МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

БОЛСИНОВ Алексей Викторович

УДК 513.944

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО ЛИУВИЛЛЮ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор А.Т.Фоменко

МОСКВА, 1987

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В 1966-69 гг. в работах В.И.Арнольда [1-2] было введено понятие уравнений Эйлера на двойственных пространствах алгебр Ли, естественным образом обобщающих классические уравнения Эйлера динамики твердого тела. В этих же работах были изучены некоторые общие свойства таких уравнений, в частности, показана их гамильтоновость на орбитах коприсоединенного представления относительно симплектической структуры, задаваемой формой Кириллова [3], и найдены простейшие интегралы этих уравнений - инварианты коприсоединенного представления. Позднее, начиная со второй половины 70-х годов, появился большой цикл работ различных авторов [4-19], в которых были получены серии уравнений Эйлера, являющихся аналогами уравнений классической механики и обладающих значительным запасом первых интегралов, в ряде случаев была доказана полная интегрируемость по Лиувиллю. При этом семейства первых интегралов в инволюции во многих случаях были получены каким-либо возмущением инвариантов коприсоединенного представления либо самой алгебры Ли, на двойственном пространстве которой задан гамильтонов поток, либо некоторой большей объемлющей алгебры. Одним из примеров "возмущений" такого рода является метод сдвига аргумента, предложенный А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко в [5-6] и обобщающий конструкцию С.В.Манакова [4] для алгебры Ли $so(n)$. В [5-6] был обнаружен один из алгебраических механизмов, управляющих полнотой семейства сдвигов инвариантов, и доказана полнота в случае полупростых алгебр Ли. Позднее, полнота семейств, построенных методом сдвига аргумента, была доказана для некоторых других алгебр Ли, в частности, для алгебры Ли $E(n) = so(n) +_{\rho} \mathbb{R}^n$ группы движений n-мерного евклидова пространства /см. работу

В.В.Трофимова и А.Т.Фоменко [10] /. Как непосредственное следствие полноты семейств сдвигов в [5-6] была показана полная интегрируемость по Лиувиллю многомерных аналогов уравнений движения твердого тела с произвольной полупростой группой движений и построена серия левоинвариантных метрик на полупростых группах Ли с интегрируемым геодезическим потоком, в [10] показана полная интегрируемость некоторых аналогов уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости. С другой стороны, сразу были обнаружены примеры алгебр Ли, для которых семейство сдвигов инвариантов неполно или даже тривиально. В связи с этим возникла задача получения эффективного критерия, позволяющего выделять случаи, когда семейства, построенные методом сдвига аргумента, полны. Напомним, что полнота инволютивного семейства функций на двойственном пространстве к алгебре Ли по определению означает полноту почти на всех орбитах максимальной размерности. Поэтому из полноты инволютивного семейства на всем пространстве не следует полнота его ограничения на фиксированную сингулярную орбиту, соответствующие примеры легко привести. Возникает еще один естественный вопрос : описать сингулярные орбиты, на которых семейства сдвигов инвариантов полны. Впервые этот вопрос рассматривался Дао Чонг Тхи в [20] , где была сформулирована теорема о полноте семейства сдвигов инвариантов на полупростых сингулярных орбитах в полупростых алгебрах Ли, однако, в опубликованном доказательстве имелись неточности. Затем этот же вопрос возник в работах А.С.Мищенко [21] и А.В.Браилова [22] в связи с построением вполне интегрируемых геодезических потоков на симметрических пространствах, в [22] было дано строгое доказательство результата, анонсированного Дао Чонг Тхи в [20].

Еще одно напрвление исследований, к которому примыкает тематика настоящей работы, связано с изучением согласованных скобок Пуассона /в другой терминологии пуассоновых или гамильтоновых пар/. В связи с интегрированием гамильтоновых систем это понятие впервые возникло в работе Магри [23] /см. также [24] /. Интерес к согласованным скобкам объясняется тем, что многие системы уравнений, возникающие в задачах математической физики, являются гамильтоновыми относительно целого семейства согласованных пуассоновых структур. Это свойство уравнений бывает весьма полезно при нахождении их первых интегралов. Например, если скобки Пуассона из этого семейства вырождены, то первыми интегралами будут их центральные функции. Отметим, что метод сдвига аргумента является частным случаем этой более общей конструкции. Как обычно при доказательстве полной интегрируемости по Лиувиллю возникает вопрос о полноте набора первых интегралов, состоящего из центральных функций скобок Пуассона, образующих линейное семейство. Явные вычисления бывают при этом весьма громоздки, поэтому интерес представляют "неявные" методы проверки полноты /см., например, [5] , [8] , [16] /.

