Q)} \geq 0$.

Пусть $Q = (0, \ldots, 0, 1)$ и V^2 параметризована (2.4.2) в $U(Q)$. Положим $\rho = a\lambda$.Тогда $\rho_{|U} \geq 0, \rho(Q) = 0$ и легкие вычисления (см. Лемму 2.4.28 ниже) показывают, что ρ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,j=1,2} g^{ij}\rho_{,ij} = 0 \tag{2.4.27}$$

Следовательно в силу принципа максимума $\rho_{|U} = const = 0$ и $\lambda_{|U} \equiv 0$.

лемма 2.4.13 доказана.

(ii) Если существует $Q \in V^2 : \lambda(Q) = 0$, то из лемм 2.4.11 , 2.4.13 следует, что существует кривая γ на V^2, состоящая из точек уплощения и проходящая через Q. По лемме 2.4.12 V^2 – вполне-геодезична в S^n и следовательно F^3 является частью $R^3 \in R^{n+1}$ по лемме 2.4.4. Таким образом мы получили противоречие и (ii) доказано.

Докажем обратную часть теоремы 2.4.10.

Если Q – точка уплощения V^2, то для любой $P : \Gamma(P) = Q$ уравнения (2.4.26), являющиеся условиями улощения для P, автоматически выполняются. Следовательно вся прямые на F^3, соответствующие Q состоят из точек уплощения. Условия регулярности F^3 вдоль слоев имеют вид :

$$\det\begin{pmatrix} b_1^1 + u_3 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 + u_3 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \forall\, u_3$$

что эквивалентно : $\quad (b_1^1 - b_2^2)^2 + 4b_2^1 b_1^2 \neq 0$

Подставляя (2.4.14), сводим это условие к :

$$\left(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2\right)\lambda \neq 0$$

которое выполняется в рассматриваемом случае.

Теорема 2.4.10 доказана.

Теорема 2.4.14.

Пусть F^3 – минимальная регулярная сильно 1-параболическая поверхность в R^{n+1} и $V^2 = \Gamma(F^3)$ – полная минимальная поверхность в S^n.

Тогда $F^3 = R^3$.

Теорема 2.4.14 немедленно следует из теорем 2.4.8, 2.4.10 и нижеследующей леммы.

Лемма 2.4.15. *Пусть V^2 – полная минимальная поверхность в S^n и λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.*
Тогда существует $Q \in V^2 : \lambda(Q) = 0$.
Доказательство леммы 2.4.15 : Допустим, что $\lambda_{|V^2} > 0$. Следовательно существует $Q \in V^2 : \lambda(Q) = \min(\lambda) > 0$ и мы имеем, что $\lambda_1(q) = \lambda_2(q) = 0$ и $(\lambda_{ij})_{|Q}$ – неотрицательно определена
Следовательно мы получаем :

$$(\Delta\lambda + 2\lambda)_{|Q} = \left(g^{ij}\lambda_{ij} + 2\lambda\right)_{|Q} > 0$$

что противоречит условиям леммы.

лемма 2.4.15 доказана.

Докажем теперь теорему, дополняющую теорему 2.4.8 и дающую явное и вполне инвариантное описание структуры F^3 и множества особенностей этой поверхности.

Лемма 2.4.16. *Пусть V^2 – ориентированная минимально погруженная поверхность поверхность в S^n и λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.*
Тогда существует (многозначная) вектор функция γ на V^2, такая, что в любых локальных координатах (u_1, u_2) на V^2 из заданного класса ориентации выполнены следующие соотношения :

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 & = & g^{12}\sqrt{g}(\lambda r_1 - \lambda_1 r) + g^{22}\sqrt{g}(\lambda r_2 - \lambda_2 r) \\ \gamma_2 & = & -g^{11}\sqrt{g}(\lambda r_1 - \lambda_1 r) - g^{12}\sqrt{g}(\lambda r_2 - \lambda_2 r) \end{array} \tag{2.4.28}$$

где r – радиус-вектор V^2 в R^{n+1}.
Доказательство леммы 2.4.16 :
(i) проверим, что условия согласования системы (2.4.28) удовлетворены. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} - \gamma_{2,1} = &-(g^{ij}\sqrt{g})_i\lambda_j r + (g^{ij}\sqrt{g})_i\lambda r_j + g^{ij}\lambda(r_{ij} - \lambda_{ij} r) \\ &+ (g^{12}\sqrt{g}(\lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2) + g^{22}\sqrt{g}(\lambda_2 r_2 - \lambda_2 r_2) + \\ &+ g^{11}\sqrt{g}(\lambda_1 r_1 - \lambda_1 r_1) + g^{12}\sqrt{g}(\lambda_1 r_2 - \lambda_2 r_1) \end{aligned}$$

Используя (2.4.24) получаем :

$$\gamma_{1,2} - \gamma_{2,1} = g^{ij}(\lambda r_{ij} - \Gamma^k_{ij}\lambda r_k) - g^{ij}(\lambda_{ij} r - \Gamma^k_{ij}\lambda_k r)$$

Или, что то же самое (см. определение 2.3.7)

$$\lambda\Delta r - \Delta\lambda r = 0 \tag{2.4.29}$$

В нашем случае $\Delta r + 2r = 0$; $\Delta\lambda + 2\lambda - 0$ и значит (2.4.29) выполняются и (i) доказано.

(ii) проверим инвариантность определения γ при заменах координат, сохраняющих ориентацию : пусть (u_1, u_2) и (u'_1, u'_2) – две системы локальных координат на V^2 из одного класса ориентациип, т.е. $\Delta = \det\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right) > 0$.

Следовательно мы имеем :

$$\begin{aligned}\gamma_1 u_{1,1'} + \gamma_2 u_{2,1'} = &\left[u_{1,1'}(-g^{12}r_1 - g^{22}r_2) - u_{2,1'}(g^{11}r_1 + g^{12}r_2)\right]\sqrt{g}\lambda - \\ &- \left[u_{1,1'}(-g^{12}\lambda_1 - g^{22}\lambda_2) + u_{2,1'}(g^{11}\lambda_1 + g^{12}\lambda_2)\right]\sqrt{g}r\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

используя соотношения :

$$u_{1',1} = u_{2,2'}\Delta \quad u_{2',2} = u_{1,1'}\Delta \quad u_{1',2} = -u_{1,2'}\Delta \quad u_{2',1} = -u_{2,1'}\Delta$$

$$r_i = r'_{1'}u_{1',i} + r'_{2'}u_{2',i} \quad \sqrt{g} = \sqrt{g}'\Delta \quad \lambda(u) - \lambda'(u') \quad r(u) = r'(u')$$

нетрудно видсть, что после подстановки (2.4.30) сводится к виду :

$$\begin{aligned}\gamma_1 u_{1,1'} + \gamma_2 u_{2,1'} = &\left[-(g^{ij}u_{1',i}u_{2',j})r'_{1'} - (g^{ij}u_{2',i}u_{2',j})r'_{2'}\right]\sqrt{g}'\lambda' \\ &- \left[(g^{ij}u_{1',i}u_{2',j})\lambda'_{1'} + (g^{ij}u_{2',i}u_{2',j})\lambda'_{2'}\right]\sqrt{g}'r'\end{aligned}$$

Из очевидных тождеств $g'^{kl} = g^{ij}u_{k',i}u_{l',j}$ получаем далее :

$$\gamma_1 u_{1,1'} + \gamma_2 u_{2,1'} = \gamma'_{1'}$$

Совершенно аналогично находим :

$$\gamma_1 u_{1,2'} + \gamma_2 u_{2,2'} - \gamma'_{2'}$$

Следовательно γ инвариантно определена и лемма 2.4.16 доказана.

Замечание : очевидно, что образ $\gamma(V^2)$ опредлен однозначно, с точностью до параллельного переноса R^{n+1}.

Лемма 2.4.17. *Пусть F^3 минимальная сильно 1-параболическая поверхность в R^{n+1} с регулярным "Гаусс-образом" V^2. Рассмотрим произвольную стандартную параметризацию (2.4.1) на F^3. Тогда в координатах (2.4.2) на V^2 мы имеем :*

$$\gamma(u_1, u_2) = \rho(u_1, u_2) - \frac{1}{2}\left(b^1_1 + b^2_2\right)s(u_1, u_2) \tag{2.4.31}$$

Доказательство леммы 2.4.17 : определим γ при помощи (2.4.31).

Тогда

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{2}(b^1_1 - b^2_2)s_1 + b^2_1 s_2 - \frac{1}{2}(b^1_1 + b^2_2)_1 s = \\ &= -\left(g^{12}s_1 + g^{22}s_2\right)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda - \left[\frac{1}{2}\left(b^2_2 - b^1_1\right)_1 - \left(b^2_1\right)_2\right]s = \\ &= -\left(g^{12}s_1 - g^{22}s_2\right)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda + \left[(g^{12}\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda)_1 + (g^{22}\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda)_2\right]s = \\ &= -\left(g^{12}s_1 + g^{22}s_2\right)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda + \left[g^{12}\sqrt{g}\lambda(\frac{1}{\alpha})_1 + g^{22}\sqrt{g}\lambda(\frac{1}{\alpha})_2\right]s + \\ &+ \left[(g^{12}\sqrt{g})_1 + (g^{22}\sqrt{g})_2\right]\frac{1}{\alpha}\lambda s + (g^{12}\lambda_1 + g^{22}\lambda_2)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}s\end{aligned}$$

используя (2.4.7) и (2.4.24), мы получим :

$$\gamma_1 = -\left(g^{12}s_1 + g^{22}s_2\right)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}\lambda - [g^{12}\sqrt{g}\lambda(\frac{1}{\alpha})_1 + g^{22}\sqrt{g}\lambda(\frac{1}{\alpha})_2]s +$$
$$+ (g^{12}\lambda_1 + g^{22}\lambda_2)\frac{1}{\alpha}\sqrt{g}s$$

и так как $r = \frac{s}{\alpha}$:

$$\gamma_1 = -\left(g^{12}r_1 + g^{22}r_2\right)\sqrt{g}\lambda + \left(g^{12}\lambda_1 + g^{22}\lambda_2\right)\sqrt{g}r$$

Аналогично :

$$\gamma_2 = +\left(g^{11}r_1 + g^{12}r_2\right)\sqrt{g}\lambda - \left(g^{11}\lambda_1 + g^{12}\lambda_2\right)\sqrt{g}r$$

Эти уравнения совпадают с (2.4.28) и в силу леммы 2.4.16 все доказано.

лемма 2.4.17 доказана.

Теорема 2.4.18. *Пусть V^2 – минимальная поверхность в S^n, λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$ и γ – отображение, определенное в лемме 2.4.16. Тогда*
(i) Поверхность F^3 в R^{n+1} определенная следующим образом :

$$F^3 \quad : \quad \hat{r}(Q,t) = \gamma(Q) + tr(Q) \mid Q \in V^2 \ ; \ t \in R$$

является минимальной сильно 1-параболической поверхностью в R^{n+1} с "Гаусс-образом" V^2 и скручивающей функцией λ.
(ii) множество особенностей F^3 есть :

$$\Sigma \ = \ \{ \ \gamma(Q) : \lambda(Q) = 0 \ \}$$

Доказательство Теоремы 2.4.18 :
(i) немедленно следует из Теоремы 2.4.8 и лемм 2.4.16 , 2.4.17.
(ii) пусть $P \in \Sigma \subset F^3$ и $Q = \Gamma(P) \in V^2$.Тогда по теореме 2.4.10 $\lambda(Q) = 0$. Рассмотрим параметризацию (2.4.2) на V^2. Тогда в силу (2.4.14)

$$b_1^1(Q) = b_2^2(Q) = b \qquad b_2^1(Q) = b_1^2(Q) = 0$$

и следовательно

$$r_i(u_1, u_2, t)_{|(Q,t)} = (b+t)s_i(u_1,u_2)_{|Q} \quad i = 1,2$$

и на каждой прямой из $\Gamma^{-1}(Q)$ лежит в точности одна особая точка P (см. также Теорему 2.4.10) с радиус-вектором

$$r(P) = \rho(Q) - bs(Q)$$

где $b = \frac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2)_{|Q}$ и по лемме 2.4.17 :

$$r(P) = \gamma(Q) \in \Sigma$$

Теорема 2.4.18 доказана.

Докажем теперь теорему аналогичную теоремам 2.3.1 и 2.3.11 о деформациях SL-нормальных расслоений.

Теорема 2.4.19. *Пусть V^2 минимальная поверхность в S^3, $V^2_* \subset S^3$ – двойственная минимальная поверхность, радиус-вектор которой является единичной нормалью к V^2 в S^3. $\lambda(\lambda_*)$ – функция на $V^2(V^2_*)$, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0(\Delta^*\lambda_* + 2\lambda_* = 0)$, где $\Delta(\Delta^*)$ – Лапласиан на $V^2(V^2_*)$. Тогда поверхность $N^4 \subset \mathbb{C}^4$ заданная по формуле*

$$N^4 : R(Q,t,s) = \{(\gamma(Q) + tr(Q); \gamma_*(Q_*) + t_*r_*(Q_*))|Q \in V^2; t, s \in \mathbb{R}\}$$

является SL-подмногообразием в $\mathbb{C}^4$, где $Q_* \in V^2_*$ соответствует $Q \in V^2$ при отображении двойственности и $\gamma(\gamma_*)$ определены в лемме 2.4.16 для соответственно пар (V^2, λ) и (V^2_*, λ_*).

Доказательство теоремы 2.4.19 : Введем в окрестности точки $Q \in V^2$ изотермические коордтнаты (u_1, u_2),т.е

$$< r_i, r_j >= F\delta_{ij} \tag{2.4.32}$$

Лемма 2.4.20. *Пара (u_1, u_2) является изотермической системой координат в окрестности точки Q_* на V^2_*.*

Доказательство леммы 2.4.20 : В силу минимальности V^2 в S^3 и того, что $r \perp r_*$ получаем :

$$\begin{aligned} r_{*1} &= ar_1 + br_2 \\ r_{*2} &= br_1 - ar_2 \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

и следовательно в силу (2.4.32) получаем $< r_{*i}, r_{*j} >= F_*\delta_{ij}, F_* = (a^2 + b^2)F$.

Теперь из леммы 2.4.16 немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= +\lambda r_2 - \lambda_2 r \qquad & \gamma_{*1} &= +\lambda_* r_{*2} - \lambda_{*2} r_* \\ \gamma_2 &= -\lambda r_1 + \lambda_1 r \qquad & \gamma_{*2} &= -\lambda_* r_{*1} + \lambda_{*1} r_* \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

Из (2.4.34) и определения радиус-вектора N^4 находим, что касательная плоскость к N^4 в точке соответствующей параметрам (u_1, u_2, t, t_*) натянута на векторы :

$$\begin{aligned} R_1 &= (tr_1 - \lambda r_2; t_* r_{*1} - \lambda_* r_{*2}) \\ R_2 &= (\lambda r_1 + tr_2; \lambda_* r_{*1} + t_* r_{*2}) \\ R_3 &= (r; 0) \\ R_4 &= (0; r_*) \end{aligned}$$

Как и при доказательстве лагранжевости в теореме 2.3.11 нетривиальным является лишь условие $< JR_1, R_2 >= 0$, которое в данном случае примет вид

$$+t\lambda_* < r_1, r_{*1} > -\lambda t_* < r_2, r_{*2} > +tt_* < r_1, r_{*2} > -\lambda\lambda_* < r_2, r_{*1} > -$$
$$-t\lambda_* < r_2, r_{*2} > +\lambda t_* < r_1, r_{*1} > +tt_* < r_1, r_{*2} > -\lambda\lambda_* < r_1, r_{*2} >$$

и в силу (2.3.34) обе части данного соотношения равны :

$$(t\lambda_* + \lambda t_*)aF + (tt_* - \lambda\lambda_*)bF$$

и таким образом N^4 – Лагранжево.

Возьмем в качестве ортонормированного базиса $(f_i)_1^4$ в $T_{(u,t,t_*)}N^4$ набор

$$(R_1/|R_1|, R_2/|R_2|, R_3, R_4)$$

и как в теореме 2.3.11 матрица перехода от базиса $(r_1/|r_1|, r_2/|r_2|, r, r_*)$ в $\mathbb{R}^4$ имеет в силу (2.4.33) вид :

$$A = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} t + i(t_*a - \lambda_*b) & -\lambda + i(t_*b + \lambda_*a) & 0 & 0 \\ \lambda + i(\lambda_*a + t_*b) & t - i(\lambda_*b - t_*a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad (2.3.35)$$

где $\mu = \sqrt{(t^2 + \lambda^2) + (t_*^2 + \lambda_*^2)(a^2 + b^2)}$ и прямые вычисления дают $\det A = i$ и следовательно N^4 специально-Лагранжево относительно SL-формы $\alpha = -Re(idz)$. ■

Приведем теперь конструкцию Дажзера-Громолла (см. [DG1]), описывающую множество минимальных сильно (n-2)-параболических гиперповерхностей в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 2.4.21. *Пусть $V^2 \subset S^n$ – минимальная поверхность и μ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\mu + 2\mu = 0$, где Δ –Лапласиан на V^2. Тогда поверхность $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, радиус вектор которой имеет вид :*

$$M^n : \{R(Q,t) = \mu r(Q) + \nabla\mu(Q) + \sum_{k=3,n} t_k\nu_k(Q)\, Q \in V^2; t = (t_3, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$

где r – радиус-вектор V^2,$\nabla\mu$ – градиент μ, рассматриваемый как вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$ касательный к V^2, и (ν_k) – базис нормалей к V^2, является минимальной сильно (n-2)-параболической и обратно всякая минимальная сильно (n-2)-параболическая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ может быть представлена в таком виде.

Оказывается справедлив следующий аналог Теоремы 2.4.19 :

Теорема 2.4.22. *Пусть V^2 – минимальная поверхность в S^n и λ, μ –функции на V^2, удовлетворяющие уравнениям $\Delta\lambda + 2\lambda = 0, \Delta\mu + 2\mu = 0$. Тогда поверхность N^n с радиус вектором*

$$N^n : \{R(Q,t,s) = (\mu r(Q) + \nabla\mu(Q) + \sum_{k=3}^{n} t_k\nu_k(Q); \gamma(Q) + sr(Q))\}$$

где γ задается по паре (V^2, λ), является SL-подмногообразием $\mathbb{C}^n$.

Доказательство Теоремы 2.4.22 : Введем на V^2 в окрестности Q изотермическую систему координат (u_1, u_2), т.е. $< r_i, r_j >= F\delta_{ij}$. Тогда

$$\nabla\mu = \frac{1}{F}(\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2) \tag{2.4.36}$$

и следовательно используя (2.4.34) , (2.4.36) можно выбрать следующий базис в $T_{(u,t,s)}N^n$:

$$\begin{aligned}
&R_1 = [\mu r_1 - \frac{F_1}{F^2}(\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2) + \frac{1}{F}(\mu_{11} r_1 + \mu_1 r_{11} + \mu_{12} r_2 + \mu_2 r_{12}); sr_1 + \lambda r_2]\\
&R_2 = [\mu r_2 - \frac{F_2}{F^2}(\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2) + \frac{1}{F}(\mu_{12} r_1 + \mu_1 r_{12} + \mu_{22} r_2 + \mu_2 r_{22}); sr_2 - \lambda r_1]\\
&R_k = [\nu_k; 0] \qquad k = 3, n\\
&R_{n+1} = [0; r]
\end{aligned}$$

этот базис легко может быть используя как при доказательстве теоремы 2.3.11 следующие соотношения

$$\begin{array}{ccc}
< r_{11}, r_1 >= +\frac{F^1}{2} & < r_{12}, r_1 >= +\frac{F^2}{2} & < r_{22}, r_1 >= -\frac{F^1}{2}\\
< r_{11}, r_2 >= -\frac{F^2}{2} & < r_{12}, r_2 >= +\frac{F^1}{2} & < r_{22}, r_2 >= +\frac{F^2}{2}
\end{array}$$

к виду

$$\begin{aligned}
f_1 &= [ar_1 + br_2; sr_1 + \lambda r_2]\\
f_2 &= [br_1 + cr_2; sr_2 - \lambda r_1]\\
f_k &= [\nu_k; 0] \qquad k = 3, n\\
f_{n+1} &= [0; r]
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a &= \mu + \frac{\mu_{11}}{F} + \frac{\mu_2 F_2 - \mu_1 F_1}{F^2}\\
b &= \quad \frac{\mu_{12}}{F} - \frac{\mu_1 F_2 + \mu_2 F_1}{F^2}\\
c &= \mu + \frac{\mu_{22}}{F} + \frac{\mu_1 F_1 - \mu_2 F_2}{F^2}
\end{aligned}$$

Лемма 2.4.23. $a + c = 0$

Доказательство леммы 2.4.23 : Условие $a + c = 0$ переписывается в виде :

$$\mu_{11} + \mu_{22} + 2F\mu = 0 \tag{2.4.37}$$

но поскольку система координат изотермическая, $\Delta_{V^2} = \frac{\Delta}{F}$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{u_1^2} + \frac{\partial^2}{u_2^2}$ и следовательно (2.4.37) эквивалентно уравнению $\Delta_{V^2}\mu + 2\mu = 0$, которое выполнено по условию теоремы.

Лемма 2.4.23 доказана

Действуя как при доказательстве Теоремы 2.4.19 доказываем специальную Лагранжевость N^n в $\mathbb{C}^n$. ■

В заключение приведем конструкцию из [Bor1], позволяющую описать строение непараметрической минимальной параболической поверхности $M^3 \subset R^4$ аналогичную конструкции из параграфа 2.3.

Пусть M^3 – график функции $x_4 = F(x_1, x_2, x_3)$ минимальная 1-параболическая поверхность. Условие минимальности записывается в виде :

(i)

$$(1 + F_2^2 + F_3^2)F_{11} + (1 + F_1^2 + F_3^2)F_{22} + (1 + F_1^1 + F_2^2)F_{33} - \\ -2(F_1F_2F_{12} + F_1F_3F_{13} + F_2F_3F_{23}) = 0$$

Условие параболичности имеет стандартный вид (см. параграф 2.3)

(ii)

$$\det HessF = 0$$

Произведя как в § 2.3 частичное преобразование Лежандра по паре декартовых координат (x_1, x_2) (при условии $\det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \neq 0$) получаем представление радиус-вектора M^3 в виде :

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 - u_3 q_1 \\ x_2 &= \rho_2 - u_3 q_2 \\ x_3 &= u_3 \\ x_4 &= L(\rho) - u_3 L(q) \end{aligned} \tag{2.4.38}$$

Где $L(f) = -f + u_1 f_1 + u_2 f_2$.

Предложение 2.4.24. *Пара функций ρ, q определяющие непараметрическую минимальную 1-параболическую поверхность M^3 посредством (2.4.38) удовлетворяет системе уравнений (см. аналог – систему (**) в § 2.3) :*

$$\begin{aligned} (1 + q_2^2 - \alpha_2^2)q_{11} - 2(q_1q_2 - \alpha_1\alpha_2)q_{12} + (1 + q_1^2 - \alpha_1^2)q_{22} = 0 \\ (1 + q_2^2 - \alpha_2^2)\rho_{11} - 2(q_1q_2 - \alpha_1\alpha_2)\rho_{12} + (1 + q_1^2 - \alpha_1^2)\rho_{22} = 0 \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

где $\alpha = \sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2 + q(u_1, u_2)^2}$.