В работах А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [25-26] была построена теория так называемого некоммутативного интегрирования, т.е. интегрирования гамильтоновых систем в случае, когда первые интегралы не коммутируют между собой, а образуют, например, конечномерную алгебру Ли относительно скобки Пуассона. В [26] был поставлен вопрос о том, когда из некоммутативной интегрируемости гамильтоновой системы на симплектическом многообразии следует ее коммутативная интегрируемость по Лиувиллю, и доказана теорема, утверждающая, что это будет так, если на двойственном пространстве конечномерной алгебры Ли первых интегралов существует полное инволютивное семейство функций. В связи с этим поставлена задача описания таких семейств на двойственных пространствах алгебр Ли. Доказано, что такие семейства существуют на полупростых [5], [6], [27] и алгебраических разрешимых /например, на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли [28] / алгебрах Ли. Наиболее простым после полупростых и разрешимых алгебр Ли является случай полупрямых сумм $G = K \underset{\varphi}{+} V$, где K – полупростая алгебра Ли, V – коммутативный идеал, $\varphi : K \to gl(V)$ – некоторое линейное представление. Вопрос о полноте инволютивных семейств функций на алгебрах Ли такого типа возникал в работах [8], [10-13], [16]. Специально этот вопрос рассматривался Т.А.Певцовой в [29]. Для многих конкретных примеров полупрямых сумм полные инволютивные семейства функций построены. По-видимому, наиболее общим здесь является результат А.В.Браилова, который состоит в следующем. Пусть $G = K \underset{\varphi}{+} V$ – полупрямая сумма и St_0 стационарная подалгебра общего положения представления $\varphi^* : K \to gl(V^*)$. Если на St_0^* сдвиги инвариантов алгебры St_0 образуют полное инволютивное семейство /например, St_0 редуктивна/, то на G^* также имеется полное инволютивное семейство, которое явно строится по инвариантам коприсоединенного представления. Однако, до сих пор нет универсального метода, позволяющего строить полные инволютивные семейства на всех полупрямых суммах. Кроме того, не ясно, в каких случаях для решения этой задачи можно применять метод сдвига аргумента.

Одним из основных результатов настоящей работы является критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента. Доказано, что сдвиги инвариантов представления Ad^* на ковектор общего положения образуют полное инволютивное семейство на коалгебре тогда и только тогда, когда коразмерность множества сингулярных элементов в коалгебре не равна единице. Оказалось, что идея доказательства этого критерия может быть перенесена на более общую ситуацию, а именно, на случай инволютивных семейств функций на пуассоновых многообразиях, построенных по произвольной паре согласованных скобок Пуассона. А.В.Браилов впервые обратил внимание на это обстоятельство и доказал аналог критерия полноты в случае симплектических слоев максимальной размерности. Затем автором настоящей работы было получено дальнейшее развитие результата А.В.Браилова, в частности, найдены условия полноты на сингулярных симплектических слоях. Эти общие результаты оказалось очень удобно применять для исследования полноты различных семейств функций в инволюции на двойственных пространствах алгебр Ли. Отметим, что первоначально автором были доказаны некоторые результаты, относящиеся к алгебрам Ли, а затем А.В.Браиловым и автором конструкция была перенесена на общую ситуацию и получены новые следствия. В настоящей работе порядок изложения другой: сначала излагается общая конструкция, затем все остальные утверждения доказываются как ее следствия. Кроме критерия полноты семейства сдвигов на дуальном пространстве алгебры Ли в работе получены простые достаточные условия полноты ограничения этого семейства на фиксированную сингулярную орбиту, доказана полнота семейств функций в инволюции на сжатиях симметрически-градуированных полупростых алгебр Ли, построенных по методике работы [8]. Исследован интересный пример согласованных скобок Пуассона, связанных с неприводимыми замкнутыми лиевыми пучками /на этот пример указал автору И.Л.Кантор/. Оказалось, что семейства функций в инволюции, возникающие при этом в двух частных случаях, являются первыми интегралами уравнений классической механики: в первом случае- интегралами уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела [4-6], во втором - уравнений многомерного случая Клебша, обнаруженного А.М.Переломовым [II]. В последнем случае получено новое простое доказательство полноты семейства первых интегралов в инволюции, т.е. полная интегрируемость по Лиувиллю многомерного случая Клебша.

Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента, значительно упрощает проверку полноты в конкретных случаях. Это продемонстрировано в заключительной части работы, где доказана полнота семейства сдвигов инвариантов для некоторых серий алгебр Ли типа полупрямых сумм.

Изложим теперь содержание работы более подробно.

В первой главе диссертации изложен общий метод построения семейств функций в инволюции по паре вырожденных согласованных скобок Пуассона и доказаны теоремы, позволяющие эффективно проверять полноту этих семейств в любой фиксированной точке. Сущность этого по-существу известного метода /см.[6],[8],[30]/ состоит в следующем. Пусть на многообразии M задано двумерное линейное семейство J пуассоновых структур, порожденное двумя согласованными структурами $A_0 = A_0^{ij}(x)$ и $A_1 = A_1^{ij}(x)$. Положим $R = \max\limits_{x\in M, C\in J} \operatorname{rang} C^{ij}(x)$. Пусть $x \in M$ - точка общего положения в том смысле, что в этой точке почти все пуассоновы структуры $C \in J$ имеют ранг R. Рассмотрим в окрестности точки x семейство функций $\mathcal{F}_J$, состоящее из локальных центральных функций тех пуассоновых структур $C \in J$, для которых $\operatorname{rang} C^{ij}(x) = R$. Первое утверждение состоит в том, что семейство $\mathcal{F}_J$ инволютивно относительно всех пуассоновых структур $C \in J$. Пусть O_x - симплектический слой, проходящий через точку $x \in M$ и отвечающий пуассоновой структуре B. Назовем инволютивное относительно B семейство функций $\mathcal{F}$ полным в точке x, если подпространство в $T^*_x O_x$, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$, ограниченных на слой O_x, имеет размерность $\frac{1}{2}\dim O_x$.

Т е о р е м а I. Инволютивное семейство $\mathcal{F}_J$ полно в точке $x \in M$ относительно фиксированной пуассоновой структуры $B \in J$ тогда и только тогда, когда

I/ $\operatorname{rang} C^{ij}(x) = R$ для всех $C \in J^{\mathbb{C}}$, $C \neq \lambda B$;

2/ $\dim K_B = \dim M - R$, где K_B - ядро ограничения произвольной формы $C \in J^{\mathbb{C}}$, $C \neq \lambda B$ на $\operatorname{Ker} B(x)$, т.е. $K_B = \{ \xi \in \operatorname{Ker} B(x) \mid C(\xi, \operatorname{Ker} B(x)) = 0 \}$.

Через $J^{\mathbb{C}}$ в формулировке теоремы обозначена комплексификация пространства J, т.е. множество линейных комбинаций $\lambda A_0 + \mu A_1$ с комплексными коэффициентами $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Доказательство утверждения теоремы основано на явном описании косоортогонального дополнения в $T^*_x M$ к подпространству, порожденному дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}_J$ /см. теорему I.2.I, с. I8 /. Нетрудно заметить, что это описание легко свести к задаче из линейной алгебры , забыв про скобки Пуассона и рассматривая только 2-формы на $T^*_x M$, которые задаются семейством J. В терминах линейной алгебры эта ситуация подробно изучается в § 3, гл. I, после чего результаты автоматически переносятся на случай согласованных скобок Пуассона.

Глава 2 посвящена изучению конкретных примеров согласованных скобок Пуассона на двойственных пространствах алгебр Ли и связанных с ними семейств функций в инволюции.

В § I, гл.2 рассматриваются семейства,построенные методом сдвига аргумента [4-6] , [27] . Пусть G - произвольная конечномерная алгебра Ли, G^* - двойственное пространство к G, a - ковектор из G^*. Введем на G^* две различные скобки Пуассона: $\{f, g\}(x) = x([df, dg])$ / стандартная скобка Пуассона-Ли / и $\{f, g\}_a(x) = a([df, dg])$ /см. [8] ,[30] ,[31] /. Эти скобки согласованы,и центральные функции линейной комбинации $\{\,,\} + \lambda \{\,,\}_a$ имеют вид $f(x + \lambda a)$, где f - инвариант алгебры Ли G.