Доказательство предложения 2.4.24 : Действуя как при доказательстве Леммы 2.3.9 заменяя условие $\Delta F = 0$ условием минимальности (i) графика F в $\mathbb{R}^4$ находим, что

$$(1 + u_2^2 + q^2)(\rho_{22} - u_3q_{22}) + 2u_1u_2(\rho_{12} - u_3q_{12}) + (1 + u_1^2 - q^2)(\rho_{11} - u_3q_{11}) + \\ +(1 + u_1^2 + u_2^2)(q_1[q_1(\rho_{22} - u_3q_{22}) - q_2(\rho_{12} - u_3q_{12})] + \\ +q_2[q_2(\rho_{11} - u_3q_{11}) - q_1(\rho_{12} - u_3q_{12})]) - \\ -2u_1q[q_1(\rho_{22} - u_3q_{22}) - q_2(\rho_{12} - u_3q_{12})] - \\ -2u_2q[q_2(\rho_{11} - u_3q_{11}) - q_1(\rho_{12} - u_3q_{12})] = 0$$

Это равенство может быть переписано в виде системы :

$$\begin{array}{c} g^{ij}q_{ij} = 0 \\ g^{ij}\rho_{ij} = 0 \end{array} \tag{2.4.40}$$

где

$$\begin{array}{l} g^{11} = 1 + u_1^2 + q^2 + q_2^2(1 + u_1^2 + u_2^2) - 2u_2q_2q \\ g^{12} = u_1u_2 - q_1q_2(1 + u_1^2 + u_2^2) + u_1q_2q + u_2q_1q \\ g^{22} = 1 + u_2^2 + q^2 + q_1^2(1 + u_1^2 + u_2^2) - 2u_1q_1q \end{array} \tag{2.4.41}$$

Заметим теперь, что система (2.4.39) имеет вид (2.4.40) и

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1 + q_2^2 - \frac{(u_2 + q_2q)^2}{1 + u_1^2 + u_2^2 + q^2} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}((1 + q_2^2)(1 + u_1^2 + u_2^2 + q^2) - (u_2 + q_2q)^2 = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(1 + u_1^2 + q^2 + q_2^2(1 + u_1^2 + u_2^2) - 2u_2q_2q) \\ g^{12} &= -q_1q_2 + \frac{(u_1 + q_1q)(u_2 + q_2q)}{1 + u_1^2 + u_2^2 + q^2} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(-q_1q_2(1 + u_1^2 + u_2^2 + q^2) + (u_1 + q_1q)(u_2 + q_2q) = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(u_1u_2 - q_1q_2(1 + u_1^2 + u_2^2) + u_1q_2q + u_2q_1q) \\ g^{22} &= 1 + q_1^2 - \frac{(u_1 + q_1q)^2}{1 + u_1^2 + u_2^2 + q^2} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}((1 + q_1^2)(1 + u_1^2 + u_2^2 + q^2) - (u_1 + q_1q)^2 = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(1 + u_2^2 + q^2 + q_1^2(1 + u_1^2 + u_2^2) - 2u_1q_1q) \end{aligned}$$

и следовательно пропорциональны (g^{ij}) в (2.4.41). ■

Определим теперь двумерную минимальную поверхность $V^2 \subset S^3$ как гаусcов образ M^3.

Лемма 2.4.25. *В координатах (u_1, u_2, u_3) на M^3 радиус-вектор V^2 имеет вид :*

$$r(u_1, u_2) = \frac{1}{|\alpha|^2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.4.42}$$

Доказательство леммы 2.4.25 : Поскольку радиус-вектор V^2 является по определению единичной нормалью к M^3 для доказательства необходимо и достаточно проверить, что $< R_{u_i}, r >= 0$ для $i = 1, 3$, где R – радиус-вектор M^3, задаваемый (2.4.38).

Дифференцируя (2.4.38) получаем :

$$R_{u_1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} - u_3 q_{11} \\ \rho_{12} - u_3 q_{12} \\ 0 \\ u_1\rho_{11} + u_2\rho_{12} - u_3(u_1 q_{11} + u_2 q_{12}) \end{pmatrix}$$

$$R_{u_2} = \begin{pmatrix} \rho_{12} - u_3 q_{12} \\ \rho_{22} - u_3 q_{22} \\ 0 \\ u_1\rho_{12} + u_2\rho_{22} - u_3(u_1 q_{12} + u_2 q_{22}) \end{pmatrix}$$

$$R_{u_3} = \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 1 \\ q - u_1 q_1 - u_2 q_2 \end{pmatrix}$$

и лемма следует из (2.4.42). ■

Лемма 2.4.26. *Компоненты (g^{ij}) контравариантного метрического тензора V^2 пропорциональны (2.4.41).*

Доказательство : имеем из (2.4.42), что

$$r_{u_1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(u_1 + q_1 q)}{\alpha^3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r_{u_2} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(u_2 + q_2 q)}{\alpha^3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q \\ -1 \end{pmatrix}$$

и следовательно компоненты (g_{ij}) ковариантного метрического тензора V^2 имеют вид :

$$\begin{aligned} g_{11} =& \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_1^2 - \frac{2(u_1 - q_1 q)^2}{\alpha^2} + \frac{(u_1 + q_1 q)^2\alpha^2}{\alpha^4}) = \\ =& \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_1^2 - \frac{(u_1 + q_1 q)^2}{\alpha^2}) = \gamma g^{22} \\ g_{12} =& \frac{1}{\alpha^2}(q_1 q_2 - \frac{2(u_1 + q_1 q)(u_2 + q_2 q)}{\alpha^2} + \frac{(u_1 + q_1 q)(u_2 + q_2 q)\alpha^2}{\alpha^4}) = \\ =& \frac{1}{\alpha^2}(q_1 q_2 - \frac{(u_1 + q_1 q)(u_2 + q_2 q)}{\alpha^2}) = -\gamma g^{12} \\ g_{22} =& \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_2^2 - \frac{2(u_2 + q_2 q)^2}{\alpha^2} + \frac{(u_2 - q_2 q)^2\alpha^2}{\alpha^4}) = \\ =& \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_2^2 - \frac{(u_2 + q_2 q)^2}{\alpha^2}) = \gamma g^{11} \end{aligned}$$

и все доказано в силу (2.4.41). ■

Лемма 2.4.27. *V^2 — локально минимальная поверхность в S^3*

Доказательство леммы 2.4.27 : Из доказательства леммы 2.4.25 следует, что в качестве нормали к V^2 в S^3 можно взять вектор

$$n = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -1 \\ -q + u_1 q_1 + u_2 q_2 \end{pmatrix} \tag{2.4.43}$$

и условие минимальности V^2 примет вид :

$$< g^{ij} r_{ij}, n >= 0 \tag{2.4.44}$$

и из (2.4.42) следует, что (2.4.44) записывается в виде :

$$\alpha^2 g^{ij} (\tfrac{1}{\alpha^2})_{ij} < r, n > + g^{ij} (\tfrac{1}{\alpha^2})_i < (\delta_{1j}, \delta_{2j}, q_j, 0), n > +$$
$$+ g^{ij} < (0, 0, q_{ij}, 0), n >= g^{ij} q_{ij} = 0$$

Здесь δ_{ij} – символы Кронеккера, g^{ij} – контравариантный метрический тензор V^2 и значит все доказано в силу леммы 2.4.26 и первого уравнения системы (2.4.40). ■

Лемма 2.4.28. *Положим $\lambda = \frac{\rho}{\alpha}$, тогда λ инвариантно определенная на V^2 функция и второе уравнение $g^{ij}\rho_{ij} = 0$ системы (2.4.39) на ρ эквивалентно уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$ на λ.*

Доказательство леммы 2.4.28 : уравнение $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$ принимает вид :

$$0 = \Delta(\tfrac{\rho}{\alpha}) + 2(\tfrac{\rho}{\alpha}) = g^{ij}(\tfrac{\rho}{\alpha})_{ij} - \Gamma^k_{ij}(\tfrac{\rho}{\alpha})_k + 2(\tfrac{\rho}{\alpha}) =$$
$$= [\Delta(\tfrac{1}{\alpha}) + 2(\tfrac{1}{\alpha})] + [2g^{kj}(\tfrac{1}{\alpha})_j - g^{ij}\gamma^k_{ij}(\tfrac{1}{\alpha})]\rho_k + \frac{1}{\alpha} g^{ij}\rho_{ij}$$

Далее выражение в первой квадратной скобке равно нулю, поскольку в силу леммы 2.4.27 $\frac{1}{\alpha}$ – координатная функция на минимальной поверхности $V^2 \subset S^3$, а во второй квадратной скобке выражение равно нулю в силу (2.4.7) и поэтому уравнение $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$ эквивалентно $g^{ij}\rho_{ij} = 0$. ■

Таким образом нами доказана следующая теорема :

Теорема 2.4.29. *Пусть $M^3 \subset R^4$ – непараметрическая 1-параболическая поверхность Тогда M^3 – минимальна если и только если V^2, Гауссов образ M^3, минимален в S^3 и функция $\lambda = \frac{\rho}{\alpha}$ удовлетворяет уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$. При этом в параметрическом виде радиус-вектор M^3 задается посредством (2.4.38).*

Этой теореме может быть придан инвариантный вид по аналогии с теоремой 2.3.1. А именно пусть V^2 – минимальная поверхность, лежащая в открытой полусфере $S^3 \cap \{x_4 < 0\}$. Легко видеть (см.[Bor1]), что если функция ρ

на V^2 такова, что в каких либо локальных координатах вида (2.4.42) на V^2 выполнено второе равенство ситемы (2.4.40), то это же равенство выполнено в любых координатах вида (2.4.42) (т.е. если в качестве локальных коодинат на V^2 взята пара декартовых координат в $\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$). Будем называть такую функцию квазигармонической.

Положим теперь $M^2 = \pi(V^2) \subset \mathbb{R}^3(x_4 = -1)$, где π – центральная проекция. Для $p \in V^2$ положим $\tilde{r}(p) \in \mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор M^2, $\tau(p), n_0(p)$ – определяются для M^2 как в §2.3 и $r^*(p)$ – радиус-вектор двойственной к V^2 поверхности $V^2_* \subset S^3$.

Теорема 2.4.30. *Пусть V^2 – минимальная поверхность, лежащая в открытой полусфере $S^3 \cap \{x_4 < 0\} \subset \mathbb{R}^4$ и ρ – квазигармоническая функция на V^2. Тогда*

$$M^3 = \left\{ x(p,t) = \begin{pmatrix} \tau \times n_0 \\ -\rho + (\tilde{r}, \tau, n_0) \end{pmatrix}(p) + tr^*(p) : p \in V^2, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

– минимальная параболическая поверхность нормаль которой вдоль слоя совпадает с радиус-вектором V^2 (где символ (x,y,z) обозначает смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Доказательство:пусть не меняя общности радиус-вектор V^2 имеет вид (2.4.40). Из ммы 2.4.25 следует, что:

$$r^*(u) = \frac{s^*(u)}{||s^*(u)||}$$

где

$$s^*(u) = \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 1 \\ -L(q) \end{pmatrix}$$

Действуя по аналогии с леммой 2.3.2 находим, что

$$R(u) = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ 0 \\ L(\rho) \end{pmatrix} = \tilde{R}(u) - \frac{\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2}{1 + q_1^2 + q_2^2} s(u)$$

где

$$\tilde{R}(u) = \begin{pmatrix} \tau \times n_0 \\ -\rho + (\tilde{r}, \tau, n_0) \end{pmatrix} \tag{2.4.45}$$

и следовательно радиус-вектор M^3 имеет вид 2.4.38 и теорема 2.4.30 следует из теоремы 2.4.29.

Единственным отличием (2.4.43) от аналогичного выражения в лемме 2.3.2

является последняя координата, и для полноты доказательства мы приводим соответствующие вычисления. А именно необходимо проверить, что

$$L(\rho) = -\rho + (\bar{r}, \tau, n_0) + \frac{\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2}{1 + q_1^2 + q_2^2} L(q) \tag{2.4.46}$$

Используя вычисления, проведенные в лемме 2.3.2 находим

$$(\bar{r}, \tau, n_0) = <\bar{r}, \tau \times n_0> =$$
$$= \frac{u_1[\rho_1 + q_2(\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1)] + u_2[\rho_2 - q_1(\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1)] + q[\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2]}{1 + q_1^2 + q_2^2}$$

подставляя это выражение в (2.4.46) и учитывая $L(q) = -q + u_1 q_1 + u_2 q_2$ находим, что правая часть (2.4.46) имет вид:

$$-\rho + \big(u_1\rho_1(1 + q_2^2) - u_1\rho_2 q_1 q_2 + u_2\rho_2(1 + q_1^2) - u_2\rho_1 q_1 q_2 + q(\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2) +$$
$$+ u_1\rho_1 q_1^2 + u_1\rho_2 q_1 q_2 + u_2\rho_2 q_2^2 + u_2\rho_1 q_1 q_2 - q(\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2)\big)(1 + q_1^2 + q_2^2)^{-1} =$$
$$= -\rho + u_1\rho_1 + u_2\rho_2 = L(\rho) \quad \blacksquare$$

Пример. Рассмотрим в качестве $V^2 \subset S^3$ тор Клифорда T^2. В этом случае легко находим

$$q(u_1, u_2) = u_1 u_2$$

и уравнение для ρ принимает вид

$$(1 + u_1^2)^2 \rho_{11} + (1 + u_2^2)^2 \rho_{22} \tag{2.4.47}$$

Полагая теперь например

$$\rho(u_1, u_2) = f(u_1) + g(u_2) \tag{2.4.48}$$

легко находим решение после подстановки в (2.4.47)

$$\rho(u_1, u_2) = u_1 \arctan u_1 - u_2 \arctan u_2 \tag{2.4.49}$$

В этом случае из 2.4.38 и 2.4.49 находим, что сечение M^3 гиперплоскостью $\{x_3 = 0\}$ является седловой поверхностью, определенной над кругом радиуса $1 + \pi/2$ по формулам

$$x_1 = +\arctan u_1 + \frac{u_1}{1 + u_1^2}$$
$$x_2 = -\arctan u_2 - \frac{u_2}{1 + u_2^2} \tag{2.4.50}$$
$$x_4 = \frac{u_1^2}{1 + u_1^2} - \frac{u_2^2}{1 + u_2^2}$$

Направляющими векторами прямолинейных образующих являются радиус-векторы двойственного T^2 тора Клиффорда T^2_*. Кроме того M^3 –регулярна, поскольку условия регулярности

$$\det(\rho_{ij} + tq_{ij}) = -\frac{1}{(1+u_1^2)^2(1+u_2^2)^2} - t^2 \neq 0$$

выполнены для любых u_1, u_2, t и следовательно M^3 диффеоморфно $D^2 \times \mathbb{R}^1$ и граница $\partial M^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$.
Этот пример может служить модельным примером для построения минимальных 1-параболических 3-мерных поверхностей в $\mathbb{R}^4$.

§2.5. Сильно параболические ассоциативные многообразия

Одним из классов калибрируемых подмногообразий Евклидова пространства является класс ассоциативных многообразий в $\mathbb{R}^7$ (см. [H-L1]). В этом параграфе используя результаты §2.4 мы опишем структуру сильно 1-параболических ассоциативных многообразий обобщающие результат [Ej] об ассоциативных конусах.

Пусть $\mathbb{R}^7 = Im\mathcal{O}$ – множество мнимых чисел Кэли, $\times$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^7$ индуцированное умножением в $\mathcal{O}$ (см. [Gr]) и $<,>$ – Евклидово скалярное произведение.

Определение 2.5.1. Три-форма $\varphi =< x, y \times z >\in \Lambda^3\mathbb{R}^7$ называется **ассоциативной формой**.

Определение 2.5.2. Трехмерная плоскость $\xi \in G^+(3, \mathbb{R}^7)$ называется ассоциативной если и только если она является мнимой частью кватернионной подалгебры, т.е. существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ в ξ такой, что $e_3 = e_1 \times e_2$.
Будем обозначать множество ассоциативных плоскостей через Ass.

Определение 2.5.3. Поверхность F^3 (возможно с особенностями) в $\mathbb{R}^7 = Im\mathcal{O}$ называется ассоциативной если в любой регулярной точке $x \in F^3$ $T_xF^3 \in Ass$.

Предложение 2.5.4 [H-L1].
(i) комасса ассоциативной формы $||\varphi||^* = 1$
(ii) грань ассоциативной формы $G(\varphi) = Ass$

Из предложения 2.5.4 и Основной теоремы теории форм калибровки следует, что ассоциативные поверхности являются глобально-минимальными в классе вариаций с компактным носителем. В частности такие поверхности локально минимальны.

Рассмотрим единичную сферу $S^6 \in ImO$. На S^6 естественным образом вводится почти комплексная структура, порожденная векторным произведением $\times$. А именно, пусть $x \in S^6$, тогда $J_x : T_xS^6 \to T_xS^6$ имеет вид :

$$J_x y = x \times y \tag{2.5.1}$$

Замечание : относительно данной структуры S^6 является близко-Кэлеровым, т.е. $(\overline{\nabla}_X J)X = 0$ для любого X (см. [Gr]).

Определение 2.5.5. Поверхность $V^2 \in S^6$ называется **комплексной** если для любого $x \in V^2$ кастельная плоскость T_xV^2 инвариантна относительно почти-комплексной структуры J, определяемой посредством (2.5.1).

Из [Gr] следует, что всякая комплексная поверхность V^2 в (S^6, J) локально минимальна, а в работах [Bry1,Bry3],[Ej],[Sek] построено множество примеров таких поверхностей.

Рассмотрим вопрос о том, какие сильно 1-параболические трехмерные подмногообразия R^7 являются ассоциативными. В силу замечания сделанного после предложения 2.5.4 необходимым условием является минимальность и следовательно применимы результаты §2.4 о строении минимальных сильно 1-параболических поверхностей в Евклидовом пространстве, в частности корректно определена скручивающая функция (см. Определение 2.4.4). Напомним, что "Гаусс"-образом сильно 1-параболической поверхности $F^l \subset \mathbb{R}^n$ называется поверхность $V^{l-1} = \Gamma(F^l) \subset S^{n-1}$, радиус-вектор которой является направляющим вектором прямолинейной образующей лежащей на F^l в силу 1-параболичности (см. Определение 2.4.2).

Теорема 2.5.6. *Пусть F^3 – сильно 1-параболическая поверхность в $\mathbb{R}^7 = ImO$ и "Гаусс"-образ $V^2 = \Gamma(F^3)$ – регулярен в S^6. Тогда F^3 ассоциативна, если и только если V^2 комплексна.*

Доказательство теоремы 2.5.1 : Поскольку касательное пространство к F^3 стационарно вдоль прямолинейных образующих, то для любого $p \in F^3$ мы имеем $T_pF^3 = T_{\Gamma(p)}CV^2$, где CV^2 – конус над $V^2 \subset S^6$ в $\mathbb{R}^7$. Если теперь предположить, что V^2 – комплексна, то $T_xCV^2 = span\{x, y, x \times y\}$ и следовательно $T_xCV^2 \in Ass$. Из теоремы 2.4.18 следует, что на каждой прямолинейной образующей F^3 существует не более одной особой точки и следовательно для почти всех $p \in F^3$ $T_pF^3 \in Ass$ и следовательно F^3 ассоциативна. В силу обратимости всех переходов из ассоциативности F^3 следует комплексность V^2. ■

Применяя теоремы 2.4.10, 2.4.18 получаем следующую теорему :

Теорема 2.5.7. *Пусть*

(a)V^2 *– погруженная комплексная поверхность в (S^6, J)*

(b) λ *– функция на V^2 удовлетворяющая уравнению*

$$\Delta\lambda + 2\lambda = 0 \tag{2.5.2}$$

где Δ –*Лапласиан на* V^2.

Тогда

(1) *с точностью до параллельного переноса в* $\mathbb{R}^7$ *существует единственная ассоциативная сильно 1-параболическая поверхность* $F^3(V^2,\lambda)$ *такая, что* $V^2 = \Gamma(F^3)$ *и* λ – *скручивающая функция для* F^3.

(2) *если* $\lambda(Q) \neq 0$ *для любого* $Q \subset V^2$, *то* $F^3(V^2,\lambda)$ – *регулярная погруженная поверхность с полными слоями.*

(3) $\lambda = 0 \quad \leftrightarrow \quad F^3 = CV^2$ –*ассоциативный конус.*

(4) *радиус-вектор* F^3 *имеет вид :*

$$\{r(Q,t) = \xi(Q) + tn(Q) | Q \in V^2, t \in \mathbb{R}\} \tag{2.5.3}$$

здесь $n(Q)$ – *радиус-вектор* V^2, $\xi(Q)$ – *(многозначная) вектор-функция на* V^2 *со значениями в* $\mathbb{R}^7$ *частные производные которой в любой изотермической системе координат на* V^2 *имеют вид :*

$$\begin{aligned} \xi_1 &= +\lambda n_2 - \lambda_2 n \\ \xi_2 &= -\lambda n_1 + \lambda_1 n \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Более того данная конструкция обратима, т.е. для любой ассоциативной сильно 1-параболической поверхности F^3 *в* $\mathbb{R}^7$ *ее "Гаусс"-образ и скручивающая функция удовлетворяют условиям (a),(b) соответственно.*

§2.6. Плюригармонические погружения почти-эрмитовых многообразий в Евклидово пространство

В работе [DG2] было доказано, что минимальное изометрическое погружение Кэлерова многообразия M^{2n} в Евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ обладает следующим свойством :

$$B(X,JY) = B(JX,Y) \quad \forall\, X,Y \in TM \tag{2.6.1}$$

где $B(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$ – вторая фундаментальная форма погружения M^n в $\mathbb{R}^N$ и $J : TM^{2n} \to TM^{2n}$ – комплексная структура на M^{2n}. В этом параграфе мы доказываем, что этот результат может быть обобщен на случай произвольного почти-эрмитова многообразия.

Пусть (M^{2n},J,g) – почти-эрмитово многообразие, где g – метрика, J – почти комплексная структура (т.е. $J^2 = -\mathrm{Id}$) и $g(JX,JY) = g(X,Y)$. Обозначим через R тензор кривизны M^n в метрике g. Определим также секционную и бисекционную голоморфную кривизны M^{2n} по формулам

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= g(R_{XY}Y,X) \\ \widetilde{K}(X,Y) &= g(R_{X\,JX}JY,Y) \end{aligned}$$

Из первого тождества Бианки для R получаем :

$$\widetilde{K}(X,Y) = g(R_{XY}JY, JX) - g(R_{XJY}Y, JX) \tag{2.6.2}$$

Легко видеть, что в случае, когда M^{2n} – Калерово (т.е. $\overline{\nabla}_X J = 0$)

$$R_{XY}JZ = JR_{XY}Z$$

и из (2.6.2) следует :

$$\widetilde{K}(X,Y) = K(X,Y) + K(X,JY) = K(JX,Y) - K(JX,JY) \tag{2.6.3}$$

Определение 2.6.1. Изометрическое погружение почти комплексного многообразия M^{2n} в Риманово многообразие называется *плюригармоническим (pluri- harmonic)* или *круговым (circular)* если вторая фундаментальная форма погружения удовлетворяет уравнению (2.6.1).

Замечание : всякое круговое погружение минимально, так как средняя кривизна H погружения равна

$$H = \sum_{i=1,n} (B(e_i, e_i) + B(Je_i, Je_i)) = 0$$

поскольку в силу (2.6.1) $B(Je, Je) = B(e, J^2e) = -B(e, e)$.

Более того, всякое круговое погружение просто, поскольку условие (2.6.1) можно переписать в эквивалентной форме

$$A^\nu J = -JA^\nu \quad \forall\, \nu \in T^\perp M^{2n} \tag{2.6.1'}$$

и следовательно если e – собственный вектор A^ν с собственным значением λ, то Je – собственный вектор A^ν с собственным значением $-\lambda$.

Имеет место следующий результат

Теорема 2.6.2. *Пусть $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^N$ – изометрическое круговое погружение почти-эрмитова многообразия в Евклидово пространство. Тогда*

$$\widetilde{K}(X,Y) = \frac{1}{2}(K(X,Y) + K(X,JY) + (K(JX,Y) + K(JX,JY)) \tag{2.6.4}$$

Обратно пусть кривизна M^{2n} удовлетворяет условию (2.6.4), тогда всякое минимальное изометрическое погружение M^{2n} в Евклидово пространство круговое.

Следствие 2.6.3. Если кривизна почти-эрмитова многообразия M^{2n} не удовлетворяет условию (2.6.4), то M^{2n} не допускает круговых изометрических погружений в Евклидово пространство.

Доказательство теоремы : определим на M^{2n} следующий тензор :

$$T_{XY}Z = R_{XY}Z - R_{JX,JY}Z + R_{XJY}JZ + R_{JXY}JZ \tag{2.6.5}$$

Лемма 2.6.4. *Условие (2.6.4) эквивалентно следующим соотношениям :*

$$g(T_{XY}Y, X) = g(T_{XY}JY, JX) \tag{2.6.6}$$

Доказательство леммы 2.6.4 : Прямая подстановка показывает, что (2.6.6) переписывается в виде :

$$K(X,Y) - K(X,JY) + K(JX,Y) + K(JX,JY) = \\ = 2g(R_{XY}JY, JX) - 2g(R_{XJY}Y, JX)$$

что в силу (2.6.2) эквивалентно (2.6.4) ■

Следствие 2.6.5. Пусть M^{2n} удовлетворяет одному из условий

(1) $T_{XY}JZ = JT_{XY}Z$

(2) $R_{XY}JZ = JR_{XY}Z$

Тогда всякое минимальное погружение M^{2n} в Евклидово пространство круговое.

Следствие 2.6.6 [DG2]. Пусть M^{2n} – Кэлерово, тогда всякое минимальное погружение M^{2n} в Евклидово пространство круговое.

Лемма 2.6.7. Пусть $f : (M^{2n}, g) \to (\mathbb{R}^N, <,>)$ – изометрическое погружение, тогда

$$g(T_{XY}Y, X) - g(T_{XY}JY, JX) \\ = < B(X,X) + B(JX,JX), B(Y,Y) - B(JY,JY) > - \\ - \|B(X,Y) + B(JX,JY)\|^2 - \|B(X,JY) + B(JX,Y)\|^2$$

Доказательство леммы 2.6.7 : прямая подстановка (2.6.5) с использованием уравнения Гаусса :

$$g(R_{XY}Z, W) = < B(X,W), B(Y,Z) > - < B(X,Z), B(Y,W) > \quad ■$$

Если теперь f – круговое, то из лемм 2.6.4 , 2.6.7 следует выполнение условия (2.6.4) и первая часть теоремы доказана.

Обратно, пусть выполнено условие (2.6.4) и f минимальное погружение. Пусть $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ – ортонормированный базис в T_xM^{2n}. Подставляя e_i вместо X в лемме 2.6.7 и суммируя по i получаем :

$$0 = < \sum_{i=1,n} (B(e_i, e_i) + B(Je_i, Je_i)), B(Y,Y) + B(JY,JY) >= \\ = \sum_{i=1,n} (\|B(e_i, Y) + B(Je_i, JY)\|^2 + \|B(e_i, JY) - B(Je_i, Y)\|^2)$$

откуда $B(e_i, JY) = B(Je_i, Y)$ для любого i и следовательно f – круговое погружение.■

Пример 2.6.8. Пусть M^{2n} – сильно 2(n-1)-параболическая поверхность в $\mathbb{R}^N$. Тогда $T_xM^{2n} = \Delta_x \oplus \Delta_x^\perp$, где Δ_x – ноль распределение, $J_{|\Delta_x^\perp}$ – поворот на угол $\pi/2$, $J_{|\Delta_x}$ – произвольная комплексная структура в $\Delta_x = R^{2n-2}$ непрерывно зависящая от x. В силу вида второй фундаментальной формы

$$A^\nu = \begin{pmatrix} a & b & | & & & \\ b & c & | & & & \\ - & - & & - & - & - \\ & & | & 0 & & \\ & & | & & \dots & \\ & & | & & & 0 \end{pmatrix}$$

M^{2n} – круговая поверхность если и только если M^{2n} минимальна. В качестве конкретного примера можно рассмотреть (2n-2)-параболические минимальные гиперповерхности $M^{2n}(V^2, \lambda)$ Дачзера-Громолла или поверхности M^4 вида $F^3(V^2,\lambda)\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{N+1}$, где $F^3(V^2,\lambda)$ – минимальная сильно 1-параболическая поверхность в $\mathbb{R}^N$ определяемые при помощи минимальной поверхности V^2 в единичной сфере и функции λ на V^2, удовлетворяющей уравнению $\Delta\lambda+2\lambda = 0$, где Δ – метрический лапласиан на V^2 (см. §2.4).

§2.7. Конус над $S^n \times S^n$ в Евклидовом пространтсве

В этом параграфе мы покажем, что конус в R^{2n+2} над $S^n \times S^n \subset S^{2n+1}$ единственная гиповерхность (с точностью до движения) имеющая в каждой регулярной точке набор главных кривизн вида :

$$\{\lambda, ..., \lambda, 0, -\lambda, ..., -\lambda\} \qquad (\alpha)$$

Используя результат Дачзера-Громолла (см. [DG1]) мы доказываем следующую теорему жесткости о строении одного класса простых гиперповерхностей:

Теорема 2.7.1.
Пусть $M^{2n+1} \subset R^{2n+2}$ – гиперповерхность множество главных кривизн которой в каждой регулярной точке имеет вид (α).
Тогда $M^{2n+1} = C(S^n \times S^n)$ – конус над $S^n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset S^{2n+1}(1)$.
Замечание : если обозначить через A вторую фундаментальную форму M^{2n+1} относительно единичной нормали, то в каждой регулярной точке $x \in M^{2n+1}$ имеется разложение $T_xM = \Delta_+^n + \Delta_-^n + \Delta_0$, где $A_{|\Delta_+} = \lambda Id$, $A_{|\Delta_-} = -\lambda Id$ и $A_{|\Delta_0} = 0$. Очевидно такая гиперповерхность проста (см. Определение 2.2.2).

Разобьем доказательство теоремы 2.7.1 на этапы, каждый из которых интересен сам по себе.
1) нам потребуется следующий результат Дачзера-Громолла о Гауссовой параметризации произвольной k параболической гиперповерхности в Евклидовом

пространстве. А именно, пусть $M^n \subset R^{n+1}$ – гиперповерхность, имеющая в каждой регулярной точке k нулей среди главных кривизн, и рассмотрим Гаусcово отображение $G : M^n \to S^n, x \to \nu(x)$. Тогда в силу k-параболичности $G(M^n) = V^{n-k} \subset S^n$. Если мы обозначим ноль-распределение через Δ и его ортогональное дополнение через $\Delta^\perp$, то получим :

$$\Delta^\perp = T_{\nu(x)}V^{n-k} \qquad \Delta = N_{\nu(x)}V^{n-k}$$

Теорема 2.7.2 [DG1].
Пусть M^n – k-параболическая гиперповерхность в R^{n+1} и $V^{n-k} \subset S^n$ – Гаусс-образ M^n.
Тогда существует функция γ на V^{n-k} такая, что радиус-вектор M^n имеет вид :

$$R(P,t) = R(P,t_1,...,t_k) = \gamma(P)\nu(P) + \nabla\gamma(P) + \sum_{s=1}^{k} t_s n_s(P) \qquad (2.7.1)$$

где $\{n_s(P)\}_1^k$ – произвольный базис в нормальном пространстве $N_P V^{n-k}$ и $\nabla\gamma(P)$ – градиент γ в точке P (который касается V^{n-k}), рассматриваемый как вектор в R^{n+1}.
Кроме того $\nu(P)$ – единичная нормаль к M^n в любой точке вида $R(P,t)$ и ограничение второй фундаментальной формы A^ν на $\Delta^\perp$ в точке $R(P,t)$ есть :

$$A^\nu|_{\Delta^\perp} = (\gamma E + Hess\gamma + \bar{A}^n)^{-1} \qquad (2.7.2)$$

где $\bar{A}^n = \sum_s t_s \bar{A}^s$ – вторая фундаментальная форма V^{n-k} по направлению нормали $n = \sum_s t_s n_s$.
2)

Предложение 2.7.3.
Пусть M^{2n+1} удовлетворяет условиям Теоремы 2.7.1, тогда Гаусс-образ V^{2n} M^{2n+1} – стандартное прямое произведение $S^n \times S^n \subset S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \oplus \mathbb{R}^{n+1}$.
Чтобы доказать предложение 2.7.3 необходим следующий результат :

Лемма 2.7.4.
Пусть F^{2n} – лежащая в $M^{2n+1}(c)$ (пространстве постоянной секционной кривизны c) минимальная гиперповерхность имеющая в точности две главных кривизны одинаковой кратности.
Тогда $c \geq 0$ и F^{2n} (по крайней мере локально) являеися прямым произведением сфер одинакового радиуса.
Доказательство Леммы 2.7.4 :

Пусть ν обозначает единичную нормаль к F^{2n} в $M^{2n+1}(c)$ и $T_P F^{2n} = \Delta_+^n \oplus \Delta_-^n$, где $A^\nu|_{\Delta_+} = \lambda\ Id$, $A^\nu|_{\Delta_-} = -\lambda\ Id$. Докажем, что Δ_+ и Δ_- – интегрируемые распределения и λ =const вдоль соответствующих интегральных подмногообразий.

Выберем ортонормированный базис $\{e_i^+\}$ (соотв. $\{e_i^-\}$) в Δ_+ (соотв. Δ_-). Из уравнений Кодацци получаем непосредственно :

$$(\nabla_{e_i^+} A)e_j^+ = (\nabla_{e_j^+} A)e_i^+$$

что эквивалентно :

$$e_i^+(\lambda)e_j^+ - e_j^+(\lambda)e_i^+ = (A - \lambda\, Id)([e_i^+, e_j^+])$$

и следовательно $[e_i^+, e_j^+] \in \Delta_+ \ \forall i, j$ и $e_i^+(\lambda) = 0 \ \forall i$. Аналогично $[e_i^-, e_j^-] \in \Delta_-$, $e_i^-(\lambda) = 0$.

Кроме того :

$$(\nabla_{e_i^+} A)e_j^- = (\nabla_{e_j^-} A)e_i^+$$

что эквивалентно :

$$-2\lambda(\nabla_{e_i^+} e_j^-)^+ = 2\lambda(\nabla_{e_j^-} e_i^+)^-$$

и так как $\lambda \neq 0$ получаем :

$$\nabla_{e^+} e^- \in \Delta^-, \nabla_{e^-} e^+ \in \Delta^+ \qquad \forall e^+ \in \Delta^+, e^- \in \Delta^-$$

и следовательно $\nabla_e e^+ \in \Delta^+, \nabla_e e^- \in \Delta^-$, т.е. Δ^+, Δ^- параллельны в связности на F^{2n} и $F^{2n} = M^+ \times M^-$, в частности $< R_{e^+ e^-} e^-, e^+ >= 0$ для любых единичных $e^+ \in \Delta^+, e^- \in \Delta^-$. Теперь из уравнения Гаусса получаем

$$< \bar{R}_{e^+ e^-} e^-, e^+ >=< A(e^+), e^- >< A(e^-), e^+ > - < A(e^+), e^+ >< A(e^-), e^- >$$

что эквивалентно

$$c = \lambda^2 \geq 0$$

Таким образом $M^{2n+1}(c) = S^{2n+1}(c)$ и мы можем считать $c = 1$.

Найдем первое нормальное пространство к M^+ в $S^{2n+1}(1)$. Мы имеем : $A^\nu = \lambda\, Id$, $< A^{e^-}(e_i^+), e^+ >=< \nabla_{e_i^+} e^-, e^+ >= 0$ и следовательно $A^{e^-} = 0$ для любого $e^- \in \Delta^-$. Таким образом, первое нормальное пространство $N^1(M^+)$ одномерно и равно $< \nu >$. Более того $< D^\perp_{e^+} \nu, e^- >=< \overline{\nabla}_{e^+} \nu, e^- >=< e^+, e^- >= 0$ и используя результаты Эрбахера (см. [Erb]) немедленно получаем, что M^+ имеет существенную коразмерность 1 в S^{2n+1} и значит существует вполне геодезическая $S^{n+1} \subset S^{2n+1}$, содержащая M^+. Лемма 2.7.4 легко следует сейчас из следующей леммы :

Лемма 2.7.5. Пусть $M^n \subset S^{n+1}(1)$ - гиперповерхность, имеющая единичную вторую фундаментальную форму ($A^\nu = Id$,где ν единичная нормаль). Тогда $M^n = S^n(\frac{1}{\sqrt{2}})$, имеющая с точностью до движения S^{n+1} радиус-вектор :

$$R(u) = \begin{pmatrix} r(u) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad |r(u)| = 1/\sqrt{2}$$

Доказательство Леммы 2.7.5 :

Пусть M^+ имеет радиус-вектор $R(u_1, ..., u_n)$ в R^{n+2} и единичную нормаль $\nu(u_1, ..., u_n)$ ($\nu \perp R$). Из условий леммы, используя уравнения Вейнгартена, получаем :

$$\frac{\partial \nu}{\partial u_i} = \frac{\partial R}{\partial u_i} \qquad \forall i \qquad \text{и следовательно} \quad \nu(u) = R(u) + C$$

Заметим, что $< R, C > = < R, \nu - R > = -1$.
Введем в R^{n+2} Евклидовы координаты $(x_1, ..., x_n, y)$ так, что

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow y(u) = d = const \quad \text{и} \quad R(u) = \begin{pmatrix} r(u) \\ d \end{pmatrix}$$

Теперь $1 = |\nu|^2 = |R|^2 + 2 < R, C > + c^2 = 1 - 2 + c^2$ и следовательно $c = \sqrt{2}, d = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $M^+ = S^n(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ■

Лемма 2.7.6. Пусть $M^{2n+1} \subset R^{2n+2}$ удовлетворяет условиям Теоремы 2.7.1.
Тогда $V^{2n} = G(M^{2n+1})$ удовлетворяет условиям Леммы 2.7.4.
Доказательство Леммы 2.7.6 : в силу теоремы 2.7.2 матрица $A(s) = (\gamma\ Id + Hess\gamma + s\tilde{A}^n)$ для произвольного s из некоторого открытого интервала (s^-, s^+) имеет следующее множество собственных значений :

$$\{\underbrace{\mu(s), ..., \mu(s)}_{ntimes}, \underbrace{-\mu(s), ..., -\mu(s)}_{ntimes}\}$$

Используя теперь характеристический полином $A(s)$ находим, что $\tilde{A}^n$ (которая является второй фундаментальной формой V^{2n} в S^{2n+1} в направлении единичной нормали n) также имеет множество собственных значенийalso вида

$$\{\mu, ..., \mu, -\mu, ..., -\mu\} \quad ■$$

. Предложение 2.7.3 следует теперь из Лемм 2.7.4, 2.7.6.

3) Рассмотрим Евклидово пространство R^{2n}.

Определение 2.7.7. Линейный оператор $A : R^{2n} \to R^{2n}$ called *допустимым* если существует разложение $R^{2n} = \Delta^n_+ \oplus \Delta^n_-$ такое, что

$$\begin{aligned} A|_{\Delta_+} &= \lambda Id \\ A|_{\Delta_-} &= -\lambda Id \end{aligned}$$

Рассмотрим 2 n-мерных неориентируемых подпространства Δ, Δ' в R^{2n} и определим (см. [Mrg1]) характеристические углы $0 \le \Theta_1 \le \ldots \le \Theta_n < \frac{\pi}{2}$ следующим образом.
Пусть

$$\Theta_1 = \min_{X \in \Delta, X' \in \Delta'} \angle XX' \qquad \text{где} \quad 0 \le \angle XX' \le \frac{\pi}{2}$$

Пусть $\Theta_1 = \angle e_1 e_1'$ ($|e_1| = |e_1'| = 1$). Тогда

$$\Theta_2 = \min_{X \in \Delta, X' \in \Delta'} \{\angle XX' | X \perp e_1, X' \perp e_1'\}$$

и так далее.

Лемма 2.7.8[Mrg1].

$$< e_i, e_j' >= \cos \Theta_i \delta_{ij}$$

Пусть $\Delta_- := \Delta_+^+, \Delta' = \Delta_+^{+'}$ и положим $e_i^+ = e_i, e_i^{+'} = e_i', e_i^- = \frac{1}{\sin \Theta_i} e_i' - \cot \Theta_i e_i$ if $\Theta_i \neq 0$ и если $\Theta_i = 0$ $i \le p$. Будем называть такие базисы характеристическими для Δ, Δ'. Тогда $e_i^- = f_i$, где $\{f_1, \ldots, f_p\}$ произвольный ортонормированный базис в $(\Delta + \Delta')^\perp$. Кроме того, положим $e_i^{-'} = -\sin \Theta_i e_i^+ + \cos \Theta_i e_i^-$

Лемма 2.7.9. Пусть A, A' – два допустимых оператора в R^{2n}.
Тогда произвольная линейная комбинация A, A' допустимый оператор, если и только если все характеристические углы равны ($\Theta_1 = \ldots = \Theta_n$).
Доказательство Леммы 2.7.9 : Пусть $A|_{\Delta_\pm} = \pm Id$, $A'|\Delta'_\pm = \pm Id$. Выберем характеристические базисы для $\Delta^+, \Delta^{+'}$. Тогда :

$$\begin{aligned} e_i^{+'} &= \cos \Theta_i e_i^+ + \sin \Theta_i e_i^- & \qquad e_i^+ &= \cos \Theta_i e_i^{+'} - \sin \Theta_i e_i^{-'} \\ e_i^{-'} &= -\sin \Theta_i e_i^+ + \cos \Theta_i e_i^- & \qquad e_i^- &= \sin \Theta_i e_i^{+'} + \cos \Theta_i e_i^{-'} \end{aligned}$$

Найдем матрицу оператора $\lambda A + \mu A'$ в (ортонормированном) базисе $\{e_i^+, e_i^-\}$.
Мы имеем :

$$\begin{aligned} A'(e_i^+) &= A'(\cos \Theta_i e_i^{+'} - \sin \Theta_i e_i^{-'}) = \cos \Theta_i e_i^{+'} + \sin \Theta_i e_i^{-'} \\ &= \cos \Theta_i (\cos \Theta_i e_i^+ + \sin \Theta_i e_i^-) + \sin \Theta_i (-\sin \Theta_i e_i^+ + \cos \Theta_i e_i^-) \\ &= \cos 2\Theta_i e_i^+ + \sin 2\Theta_i e_i^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(e_i^-) &= A'(\sin \Theta_i e_i^{+'} + \cos \Theta_i e_i^{-'}) = \sin \Theta_i e_i^{+'} - \cos \Theta_i e_i^{-'} \\ &= \sin \Theta_i (\cos \Theta_i e_i^+ + \sin \Theta_i e_i^-) - \cos \Theta_i (-\sin \Theta_i e_i^+ + \cos \Theta_i e_i^-) \\ &= \sin 2\Theta_i e_i^+ - \cos 2\Theta_i e_i^- \end{aligned}$$

Следовательно матрица $\lambda A + \mu A'$ в базисе $\{e_1^+, e_1^-, \dots, e_n^+, e_n^-\}$ имеет вид :

$$\begin{pmatrix} \lambda+\mu\cos 2\Theta_1 & \mu\sin 2\Theta_1 & & & \\ \mu\sin 2\Theta_1 & -\lambda-\mu\cos 2\Theta_1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda+\mu\cos 2\Theta_n & \mu\sin 2\Theta_n \\ & 0 & & \mu\sin 2\Theta_n & -\lambda-\mu\cos 2\Theta_n \end{pmatrix}$$

Следовательно множество собственных значений $\lambda A + \mu A'$ имеет вид :

$$\{\lambda_1, -\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_n\}$$

, где

$$\lambda_i^2 = -\det\begin{pmatrix} \lambda+\mu\cos\Theta_i & \mu\sin\Theta_i \\ \mu\sin\Theta_i & -\lambda-\mu\cos\Theta_i \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda\mu\cos 2\Theta_i + \mu^2$$

Следовательно $\lambda A + \mu A'$ – допустима, если и только если $\Theta_1 = \ldots = \Theta_n = \Theta$. ■

Следствие 2.7.10. Пусть A, A' – линейные операторы с допустимой линейной комбинацией и $\{f_i^+, f_i^-\}$ произвольный базис, адаптированный к разложению $\Delta^+ + \Delta^-$. Тогда матрица A' в таком базисе имеет вид :

$$\begin{pmatrix} \mu\cos 2\Theta Id & \mu\sin 2\Theta BC^{-1} \\ \mu\sin 2\Theta CB^{-1} & -\mu\cos 2\Theta Id \end{pmatrix} \qquad \text{где} \quad \begin{matrix} f_i^+ = B(e_i^+) \\ f_i^- = C(e_i^-) \end{matrix}$$

Доказательство Следствия 2.7.10 : В базисе $\{e_i^+, e_i^-\}$ оператор A' имеет вид :

$$\begin{pmatrix} \mu\cos 2\Theta Id & \mu\sin 2\Theta Id \\ \mu\sin 2\Theta Id & -\mu\cos 2\Theta Id \end{pmatrix}$$

Следовательно в базисе $\{f_i^-, f_i^-\}$ он имеет вид :

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu\cos 2\Theta Id & \mu\sin 2\Theta Id \\ \mu\sin 2\Theta Id & \mu\cos 2\Theta Id \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\cos 2\Theta Id & \mu\sin 2\Theta BC^{-1} \\ \mu\sin 2\Theta CB^{-1} & -\mu\cos 2\Theta Id \end{pmatrix} \qquad ■$$

4)

Рассмотрим Гауссову параметризацию гиперповерхности M^{2n+1}, удовлетворяющей условиям Теоремы 2.7.1 и рассмотрим $\Delta_0^\perp = T_u S^n \oplus T_v S^n$ как R^{2n}, где $V^{2n} = (r(u), r(v))$ ($|r(u)| = |r(v)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$), $n(u,v) = (r(u), -r(v))$, $u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n)$ – локальные координаты на соответствующей S^n.

В силу теоремы 2.7.2 мы получим, что матрицы $A^n = \begin{pmatrix} E^n & 0 \\ 0 & -E^n \end{pmatrix}$ и $\gamma Id + Hess\gamma$ имеют допустимую линейную комбинацию и можно воспользоваться Леммой 2.7.9.

Лемма 2.7.11. Характеристический угол Θ для линейных операторов $\gamma Id+$ $Hess\gamma$ и $\begin{pmatrix} E^n & 0 \\ 0 & -E^n \end{pmatrix}$ равен нулю.

Доказательство Леммы 2.7.11 : Пусть

$$G(u) = (g_{ij}(u)) \qquad \text{где} \quad g_{ij}(u) = < r_{u_i}, r_{u_j} >$$
$$\tilde{G}(v) = (g_{ij}(v)) \qquad \text{где} \quad g_{ij}(v) = < r_{v_i}, r_{v_j} >$$

Тогда

$$Hess\gamma = \begin{pmatrix} G^{-1}(u) & 0 \\ 0 & \tilde{G}^{-1}(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{u_iu_j} + \Gamma^k_{ij}(u)\gamma_{u_k} & \gamma_{u_iv_j} \\ \gamma_{u_jv_i} & \gamma_{v_iv_j} + \tilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma_{v_k} \end{pmatrix} \qquad (2.7.3)$$

Введем какие нибудь ортонормированные базисы $\{e_i(u)\}$ в $T_{r(u)}S^n$ и $\{e_i(v)\}$ в $T_{r(v)}S^n$. Тогда для любых (u,v) существует характеристический базис $e_i^+(u,v)$ $= C(u,v)e_i(u)$, $e_i^-(u,v) = D(u,v)e_i(v)$, где $C(u,v), D(u,v) \in SO(n)$. Кроме того, положим $r_{u_i}(u) = A(u)e_i(u)$, $r_{v_i}(v) = \tilde{A}(v)e_i(v)$. Применяя Следствие 2.7.10 к $R^{2n} = \Delta_0^{\perp}$ и базису $r_{u_i} = A(u)C^T(u,v)e_i^+(u,v)$, $r_{v_i} = \tilde{A}(v)D^T(u,v)e_i^-(u,v)$ получаем :

$$\gamma Id + Hess\gamma =$$
$$= \begin{pmatrix} \mu\cos 2\Theta E^n & \mu \sin 2\Theta A(u)C^T(u,v)D(u,v)\tilde{A}^{-1}(v) \\ \mu \sin 2\Theta\tilde{A}(v)D^T(u,v)C(u,v)A^{-1}(u) & -\mu\cos 2\Theta E^n \end{pmatrix}$$

или, используя (2.7.3) :

$$\begin{pmatrix} \gamma g_{ij}(u) + \gamma_{u_iu_j}(u) - \Gamma^k_{ij}(u)\gamma_{u_k} & \gamma_{u_iv_j} \\ \gamma_{u_jv_i} & \gamma\tilde{g}_{ij}(v) + \gamma_{v_iv_j} - \tilde{\Gamma}^k_{ij}(v)\gamma_{v_k} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mu\cos 2\Theta G(u) & \mu\sin 2\Theta G(u)A(u)C^TD\tilde{A}^{-1}(v) \\ \mu\sin 2\Theta\tilde{G}(v)\tilde{A}(v)D^TCA^{-1}(u) & -\mu\cos 2\Theta\tilde{G}(v) \end{pmatrix} \qquad (2.7.4)$$

Следовательно, если $\Theta \neq 0$, то

$$G(u)A(u)C^TD\tilde{A}^{-1}(v) = [\tilde{G}(v)\tilde{A}(v)D^TCA{-}1(u)]^T = A^T(u)^{-1}C^TD\tilde{A}^T(v)\tilde{G}(v)$$

что эквивалентно

$$A^TGA(u)C^TD(u,v) = C^TD(u,v)\tilde{A}^T\tilde{G}\tilde{A}(v)$$

Следовательно множества собственных значений $A^TGA(u)$ и $\tilde{A}^T\tilde{G}\tilde{A}(v)$ совпадают и не зависят от (u,v). Здесь и далее мы предполагаем, что в выбраной системе координат $A(0) = \tilde{A}(0) = E$ и $\Gamma^k_{ij}(0) = \tilde{\Gamma}^k_{ij}(0) = 0$. Следовательно $A^TGA(u) = \tilde{A}^T\tilde{G}\tilde{A}(v) = E$. Заметим, что $G(u) = AA^T(u)$ и полагая $B(u) = A^TA(u)$ мы получаем $B = B^T$, $B^2 = E$ и следовательно $B(u)$ – симметрическая ортогогальная матрица и все собственные значения $B(u)$ – равны ± 1. Теперь в силу $B(0) = E$ легко получается, что $B(u) = E$ и следовательно $G(u) = E$. Но метрика на сфере не-Евклидова и мы получаем противоречие с $\Theta \neq 0$. ■

Следствие 2.7.12. Пусть $M^{2n+1} \subset R^{2n+2}$ – гиперповерхность, удовлетворяющая условиям Теоремы 2.7.1 и $(V^{2n} = S^n \times S^n, \gamma(u,v))$ – ее Гауссова параметризация

Тогда

$$\gamma(u,v) = \gamma(u) + \tilde{\gamma}(v)$$

Доказательство Следствия 2.7.12 : из $\Theta = 0$ мы немедленно получаем $\gamma_{u_i v_j} = 0$ ■

5)

Остаток доказательства Теоремы 2.7.1 содержится в следующей лемме :

Lemma 2.7.13. Пусть $M^{2n+1} \subset R^{2n+2}$ – гиперповерхность, удовлетворяющая условиям Теоремы 2.7.1 и $(V^{2n} = S^n \times S^n, \gamma(u,v))$ – ее Гауссова параметризация.