Таким образом, получаем семейство функций в инволюции $\{ f(x+\lambda a) \mid f\in I(G), \lambda \in \mathbb{R} \}$. Браилов А.В. модифицировал этот метод, предложив вместо функций вида $f(x+\lambda a)$ рассматривать однородные полиномы, возникающие при разложении в ряд локальных инвариантов представления Ad^* в точке a /ковектор a при этом предполагается регулярным/. Такое семейство полиномов $\mathcal{F}_a$ эквивалентно исходному и позволяет применять метод сдвига аргумента в случае, когда инварианты глобально не определены.

Т е о р е м а 2. Пусть G – произвольная конечномерная комплексная алгебра Ли, $S = \{ x\in G^* \mid \dim Ann(x) > ind\, G \}$ – множество сингулярных элементов в G^*, $a \in G^*$ – регулярный элемент. Инволютивное семейство полиномов $\mathcal{F}_a$ полно на G^* тогда и только тогда, когда $codim\, S \geqslant 2$.

Если алгебра Ли G вещественна, то критерий полноты семейства $\mathcal{F}_a$ аналогичен. Отличие в том, что множество S следует рассматривать не в коалгебре G^*, а в $(G^{\mathbb{C}})^*$.
В случае сингулярных орбит доказана

Т е о р е м а 3. Пусть G – произвольная конечномерная комплексная алгебра Ли, S – множество сингулярных элементов в G^* и $codim\, S \geqslant 2$. Пусть $x\in G^*$ – сингулярный элемент, удовлетворяющий дополнительному условию $ind\, Ann(x) = ind\, G$. Тогда найдется регулярный ковектор $a\in G^*$ такой, что инволютивное семейство $\mathcal{F}_a$ полно на сингулярной орбите $\mathcal{O}(x)$.

В § 2, гл. 2 изучается конструкция, предложенная А.Г.Рейманом в [8]. Пусть G – вещественная полупростая алгебра Ли, θ – инволюция Картана в G, $G = H + V$ – разложение на собственные подпространства инволюции θ. Обозначим через G_θ полупрямую сумму подалгебры H и пространства V.

Алгебры Ли G и G_θ отождествляются как линейные пространства, после чего G^* и G_θ^* отождествляются с G при помощи формы Киллинга. Пусть $a \in V$ - произвольный элемент. В [8] показано, что семейство функций $\mathcal{F}_{a,\theta} = \{ f(\lambda h + v + \lambda^2 a) \mid f \in I(G), \lambda \in \mathbb{R} \}$ инволютивно на G относительно скобки Пуассона-Ли $\{\ ,\ \}_\theta$, отвечающей алгебре G_θ . Легко проверяется, что семейство $\mathcal{F}_{a,\theta}$ можно дополнить с сохранением инволютивности произвольным полным семейством функций в инволюции $\mathcal{F}_{St(a)}$ на $St(a)^*$, где $St(a)$ - стационарная подалгебра элемента $a \in V$ при действии H на V .

Т е о р е м а 4. Инволютивное семейство $\mathcal{F}_{a,\theta} \cup \mathcal{F}_{St(a)}$ полно на G относительно скобки Пуассона-Ли $\{\ ,\ \}_\theta$.

В § 3, гл. 2 рассматриваются согласованные скобки Пуассона, связанные с замкнутыми неприводимыми лиевыми пучками, классификация которых получена И.Л.Кантором и Д.Б.Персицем. Наиболее подробно изучается пучок на пространстве кососимметрических матриц, который задается следующим семейством коммутаторов : $[X,Y]_A = XAY - YAX$, где A - симметрическая, X, Y - кососимметрические матрицы. В частности, предъявлены полные семейства функций в инволюции на дуальных пространствах всех алгебр Ли из этого пучка.