Тогда

$$\gamma(u,v) = 0$$

Доказательство Леммы 2.7.13 : из Следствия 2.7.12 вытекает, что $\gamma(u,v) = \gamma(u) + \tilde{\gamma}(v)$ и после подстановки в (2.7.4) мы получаем :

$$\begin{aligned}(\gamma(u) + \tilde{\gamma}(v))g_{ij}(u) + \gamma_{u_i u_j}(u) - \Gamma^k_{ij}\gamma_{u_k} &= \mu(u,v)g_{ij}(u)\\ (\gamma(u) + \tilde{\gamma}(v))\tilde{g}_{ij}(v) + \tilde{\gamma}_{v_i v_j}(v) - \tilde{\Gamma}^k_{ij}\gamma_{v_k} &= -\mu(u,v)\tilde{g}_{ij}(v)\end{aligned}$$

Откуда следует, что $\mu_{v_i} = \tilde{\gamma}_{v_i}$, $\mu_{u_i} = -\gamma_{u_i}$ и следовательно $\mu(u,v) = \tilde{\gamma}(v) - \gamma(u) + c$ и

$$\begin{aligned}\gamma_{u_i u_j} &= \Gamma^k_{ij}\gamma_{u_k} - (c - 2\gamma)g_{ij}\\ \tilde{\gamma}_{v_i v_j} &= \tilde{\Gamma}^k_{ij}\tilde{\gamma}_{v_k} + (-c - 2\tilde{\gamma})\tilde{g}_{ij}\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Напомним, что $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}(0) = 0$. Теперь условия согласования для (2.7.5) имеют вид :

$$R^k_{jsi}\gamma_{u_k} = (\Gamma^k_{ij,s} - \Gamma^k_{is,j})\gamma_{u_k} = 2\gamma_{u_s}\delta_{ij} - 2\gamma_{u_j}\delta_{is}$$

где $R^k_{jsi} = \delta_{ks}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{is}$ – тензор кривизны S^n в координатах (u).
Отсюда следует, что $\gamma_{u_j}(0) = 0$ для любого j в координатах (u) и следовательно в любых координатах. Таким образом $\gamma(u) = \gamma = const$. Если $\gamma \neq 0$, то $\gamma Id + Hess\gamma = \gamma Id$ – не является допустимым оператором. Следовательно $\gamma(u) \equiv 0$. Аналогично $\tilde{\gamma}(v) \equiv 0$ ■

§2.8. Максимальные параболические поверхности в пространстве Минковского

В данном параграфе мы дадим обобщение результатов §2.4 на случай сильно 1-параболических поверхностей в пространстве Минковского.

Рассмотрим пространство Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$ с псевдоевклидовым скалярным произведением

$$< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1} \tag{2.8.1}$$

и нормой $\| \|$, индуцированной данным скалярным произведением.

Определение 2.8.1.
Вектор $X \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ называется пространственно-подобным, если $\|X\|^2 > 0$ и времени-подобным если $\|X\|^2 < 0$.
Поверхность $M^k \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ называется пространственно-подобной, если касательное пространство в любой точке M^k состоит из пространственно-подобных векторов.
Замечание : гиперповерхность пространственно-подобна если и только если нормаль к ней времени-подобна.

Пусть $M^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ – пространственно-подобная непараметрическая гиперповерхность, т.е. M^n – график функции $x_{n+1} = F(x_1, \ldots, x_n)$, заданная над компактной областью $D \subset \mathbb{R}^n(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим функционал обьема :

$$V(M) = \int_D \sqrt{1 - \|\nabla F\|^2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \tag{2.8.2}$$

где $\|F\|^2 = \sum_{i=1,n} (\partial F / \partial x_i)^2$.
Замечание : условие того, что M^n – пространственно-подобна имеет вид :

$$1 - |\nabla F\|^2 \geq 0 \tag{2.8.3}$$

Экстремали этого функционала называются максимальными поверхностями и удовлетворяют уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\sum_{i=1,n} (1 - \|\nabla F\|^2 + F_{x_i}^2) F_{x_i x_i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} F_{x_i} F_{x_j} F_{x_i x_j} \tag{2.8.4}$$

Геометрически условие максимальности означает, что вектор средней кривизны M равен нулю.

Понятие параболичности полностью переносится из Евклидова пространства и в терминах потенциала F, гиперповерхность M^n – k-параболична, если и только если

$$rk(Hess F) = n - k \tag{2.8.5}$$

в частности при $n = 3$ (2.8.4) примет вид

$$\det(Hess F) = 0 \tag{2.8.6}$$

Пусть
$$S^n_\pm = \{X \in \mathbb{R}^n_1 : ||X||^2 = \pm 1\}$$

Пусть $n = 3$ и $M^3 \subset \mathbb{R}^4_1$. В силу замечания к определению 2.8.1 Гаусс-образ $V^2 = G(M^3)$ лежит в S^3_- (заметим, что метрика на S^3_- риманова). Проводя как и в Евклидовом случае частичное преобразование Лежандра находим, что радиус-вектор M^3 имеет вид (2.4.38), радиус V^2 имеет вид

$$r(u_1, u_2) = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.8.7)$$

где $\alpha = \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2 - q^2}$ и из условий (2.8.4), (2.8.6) теперь вытекает, что имеет место аналог Теоремы 2.4.29.

Теорема 2.8.2. *Пусть $M^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ – 1-параболическая пространственно-подобная гиперповерхность заданная посредством (2.4.38).*
Тогда M^3 максимальна, если и только если Гауссов образ $V^2 \subset S^3_-$ минимален и функция $\lambda = \rho/\alpha$ удовлетворяет уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$, где Δ – лапласиан на V^2 в метрике индуцированной из S^3_-.

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме полностью аналогичной предложению 2.4.24 :

Лемма 2.8.3. *M^3 – максимальна если и только если функции ρ и q удовлетворяют системе уравнений в частных производных (см. аналог – систему 2.4.39):*

$$\begin{array}{l} (1 + q_2^2 + \alpha_2^2)q_{11} - 2(q_1q_2 + \alpha_1\alpha_2)q_{12} + (1 + q_1^2 + \alpha_1^2)q_{22} = 0 \\ (1 + q_2^2 + \alpha_2^2)\rho_{11} - 2(q_1q_2 + \alpha_1\alpha_2)\rho_{12} + (1 + q_1^2 + \alpha_1^2)\rho_{22} = 0 \end{array} \qquad (2.8.8)$$

где $\alpha = \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2 - q(u_1, u_2)^2}$.
Доказательство леммы 2.8.3 : Действуя как при доказательстве предложения 2.4.24 заменяя условие минимальности (i) условием максимальности (2.8.4) графика F в $\mathbb{R}^4_1$ находим, что

$$\begin{aligned} (1 - u_2^2 - q^2)(\rho_{22} - u_3q_{22}) - 2u_1u_2(\rho_{12} - u_3q_{12}) + (1 - u_1^2 - q^2)(\rho_{11} - u_3q_{11}) + \\ +(1 - u_1^2 - u_2^2)(q_1[q_1(\rho_{22} - u_3q_{22}) - q_2(\rho_{12} - u_3q_{12})] + \\ +q_2[q_2(\rho_{11} - u_3q_{11}) - q_1(\rho_{12} - u_3q_{12})]) - \\ +2u_1q[q_1(\rho_{22} - u_3q_{22}) - q_2(\rho_{12} - u_3q_{12})] - \\ +2u_2q[q_2(\rho_{11} - u_3q_{11}) - q_1(\rho_{12} - u_3q_{12})] = 0 \end{aligned}$$

Это равенство может быть переписано в виде системы :

$$\begin{array}{l} g^{ij}q_{ij} = 0 \\ g^{ij}\rho_{ij} = 0 \end{array} \qquad (2.8.9)$$

где

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1 - u_1^2 - q^2 + q_2^2(1 - u_1^2 - u_2^2) + 2u_2q_2q \\ g^{12} &= -u_1u_2 - q_1q_2(1 - u_1^2 - u_2^2) - u_1q_2q - u_2q_1q \\ g^{22} &= 1 - u_2^2 - q^2 + q_1^2(1 - u_1^2 - u_2^2) + 2u_1q_1q \end{aligned} \qquad (2.8.10)$$

Заметим теперь, что система (2.8.8) имеет вид (2.8.9) и

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1 + q_2^2 + \frac{(u_2 + q_2q)^2}{1 - u_1^2 - u_2^2 - q^2} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}((1 + q_2^2)(1 - u_1^2 - u_2^2 - q^2) + (u_2 + q_2q)^2 = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(1 - u_1^2 - q^2 + q_2^2(1 - u_1^2 - u_2^2) + 2u_2q_2q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{12} &= -q_1q_2 - \frac{(u_1 + q_1q)(u_2 + q_2q)}{1 - u_1^2 - u_2^2 - q^2} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(-q_1q_2(1 - u_1^2 - u_2^2 - q^2) - (u_1 + q_1q)(u_2 + q_2q) = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(-u_1u_2 - q_1q_2(1 - u_1^2 - u_2^2) - u_1q_2q - u_2q_1q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{22} &= 1 + q_1^2 + \frac{(u_1 + q_1q)^2}{1 - u_1^2 - u_2^2 - q^2} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}((1 + q_1^2)(1 - u_1^2 - u_2^2 - q^2) + (u_1 + q_1q)^2 = \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2}(1 - u_2^2 - q^2 + q_1^2(1 - u_1^2 - u_2^2) + 2u_1q_1q) \end{aligned}$$

и следовательно пропорциональны (g^{ij}) в (2.8.10). ■

Геометрический смысл системы (2.8.8) такой же как системы (2.4.39). А именно :

Лемма 2.8.4.
Компоненты (g^{ij}) контравариантного метрического тензора Гауссова образа $V^2 = G(M^3) \subset S^3_-$ пропорциональны (2.8.10).
Доказательство : имеем из (2.8.7), что

$$r_{u_1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(u_1 + q_1q)}{\alpha^3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{u_2} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(u_2 + q_2q)}{\alpha^3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q \\ 1 \end{pmatrix}$$

и следовательно компоненты (g_{ij}) ковариантного метрического тензора V^2 имеют вид :

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_1^2 + \frac{2(u_1+q_1q)^2}{\alpha^2} - \frac{(u_1+q_1q)^2\alpha^2}{\alpha^4}) = \\
&= \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_1^2 + \frac{(u_1+q_1q)^2}{\alpha^2}) = \gamma g^{22} \\
g_{12} &= \frac{1}{\alpha^2}(q_1q_2 + \frac{2(u_1+q_1q)(u_2+q_2q)}{\alpha^2} - \frac{(u_1+q_1q)(u_2+q_2q)\alpha^2}{\alpha^4}) = \\
&= \frac{1}{\alpha^2}(q_1q_2 + \frac{(u_1+q_1q)(u_2+q_2q)}{\alpha^2}) = -\gamma g^{12} \\
g_{22} &= \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_2^2 + \frac{2(u_2+q_2q)^2}{\alpha^2} - \frac{(u_2+q_2q)^2\alpha^2}{\alpha^4}) = \\
&= \frac{1}{\alpha^2}(1 + q_2^2 + \frac{(u_2+q_2q)^2}{\alpha^2}) = \gamma g^{11}
\end{aligned}$$

и все доказано в силу (2.8.10). ■

Лемма 2.8.5. V^2 *– локально-минимальная поверхность в* S^3_-

Доказательство леммы 2.8.5 : В качестве нормали к V^2 в S^3_- можно взять вектор

$$n = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -1 \\ -q + u_1q_1 + u_2q_2 \end{pmatrix} \tag{2.8.11}$$

и условие минимальности V^2 примет вид :

$$< g^{ij} r_{ij}, n >= 0 \tag{2.8.12}$$

и из (2.8.7) следует, что (2.8.12) записывается в виде :

$$\alpha^2 g^{ij}(\tfrac{1}{\alpha^2})_{ij} < r, n > + g^{ij}(\tfrac{1}{\alpha^2})_i < (\delta_{1j}, \delta_{2j}, q_j, 0), n > +$$
$$+ g^{ij} < (0, 0, q_{ij}, 0), n >= g^{ij} q_{ij} = 0$$

Здесь δ_{ij} – символы Кронеккера, g^{ij} – контравариантный метрический тензор V^2 и значит все доказано в силу леммы 2.8.4 и первого уравнения системы (2.8.8) ■

То, что $\lambda = \rho/\alpha$ удовлетворяет уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$ доказывается в точности как в лемме 2.4.28. Единственное отличие состоит в том, что $\frac{1}{\alpha}$ – координатная функция на минимальной поверхности в $S^3_- \subset \mathbb{R}^4_1$, а не в $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Оказывается, что это несущественно, а именно имеет место следующая лемма:

Лемма 2.8.10. *Пусть* $M^k \subset S^n_-(S^n_+)$ *минимальная (максимальная пространственно-подобная) поверхность. Тогда радиус-вектор* M^k *в* $\mathbb{R}^{n+1}_1$ *удовлетворяет уравнению :*

$$\Delta r + kr = 0 \tag{2.8.13}$$

где Δ – Лапласиан на M^k в индуцированной метрике.

Доказательство : оно ничем не отличается от доказательства аналогичного утверждения для минимальной поверхности в Евклидовой сфере, но мы воспроизведем его для полноты картины :

В силу уравнений Вейнгартена и того, что $||r||^2 = \pm 1$ получаем в любых локальных координатах $(u_1, \ldots, u_n)$ на M^k :

$$r_{u_i u_j} = \Gamma^k_{ij} r_{u_k} + h^{\alpha}_{ij} n_{\alpha} - g_{ij} r \tag{2.8.14}$$

где $\{n_\alpha\}^n_{k+1}$ – базис в нормальном пространстве к M^k в S^n_+.

Из (2.8.14) получаем

$$g^{ij} r_{ij} = g^{ij} \Gamma^k_{ij} r_k + g^{ij} h^{\alpha}_{ij} n_\alpha - g^{ij} g_{ij} r$$

что в силу минимальности (максимальности) переписывается в виде :

$$g^{ij}(r_{ij} - \Gamma^k_{ij} r_k) + kr = 0 \tag{2.8.15}$$

что эквивалентно (2.8.13) в силу определения Лапласиана (см. определение 2.3.7)

Рассмотрим сильно 1-параболическую пространственно-подобную поверхность $F^3 \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$. Рассуждая по аналогии с Евклидовым случаем можно получить следующие результаты, которые мы приведем без доказательств

Теорема 2.8.11 (аналог теоремы 2.4.1).
Пусть F^3 – сильно 1-параболическая пространственно-подобная поверхность существенно лежащая в $R^{n+1}_1 (n > 3)$ и $V^2 = G(F^3)$ регулярна в S^n_+.
Тогда

$$F^3 \text{ – максимальна в } R^{n+1}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad V^2 \text{ – максимальна в } S^n_+$$

Теорема 2.8.12 (аналог теоремы 2.4.18).
(a) Пусть V^2 – (ориентируемая) максимальная пространственно-подобная поверхность в S^n_+, λ – функция на V^2, удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$
Тогда:
(i) Существует единственное с точностью до сдвига $\gamma : V^2 \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ – (многозначное) отображение, частные производные которого в любой изотермической системе координат (u_1, u_2) на V^2 удовлетворяют системе уравнений в частных производных :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= +\lambda r_2 - \lambda_2 r \\ \gamma_2 &= -\lambda r_1 + \lambda_1 r \end{aligned} \tag{2.8.16}$$

(ii) Поверхность F^3 в R_1^{n+1} определенная следующим образом :

$$F^3 \quad : \quad \hat{r}(Q,t) = \gamma(Q) + ir(Q) \mid Q \in V^2 \,:\, t \in R \tag{2.8.17}$$

– максимальная сильно 1-параболическая пространственно-подобная поверхность в R^{n+1} с "Гаусс-образом" V^2 ("Гаусс-образ" сильно 1-параболической поверхности был определен в §2.4).
(iii) множество особенностей F^3 есть :

$$\Sigma \;=\; \{\, \gamma(Q) : \lambda(Q) = 0 \,\} \tag{2.8.18}$$

Обратно для любой максимальной сильно 1-параболической пространственно-подобной поверхности $F^3 \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ существует пара (V^2, λ) удовлетворяющая условиям (α), такая, что выполнены условия (i),(ii),(iii).

ГЛАВА 3

ГАРМОНИЧЕСКИЕ МОРФИЗМЫ АССОЦИИРОВАННЫЕ С МИНИМАЛЬНЫМИ СИЛЬНО ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ ПОДМНОГООБРАЗИЯМИ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

§3.1. Гармонический морфизм из многообразия в Риманову поверхность.

В этом параграфе мы приводим необходимые факты из теори гармонических морфизмов , являющейся частью теории гармонических отображений.

Определение 3.1.1. *Гладкое отображение $f : M^m \to N^n$ между Римановыми многообразиями называется гармоническим морфизмом если оно переводит росток гармонических функций на N^n в росток гармонических функций на M^m , т.е.если g произвольная гармоническая функция на открытом множестве $V \subset N$ такая,что $f^{-1}(V) \neq 0$,то $g \circ f$ гармоническая функция на M*
Замечание : под гармонической функцией мы понимаем вещественно-значную функцию g, удовлетворяющую уравнению $\Delta f = 0$,где Δ – Лапласиан на многообразии. В любых локальных координатах (u_i) на многообразии Лапласиан имеет следующий вид :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial u_i}\Big(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial u_j}\Big)$$

Пусть $f: M^m \to N^n$ гладкое отображение между Римановыми многообразиями размерностей m и n. Для любого $x \in M$ положим $V_x = \ker df$ – вертикальное, $H_x = V_x^{\perp}$ – горизонтальное подпространства и обозначим через V,H соответствующие распределения в касательном расслоении TM.

Определение 3.1.2. *f называется (слабо) горизонтально конформным, если $\forall x \in M$ такого,что $df_x \neq 0$ ограничение $df|_{H_x} : H_x \to T_{f(x)}N$ конформно и сюръективно.*
Замечание : (слабо) горизонтально конформное отображение является (слабой) субмерсией по определению.

Напомним вкратце понятие гармонического отображения между Римановыми многообразиями (см.[El-Lem1]).

Пусть M, N – Римановы многообразия с метриками g, h. Тогда соответствующие метрические связности ∇^g, ∇^h индуцируют связность ∇ в $Hom(TM, f^*(TN))$ по формуле

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = \nabla^h_X(\varphi(Y)) - \varphi(\nabla^g_X Y) \qquad X, Y \in TM, \varphi \in Hom(TM, f^*(TN))$$

Поскольку $df \in Hom(TM, f^*(TN))$ можно определить $A(f) = \nabla df$ – вторую фундаментальную форму f.

Определение 3.1.3. *Сечение $\tau(f) = trace A(f)$ расслоения $C^\infty[f^*(TN)]$ называется полем напряжения f.*

Замечание : если (y_i) – произвольные локальные координаты на N то k-я компонента $\tau(f)$ имеет вид:

$$\tau^k(f) = \Delta_M f^k + g_M(\nabla f^i, \nabla f^j)(\Gamma^{N\,k}_{ij} \circ f) \quad \text{где } f^k = y^k \circ f$$

Определение 3.1.4. *C^2 отображение $f: M \to N$ называется гармоническим если $\tau(f) = 0$*

Сейчас мы дадим характеризацию гармонических морфизмов,полученную Фугледе [Fug].

Теорема 3.1.5. *Гладкое отображение $f: M \to N$ является гармоническим морфизмом если и только если оно одновременно гармонично и (слабо) горизонтально конформно.*

Если $\tau(\varphi)$ обозначает поле напряжения для $\varphi: M \to N$ и $\psi: N \to P$ – произвольное гладкое отображение,то поле напряжения композиции задается по формуле (см.[El-Lem1,2]) :

$$\tau_{\psi\circ\varphi} = d\psi(\tau_\varphi) + trace\nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)$$

Следовательно если φ – гармонический морфизм,то

$$\tau_{\psi\circ\varphi}(x) = \lambda^2(x)\tau_\psi(\varphi(x))$$

и мы получаем немедленно,что :

а) композиция двух гармонических морфизмов – гармонический морфизм

б) композиция гармонического морфизма и гармонического отображения – гармоническое отображение

Замечание : композиция двух гармонических отображений не является в общем случае гармоническим отображением, а то, что композиция гармонических морфизмов – гармонический морфизм является прямым следствием определения 3.1.1.

Таким образом,если $dimN - dimP = 2$, $\varphi: M \to N$ – гармонический морфизм и $\psi: N^2 \to P^2$ – слабо конформно,то $\psi \circ \varphi$ – гармонический морфизм. В частности корректно определено понятие гармонического морфизма в Риманову поверхность. Под Римановой поверхностью мы понимаем двумерное многообразие с фиксированной ориентируемой конформной структурой,задающей комплексную координату z в любых изотермических координатах (x_1, x_2) по формуле $z = x_1 + ix_2$.

В заключение параграфа приведем вспомагательную теорему доказанную в [Brd-El].

Теорема 3.1.6. *Слабо горизонтально конформное отображение $f: M^m \to N^2$ гармонично (и следовательно гармонический морфизм) если и только если все прообразы $f^{-1}(y) \in M$ регулярных значений для f в N локально минимальны в M.*

Следствие 3.1.7. *Субмерсия $f: M^3 \to N^2$ – гармонический морфизм если и только если f горизонтально конформно и слои f – геодезические на M^3.*

§3.2. Гармонический морфизм ассоциированный с 3-мерным минимальным сильно 1-параболическим подмногообразием $\mathbb{R}^n$

Напомним вкратце часть результатов §2.4 (см. также [Бор4])

Определение 3.2.1. *Индексом сильной параболичности $\mu(Q)$ точки поверхности F^l в Римановом многообразии X^n называется число:*

$$\mu(Q) = \dim \Delta = \dim\{X \in T_Q F^l : A^\nu(X) = 0 \ \ \forall \nu \in T_Q^\perp F^l\}$$

где A^ν – вторая фундаментальная форма F^l в X^n.
Поверхность F^l называется сильно к-параболической если $\mu(Q) \geq k$ для любой регулярной точки Q, а распределение плоскостей Δ – ноль-распределением данной поверхности.

Хорошо известно [Бо2],что через каждую точку P сильно k-параболической поверхности в $\mathbb{R}^n$ с $\mu(P) = k$ проходит лежащая на F^l k-мерная плоскость $M^k(P)$.

Рассмотрим случай $l = 3, k = 1$.Тогда через каждую точку $P \in F^3 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ индекса $\mu(P) = 1$ проходит прямая $l(P)$,лежащая на F^3,такая,что касательное пространство к F^3 постоянно вдоль $l(P)$. В дальнейшем мы будем предполагать,что это распределение может быть непрерывно продолжено в точки с $\mu = 3$ (т.е. точки уплощения).

Рассмотрим отображение $\Gamma: F^3 \to S^n$,переводящее $P \in F^3$ в единичный вектор с концом в начале координат в направлении $l(P)$. Легко видеть что $\Gamma(F^3) = V^2$– двумерно и мы всегда будем предполагать,что V^2 регулярная поверхность в S^n.

Определение 3.2.2. *Поверхность $V^2 = \Gamma(F^3)$ называется "Гаусс-образом" F^3.*

Замечание : очевидно,что "Гаусс-образ" корректно определен для любой сильно 1-параболической повехности F^l в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим систему локальных координат на F^3 введенную в [Бор4]. А именно, в этих координатах радиус-вектор F^3 имеет вид :

$$r(u_1, u_2, t) = \rho(u_1, u_2) + ts(u_1, u_2) \tag{3.2.1}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad s = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

соответствующая параметризация V^2 есть : n$=\frac{1}{\alpha}s$

где $\alpha = |s| = \sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2 + \sum_{q=3}^n h_q^2}$

Условие сильной-параболичности F^3 сводится к [Бор4] :

$$\partial\rho/\partial u_j = b_j^1 \partial s/\partial u_1 + b_j^2 \partial s/\partial u_2 \tag{3.2.2}$$

Из результатов §2.4 легко следует,что имеет место следующее предложение :

Предложение 3.2.3. *Поверхность F^3 минимальна если и только если выполнено одно из условий:*

i) F^3 – конус над минимальной поверхностью $V^2 \subset S^n$

ii)Выполнены следующие соотношения :

$$\begin{aligned} b_2^1 &= g^{11}\frac{\sqrt{g}}{\alpha}\lambda \\ b_2^2 - b_1^1 &= 2g^{12}\frac{\sqrt{g}}{\alpha}\lambda \qquad\qquad \lambda \not\equiv 0 \\ b_1^2 &= -g^{22}\frac{\sqrt{g}}{\alpha}\lambda \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Замечание 1: в случае i) соотношения (3.2.3) выполнены автоматически с $\lambda \equiv 0$

Замечание 2: из результатов §2.4 следует,что в случае ii) $V^2 = \Gamma(F^3)$ – минимальная поверхность в S^n и после склейки всех локальных карт типа (3.2.1) оказывается,что λ корректно определенная функция на V^2,которая удовлетворяет уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$,где Δ – Лапласиан на V^2

Замечание 3: пара (V^2, λ) определяет F^3 с точностью до параллельного переноса в R^{n+1}, и λ – скручивающая функция для F^3 (см. §2.4)

Пусть F^3 – регулярно-погруженная сильно 1 параболическая поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ с регулярным "Гаусс-образом" V^2. Тогда $\Gamma : F^3 \to V^2$ – субмерсия с минимальнымя слоями (т.к.прямые лежащие на F^3 очевидно являются геодезическими на F^3 в индуцированной из $\mathbb{R}^{n+1}$ метрике). Таким образом, в силу следствия 3.1.3, Γ – *гармонический морфизм* если и только если Γ – горизонтально конформно.

Теорема 3.2.4. *Отображение $\Gamma : F^3 \to V^2$ – гармонический морфизм если и только если выполнено одно из условий :*
(a) F^3 – (локально) конус над V^2
(b) F^3 минимальна в $\mathbb{R}^{n+1}$

Доказательство Теоремы 3.2.4. В силу предложения 3.2.3 одно из условий (a),(b) выполнено если и только если существует функция λ на V^2, удовлетворяющая соотношениям (3.2.3) в любой локальной системе координат типа(3.2.1) (случай (a) соответствует $\lambda \equiv 0$). Теперь Теорема 3.2.4 непосредственно следует из следующей леммы :

Лемма 3.2.5. *Пусть F^3, V^2 заданы как в Теореме 3.2.4. Тогда Γ горизонтально конформно если и только если существует функция λ на V^2, удовлетворяющая соотношениям (3.2.3) в любых локальных координатах типа (3.2.1) на F^3.*

Доказательство леммы 3.2.5. Рассмотрим локальные координаты типа (3.2.1) на F^3. Пусть n – радиус-вектор V^2 в $\mathbb{R}^{n+1}$. Используя условие (3.2.2) сильной параболичности можно легко показать,что горизонтальные лифты $n_1, n_2 \in T_{Q(z)}V^2$ в точку $P(u,t)$ имеют вид :

$$\tilde{r}_1 = \alpha[(b_1^1 + t)n_1 + b_1^2 n_2] \qquad \tilde{r}_2 = \alpha[b_2^1 n_1 + (b_2^2 + t)n_2] \qquad (3.2.4)$$

Следовательно условие горизонтальной конформности Γ принимает вид :

$$g_{ij} = < n_i, n_j > = \lambda^2 < \tilde{r}_i, \tilde{r}_j > \qquad \text{где } (g_{ij}) \text{ – метрика на } V^2 \qquad (3.2.5)$$

Замечание: λ называется *коэффициентом растяжения (dilation)* горизонтально конформного отображения Γ.
Проверим теперь,что условия (3.2.5) следуют из соотношений (3.2.3). Из (3.2.4) мы получаем,что

$$\frac{1}{\alpha^2} < \tilde{r}_1, \tilde{r}_1 > = (b_1^1 + t)^2 g_{11} + 2b_1^2(b_1^1 + t)g_{12} + (b_1^2)^2 g_{22}$$
$$\frac{1}{\alpha^2} < \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 > = (b_1^1 + t)b_2^1 g_{11} + [(b_1^1 + t)(b_2^2 + t) + b_2^1 b_1^2]g_{12} + (b_2^2 + t)b_1^2 g_{22}$$
$$\frac{1}{\alpha^2} < \tilde{r}_2, \tilde{r}_2 > = (b_2^1)^2 g_{11} + 2b_2^1(b_2^2 + t)g_{12} + (b_2^2 + t)^2 g_{22}$$

или в более удобной форме :

$$h_{ij} = t^2 g_{ij} - t(b_i^k g_{kj} + b_j^k g_{ki}) + b_i^k b_j^l g_{kl} \qquad \text{где } h_{ij} = \frac{1}{\alpha^2} < \tilde{r}_i, \tilde{r}_j > \qquad (3.2.6)$$

Используя (3.2.3) получаем :

$$\begin{aligned}
h_{11} &= t^2 g_{11} + 2t(b_1^1 g_{11} + b_1^2 g_{12} + ((b_1^1)^2 g_{11} + 2b_1^1 b_1^2 g_{12} + (b_1^2)^2 g_{22}) \\
&= t^2 g_{11} + 2t(b_1^1 g_{11} + \frac{(b_2^2 - b_1^1)}{2} g_{11}) + ((b_1^1)^2 g_{11} + b_1^1(b_2^2 - b_1^1) g_{11} - b_1^2 b_2^1 g_{11}) \\
&= (t^2 + t(b_1^1 + b_2^2) + (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)) g_{11} \\
h_{22} &= t^2 g_{22} + 2t(b_2^1 g_{12} + b_2^2 g_{22} + ((b_2^1)^2 g_{11} + 2b_2^1 b_2^2 g_{12} + (b_2^2)^2 g_{22}) \\
&= t^2 g_{22} + 2t(b_2^2 g_{22} + \frac{(b_1^1 - b_2^2)}{2} g_{22}) + ((b_2^2)^2 g_{22} + b_2^2(b_1^1 - b_2^2) g_{22} - b_2^1 b_1^2 g_{22}) \\
&= (t^2 + t(b_1^1 + b_2^2) + (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)) g_{22} \\
h_{12} &= t^2 g_{12} + t(b_2^1 g_{11} + (b_1^1 + b_2^2) g_{12} + b_1^2 g_{22}) \\
&\qquad + (b_1^1 b_2^1 g_{11} + (b_1^1 b_2^2 + b_2^1 b_1^2) g_{12} + b_2^2 b_1^2 g_{22}) \\
&= t^2 g_{12} + t(b_1^1 + b_2^2) g_{12} + ((b_1^1 b_2^2 + b_2^1 b_1^2) g_{12} - 2 g_{12} b_2^1 b_1^2) \\
&= (t^2 + t(b_1^1 + b_2^2) + (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)) g_{12}
\end{aligned}$$

Таким образом условия (3.2.5) выполнены.

Обратно,пусть условия (3.2.5) выполнены.Тогда из (3.2.6) мы легко получаем :

$$\begin{aligned}
2(b_1^1 g_{11} + b_1^2 g_{12}) &= a g_{11} \\
b_2^1 g_{11} + (b_1^1 + b_2^2) g_{12} + b_1^2 g_{22} &= a g_{12} \\
2(b_2^1 g_{12} + b_2^2 g_{22}) &= a g_{22}
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Умножая в (3.2.7) на $g_{12}g_{22}, 2g_{11}g_{22}$ и $g_{12}g_{11}$ соответственно мы получим

$$\begin{aligned}
(b_1^1 g_{11} + b_1^2 g_{12}) g_{12} g_{22} + (b_2^1 g_{12} + b_2^2 g_{22}) g_{12} g_{11} \\
= (b_2^1 g_{11} + (b_1^1 + b_2^2) g_{12} + b_1^2 g_{22}) g_{11} g_{22}
\end{aligned}$$

что эквивалентно

$$g_{12}((b_2^1 g_{11} + b_1^2 g_{22})(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)) = 0 \tag{3.2.8}$$

Рассмотрим две возможности в (3.2.8):

$$1)\ g_{12} \neq 0 \qquad 2)\ g_{12} = 0$$

Во втором случае мы имеем из (3.2.7),что $b_2^1 g_{11} + b_1^2 g_{22} = 0$ и $b_2^2 = b_1^1$ и таким образом условия (3.2.3) очевидным образом выполнены.

В первом случае мы немедленно получаем из (3.2.8) :

$$b_2^1 g_{11} + b_1^2 g_{22} = 0 \tag{3.2.9}$$

и таким образом $b_2^1 = \gamma g_{22} = \mu g^{11}$, $b_1^2 = -\gamma g_{11} = -\mu g^{22}$ Используя (3.2.7) мы получаем :

$$2(b_1^1 g_{11} + b_1^2 g_{12}) = (b_1^1 + b_2^2) g_{11}$$

или в эквивалентной форме

$$b_2^2 - b_1^1 = -2\gamma g_{12} = 2\mu g^{12}$$

Таким образом и в этом случае соотношения (3.2.3) выполнены и все доказано.

Следствие 3.2.6. *Пусть F^3 – минимальная поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющая условиям теоремы 3.2.4. Тогда коэффициент растяжения γ гармонического морфизма $\Gamma\colon F^3 \to V^2$ в любых координатах вида (3.2.1) на F^3 имеет вид :*

$$\gamma = \frac{1}{a}(t^2 + trB + \Delta)^{\frac{1}{2}} \qquad B = (b^i_j), \Delta = \det B \tag{3.2.10}$$

Определение 3.2.7. Пусть M – многообразие с краем ∂M (∂M не обязательно регулярно) и $\Gamma : M \setminus \partial M \to N$ – гармонический морфизм. Тогда точка $P \in \partial M$ называется *обертывающей точкой (envelope point)* если коэффициент растяжения $\gamma(Q)$ для Γ стремится к ∞ когда Q сходится к P.

Замечание. Обертывающие точки были впервые введены в работе [Brd-Wol] в случае $M = R^3; N = N^2$

Напомним вкратце некоторые результаты §2.4, чтобы определить обертывающие точки для минимальной сильно 1-параболической поверхности $F^3 \in \mathbb{R}^{n+1}$, имеющей особенности. В частности мы дадим явное описание обертывающих точек (в смысле [Brd-Wol]) для гармонического морфизма $\Gamma\colon \mathbb{R}^3 \to S^2$.

Пусть $V^2 \subset S^n$ – погруженная минимальная поверхность и λ – функция на V^2,удовлетворяющая уравнению $\Delta\lambda + 2\lambda = 0$.Тогда существует многозначная вектор-функция $\xi\colon V^2 \to \mathbb{R}^{n-1}$,удовлетворяющая в любых изотермических координатах (u_1, u_2) on V^2 уравнениям :

$$\begin{aligned} \partial\xi/\partial u_1 &= \quad \partial\lambda/\partial u_2 n - \lambda\partial n/\partial u_2 \\ \partial\xi/\partial u_2 &= -\partial\lambda/\partial u_1 n + \lambda\partial n/\partial u_1 \end{aligned} \qquad n \text{ – радиус-вектор } V^2 \tag{3.2.11}$$

Предложение 3.2.8. Любая минимальная сильно 1-параболическая поверхность $F^3 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с особенностями,но имеющая регулярный "Гаусс-образ" $V^2 \subset S^n$ имеет вид :

$$F^3\colon \{r(Q,t) = \xi(Q) + tn(Q) | Q \in V^2, t \in \mathbb{R}\} \tag{3.2.12}$$

Более того,множество особенностей Σ для F^3 есть :

$$\Sigma = \xi(Q \in V^2\colon \lambda(Q) = 0) \tag{3.2.13}$$

Сформулируем теперь основной результат данного параграфа :

Теорема 3.2.9. *Пусть F^3 – погруженная минимальная сильно 1-параболическая поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ с особенностями,имеющая регулярный "Гаусс-образ" V^2. Тогда $\Gamma\colon F^3 \setminus \Sigma \to V^2$ – гармонический морфизм,причем Σ – множество обертывающих точек.*

Доказательство теоремы 3.2.9. Пусть (u_1, u_2) – произвольная система ориентированных изотермических координат на V^2. Из (3.2.11), (3.2.12) мы получаем, что горизонтальные лифты $n_1(u), n_2(u)$ в точке $r(u,t)$ имеют вид :

$$\begin{aligned} Hn_1(u,t) &= \quad tn_1 + \lambda n_2 \\ Hn_2(u,t) &= -\lambda n_1 + tn_2 \end{aligned} \qquad (3.2.14)$$

Следовательно $< Hn_i, Hn_j >= (\lambda^2 + t^2)F\delta_{ij} = (\lambda^2 + t^2) < n_i, n_j >$ и Γ – гармонический морфизм с коэффициентом растяжения

$$\gamma = (\lambda^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (3.2.15)$$

Из (3.2.15) следует, что множество обертывающих точек для Γ задается (3.2.13).

Полагая $V^2 = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ в теореме 3.2.8 мы немедленно получаем новую характеризацию гармонических морфизмов из $\mathbb{R}^3$ в S^2 (см.[Brd-Wol]). А именно мы получаем :

Следствие 3.2.10. Пусть V^2 – часть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, λ – функция на V^2, удовлетворяющая $\Delta_{S^2}\lambda + 2\lambda = 0$ и ξ определена посредством (3.2.11). Тогда геодезическое слоение $\mathbb{R}^3$ посредством (3.2.12) задает гармонический морфизм из $\mathbb{R}^3$ в S^2, причем множество обертывающих точек задается (3.2.13).

§3.3. Гармонический морфизм ассоциированный с минимальным сильно $l-2$-параболическим подмногообразием F^l Евклидова пространства.

Результаты предыдущего параграфа обобщаются на случай сильно (l-2)-параболических поверхностей произвольной размерности.

Рассмотрим сильно (l-2)-параболическую поверхность $F^l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и определим (по крайней мере локально) *"Гаусс-образ"* $\Gamma\colon F^l \setminus \{\text{точки уплощения}\} \to G(l-2, \mathbb{R}^{n+1})$ – Грассманиан (ориентированных) (l-2)-плоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$ где $\Gamma(P) = \Delta(P)$ – ноль-распределение F^l в точке P . Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что Γ может быть непрерывно продолжено в точки уплощения F^l и $\Gamma(F^l) = V^2$ – регулярная поверхность в $G(l-2, \mathbb{R}^{n+1})$.

Теорема 3.3.1. *"Гауссово" отображение сильно (l-2)-параболической поверхности $F^l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является гармоническим морфизмом тогда и только тогда когда выполнено одно из условий :*

(a) F^l – цилиндр над конусом CV^2 $(V^2 \subset S^n)$

(b) F^l минимальна в $\mathbb{R}^{n+1}$

Доказательство теоремы 3.3.1. Пусть радиус-вектор F^l имеет вид :

$$r(u_1, u_2, t_3, \ldots, t_l) = \rho(u_1, u_2) + \sum_{q=3,n} t_q s_q(u_1, u_2) \qquad < s_q, s_p >= \delta_{qp} \qquad (3.3.1)$$

В силу условия сильной параболичности касательная плоскость к F^l стационарна вдоль к мерных образующих поль-распределения F^l или в эквивалентной форме

$$s_{q,i} = b^j_{qi}\rho_j + C^p_{qi}s_p \qquad q = 3, l \ ; \ i = 1, 2 \tag{3.3.2}$$

"Гауссово" отображение имеет вид :

$$s(u) = \Gamma(r(u,t)) = s_3 \wedge \ldots \wedge s_l(u) \in G(l-2, \mathbb{R}^{n+1}) \tag{3.3.3}$$

Пусть $\Delta^\perp$ обозначает ортогональное дополнение к Δ в касательной плоскости к F^l.Тогда условие горизонтальной конформности Γ в силу (3.3.1), (3.3.2) принимает вид

$$\gamma^2 < r_i^\perp, r_j^\perp > |_{\mathbb{R}^{n+1}} = < s_{,i}, s_{,j} > |_{G(l-2,\mathbb{R}^{n+1})} \tag{3.3.4}$$

где

$$r_i^\perp = (\delta^j_i + t_q b^j_{qi})\rho_j^\perp \qquad \forall t = (t_3 \ldots t_l) \text{ близких к } 0 \tag{3.3.5}$$

Полагая $h_{ij} =< \rho_i^\perp, \rho_j^\perp >$ и используя (3.3.4), (3.3.5) мы получаем немедленно

$$h_{ik}b^k_{qj} + h_{jk}b^k_{qi} = \mu_q h_{ij} \qquad \forall q = 3, l \tag{3.3.6}$$

Уравнения (3.3.6) полностью аналогичны (3.2.7),из которых были получены (3.2.3). Следовательно мы получаем из (3.3.6) :

$$\begin{aligned} b^1_{q2} &= \ \ \theta_q h^{11} \\ b^2_{q2} - b^1_{q1} &= 2\theta_q h^{12} \\ b^2_{q1} &= -\theta_q h^{22} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Первая часть Теоремы 3.3.1 следует теперь из следующего утверждения.

Утверждение 3.3.2. *Одно из условий (a),(b) в теореме 3.3.1* выполнено *если и только если в любых координатах на* F^l *вида (3.3.1)* выполнены *условия (3.3.7).*

Доказательство утверждения 3.3.2.

Пусть $(g^{ij}(u,t))$ – контравариантный метрический тензор на F^l.Тогда в силу (3.3.1) условие минимальности F^l примет вид :

$$\sum_{i,j=1,2} g^{ij}(u,t)r^\perp_{ij}(u,t) = 0 \tag{3.3.8}$$

где $r^\perp_{ij}$ обозначает ортогональную проекцию вектора r_{ij} на нормальное пространство к F^l.Отметим также,что $r^\perp_{ij}(u,o) = \rho^\perp_{ij}(u)$

Лемма 3.3.3.
В любых координатах вида (3.3.1) на F^l

$$g^{ij}(u,0) = h^{ij}(u) \quad \forall\, i,j = 1,2 \tag{3.3.9}$$

Доказательство леммы 3.3.3 :
Из (3.3.1) следует,что матрица $\big(g_{ij}(u,0)\big)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} |\rho_1|^2 & <\rho_1,\rho_2> & <\rho_1,s_3> & \dots & <\rho_1,s_l> \\ <\rho_1,\rho_2> & |\rho_2|^2 & <\rho_2,s_3> & \dots & <\rho_2,s_l> \\ <\rho_1,s_3> & <\rho_2,s_3> & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ <\rho_1,s_l> & <r_2,s_l> & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

а матрица $\big(h_{ij}\big)$:

$$h_{ij} = <\rho_i - \sum_{q=3,l} <\rho_i,s_q> s_q, \rho_j - \sum_{p=3,l} <\rho_j,s_p> s_p>$$

Или в эквивалентной форме

$$h_{ij} = <\rho_i,\rho_j> - \sum_{q=3,l} <\rho_i,s_q><\rho_j,s_q> \tag{3.3.11}$$

Заметим,что $\det\big(g_{ij}(u,0)\big) = \det\big(h_{ij}(u)\big)$ и мы получаем (3.3.9) из (3.3.10),(3.3.11).

Например :

$$g^{11} = \frac{h_{22}}{\det(g_{ij})} = \frac{h_{22}}{\det(h_{ij})} = h^{11} \quad \text{etc.}$$

q.e.d.

Лемма 3.3.4. *В любых координатах вида (3.3.1) на F^l имеют место соотношения :*

$$b^1_{q2}\rho^{\perp}_{11} + (b^2_{q2} - b^1_{q1})\rho^{\perp}_{12} - b^2_{q1}\rho^{\perp}_{22} = 0 \tag{3.3.12}$$

Доказательство : Лемма 3.3.4 немедленно следует из (3.3.2).
Допустим теперь,что выполнены соотношения (3.3.7). Следовательно имеются две возможности :

$$(i) \quad \theta_q \not\equiv 0 \quad \text{для некоторого } q \qquad (ii) \quad \theta_q \equiv 0 \quad \forall\, q = 3,l$$

В случае (i) из (3.3.7),(3.3.9) и (3.3.12) следует,что в точке P(u,0) уравнения (3.3.8) выполнены и значит F^l – минимальна,поскольку мы можем выбрать параметризацию (3.3.1) в окрестности любой регулярной точки $P \in F^l$.

В случае (ii) мы поступим следующим образом : рассмотрим специальную параметризацию F^l :

$$r(u,t) = \rho(u) + \sum_{q=3,l} t_q f_q(u) \qquad (3.3.1')$$

где f_q – базис (не ортогональный) в Δ ,удовлетворяющий условиям :

$$f_q(0) = s_q(0) \quad \text{и} \quad < f_q(u), f_p(0) >= \delta_{qp}$$

и поверхность $\rho(u)$ лежит в аффинной плоскости через $P = \rho(0)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ перпендикулярной $\Delta(P)$ (в случае $l = 3$ (3.3.1') совпадает (3.2.1)).
Из результатов [Бо2] следует справедливость следующей леммы.

Лемма 3.3.5. *Пусть F^l параметризована (3.3.1').Тогда*

$$f_{q,i} = \gamma^j_{qi}\rho_j \qquad (3.3.2')$$

Из (ii) следует,что

$$b^1_{q1} = b^2_{q2} = \mu_q \quad \text{и} \quad b^1_{q2} = b^2_{q1} = 0 \qquad \forall\, q = 3,l \qquad (3.3.13)$$

Лемма 3.3.6. *Если условия (ii) выполнены,то*

$$\gamma^i_{qj} = \gamma_q \delta^i_j \qquad \text{где} \quad \gamma_q = const \qquad (3.3.14)$$

Доказательство леммы 3.3.6 :
Пусть $f_q = a^p_q s_p$.Тогда из (3.3.2),(3.3.13) следует,что условия (3.3.14) выполнены с $\gamma_q = a^p_q \mu_p$ и из (3.3.2') немедленно следует,что

$$\gamma_{q,2}\rho_1 = \gamma_{q,1}\rho_2$$

и поскольку ρ_1, ρ_2 – линейно независимы ,то $\gamma_{q,1} = \gamma_{q,2} = 0$ и $\gamma_q = const$.
Из леммы 3.3.6 следует выполнение условия (а) теоремы 3.3.1. и таким образом из (3.3.7) следует выполнение одного из условий в теореме 3.3.1.