В § 4, гл. 2 изучаются гамильтоновы системы, первыми интегралами которых являются функции из инволютивных семейств, построенных в трех предыдущих параграфах. Наиболее интересным здесь представляется следующий обнаруженный факт. Пусть

$$\dot{X} = [X, \Omega] \quad , \quad X = B\Omega + \Omega B \quad , \quad X, \Omega \in so(n)$$

стандартные уравнения Эйлера динамики n-мерного твердого тела [I], [4]. Оказывается эти уравнения гамильтоновы относительно целого линейного семейства скобок Пуассона-Ли. Одна из скобок, порождающих семейство, - это стандартная скобка Пуассона-Ли, отвечающая алгебре Ли $so(n)$: $\{f,g\}(X) = \mathrm{Tr}\, X(df\,dg - dg\,df)$. Другая задается следующим образом

$$\{f, g\}_{B^2}(X) = \mathrm{Tr}\, X\,(df \cdot B^2 \cdot dg - dg \cdot B^2 \cdot df)$$

Интегралами в инволюции являются центральные функции линейных комбинаций $\lambda\{\ ,\ \} + \mu\{\ ,\ \}_{B^2}$. Как и следовало ожидать, семейство таких интегралов эквивалентно семейству интегралов, найденых С.В.Манаковым. Аналогичное семейство скобок найдено также для n -мерного обобщения случая Клебша движения тела в идеальной жидкости /см. [II] /, тем самым легко проверена полная интегрируемость по Лиувиллю.

В заключительной третьей главе метод сдвига аргумента применяется для специального класса алгебр Ли - для полупрямых сумм. В этом частном случае предложен метод оценки коразмерности множества сингулярных элементов в коалгебре и доказана

Т е о р е м а 5. Пусть K - классическая простая комплексная алгебра Ли, $\varphi : K \longrightarrow gl(V)$ - неприводимое представление и $G = K \underset{\varphi}{+} V$ - полупрямая сумма. Тогда семейство сдвигов инвариантов G на регулярный ковектор a полно на G^* .

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, профессору А.Т.Фоменко за руководство работой и постоянное внимание.

ГЛАВА I. ФУНКЦИИ В ИНВОЛЮЦИИ И СОГЛАСОВАННЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА

§ I. Основные определения.

Пусть M - гладкое многообразие. Скобкой Пуассона или пуассоновой структурой на многообразии M называется кососимметрическая билинейная операция $\{\,,\}$ в пространстве гладких функций на M, удовлетворяющая тождеству Якоби

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0$$

и правилу Лейбница

$$\{fg\,,h\}=f\{g,h\}+g\{f,h\}$$

Эта операция превращает пространство гладких функций на M в бесконечномерную алгебру Ли. Многообразие M с введенной на нем пуассоновой структурой называется пуассоновым. Скобке Пуассона однозначно ставится в соответствие кососимметрическое тензорное поле A^{ij}, т.е. 2-форма на кокасательном пространстве к многообразию, гладко зависящая от точки, так что

$$\{f,g\}=A(df,dg)=A^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$$

Тензорное поле A^{ij} мы также будем называть пуассоновой структурой на M.

Рангом скобки Пуассона в фиксированной точке $x\in M$ называется ранг тензора $A^{ij}(x)$. Рангом скобки Пуассона на всем многообразии M называется число $R=\max\limits_{x\in M}\operatorname{rang}A^{ij}(x)$.

Функция $f: M\to\mathbb{R}$ называется центральной функцией, или функцией Казимира скобки Пуассона $\{\,,\}$, если она принадлежит центру алгебры Ли гладких функций, т.е. $\{f,g\}=0$ для любой гладкой функции g. Если скобка Пуассона невырождена, т.е. ее ранг равен $\dim M$, то центральными функциями являются лишь константы. В противном случае это не так. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Предложение I.I.I. Пусть ранг тензорного поля A^{ij} локально постоянен в точке $x \in M$ и равен R. Тогда в некоторой окрестности $V(x)$ определены независимые функции $f_1, \dots, f_q$, $q = \dim M - R$, которые являются центральными для ограничения скобки Пуассона на окрестность $V(x)$.

Отметим, что в общем случае локальные центральные функции нельзя продолжить на все многообразие M.

Каждой гладкой функции f на пуассоновом многообразии M ставится в соответствие векторное поле $v = \operatorname{sgrad} f$ /косой градиент/, задаваемое соотношением

$$v(g) = \{f, g\}$$

для любой гладкой функции g, или в локальных координатах

$$v = \operatorname{sgrad} f = A^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Векторные поля вида $v = \operatorname{sgrad} f$ называются гамильтоновыми.