Доказательство обратной части утверждения 3.3.2 проводится по аналогии с доказательством лемм 2.4.5, 2.4.5' (см. также предложение 3.2.3).

Теперь мы дадим прямое доказательство горизонтальной конформности "Гауссова" отображения Г в случае (b) (случай (а) очевиден),после чего применив теорему 3.1.6 мы получим,что Г – гармонический морфизм.

Лемма 3.3.7. *Пусть F^l – минимальная сильно (1-2)-параболическая поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ с регулярным "Гаусс-образом" $V^2 = \Gamma(F^l) \subset G(l-2, R^{n+1})$ Тогда Г – горизонтально конформно.*
Доказательство леммы 3.3.7 :

Пусть $P \in F^l$ и рассмотрим параметризацию (3.3.1) в окрестности Р. Из (3.3.3) мы получаем :

$$s_{,1} = \sum_{q=3,l} s_3 \wedge \ldots \wedge b^j_{q1} \rho_j \wedge \ldots \wedge s_l$$
$$s_{,2} = \sum_{q=3,l} s_3 \wedge \ldots \wedge b^j_{q2} \rho_j \wedge \ldots \wedge s_l$$

Следовательно метрика $(\hat{g}_{ij})_{i,j=1,2}$ на V^2,индуцированная из $G(l-2, \mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяет соотношениям

$$\hat{g}_{ij} = \sum_{q=3,l} b^k_{qi} b^l_{qj} h_{kl}$$

В силу утверждения 3.3.2 из минимальности F^l следует выполнение (3.3.7) Проводя вычисления по аналогии с §3 мы получаем

$$\hat{g}_{ij} = \left(\sum_{q=3,l} \det B_q \right) h_{ij} \qquad (3.3.15)$$

Таким образом Г – горизонтально конформно. ■

Теорема 3.3.1 доказана.

§3.4. Гармонический морфизм ассоциированный с минимальным сильно параболическим подмногообразием Риманова многообразия

В данном параграфе доказывается,что при некотором естественном ограничении на тензор кривизны объемлющего многообразия вдоль подмногообразия ноль-слоение сильно (l-2)-параболического подмногообразия F^l Риманова многообразия M^{n+1} конформно (и следовательно определяет гармонический морфизм посредством проекции на пространство слоев) если и только если оно минимально либо горизонтальное распределение на F^l интегрируемо со вполне омбилическими слоями..

В параграфах 3.2, 3.3 нами было доказано, что ноль-слоение сильно $(l-2)$ параболической поверхности F^l в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ определяет гармонический морфизм посредством проекции $\Gamma : F^l \to V^2 \subset G^{l-2}(\mathbb{R}^{n+1})$ - грассманиан (l-2)-плоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$ тогда и только тогда, когда поверхность минимальна либо цилиндро-конична (в частности при l=3 F^3 конус над $V^2 \subset S^n$). Хорошо известно также , что ноль-распределение сильно-параболического подмногообразия F^l произвольного Риманова многообразия M^n интегрируемо не всегда и чтобы гарантировать интегрируемость нужно наложить некоторое естественное условие [Бо4] на тензор кривизны M^n вдоль

F^l (в частности если M^n – пространство постоянной кривизны оно всегда выполняется). Далее мы доказываем, что результаты §3.2, 3.3 обобщаются на случай произвольного Риманова многообразия при выполнении вышеупомянутого условия на тензор кривизны, гарантирующего интегрируемость нольраспределения.

Напомним теперь строение сильно-параболических подмногообразий Римановых многообразий.

Пусть F^l – сильно k-параболическое подмногообразие Риманова многообразия M^n , т.е. $\forall x \in F^l$ выполняется неравенство $\mu_x = \dim \Delta_x \geq k$, где $\Delta_x = \{X \in T_xF^l : B(X,*) \equiv 0\}$ – ноль-пространство F^l в точке x (здесь $B(*,*) : TF^l \times TF^l \to T^\perp F^l$ вторая квадратичная форма F^l в M^n).

Хорошо известно, что если объемлющее пространство M^n имеет постоянную секционную кривизну, то Δ_x – интегрируемое распределение с вполне геодезическими в M^n (а значит и F^l) слоями, вдоль которых нормальное к F^l пространство параллельно . В общем случае это неверно, однако в [Бо4] было доказано, что если вдоль сильно k-параболического подмногообразия F^l тензор кривизны M^n удовлетворяет условию :

$$< \overline{R}_{XY}Z, \eta >= 0 \qquad \forall X, Y, Z \in T_xF^l, \eta \in T_x^\perp F^l \tag{A}$$

то ноль-распределение интегрируемо и F^l расслоено на вполне геодезические в M^n k-мерные подмногообразия (см также лемму 3.4.11 ниже).

Конформные слоения на Римановом многообразии.

Рассмотрим гладкое слоение на Римановом многообразии F^l, т.е. интегрируемое k-мерное касательное подрасслоение V касательного расслоения TF^l коразмерности $q = l - k$. Обозначим через H ортогональное подрасслоение. Будем называть $V(H)$ вертикальным (горизонтальным) распределением. Тогда для данного фиксированного $x_0 \in F^l$ существует окрестность $U(x_0)$ и диффеоморфизм $\psi : U(x_0) \to U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^q$ такой, что пересечение любого слоя с U имеет вид $\psi^{-1}(U_1 \times y)$ для некоторого y. Такое отображение называется *слоеной картой (foliated chart)* слоения V и соответствующая субмерсия $\pi_0\psi : U(x_0) \to U_2 \subset \mathbb{R}^q$ – *выделенной субмерсией (distinguished submersion)*, где $\pi_0 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ – проекция на второй фактор.

Определим теперь понятие конформного слоения [Brd]:

Пусть $\overset{\circ}{\nabla}$ – частичная связность Ботта на горизонтальном распределении, определяемая как

$$\overset{\circ}{\nabla}_W X = \mathcal{H}(\mathcal{L}_W X)$$

где $W \in C^\infty(V), X \in C^\infty(H), \mathcal{H}$ – ортогональная проекция на H и $\mathcal{L}_W X = [W, X]$ – коммутатор веторных полей (производная Ли).

Пусть g_H – ограничение метрики F^l на H и $\tilde{\nabla}$ – индуцированная связность на $\odot^2(H)$, расслоении симметрических билинейных форм над H, определяемый как

$$\tilde{\tilde{\nabla}}_W(Q)(X,Y) = WQ(X,Y) - Q(\tilde{\tilde{\nabla}}_W X, Y) - Q(X, \tilde{\nabla}_W Y)$$

где $X, Y \in C^\infty(H), W \in C^\infty(V), Q \in \odot^2(H)$.

Определение 3.4.1. *Слоение V называется конформным, если $\forall x \in F^l$ выполнено равенство:*

$$\tilde{\tilde{\nabla}}_W g_H = \lambda(W) g_H \qquad \forall W \in V_x$$

Известно [Brd], что слоение является конформным тогда и только тогда, когда для любой выделенной субмерсии $\pi : U(x_0) \to U_2 \subset \mathbb{R}^q$ на U_2 можно задать метрику (или ее конформный класс) так, что π – горизонтально конформная субмерсия.

Определение 3.4.2. *Векторное поле $X \in C^\infty(H)$ называется проектируемым (basic,projectable) если $\mathcal{L}_W X \in C^\infty(V)$ для любого $W \in C^\infty(V)$ или в эквивалентной форме для любой выделенной субмерсии $\pi : U \to U_2$, X проектируется в векторное поле на U_2.*

Для случая слоений коразмерности 2 в горизонтальном распределении H (по крайней мере локально) имеется почти комплексная структура $J : H \to H$ (поворот на 90^0). Оказывается, что имеет место следующий результат [Brd]

Теорема 3.4.3. *Слоение V Риманова многообразия F^l коразмерности 2 конформно если и только если J переводит проектируемые векторные поля в проектируемые.*

Основная теорема.

Теорема 3.4.4. *Пусть $F^l \subset M^n$ – сильно (l-2)-параболическое подмногообразие, вдоль которого тензор кривизны обьемлющего многообразия удовлетворяет условию (A). Тогда ноль-слоение конформно (и следовательно всякая выделенная субмерсия – гармонический морфизм с вполне геодезическими слоями) тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий :*

i) F^l – минимальное подмногообразие в M^n.

ii) горизонтальное распределение F^l интегрируемо и его слои омбиличны.

Замечание: в силу результатов о сильно-параболических подмногообразиях, сформулированных выше, ноль-распределение интегрируемо вне точек уплощения (т.е. точек где $\mu_x = l$) и такие точки в рассмотрения включаться не будут, т.к. в них могут возникать особенности слоения.

Обозначим ноль-распределение через Δ, горизонтальное распределение через $\Delta^\perp$ и ковариантную производную в M^n через $\overline{\nabla}$. Пусть (e_1, e_2) – ортонормированный базис в $\Delta^\perp$. Тогда из сильной параболичности F^l следует, что для любых $W \in \Delta, \eta \in T^{\perp}F$

$$B(e_i, W) = (\overline{\nabla}_{e_i} W)^{\perp} = 0$$

и следовательно

$$\overline{\nabla}_{e_i} W = b_i^1(W)e_1 + b_i^2(W)e_2 + W_i \tag{3.4.1}$$

где $W_i \in \Delta, b_j^i(W)$ – линейные функционалы на Δ.

В силу условия (A) имеем для любого $W \in \Delta$:

$$(\overline{R}_{e_1 e_2} W)^{\perp} = 0 \tag{3.4.2}$$

где $\perp$ – проекция на нормальное пространство к F^l.

Используя (3.4.1) получаем, что (3.4.2) эквивалентно

$$b_2^1(W)B(e_1, e_1) + (b_2^2(W) - b_1^1(W))B(e_1, e_2) - b_1^2(W)B(e_2, e_2) = 0 \tag{3.4.3}$$

Лемма 3.4.5. Ноль-слоение конформно тогда и только тогда когда для любого $W \in \Delta$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} b_1^1(W) &= b_2^2(W) \\ b_2^1(W) &= -b_1^2(W) \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Пусть $X = ae_1 + be_2$ – проектируемое векторное поле и $Y = J(X) = -be_1 + ae_2$. Тогда по определению имеем для любого $W \in \Delta$, что $[X, W] \in \Delta$ или

$$\begin{aligned} 0 = [ae_1 + be_2, W]_{|\Delta^{\perp}} &= (a\overline{\nabla}_{e_1} W + b\overline{\nabla}_{e_2} W - \overline{\nabla}_W (ae_1 + be_2))_{|\Delta^{\perp}} \\ &= a(b_1^1(W)e_1 + b_1^2(W)e_2) + b(b_2^1(W)e_1 + b_2^2(W)e_2) \\ &\quad - W(a)e_1 - ace_2 - W(b)e_2 + bce_1 \end{aligned}$$

где $c = <\overline{\nabla}_W e_1, e_2> = -<\overline{\nabla}_W e_2, e_1>$.

Откуда сразу следует,что условие проектируемости X имеет вид

$$\begin{aligned} ab_1^1(W) + bb_2^1(W) - W(a) + bc = 0 \\ ab_1^2(W) + bb_2^2(W) - W(b) - ac = 0 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Аналогичные вычисления показывают, что условие проектируемости Y имеет вид:

$$\begin{aligned} -bb_1^1(W) + ab_2^1(W) + W(b) + ac = 0 \\ -bb_1^2(W) + ab_2^2(W) - W(a) + bc = 0 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Условие конформности ноль-слоения есть эквивалентность уравнений (3.4.5) и (3.4.6), т.е.для любого $W \in \Delta$:

$$\begin{aligned} a(b_1^1 - b_2^2)(W) + b(b_2^1 + b_1^2)(W) = 0 \\ a(b_1^2 + b_2^1)(W) - b(b_1^1 - b_2^2)(W) = 0 \end{aligned}$$

и поскольку $(a, b) \neq 0$ то $\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq 0$ и следовательно $b_1^1 \equiv b_2^2, b_2^1 \equiv -b_1^2$.

■

Лемма 3.4.6. Пусть F^l – минимально в M^n и удовлетворяет условиям Теоремы 3.4.4, тогда выполнены условия (3.4.4)

В силу условия сильной параболичности условие минимальности F^l примет вид:

$$B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2) = 0 \tag{3.4.7}$$

если в точке $x \in F^l$ векторы $B(e_1, e_1)$ и $B(e_1, e_2)$ линейно независимы, то из (3.4.3) мгновенно следует выполнение (3.4.4) (и это же верно по непрерывности для точек в любой окрестности которых существуют точки с линейно независимыми $B(e_1, e_1)$ и $B(e_1, e_2)$).

Пусть теперь $B(e_1, e_1)$ и $B(e_1, e_2)$ – линейно зависимы в окрестности данной точки. Тогда очевидным образом первое нормальное пространство к F^l одномерно ($N^1F^l = span\{\eta_1; |\eta_1| = 1\}$) и можно выбрать новый базис в $\Delta^\perp$ так, что $B(e_1, e_2) = 0, B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2) = 0$ или

$$\begin{array}{rcl} A^\eta(e_1) & = & \lambda(\eta)e_1 \\ A^\eta(e_2) & = & -\lambda(\eta)e_2 \\ A^\eta(W) & = & 0 \quad \forall\, W \in \Delta \end{array} \tag{3.4.8}$$

где $A^\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X \eta)^T$ – отображение Вейнгартена.

Докажем, что $D^\perp_X(\eta_1) = (\overline{\nabla}_X \eta_1)^\perp = 0$ для любого $X \in T_xF^l$ (если F^l – гиперповерхность то доказывать нечего).Действительно для любого $\eta \perp \eta_1$ имеем $A^\eta(X) = (\nabla_X \eta)^T = 0$ и применяя условие (A) получаем:

$$[\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}\eta - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\eta - \nabla_{[e_1,e_2]}\eta]^T = 0 \tag{3.4.9}$$

что эквивалентно

$$A^{D^\perp_{e_2}(\eta)}(e_1) = A^{D^\perp_{e_1}(\eta)}(e_2)$$

что в силу (3.4.8) влечет $A^{D^\perp_{e_i}(\eta)} = 0$ и следовательно $D^\perp_{e_i}(\eta) \perp \eta_1$ для $i = 1, 2$.

Аналогичным образом для любого $W \in \Delta$ из условия (A)

$$[\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_W \eta - \nabla_W \overline{\nabla}_{e_i}\eta - \overline{\nabla}_{[e_i,W]}\eta]^T = 0$$

или $A^{D^\perp_W(\eta)}(e_i) = 0$ и следовательно в силу (3.4.8) $D^\perp_W(\eta) = 0$. Таким образом мы показали, что

$$< \overline{\nabla}_X \eta_1, \eta > = 0 \qquad \forall\, \eta \perp \eta_1$$

и следовательно в силу $|\eta_1| = 0$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\nabla}_{e_1}\eta_1 & \equiv & \lambda e_1 \\ \overline{\nabla}_{e_2}\eta_1 & \equiv & -\lambda e_2 \\ \overline{\nabla}_W \eta & = & 0 \quad \forall\, W \in \Delta \end{array} \tag{3.4.10}$$

Применяя еще раз условие (A) получаем

$$0 =< \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_W \eta_1 - \overline{\nabla}_W \overline{\nabla}_{e_i}\eta_1 - \overline{\nabla}_{[e_i,W]}, e_i >$$
$$=< \overline{\nabla}_{e_i}(\pm\lambda e_i), e_i > + < \overline{\nabla}_{e_i}\eta_i, [e_i, W] >$$
$$= \pm(W(\lambda) + \lambda < e_i, \overline{\nabla}_{e_i} W >)$$

и следовательно

$$b_1^1(W) = b_2^2(W) = -\frac{W(\lambda)}{\lambda}$$

кроме того из (3.4.3), (3.4.7) следует

$$b_2^1(W) = -b_1^2(W) \quad \blacksquare$$

Таким образом из лемм 3.4.5, 3.4.6 вытекает, что из минимальности F^l следует конформность ноль-слоения.

Лемма 3.4.7. Горизонтальное распределение $\Delta^\perp$ интегрируемо тогда и только тогда когда $b_2^1(W) = b_1^2(W)$ для любого $W \in \Delta$. Его слои омбиличны тогда и только тогда, когда $B(W) = (b_j^i(W)) = \gamma Id$.

Доказательство: условие интегрируемости $\Delta^\perp$ имеет вид

$$< [e_1, e_2], W >= 0 \quad \forall\, W \in \Delta$$

и из (3.4.1) немедленно следует $b_2^1(W) = b_1^2(W)$.

Пусть теперь $\Delta^\perp$ интегрируемо, тогда легко видеть, что $B(W)$ – вторая фундаментальная форма слоя в F^l по направлению нормали $-W$ и лемма 3.4.7 следует из определения омбилического подмногообразия. $\blacksquare$

Из лемм 3.4.5, 3.4.7 немедленно следует конформность ноль-слоения в случае (ii) и мы доказали,что теорема 3.4.4 верна в одну сторону. Докажем теперь, что она верна в обратную.

Лемма 3.4.8. Пусть ноль-слоение F^l конформно (т.е. выполнены условия (3.4.4)). Тогда если в любой окрестности данной точки x_0 существует точка в которой $b_2^1(W)$ не равно тождественно нулю, то F^l минимально в точке x_0.

Доказательство: прямое следствие соотношений (3.4.3), (3.4.4).

Обратная часть теоремы 3.4.4 теперь вытекает из лемм 3.4.5, 3.4.6, 3.4.7.

Теорема 3.4.4 доказана.

Следствие 3.4.9. *Пусть F^l – сильно (l-2)-параболическое подмногообразие симметрического пространства M^n. Тогда ноль-слоение F^l конформно (и определяет гармонический морфизм с вполне геодезическими слоями тогда и только тогда когда выполнено одно из условий (i),(ii) Теоремы 3.4.4.*

Доказательство: как следует из [Ko-Nom] в симметрическом пространстве условие (A) выполнятся для произвольных подмногообразий.

Следствие 3.4.10 (см. §3.2, 3.3). *Пусть F^l – сильно (l-2)-параболическое подмногообразие Евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда "Гауссово" отображение $\Gamma : F^l \to V^2 \subset Gr(l-2, \mathbb{R}^n)$ (сопоставляющее точке x (l-2)-мерную плоскость Δ_x) является гармоническим морфизмом тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

(i) F^l – минимально в $\mathbb{R}^n$

(ii) F^l – цилиндро-коническая поверхность

В частности, при l=3 $\Gamma : F^3 \to V^2 \subset \mathcal{S}^{n-1}(1)$ и условие (ii) имеет вид:

(ii') F^l – конус CV^2 над $V^2 \subset \mathcal{S}^{n-1}(1)$

Для полноты изложения, докажем следующую лемму:

Лемма 3.4.11. *Пусть F^l – сильно k-параболическое помногообразие Риманова многообразия M^n, для которого выполнено условие (A). Тогда нуль-распределение на F^l интегрируемо со вполне геодезическими слоями и нормальное пространство вдоль слоя параллельно.*

Доказательство: из условия (A) имеем для $W, W' \in \Delta, X \in \Delta^{\perp}, \nu \in T^{\perp}F^l$:

$$A^{\nu}([W, W']) = -[\overline{\nabla}_{[W,W']}\nu]^T = [\overline{\nabla}_{W'}\overline{\nabla}_{W}\nu - \overline{\nabla}_{W}\overline{\nabla}_{W'}\nu]^T =$$
$$= [\overline{\nabla}_{W'}(\overline{\nabla}^{\perp}_{W}\nu)]^T - [\overline{\nabla}_{W}(\overline{\nabla}^{\perp}_{W'}\nu)]^T = A^{D^{\perp}_{W'}}(W) - A^{D^{\perp}_{W}}(W') = 0$$

и следовательно $[W, W'] \in \Delta$, т.е. Δ – интегрируемое распределение.

Докажем теперь вполне-геодезичность в M^n интегральных многообразий Δ. Пусть $W, W' \in \Delta, \nu \in T^{\perp}F^l$. Тогда

$$< \overline{\nabla}_W W', \nu > = < A^{\nu}(W), W' > = 0 \qquad (3.4.11)$$

и для $X \in \Delta^{\perp}$ из условия (A) находим :

$$[\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_W W' - \overline{\nabla}_W\overline{\nabla}_X W' - \overline{\nabla}_{[X,W]}W']^{\perp} = 0 \qquad (3.4.12)$$

В силу (3.4.11)

$$\overline{\nabla}_W W' = [\overline{\nabla}_W W']^T \qquad (3.4.13)$$

кроме того из сильной параболичности

$$\overline{\nabla}_X W' = [\overline{\nabla}_X W']^T$$

и следовательно

$$[\overline{\nabla}_W\overline{\nabla}_X W']^{\perp} = [\overline{\nabla}_W(\overline{\nabla}_X W')^T]^{\perp} = 0 \qquad (3.4.14)$$

и

$$(\overline{\nabla}_{[X,W]}W')^{\perp} = (\overline{\nabla}_{W'}[X, W])^{\perp} = 0 \qquad (3.4.15)$$

Таким образом из 3.4.13-15 следует, что 3.4.12 переписывается в виде

$$< \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_W W')^T, \nu >= 0 \qquad \forall\, \nu \in T^\perp F^l$$

что эквивалентно

$$A^\nu((\nabla_W W')^T) = 0 \qquad \forall \nu$$

то есть учитывая 3.4.13

$$\overline{\nabla}_W W' \in \Delta \qquad \forall\, W, W' \in \Delta$$

и следовательно интегральные подмногообразия ноль-распределения Δ вполне геодезичны в объемлющем многообразии M^n.

Кроме того из сильной параболичности вытекает, что для любого $W \in \Delta$

$$\overline{\nabla}_W(T^\perp F^l) \subset T^\perp F^l$$

то есть нормальное пространство вдоль слоя параллельно относительно связности Леви-Чивиты на M^n. ■

ГЛАВА 4

ГЛОБАЛЬНО-МИНИМАЛЬНЫЕ В СВОЕМ КЛАССЕ ГОМОЛОГИЙ ОДНОРОДНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

§4.1. Вложения однородного пространства G_2/T_2.

Этот параграф посвящен изучению частного случая ($G = G_2$) гипотезы А.Т.Фоменко, доказанной для классических полупростых групп Ле Хонг Ван (см. [Ле4]). Сформулируем гипотезу в общем виде :
Пусть G, H – компактные полупростые группы Ли, $T_G(T_H)$ –максимальный тор в $G(H)$. Пусть $\rho : H \to G$ – неприводимое представление H, такое, что $\rho(T_H) = T_G \cap \rho(H)$. Однородное пространство G/T_G может быть снабжено левоинвариантной римановой метрикой, индуцированной метрикой Киллинга на группе G. Рассмотрим вложение $\tilde{\rho} : H/T_H \to G/T_G$, индуцированное представлением ρ. Тогда возникает естественный вопрос:
Для каких ρ, H, G образ $\tilde{\rho}(H/T_H)$ – глобально-минимальное в свем классе гомологий подмногообразие G/T_G ?

Гипотеза А.Т.Фоменко. Если $\rho = \pi_1$ – представление минимальной размерности, то ответ на данный вопрос положителен.

Теорема 4.1.1. *Гипотеза А.Т.Фоменко верна для особой полупростой группы G_2, т.е. если $\rho : G_2/T_2 \to SO_7/T_3$ – вложение индуцированное неприводимым представлением $\pi_1 : G_2 \to SO_7$, то $\rho(G_2/T_2)$ – глобально минимальное в своем классе гомологий подмногообразие SO_7/T_3.*
Доказательство основано на методе форм калибровки описанном в главе 1.

Замечание: вопросы устойчивости минимальных подмногообразий изучались в частности в работах Ю.А.Аминова [Ам], А.Т.Фоменко [Дао-Фом], Охниты [Oh], Ле Хонг Ван [Ле4]. Автором в работе [Бор1] было доказано, что присоединенное представление π_2 группы G_2, порождает неустойчивое вложение G_2/T_2 в SO_{14}/T_7.

Пусть G – полупростая компактная группа Ли, T_G – максимальный тор в G и $lG(lT_g)$ – алгебра Ли $G(T_G)$. Пусть V – ортогональное дополнение к lT_G в lG в смысле метрики Киллинга. Реализовав G/T_G как регулярную орбиту присоединенного представления Ad на lG можно отждествить V с $T_{[e]}G/T_G$.

Определим теперь на V следующую 2 форму для любого $t \in T_G$:

$$\omega_t(X,Y) = < t, [X,Y] > \tag{4.1.1}$$

где $X, Y \in V$.

Лемма 4.1.2 [Лс4]. *Форма ω, определенная по формуле (4.1.1) продолжается до G-инвариантной замкнутой 2-формы на G/T_G.*

Приведем для замкнутости изложения доказательство данной леммы:

(1) из результатов Кириллова следует, что форма ω продолжается до G-инвариантной формы $\tilde{\omega}$ тогда и только тогда, когда она Ad_{T_G}-инвариантна, т.е

$$\omega(Ad_{t'}X, Ad_{t'}Y) = \omega(X,Y) \quad \forall\, t' \in T_G, X, Y \in V$$

Пользуясь (4.1.1) находим, что

$$\omega(Ad_{t'}X, Ad_{t'}Y) = < t, [Ad_{t'}X, Ad_{t'}Y] > = < t, Ad_{t'}[X,Y] >$$
$$= < Ad_{t'^{-1}}(t), [X,Y] > = \omega(X,Y)$$

где последнее равенство верно в силу коммутативности T_G.

(2) Продолжим ортонормированную тройку (X,Y,Z) до левоинвариантных векторных полей на G/T_G. Тогда в силу инвариантности ω:

$$d\omega(X,Y,Z) = X\omega(Y,Z) + Y\omega(Z,X) + Z\omega(X,Y) -$$
$$+ \omega(X,[Y,Z]) + \omega(Y,[Z,X]) - \omega(Z,[X,Y]) =$$
$$= < t, [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] > = 0$$

в силу тождества Якоби в алгебре Ли lG. ■

Рассмотрим теперь полупростую группу G_2, которая может быть реализована как группа автоморфизмов алгебра чисел Келли и в частности подгруппа SO_7.

Известно, что система $\Delta_+(G_2)$ положительных корней группы G_2 имеет вид:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

причем можно считать, что попарные скалярные произведения простых корней α_1 и α_2 имеют вид:

$$< \alpha_1, \alpha_1 > = 1 \qquad < \alpha_1, \alpha_2 > = -\frac{3}{2} \qquad < \alpha_2, \alpha_2 > = 3$$

Пусть

$$lG_2 = lT_2 - \sum_{\alpha \in D(G_2)} < E_\alpha >$$

- корневое разложение, где E_α - корневые векторы и $< E_\alpha, E_{-\alpha} >$ не зависит от α.

Обозначив через $V(\pi_1)$ пространство представления $\pi_1 : G_2 \to SO_7$ и используя алгоритм Дынкина (см. [Дын]) нахождения весов неприводимого представления полупростой группы Ли по ее схеме Дынкина находим, что система весов π_1 есть :

$$2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, 0, -\alpha_1, -\alpha_1 - \alpha_2, -2\alpha_1 - \alpha_2$$

Соответствующие единичные весовые векторы обозначим через

$$v_3, v_2, v_1, v_0, v_{-1}, v_{-2}, v_{-3}$$

и введем симметрическую билинейную форму $\psi : V(\pi_1) \times V(\pi_1) \to \mathbb{R}$:

$$\psi = \sum_{i=1}^{3} v_i^* v_{-i}^* - \hat{v}_0^* \hat{v}_0^*$$

где $\{v_i^*\}$ - дуальный базис к $\{v_i\}$ и $\hat{v}_0 = v_0/\sqrt{2}$.

Матрица ψ в базисе $\{v_i\}$ имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & s \\ & -2 & \\ s & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Положим

$$so_7(\psi) = \{X \in GL_7(\mathbb{R}) : XS + SX^t = 0\}$$

Нетрудно видеть, что

$$X \in SO_7(\psi) \quad \leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} A & 2s^t x & B \\ y & 0 & x \\ C & 2s^t y & D \end{pmatrix}$$

где $D = -s^t As, B = -s^t Bs, C = -s^t Cs$. ($A \to -s^t As$ - косая симметрия относительно побочной диагонали). Базис $\{v_i\}$ называется базисом Витта (см. [Бур]).

Из определения видно, что $so_7(\psi) = B_3$ - простая алгебра Ли из классической серии B_n.

Лемма 4.1.3. *Корневое разложение B_3 имеет вид:*

$$B_3 = h + \sum_{\beta \in \Delta(B_3)} < X_\beta >$$

где $h = lT_3 =< H_1, H_2, H_3 >, H_i = E_{i,i} - E_{-i,-i}$.

Система корней B^3 имеет вид $\{\pm\epsilon_i, \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j | i, j = 1,3\}$, где $\{\epsilon_i\}$ – дуальный базис к $\{H_i\}$ в h^*. Кроме того:

$$
\begin{aligned}
X_{+\epsilon_i} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(+2E_{i,0} + E_{0,-i}) \quad i = 1,3 \\
X_{-\epsilon_i} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-2E_{-i,0} + E_{0,i}) \quad i = 1,3 \\
X_{+\epsilon_i-\epsilon_j} &= E_{i,j} - E_{-j,-i} \quad 1 \le i < j \le 3 \\
X_{+\epsilon_j-\epsilon_i} &= E_{i,-j} - E_{j,i} \quad 1 \le i < j \le 3 \\
X_{+\epsilon_i+\epsilon_j} &= E_{i,-j} - E_{j,-i} \quad 1 \le i < j \le 3 \\
X_{-\epsilon_i-\epsilon_j} &= E_{-i,j} - E_{-j,i} \quad 1 \le i < j \le 3
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

и выполнены соотношения

$$
\begin{aligned}
&[X_{+\epsilon_i}, X_{-\epsilon_i}] = -H_i \\
&[X_{+\epsilon_i-\epsilon_j}, X_{+\epsilon_j-\epsilon_i}] = -H_i + H_j \\
&[X_{+\epsilon_i+\epsilon_j}, X_{-\epsilon_i-\epsilon_j}] = -H_i - H_j
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

Лемма 4.1.4. *Пусть $Y_\alpha = \pi_1(E_\alpha)$. Тогда с точностью до присоединенного действия Ad_{T^2}:*

$$
\begin{array}{llll}
Y_{+\alpha_1} & = -\sqrt{2}X_{+\epsilon_1} - X_{\epsilon_3-\epsilon_2} & Y_{-\alpha_1} & = -\sqrt{2}X_{-\epsilon_1} - X_{\epsilon_2-\epsilon_3} \\
Y_{-\alpha_1+\alpha_2} & = +\sqrt{2}X_{+\epsilon_2} - X_{\epsilon_3-\epsilon_1} & Y_{-\alpha_1-\alpha_2} & = +\sqrt{2}X_{-\epsilon_2} - X_{\epsilon_1-\epsilon_3} \\
Y_{+2\alpha_1+\alpha_2} & = -\sqrt{2}X_{+\epsilon_3} - X_{+\epsilon_1+\epsilon_2} & Y_{-2\alpha_1-\alpha_2} & = -\sqrt{2}X_{-\epsilon_3} - X_{-\epsilon_1-\epsilon_2} \\
Y_{+\alpha_2} & = -\sqrt{3}X_{+\epsilon_2-\epsilon_1} & Y_{-\alpha_2} & = -\sqrt{3}X_{+\epsilon_1-\epsilon_2} \\
Y_{+3\alpha_1+\alpha_2} & = -\sqrt{3}X_{+\epsilon_1+\epsilon_3} & Y_{-3\alpha_1-\alpha_2} & = -\sqrt{3}X_{-\epsilon_1-\epsilon_3} \\
Y_{+3\alpha_1+2\alpha_2} & = -\sqrt{3}X_{+\epsilon_2-\epsilon_3} & Y_{-3\alpha_1-2\alpha_2} & = -\sqrt{3}X_{-\epsilon_2-\epsilon_3}
\end{array}
\tag{4.1.4}
$$

Доказательство: прямая проверка с использованием (4.1.2).
Например :

$$
\begin{aligned}
[Y_{\alpha_1}, Y_{-2\alpha_1-\alpha_2}] &= [\sqrt{2}X_{\epsilon_1} + X_{\epsilon_3-\epsilon_2}, \sqrt{2}X_{-\epsilon_3} - X_{-\epsilon_1-\epsilon_2}] = \\
&= 2[X_{\epsilon_1}, X_{-\epsilon_3}] + \sqrt{2}[X_{\epsilon_3-\epsilon_2}, X_{-\epsilon_3}] - \\
&- \sqrt{2}[X_{\epsilon_1}, X_{-\epsilon_1-\epsilon_2}] - [X_{\epsilon_3-\epsilon_2}, X_{-\epsilon_1-\epsilon_2}] = \\
&= -2X_{\epsilon_1-\epsilon_3} + \sqrt{2}X_{-\epsilon_2} + \sqrt{2}X_{-\epsilon_2} = 2Y_{-\alpha_1-\alpha_2}
\end{aligned}
$$

поскольку

$$
[X_{\epsilon_i}, X_{-\epsilon_j}] = -\frac{1}{2}[2E_{i,0} + E_{0,-i}, 2E_{-j,0} + E_{0,j}] = -E_{i,j} + E_{-j,-i} = -X_{\epsilon_i-\epsilon_j}
$$

$$
\begin{aligned}
[X_{\epsilon_i-\epsilon_j}, X_{-\epsilon_j}] &= [-E_{j,i} + E_{-i,-j}, -\frac{1}{\sqrt{2}}(2E_{-j,0} + E_{0,j})] = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}(2E_{-i,0} + E_{0,i}) = X_{-\epsilon_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X_{\epsilon_i}, X_{-\epsilon_i-\epsilon_j}] &= \frac{1}{\sqrt{2}}[2E_{i,0} + E_{0,-i}, -E_{-j,i} + E_{-i,j}] = \\
&= +\frac{1}{\sqrt{2}}(2E_{-j,0} + E_{0,j}) = -X_{-\epsilon_j}
\end{aligned}
$$

$[X_{\epsilon_i-\epsilon_k}, X_{\epsilon_j-\epsilon_k}] = 0$ ■

Пользуясь (4.1.3), (4.1.4) находим $t_a = [Y_\alpha, Y_{-\alpha}]$:

$$\begin{aligned}
t_{\alpha_1} &= [Y_{\alpha_1}, Y_{-\alpha_1}] = -2H_1 + H_2 - H_3 \\
t_{\alpha_2} &= [Y_{\alpha_2}, Y_{-\alpha_2}] = 3H_1 - 3H_2 \\
t_{\alpha_1+\alpha_2} &= [Y_{\alpha_1+\alpha_2}, Y_{-\alpha_1-\alpha_2}] = -2H_2 + H_1 - H_3 \\
t_{2\alpha_1+\alpha_2} &= [Y_{2\alpha_1+\alpha_2}, Y_{-2\alpha_1-\alpha_2}] = -2H_3 - H_1 - H_2 \\
t_{3\alpha_1+\alpha_2} &= [Y_{3\alpha_1+\alpha_2}, Y_{-3\alpha_1-\alpha_2}] = -3H_1 - 3H_3 \\
t_{3\alpha_1+2\alpha_2} &= [Y_{3\alpha_1+2\alpha_2}, Y_{-3\alpha_1-2\alpha_2}] = -3H_2 - 3H_3
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Нетрудно заметить, что если $\alpha + \alpha' \in \Delta_+(G_2)$, то

$$t_\alpha + t_{\alpha'} = t_{\alpha+\alpha'} \tag{4.1.6}$$

Лемма 4.1.5. *2-форма ω, определенная (4.1.1) имеет вид:*

$$\omega = \sum_{\beta\in\Delta_+(G)} c_\beta E^*_\beta \wedge E^*_{-\beta} \tag{4.1.7}$$

Доказательство: пусть $\omega = \omega_t$, где $t \in T_G$. Нам нужно показать, что если $\alpha+\beta \neq 0$, то $\omega(E_\alpha, E_\beta) = 0$. Действительно мы имеем:

$$\omega(E_\alpha, E_\beta) = < t, [E_\alpha, E_\beta] > = < t, \lambda E_{\alpha+\beta} > = 0 \quad \blacksquare$$

Определим теперь 12-форму на V:

$$\varphi = \bigwedge_{\alpha\in\Delta_+(G_2)} \omega_\alpha \tag{4.1.8}$$

где

$$\omega_a(X, Y) = < [Y_\alpha, Y_{-\alpha}], [X, Y] > \tag{4.1.9}$$

Поскольку $t_\alpha = [Y_\alpha, Y_{-\alpha}] \in lT_2 \subset lT_3$ из леммы 4.1.2 следует, что ω_α и следовательно φ продолжаются до замкнутых SO_7 инвариантных форм на SO_7/T_3. Кроме того в силу леммы 4.1.5

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta\in\Delta_+(SO_7)} c_{\alpha,\beta} X^*_\beta \wedge X^*_{-\beta} \tag{4.1.10}$$

где $c_{\alpha,\beta} = < t_\alpha, [X_\beta, X_{-\beta}] >$ и в силу (4.1.6) для любых $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in \Delta_+(G_2)$ и $\beta \in \Delta_+(SO_7)$ выполнено равенство:

$$c_{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta} = k_1 c_{\alpha_1,\beta} + k_2 c_{\alpha_2,\beta} \tag{4.1.11}$$

Пользуясь (4.1.3), (4.1.5), (4.1.11) находим таблицу коэффициетов $c_{\alpha,\beta}$:

	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	$\epsilon_1-\epsilon_2$	$\epsilon_1-\epsilon_3$	$\epsilon_2-\epsilon_3$	$\epsilon_1+\epsilon_2$	$\epsilon_1+\epsilon_3$	$\epsilon_2+\epsilon_3$
α_1	+2	−1	+1	+3	−1	−2	+1	+3	0
α_2	−3	+3	0	−6	−3	+3	0	−3	+3
$\alpha_1+\alpha_2$	−1	+2	+1	−3	−2	+1	+1	0	+3
$2\alpha_1-\alpha_2$	+1	+1	+2	0	−1	−1	+2	+3	+3
$3\alpha_1+\alpha_2$	+3	0	+3	+3	0	−3	+3	+6	+3
$3\alpha_1+2\alpha_2$	0	+3	+3	−3	−3	0	+3	+3	+6

после некоторых перестановок получим матрицу C:

	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	$\epsilon_2-\epsilon_3$	$\epsilon_1-\epsilon_3$	$\epsilon_1+\epsilon_2$	$\epsilon_1-\epsilon_2$	$\epsilon_1+\epsilon_3$	$\epsilon_2+\epsilon_3$
α_1	+2	−1	+1	−2	+1	+1	+3	−3	0
$\alpha_1+\alpha_2$	−1	+2	+1	+1	−2	+1	−3	0	+3
$2\alpha_1+\alpha_2$	+1	+1	+2	−1	−1	+2	0	−3	+3
α_2	−3	+3	0	+3	−3	0	−6	−3	+3
$3\alpha_1+\alpha_2$	+3	0	+3	−3	0	+3	+3	+6	+3
$3\alpha_1+2\alpha_2$	0	+3	+3	0	−3	+3	−3	+3	+6

(*)

Из (*) следует, что для любого $\alpha \in \Delta_+ G_2$ имеют место соотношения:

$$c_{\alpha,\epsilon_1} = -c_{\alpha,\epsilon_2-\epsilon_3} \qquad c_{\alpha,\epsilon_2} = -c_{\alpha,\epsilon_1-\epsilon_3} \qquad c_{\alpha,\epsilon_3} = c_{\alpha,\epsilon_1+\epsilon_2} \tag{$\ddagger$}$$

Лемма 4.1.6. *Пусть G – группа Ли, алгебра Ли lG которой полупроста. Тогда, если $lG = h \oplus V$, $V = \sum_{\beta\in\Delta(G)} X_\beta$ – корневое разложение и $< X_\beta, X_{-\beta} >= 1$, то для любой $2k$-формы φ вида*

$$\varphi = \sum_{i_1<\ldots<i_k} c_{i_1\ldots i_k} X^*_{i_1} \wedge X^*_{-i_1} \wedge \ldots \wedge X^*_{i_k} \wedge X^*_{-i_k} \tag{4.1.12}$$

комасса φ равна:

$$||\varphi||^* = \max_I |c_{i_1\ldots i_k}| \tag{4.1.13}$$

Доказательство данной леммы содержится в работе [Ле4].

Лемма 4.1.7. *Положим $\psi = \frac{\varphi}{||\varphi||^*}$. Тогда*

$$\begin{aligned}
\psi = \Big[& - X^*_{\epsilon_1} \wedge X^*_{-\epsilon_1} \wedge X^*_{\epsilon_2} \wedge X^*_{-\epsilon_2} \wedge X^*_{\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_3} - \\
& - X^*_{\epsilon_1} \wedge X^*_{-\epsilon_1} \wedge X^*_{\epsilon_2} \wedge X^*_{-\epsilon_2} \wedge X^*_{\epsilon_1+\epsilon_2} \wedge X^*_{-\epsilon_1-\epsilon_2} + \\
& + X^*_{\epsilon_1} \wedge X^*_{-\epsilon_1} \wedge X^*_{\epsilon_1-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_1+\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_3} + \\
& + X^*_{\epsilon_2-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_2+\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_2} \wedge X^*_{-\epsilon_2} \wedge X^*_{\epsilon_3} \wedge X_{-\epsilon_3} + \\
& + X^*_{\epsilon_1} \wedge X^*_{-\epsilon_1} \wedge X^*_{\epsilon_1-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_1+\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_1+\epsilon_2} \wedge X_{-\epsilon_1-\epsilon_2} + \\
& + X^*_{\epsilon_2-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_2-\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_2} \wedge X^*_{-\epsilon_2} \wedge X^*_{\epsilon_1+\epsilon_2} \wedge X_{-\epsilon_1-\epsilon_2} - \\
& - X^*_{\epsilon_2-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_2+\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_1-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_1+\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_3} \wedge X_{-\epsilon_3} - \\
& X^*_{\epsilon_2-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_2+\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_1-\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_1+\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_1+\epsilon_2} \wedge X^*_{-\epsilon_1-\epsilon_2} \Big] \wedge \\
& \wedge X^*_{\epsilon_1-\epsilon_2} \wedge X^*_{-\epsilon_1+\epsilon_2} \wedge X^*_{\epsilon_1+\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_1-\epsilon_3} \wedge X^*_{\epsilon_2+\epsilon_3} \wedge X^*_{-\epsilon_2-\epsilon_3} + \\
& + \sum c_{i1\ldots i6} X^*_{\beta_{i1}} \wedge X^*_{-\beta_{i1}} \wedge \ldots X^*_{\beta_{i6}} \wedge X^*_{-\beta_{i6}}
\end{aligned}$$

где $|c_I| < 1$ *и среди слагаемых, входящих в сумму, не встречается ни одно из слагаемых в квадратных скобках.*

Для доказательства заметим, что коэффициент $c_{i_1\ldots i_6}$ в форме φ при $X^*_{\beta_{i1}} \wedge X^*_{-\beta_{i1}} \wedge \ldots X^*_{\beta_{i6}} \wedge X^*_{-\beta_{i6}}$ не что иное как симметризатор Sym минора $M_{i_1\ldots i_6}$ матрицы $C = (c_{\alpha,\beta})$, столбцы которого соответствуют $(\beta_{i1}, \ldots, \beta_{i6})$, где под симметризатором матрицы $A = (a_{ij})_1^k$ мы понимаем следующую величину:

$$Sym(A) = \sum_{\sigma \in S_k} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \tag{4.1.14}$$

где S_k – группа перестановок порядка k. Теперь из $\binom{*}{*}$ следует, что все коэффициенты в квадратных скобках равны по модулю и имеют соответствующие знаки. Вычисляя на компьютере симметризаторы 84 (C_9^6) миноров матрицы C задаваемой $(*)$ (см. приложение) убеждаемся в том, что коэффициенты в кваратных скобках по модулю равны 38880 (=144*270), а остальные коэффициенты равны нулю либо в 2,3 или 4 раза меньше по модулю. ■

Рассмотрим $W = T_{[e]}(G_2/T_2)$ как единичный разложимый 12-вектор.

Лемма 4.1.8. $\psi(W) = 1$

Доказательство : используя (4.1.4) получаем следующее представление для W:

$$\begin{aligned}W = \tfrac{1}{27}\, & (\sqrt{2}X_{\epsilon_1} + X_{\epsilon_3-\epsilon_2}) \wedge (\sqrt{2}X_{-\epsilon_1} + X_{\epsilon_2-\epsilon_3}) \wedge \\ & (\sqrt{2}X_{\epsilon_2} - X_{\epsilon_3-\epsilon_1}) \wedge (\sqrt{2}X_{-\epsilon_2} - X_{\epsilon_1-\epsilon_3}) \wedge \\ & (\sqrt{2}X_{\epsilon_3} - X_{\epsilon_1+\epsilon_2}) \wedge (\sqrt{2}X_{-\epsilon_3} - X_{-\epsilon_1-\epsilon_2}) \wedge \\ & (X_{\epsilon_2-\epsilon_1} \wedge X_{\epsilon_1-\epsilon_2} \wedge X_{\epsilon_1+\epsilon_3} \wedge X_{-\epsilon_1-\epsilon_3} \wedge X_{\epsilon_2+\epsilon_3} \wedge X_{-\epsilon_2-\epsilon_3})\end{aligned}$$

и используя лемму 4.1.7 получаем:

$$\begin{aligned}\psi(W) = {} & \tfrac{1}{27}\big(-(2)(2)(2)(-1) - (2)(2)(1)(-1) + (2)(-1)(2)(-1) + \\ & - (-1)(2)(2)(-1) + (2)(-1)(1)(-1) + (-1)(2)(1)(-1) - \\ & - (-1)(-1)(2)(-1) - (-1)(-1)(1)(-1)\big) = \\ = {} & \tfrac{1}{27}(2^3 + 2^2 - 2^2 + 2^2 + 2 + 2 + 2 + 1) = 1 \qquad ■\end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 4.1.1 : Пусть $\hat{\psi}$ – продолжение ψ до SO_7-инвариантной замкнутой 12-формы на SO_7/T_3. Тогда в силу лемм 4.1.6, 4.1.7 $\hat{\psi}$ – форма калибровки и по лемме 4.1.8 $\rho(G_2/T_2)$ – $\hat{\psi}$-калибрируемое подмногообразие. Применяя основную теорему главы 1 получаем, что $\rho(G_2/T_2) \subset SO_7/T_3$ – глобально-минимальное в своем классе гомологий подмногообразие. Теорема 4.1.1 доказана. ■

§4.2. Вложения кватернионных грассманианов.

В данном параграфе мы доказываем, что стандартные вложения кватернионных грассманианов друг в друга дают примеры глобально минимальных подмногообразий в своем классе гомологий. Для комплексных грассманианов этот результат был доказан в [Дао3].

Введем кватернионные и Кэлеровы формы калибровки. А именно, рассмотрим $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ с естественной комплексной структурой

$$\begin{aligned} Je_{2k-1} &= +e_{2k} \\ Je_{2k} &= -e_{2k-1} \end{aligned}$$

Тогда Кэлерова форма имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1,n} e^*_{2k} \wedge e^*_{2k-1}$$

ее комасса равна 1 и если положить

$$W_l = \frac{1}{l!}\omega^l$$

то $\|W_l\|^* = 1$ и грань

$$G(W_l) = G_{\mathbb{C}}(l, \mathbb{C}^n)$$

- грассманиан комплексных плоскостей в $\mathbb{C}^n$.

Аналогичным образом рассмотрим $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ и пусть I, J, K – комплексные структуры, соответствующие умножению на i, j, k. Тогда кватернионная форма имеет вид

$$\varphi = \tfrac{1}{6}(\omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2) \tag{4.2.1}$$

ее комасса также равна 1 и если положить

$$\Theta_l = \frac{1}{3(l!)}\varphi^l \tag{4.2.2}$$

то $\|\Theta_l\|^* = 1$ и грань

$$G(\Theta_l) = G_{\mathbb{H}}(l, \mathbb{H}^n)$$

- грассманиан кватернионных плоскостей в $\mathbb{H}^n$.