Пуассоново многообразие M разбивается на симплектические слои, каждый из которых является локально симплектическим подмногообразием, размерность которого равна рангу скобки Пуассона в любой его точке. Касательное пространство к симплектическому слою в точке $x \in M$ образовано векторами вида $\operatorname{sgrad} f(x)$, ортогональное дополнение в $T^*_x M$ к касательному пространству слоя совпадает с ядром 2-формы $A^{ij}(x)$, отвечающей скобке $\{\ ,\ \}$. Точное определение симплектического слоя таково /см. [30],[32]/. Назовем две точки $x, y \in M$ эквивалентными если их можно соединить кусочно-гладкой кривой, каждый сегмент которой является интегральной траекторией гамильтонова векторного поля. Тогда симплектический слой O_x, проходящий через точку x, есть класс эквивалентности этой точки. Отметим, что симплектичес-

§ 2. Семейства функций в инволюции, связанные с согласованными скобками Пуассона.

О п р е д е л е н и е ([24],[25],[30]). Две скобки Пуассона на многообразии M называются согласованными, если любая их линейная комбинация снова является скобкой Пуассона на M.

В другой терминологии согласованные скобки Пуассона называются пуассоновыми или гамильтоновыми парами. Простейший пример таких скобок - постоянные скобки, т.е. скобки, которые в некоторой фиксированной системе координат задаются постоянными тензорными полями $A^{ij}(x) = const_1$ и $B^{ij}(x) = const_2$.

П р е д л о ж е н и е I.2.I ([25],[30]). Скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_0$ и $\{\ ,\ \}_1$ согласованы тогда и только тогда, когда для любых трех функций f, g, h выполнено тождество

$$\{\{f,g\}_0, h\}_1 + \{\{f,g\}_1, h\}_0 + \text{(циклическая перестановка)} = 0.$$

Другими словами, скобка Схоутена тензорных полей, задающих скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_0$ и $\{\ ,\ \}_1$, равна нулю.

Итак, пусть на многообразии M заданы две согласованные скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_0$ и $\{\ ,\ \}_1$. Обозначим через J двумерное линейное семейство скобок вида $\{\ ,\ \}_{\lambda,\mu} = \lambda\{\ ,\ \}_0 + \mu\{\ ,\ \}_1$. Отождествим семейство J с соответствующим подпространством в пространстве кососимметрических тензорных полей типа $(2,0)$. Положим $R = \max\limits_{x\in M,\, C\in J} \operatorname{rang} C(x)$.

П р е д л о ж е н и е I.2.2. 1/ [30] Пусть f и g центральные функции пуассоновых структур $A, B \in J$ соответственно, причем A и B линейно независимы /т.е. непропорциональны/. Тогда f и g находятся в инволюции относительно всех скобок из семейства J.

2/ Пусть f и g - центральные функции пуассоновой структуры $A \in J$, причем ранг тензорного поля A равен R почти всюду на M . Тогда f и g находятся в инволюции относительно всех скобок из семейства J .

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Действительно, в силу линейной независимости A и B пространство J порождается этими пуассоновыми структурами. Но f и g находятся в инволюции относительно A и B и, следовательно, относительно их произвольной линейной комбинации. Второе утверждение следует, по-существу, из соображений непрерывности. Строгое доказательство будет дано в следующем параграфе.

Таким образом, взяв объединение центральных функций всех скобок из семейства J , имеющих почти всюду на M ранг R , мы получим семейство инволютивное относительно всех скобок Пуассона $\{\ ,\ \} \in J$ одновременно. Недостаток этой конструкции состоит в том, что центральные функции, как уже отмечалось выше, могут быть глобально не определены. Поэтому в этой главе мы будем рассматривать ситуацию локально.

Фиксируем точку $x \in M$ такую, что ранг почти всех скобок из семейства J в точке x максимален, т.е. равен R . Рассмотрим семейство функций $\mathcal{F}_J$, состоящее из локальных центральных функций тех скобок Пуассона из J , которые в точке x имеют ранг R . Отметим, что функции из семейства $\mathcal{F}_J$ могут иметь разные области определения, при этом пересечение этих областей может состоять из одной точки x . Чтобы избежать такой ситуации, семейство $\mathcal{F}_J$ можно уменьшить, оставив лишь конечное число независимых в точке x функций. Сохраним за этим подсемейством прежнее обозначение $\mathcal{F}_J$. В силу конечности $\mathcal{F}_J$ существует окрестность $\mathcal{U}(x)$, в которой все функции $f \in \mathcal{F}_J$ определены, и пуассоновы структуры, отвечающие этим функциям имеют постоянный ранг R. Из предложения 1.2.2 следует, что построенный набор $\mathcal{F}_J$ инволютивен в окрестности $\mathcal{U}(x)$. Наша задача - выяснить, когда этот набор является полным в точке x.

Вместе с пространством J рассмотрим его комплексификацию $J^{\mathbb{C}}$, т.е. семейство комплексных тензорных полей вида $\lambda A+\mu B$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{C})$, где A и B - произвольные линейно независимые пуассоновы структуры из J. Для почти всех $C\in J$ мы имеем $\operatorname{rang} C(x)=R$, поэтому с точностью до пропорциональности существует лишь конечное число ненулевых элементов $C_1,\dots,C_N\in J^{\mathbb{C}}$ таких, что $\operatorname{rang} C_i(x)<R$, $i=1,\dots,N$. Для каждого из них определим подпространство $K_i\subset \operatorname{Ker} C_i(x)\subset T_x^*M^{\mathbb{C}}$:

$$K_i=\{\xi\in \operatorname{Ker} C_i(x)\mid B(\xi,\operatorname{Ker} C_i(x))=0\quad \forall B\in J\}.$$

Если ранг тензорного поля C_i локально постоянен в точке $x\in M$ и $C_i\in J\subset J^{\mathbb{C}}$, то подпространство K_i имеет простой смысл. В этом случае пространство локальных центральных функций пуассоновой структуры C_i является подалгеброй относительно любой пуассоновой структуры $B\in J$, $B\neq\lambda C_i$. Подпространство K_i порождается дифференциалами функций из центра этой подалгебры.

Обозначим через L подпространство в T_x^*M, порожденное дифференциалами функций $f\in\mathcal{F}_J$. Пусть $\widetilde{L}\subset T_x^*M$ косоортогональное дополнение к L относительно некоторой 2-формы $C(x)$, $C\in J$. Полнота семейства $\mathcal{F}_J$ в точке x означает, что $\widetilde{L}=L+\operatorname{Ker} C(x)$, поэтому нам важно знать строение косоортогонального дополнения $\widetilde{L}$.

Т е о р е м а 1.2.1. а/ Косоортогональное дополнение $\widetilde{L}$ к подпространству L не зависит от выбора пуассоновой структуры $C\in J$.

б/ Подпространство $\tilde{L}^{\mathbb{C}}$ содержит ядра всех 2-форм $C(x)$ на $T^*_x M^{\mathbb{C}}$, где $C \in J^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

в/ $\tilde{L}^{\mathbb{C}} = L^{\mathbb{C}} + \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} C_i(x)$ тогда и только тогда, когда $\dim K_i = \dim M - R$, $i = 1, \dots, N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы легко сводится к задаче из линейной алгебры. Действительно, подпространство $L \subset T^*_x M$ порождается ядрами 2-форм $C(x)$ $(C \in J)$ такими, что $\operatorname{rang} C(x) = R$. Поэтому при доказательстве мы можем забыть о скобках Пуассона и рассматривать двумерное семейство кососимметрических билинейных форм на $T^*_x M$. В терминах линейной алгебры эта ситуация будет подробно изучена в следующем параграфе.

Из теоремы 2.2.I легко получить необходимые и достаточные условия полноты семейства $\mathcal{F}_J$ в точке $x \in M$.

Т е о р е м а I.2.2 (Критерий полноты). Инволютивное семейство $\mathcal{F}_J$ полно в точке $x \in M$ относительно фиксированной пуассоновой структуры $C \in J$ тогда и только тогда, когда

I/ $\operatorname{rang} A(x) = R$ для всех $A \in J^{\mathbb{C}}$, $A \neq \lambda C$,

2/ $\dim K_C = \dim M - R$, где $K_C = \{\xi \in \operatorname{Ker} C(x) \mid B(\xi, \operatorname{Ker} C(x)) = 0 \quad \forall B \in J\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие полноты имеет вид $\tilde{L} = L + \operatorname{Ker} C(x)$, поэтому достаточность сразу следует из пункта в/ предыдущей теоремы. Оттуда же следует необходимость условия $\dim K_C = \dim M - R$. Покажем необходимость первого условия. Предположим, что существует элемент $C' \in J^{\mathbb{C}}$, $C' \neq \lambda C$ такой, что $\operatorname{rang} C'(x) < R$. Условие $\tilde{L} = L + \operatorname{Ker} C(x)$ тогда не выполняется, поскольку каждая особая форма C' дает независимый вклад в размерность $\tilde{L}$ равный $R - \operatorname{rang} C'(x)$ /см. следствие I, с. 26/.