Напомним теперь как устроено картановское вложение симметрического пространства (см. [Фом5]). Пусть G –связная компактная группа, $\sigma : G \to G$ – инволютивный автоморфизм ($\sigma^2 = id$), $H = \{g|\sigma(g) = g\}$ – стационарная подгруппа. Тогда картановское вложение симметрического пространства G/H в группу G есть

$$V = \{g\sigma(g)|g \in G\} \tag{4.2.3}$$

Если $\mathcal{H} = T_eH$, то $B = T_eV = \mathcal{H}^\perp$ относительно метрики Киллинга на G. Группа G действует на V по формуле

$$g(v) = gv\sigma(g^{-1}) \tag{4.2.4}$$

и следовательно H действует на B присоединенным образом

$$h(x) = hxh^{-1} \tag{2.4.5}$$

Следовательно форма Θ на B с постоянными коэффициентами продолжается до G-инвариантной формы на G/H если и только если она Ad_H-инвариантна.

В дальнейшем нас интересует случай $G = Sp_{m+n}, H = Sp_m \times Sp_n, V = G_{\mathbb{H}}(m, \mathbb{H}^{m+n})$. Где Sp_n – группа симплектических преобразований, т.е. преобразований, сохраняющих на $\mathbb{H}^n$ форму

$$< a, b >= Re \sum_{j+1,n} a_j\bar{b}_j \tag{2.4.6}$$

Легко видеть, что

$$Sp_n = \left\{ X \in SU_{2n} | X = \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \right\} \tag{2.4.7}$$

В рассматриваемом случае B и H имеют вид

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & C & 0 & D \\ -\overline{C}^T & 0 & D^T & 0 \\ 0 & -\overline{D}^T & 0 & \overline{C} \\ -\overline{D}^T & 0 & -\overline{C}^T & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ -\overline{B}_1^T & 0 & \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & -\overline{B}_2^T & 0 & \overline{A}_2^T \end{pmatrix} \right\}$$

Отсюда видно, что мы можем рассматривать B как $\mathbb{R}^{4mn} = \mathbb{H}^m \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^n$, причем присоединенное действие H наз B имеет вид

$$h(x) = h_1 \times h_2^{-1} = (h_1C, Dh_2^{-1})$$

где $h = (h_1, h_2) \in Sp_m \times Sp_n$, $x = C + Dj$, C, D – комплексные $m \times n$ матрицы.

Теорема 4.2.1. *Для любых $m' < m, n' < n$ стандартное вложение*

$$G_{\mathbb{H}}(m', \mathbb{H}^{m'+n'}) \hookrightarrow G_{\mathbb{H}}(m, \mathbb{H}^{m+n})$$

дает пример глобально минимального в своем классе гомологий подмногообразия.

Доказательство теоремы 4.2.1: Рассмотрим в $B = \mathbb{H}^m \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^n = \mathbb{H}^{mn}$ кватернионный базис $\{e_\nu \otimes f_\mu\}(\nu = 1, m; \mu = 1, n)$ где $\{e_\nu\}(\{f_\mu\})$ – соответственно кватернионные базисы в $\mathbb{H}^m(\mathbb{H}^n)$. Пусть $\Theta_{m'n'}$ кватернионная форма с постоянными коэффициентами на B относительно данного базиса. Тогда несложно видеть, что $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}\ h^*\Theta_{m'n'}$ есть кватерниония форма относительно кватернионного базиса $\{e'_\nu \otimes f'_\mu\}$, где $e'_\nu = h_1^{-1} e_\nu, f'_\mu = f_\mu h_2$
Определим теперь $Ad\mathcal{H}$-инвариантную 4m'n'-форму на B по формуле

$$\Theta' = \int\limits_{\mathcal{H}} (h^*\Theta) d\nu \qquad (4.2.8$$

где ν – нормированная правоинвариантная мера на $\mathcal{H} = Sp_m \times Sp_n$.

Очевидно, что $||\Theta'||^* \leq 1$, и для любой кватернионной m'n'-плоскости π мы имеем

$$\Theta'(\pi) = \int\limits_{\mathcal{H}} (h^*\Theta)(\pi) d\nu = \int\limits_{\mathcal{H}} \Theta(h_*\pi) d\nu = \int\limits_{\mathcal{H}} 1 d\nu = 1$$

поскольку $h_*\pi \in G(\Theta)\ \forall h \in \mathcal{H}$.

В качестве π рассмотрим $B' = T_e V'$. Тогда $\Theta'(B') = 1, ||\Theta'||^* = 1$ и Θ' продолжается до $Sp(m+n)$-инвариантной формы Φ на $G_{\mathbb{H}}(m, \mathbb{H}^{m+n})$ комассы 1 (замкнутой в силу 4.2.1, 4.2.2, 4.2.8 и кэлеровости $G_{\mathbb{H}}(m, \mathbb{H}^{m+n})$ относительно каждой из комплексных структур I,J,K). Следовательно $\forall v' \in V' = Sp_{m'+n'}/Sp_{m'} \times Sp_{n'}$ имеем:

$$\Phi_{v'}(T_{v'}V') = \Phi_{v'}(g_* B') = g^*\Phi_e(B') = \Theta'(B') = 1$$

где $v' = g\sigma(g^{-1}), g \in Sp(m'+n') \subset Sp(m+n)$

Поэтому $V' \subset V$ является Φ-калибрируемым многообразием. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Ал] **Александров А.В.**, Замечания к теореме Ефимова о дифференциальных признаках гомеоморфизма, *Всесоюзная Конференция по Геометрии и Анализу*, Новосибирск 1989, стр.4

[Ам] **Аминов Ю.А.**, О неустойчивости минимальной поверхности в n-мерном римановом пространстве положительной кривизны, *Мат.сб.*, 100(1976), N3, стр.400–419

[Бер] **С.Н.Бернштейн**, Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа, *Собр.соч.*,3(1960), стр.251–258

[Бо1] **А.А.Борисенко**, Строение l-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в евклидовом пространстве, *Укр.Геом.сб.*, 13(1973), стр.18–27

[Бо2] **А.А.Борисенко**, О полных параболических поверхностях, *Укр.Геом.сб.*, 28(1985),стр.8–19

[Бо3] **А.А.Борисенко**, Внешне геометрические свойства параболических поверхностей и топологические свойства седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга 1, *Мат.сб.*, 116(158)(1981),стр.440–457

[Бо4] **А.А.Борисенко**, Внешние свойства компактных параболических поверхностей в римановом пространстве, *Мат.сб.*, 133(175)(1987),вып.1

[Бор1] **А.А.Борисенко(мл)**, Исследование глобальной минимальности вложений однородного пространства G_2/T_2, индуцированных фундаментальными представлениями G_2, *Труды Сем.по тенз.и вект.анал.*, 24(1991),стр.13–22

[Бор2] **А.А.Борисенко(мл)**, Геометрия кватернионных грассманианов, *Алг., Геом.и Дискр.мат. в нелин.задачах М.МГУ*, 1991

[Бор3] **А.А.Борисенко(мл)**,Сильно-параболические ассоциативные поверхности, *УМН*, 48(1993),вып.5,стр.165–166

[Бор4] **А.А.Борисенко(мл)**,Гармонические морфизмы ассоциированные с минимальными параболическими поверхностями в Евклидовом пространстве, *Вестн.Моск.Унив., сер. Математика,механика* (1996), вып.1, стр. 3–12

[Бур],**Н.Бурбаки**, Группы и алгебры Ли главы 7,8, *М.Мир*, 1978

[Вин-Он],**Э.Б.Винберг,А.Л.Онищик**, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, *М.Наука*, 1988

[Дао1] **Дао Чонг Тхи**, Минимальные поверхности в компактных группах Ли, *УМН*, 33(1978),п.3,стр.163–164

[Дао2] **Дао Чонг Тхи** Многомерная вариационная задача в симметрических пространствах,*Функ.Ан.и его прил.*, 12(1978),п.1,стр.72–73

[Дао3] **Дао Чонг Тхи**,О вещественных минимальных потоках на компактных римановых многообразиях,*Изв.АН СССР,сер.мат.*, 41(1977),п.4,стр.853–867

[Дао-Фом] **Дао Чонг Тхи,А.Т.Фоменко**,Минимальные поверхности и проблема Плато,*М.Наука*, 1988

[ДНФ] **Б.А.Дубровин,С.П.Новиков,А.Т.Фоменко**,Современная геометрия, *М.Наука*, ч.1,2(1979), ч.3(1984)

[Дын] **Е.Б.Дынкин**, Максимальные подгруппы классических групп, *Труды ММО*, 1(1952),стр.39–166

[Еф1] **Н.В.Ефимов**, Поверхности с медленно меняющейся отрицательной кривизной, *УМН*, 21(1966),вып.5,стр.3–58

[Еф2] **Н.В.Ефимов**, Невозможность в трехмерном Евклидовом пространстве полной регулярной поверхности с отрицательной верхней гранью гауссовой кривизны, *ДАН СССР*, 150(1965),вып.6,стр.1206–1209

[Кар] **Э.Картан**, Геометрия групп Ли и симметрических пространств, М.ИЛ, 1949

[Кир] **А.А.Кириллов**, Элементы теории представлений,*М.Наука*, 1978

[Ко-Но] **Ш.Кобаяси,К.Номидзу**, Основы дифференциальной геометрии, *М.Наука* т.1,2(1981)

[Кур] **Р.Курант**, Принцип Дирихле,конформные отображения и минимальные поверхности, *М.ИЛ*, 1953

[Ле-Фом1] **Ле Хонг Ван,А.Т.Фоменко**, Лагранжевы многообразия и индекс Маслова в теории минимальных поверхностей, *ДАН СССР*, 299(1988), стр.42–45

[Ле-Фом2] **Ле Хонг Ван,А.Т.Фоменко**, Объемы минимальных поверхностей и тензор кривизны Римановых многообразий, *ДАН СССР*, 300(1988), стр.1308–1312

[Ле-Фом3] **Ле Хонг Ван,А.Т.Фоменко**, Критерий минимальности лагранжевых подмногообразий в Кэлеровых многообразиях, *Мат.Заметки*, 42(1987), стр. 559–572

[Ле1] **Ле Хонг Ван**, Абсолютно-минимальные поверхности и калибровки на орбитах присоединенного представления классических групп Ли, *ДАН СССР*, 298(1988),стр.1308–1311

[Ле2] **Ле Хонг Ван**, Минимальные поверхности в однородных пространствах, *Изв.АН СССР сер.мат.*, 52(1988),стр.408–423

[Ле3] **Ле Хонг Ван**, Минимальные Ф-Лагранжевы поверхности в почти-Эрмитовых многообразиях, *Мат.сб.* 180(1989),стр.924–936

[Ле4] **Ле Хонг Ван**, Эффективные калибровки в теории минимальных поверхностей, *Докт.дисс.,М.МГУ* 1989

[Нич] **И.С.С.Ниче**, О новых результатах в теории минимальных поверхностей, *Математика*, 11(1967),вып.3

[Осс] **Р.Оссерман**, Минимальные поверхности, *УМН*, 22(1967),вып.4, стр.55–136

[Хел] **С.Хелгассон**, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, *М.Мир*, 1964

[Фед] **Г.Федерер**, Геометрическая теория меры, *М.Наука*, 1987

[Фом1] **А.Т.Фоменко**, Вариационные методы в топологии, *М.Наука*, 1982

[Фом2] **А.Т.Фоменко**, Симплектическая геометрия, *М.МГУ*, 1988

[Фом3] **А.Т.Фоменко**, О минимальных объемах топологических глобально минимальных поверхностей в кобордизмах, *Изв.АН СССР сер.мат.*, 45(1981), п.1,стр.187–212

[Фом4] **А.Т.Фоменко**, Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей, *УМН*, 36(1981),вып.6,стр.105–135

[Фом5] **А.Т.Фоменко**, Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. *М.МГУ*, 1983

[Фом6] **А.Т.Фоменко**, Топологические вариационные задачи, *М.МГУ*, 1985

[Фом7] **А.Т.Фоменко**, Универсальная оценка снизу на скорость роста глобально по минимальных решений, *ДАН СССР*, 251(1980),стр.295–299

[Эйз] **Л.Эйзенхарт**, Риманова геометрия, *М.ИЛ*, 1948

[Alm] **F.J.Almgren**, Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, *Ann.of Math(2)*, 84(1966),n.3,pp.277–293

[BDG] **E.Bombieri,E.de Giorgi,E.Giusti**, Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent.Math.*, 7(1969),pp.243–268

[Bar] **J.L.Barbosa**, On minimal immersions of S^2 into S^{2n}, *Trans.AMS*, 210(1975), n.1,pp.75–106

[Bor1] **A.A.Borisenko(jr.)**, Ruled Special Lagrangian Surfaces, *Adv.in Sov.Math.* 15(1993),pp.269–285

[Bor2] **A.A.Borisenko(jr.)**, On the structure of 3-dimensional minimal parabolic surfaces in Euclidean space, *Preprint*, 1992

[Bor3] **A.A.Borisenko(jr.)**,Circular immersions of Almost-Hermitian manifolds in Euclidean Space, *Preprint*, 1994

[Bor4] **A.A.Borisenko(jr.)**, On the rigidity of the cone $C(S^n \times S^n)$ in Euclidean Space, *Preprint* 1995

[Bor5] **A.A.Borisenko(jr.)**,On the structure of maximal space-like 1-parabolic 3-folds in Minkowski Space and associated harmonic morphisms, *Preprint* 1995

[Bor6] **A.A.Borisenko(jr.)**, Harmonic morphisms associated with minimal parabolic 3-folds in Riemannian Space *Preprint* 1995

[Brd] **P.Baird**,Harmonic morphisms onto Riemannian surfaces and generalized analitic functions, *Ann.Inst.Fourier* 37(1987), pp.135–173

[Brd-El] **P.Baird,J.Eells**,A conservation law for harmonic maps, in *Geometry Symposium Utrecht 1980*, Lecture Notes in Math. 894, Springer(1982),pp.1–25

[Brd-Gu] **P.Baird,S.Gudmunsson**, P-harmonic maps and minimal submanifolds, *Math.Ann.*, 294(1992),pp.611-624

[Brd-Ra] **P.Baird,A.Ratto**, Conservation laws,equivariant harmonic maps and harmonic morphisms, *Proc.Lond.Math.Soc.*, 64(1992),pp.197-224

[Brd-Wo1] **P.Baird,J.C.Wood**, Bernstein theorems for harmonic morphisms from $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{S}^3$, *Math.Ann.*, 280(1988),pp.579–603

[Brd-Wo2] **P.Baird,J.C.Wood**, Harmonic morphisms and conformal foliations by geodesics of three-dimensional space forms, *J.Austral.Math.Soc.*, 51(1991),pp.118–153

[Brd-Wo3] **P.Baird,J.C.Wood**, Harmonic morphisms,Seifert fibre spaces and conformal foliations, *Proc.Lond.Math Soc.*, 64(1992),170–197

[Brd-Wo4] **P.Baird,J.C.Wood** The geometry of a pair of Riemannian foliations by geodesics and associated harmonic morphisms, *Bull.Soc.Math.Belg.*,Ser.B 44(1992), pp.115–139

[Brd-Wo5] **P.Baird,J.C.Wood** Hermitian structures and harmonic morphisms in higher-dimensional Euclidean spaces,*Preprint*,Un.of Leeds and Un.of Brest(1994)

[Bry1] **R.Bryant**, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, *J.Diff.Geom.*, 17(1982),pp.455-473

[Bry2] **R.Bryant**, Some remarks on the geometry of austere submanifolds, *Bol.Soc. Bras.Mat.*, 21(1991),n.2,pp.133–157

[Bry3] **R.Bryant**, Submanifolds and special structures on the Octonions, *J.Diff.Geom.*, 17(1982), pp.185-232

[Bry4] **R.Bryant**, Minimal Lagrangian submanifolds of Kahler-Einstein manifolds, *Lect.Notes in Math.* 1255(1987),pp.1–12

[Cal] **E.Calabi**, Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres, *J.Diff.Geom.*, 1(1967),pp.111–125

[Che] **S.S.Chern**, On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature, *Problems in Analysis*, Princeton Univ.Press(1970),pp.27–40

[Che-Kui] **S.S.Chern,N.Kuiper**, Some theorems on the isometric imbedding of a compact Riemaniian manifolds in Euclidean space, *Ann.of Math.(2)*, 56(1952), pp.422-430

[Chn] **B.Cheng**. Area-minimizing equivariant cones and coflat calibrations, *Ph.D.Thesis,MIT,Boston*, 1987

[DG1] **M.Dajczer,D.Gromoll**,Gauss parametrization and rigidity aspects of submanifolds, *J.Diff. Geom.* 22(1985) n1,pp.1–12

[DG2] **M.Dajczer,D.Gromoll**, Circularimmersions of Kahlerian manifolds, *J.Diff. Geom.* 22(1985),n.1,pp.13–24

[Ej] **N.Ejiri**,Equivariant minimal immersions of S^2 into S^{2m}, Trans.AMS,297(1986), n.1,pp.105–124

[El-Ra] **J.Eells,A.Ratto**, Harmonic maps and minimal immersions with symmetries, Preprint 1994

[El-Sal] **J.Eells,S.Salamon**, Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, *Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa(4)*, 12(1985), pp.589–640

[El-Sam] **J.Eells,J.H.Sampson**, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer.J.Math.*, 86(1964),pp.109–160

[El-Lem1] **J.Eells,L.Lemaire**,A report on harmonic maps, *Bull.Lond.Math.Soc.*, 10(1978),pp.1–68

[El-Lem2] **J.Eells,L.Lemaire**,Another report on harmonic maps, *Bull.Lond.Math. Soc.*, 20(1988),pp.385–524

[Erb] **J.Erbacher**, Reduction of the codimension of an isometric immersion, *J.of Diff.Geom.*, 5(1971),pp.333-340

[Fug] **B.Fuglede**,Harmonic morphisms between Riemannian manifolds. *Ann.Inst. Fourier* 29(1978),pp.107–144

[G-M-Z] **H.Gluck,F.Morgan,W.Ziller**, Calibrated Geometries in Grassman manifolds, *Comm.Math.Helv.*, 64(1989),pp.256–268

[G-O-R] **R.Gulliver,R.Osserman,H.Royden**, A theory of branched immersions of surfaces, *Amer.J.Math.*, 95(1973),pp.750–812

[Gr] **A.Grey**, Minimal varieties and almost-Hertmitian manifolds,*Mich. Math.J.*, 12(1965),pp.273–287

[Gu1] **S.Gudmunssen**,On the geometry of harmonic morphisms, *Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.*, 108((1990),pp.461–466

[Gu2] **S.Gudmunssen**,Harmonic morphisms between spaces of constant curvature, *Proc.Edinb.Math.Soc.*, 36(1992),pp.133–143

[Gu-Wo] **S.Gudmunssen,J.C.Wood**, Multivalued harmonic morphisms, *Math. Scand.*, 73(1993),pp.127–155

[H-L1] **R.Harvey,H.B.Lawson**, Calibrated Geometries, *Acta Math.*, 148(1982), pp.45–157

[H-L2] **R.Harvey,H.B.Lawson**, Calibrated foliations(foliations and mass-minimizing currents, *Amer.J.Math.*, 104(1982),n.3,pp.607–633

[Ish] **T.Ishihara**,A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions, *J.Math.Kyoto Univ.*, 19(1979),pp.215–229

[Iv] **A.O.Ivanov**, Calibration Forms and New Examples of Globally Minimal Surfaces, *Adv.in Sov.Math.*, 15(1993),pp.235–267

[Ken] **K.Kenmotsu**, On minimal immersions of $\mathbb{R}^2$ into S^N, *J.Math.Soc.Japan*, 28(1976),n.1

[Law1] **H.B.Lawson**, Complete minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$, *Ann.of Math.*, 92(1970),pp. 335–374

[Law2] **H.B.Lawson**, The equivariant Plateau problem and interior regularity, *Trans.AMS*, 179(1972),pp.223–249

[Law3] **H.B.Lawson**, The global behaviour of minimal surfaces in S^n, *Ann.Math.*, 92(1970),n.2,pp.224–237

[Le1] **Le Hong Van**, Relative calibrations and stability of minimal surfaces, *Lect.Notes in Math.*, 1453(1990),pp.245–262

[Le2] **Le Hong Van**, Application of integral geometry to minimal surfaces, *Int.J.of Math.*, 4(1993),pp.89–111

[Lew] **H.Lewy**, On the nonvanishing of the Jacobian of a homeomorphism by harmonic gradients, *Ann.of Math.(2)*, 88(1968),pp.529–578

[Lwl] **G.Lawlor**, The angle criterion, *Invent.Math.*, 95(1989), pp.49–73

[Mal] **R.Maltz** The nullity spaces of curvature-like tensors, *J.Diff.Geom.*, 7(1972), pp.519–523

[Mrg1] **F.Morgan**, The exterior algebra $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ and area minimization, *Lin.Alg. and Appl.*, 66(1985),pp.1–38

[Mrg2] **F.Morgan**, On the singular structure of three-dimensional area-minimizing surfaces, *Trans.AMS*, 276(1983),n.1,pp.137–143

[Nan] **D.Nance** Sufficient conditions for a pair of n-plains to be area-minimizing, *Math.Ann.*, 309(1987),n.1,pp.161–164

[Ob] **M.Obata**, The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature, *J.Diff.Geom.*, 2(1968),pp.217–233

[Oh] **Y.Ohnita**, On stability of minimal manifolds in compact symmetric spaces, *Comp. Math.*, 64(1982), N2, pp.157–190

[O'Ne] **B.O'Neill**, The fundamental equation of a submersion, *Michigan Math.J.*, 13(1966),pp.459–469

[Reck] **H.Reckziegel**, On the eigenvalues of a shape operator of an isometric immersion into a space of constant curvature, *Math.Ann.*, 243(1979),pp.71–82

[Ruh] **E.Ruh**,Minimal immersions of 2-spheres into S^4, *Proc.AMS*, 28(1971),pp.219–222

[Ruh-Vil] **E.Ruh,J.Vilms**,The tension field of a Gauss map,*Trans.AMS*,149(1970), pp.569–573

[Sim] **J.Simons**, Minimal varieties in riemannian manifolds, *Ann.of Math.*, 88(1968),pp.62–105

[Sek] **K.Sekigava**, Kodai Math.J., 6(1984),pp.174–185

[Tak] **T.Takahashi**, Minimal immersions of Riemannian manifolds, *J.Math.Soc.Japan*, 18(1966),pp.380–385

[Wo1] **J.C.Wood**, Harmonic morphisms,foliations and Gauss map,*Contemp.Math.*, 49(1986),pp.145–184

[Wo2] **J.C.Wood**, Harmonic morphisms and Hermitian structures on Einstein 4-manifolds, *Internat.J.Math.*, 3(1992),pp.415–439

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИММЕТРИЗАТОРА КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Симметризатор матрицы 6×6.

В настоящем приложении приведена программа, написанная в Borland C++, вычисляющая симметризатор $Sym(M)$ матрицы M размера 6×6.

```
//Работа с матрицей(симметризатор)
#define D 6
#include < stdio.h >
#include < conio.h >
void main()
{
int mass[D][D];
int m[D];
int i1, i2, i3, i4, i5, i6, j, k, l;
long S, P;
m[0]=0; m[1]=0; m[2]=0; m[3]=0; m[4]=0; m[5]=0;
 for (k = 0; k < D; k++)
{ for (j = 0; j < D; j++)
scanf ("%d", &mass[k][j]);
}
for (k = 0; k < D; k++)
{
for (j = 0; j < D; j++)
printf ("%5d", mass[k][j]);
printf ("\n");
}
S=0;
for (i1 = 0; i1 < D; i1++)
{
m[0]=i1;
for (i2 = 0; i2 < D; i2++)
{
if(i2!=i1)
```

```
{ m[1]=i2;
for (i3 = 0; i3 < D; i3++)
{
if (i3!=i1 && i3!=i2)
{ m[2]=i3;
for (i4 = 0; i4 < D; i4++)
{
if (i4!=i1 && i4!=i2 && i4!=i3)
{ m[3]=i4;
for (i5 = 0; i5 < D; i5++)
{
if (i5!=i1 && i5!=i2 && i5!=i3 && i5!=i4)
{ m[4]=i5;
for (i6 = 0; i6 < D; i6++)
{
if (i6!=i1 && i6!=i2 && i6!=i3 && i6!=i4 && i6!=i5)
{ m[5]=i6;
P=1;
for (j = 0; j < D; j++)
{
l=m[j];
P* =mass[l][j];
}
S+=P;
}}}}}}}}}}}
printf ("Симметризатор Sym равен %li\n",S);
}
```