<u>Замечание</u>. Если $\operatorname{rang} C(x) = R$, т.е. в случае симплекти-

ческого слоя O_x максимальной размерности, условие $\dim K_c = \dim M - R$ выполняется автоматически. Для этого случая утверждение теоремы впервые было доказано А.В.Браиловым при дополнительном требовании аналитичности рассматриваемых скобок Пуассона.

§ 3. Линейные семейства кососимметрических билинейных форм. Доказательства теорем

В этом параграфе мы докажем ряд утверждений из линейной алгебры, из которых будут автоматически следовать утверждения теорем I.2.I и I.2.2. Фактически ниже мы будем рассматривать простейший частный случай конструкции § 2, а именно, семейство постоянных скобок Пуассона, или, что то же самое, семейство кососимметрических билинейных форм. Чтобы подчеркнуть аналогию мы сохраняем некоторые обозначения.

Пусть T – конечномерное линейное вещественное пространство размерности n. Рассмотрим двумерное линейное семейство J кососимметрических билинейных форм на T, порожденное двумя фиксированными формами A_0 и A_1. Пусть $R = \max\limits_{C \in J} \operatorname{rang} C$. Обозначим через L подпространство в T, порожденное ядрами форм $A \in J$ ранга R.

П р е д л о ж е н и е I.3.I. Подпространство $L \subset T$ изотропно относительно всех форм $C \in J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \operatorname{Ker} A$, $y \in \operatorname{Ker} B$, C – произвольная форма из J. Если A и B линейно независимы, то $C = \alpha A + \beta B$, Следовательно, $C(x, y) = \alpha A(x,y) + \beta B(x,y) = 0$. Если $B = \lambda A$ и $\operatorname{rang} A = R$, то утверждение следует из соображений непрерывности. Действительно, существует последовательность форм $\{A_i\}$ такая, что $A_i \in J$, $A_i \to A$, A_i и B линейно независимы, $\operatorname{rang} A_i = R$, и последовательность векторов $\{x_i\}$ такая, что $x_i \to x$, $x_i \in \operatorname{Ker} A_i$. Тогда $C(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} C(x_i, y) = 0$.

Кососимметрические формы на T, ниже мы будем рассматривать как кососимметрические операторы из T в T^*. Фиксируем две произвольные линейно независимые формы A и B из семейства J , пусть при этом $\operatorname{rang} A = R$.

П р е д л о ж е н и е I.3.2. В подпространстве $L \subset T$ можно выбрать базис x_i^j ; $i = 1,\dots, n-R$; $j = 0,\dots,k_i$, для которого справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} A x_i^0 &= 0 \\ A x_i^1 &= B x_i^0 \\ &\dots \\ A x_i^{k_i} &= B x_i^{k_i-1} \\ B x_i^{k_i} &= 0 \end{aligned} \qquad (\mathrm{I})$$

для любого $i = 1,\dots, n-R$ (сравните [5-6]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение $(A-\lambda B)x = 0$ относительно $x \in T$ с параметром λ . Ясно, что подпространство $L \subset T$ порождается решениями этого уравнения при малых λ . Пусть $y_1^\lambda, \dots, y_{n-R}^\lambda$ - базисные решения аналитические по λ (λ мало). Разлагая векторы y_i^λ в ряд по λ и подставляя в уравнение, получаем соотношения

$$\begin{aligned} A y_i^0 &= 0 \\ A y_i^1 &= B y_i^0 \\ A y_i^2 &= B y_i^1 \\ &\dots \end{aligned}$$

где $y_i^\lambda = \sum\limits_{j=0}^{\infty} y_i^j \lambda^j$. Система векторов y_i^j порождает L , но базисом не является. Обозначим через U_k подпространство в L , порожденное векторами y_i^j , $j \le k$, $i = 1,\dots,n-R$. Имеем

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

причем, начиная с некоторого N :

$$\mathcal{U}_N = \mathcal{U}_{N+1} = \ldots = L$$

Кроме того справедливы соотношения:

$$A(\mathcal{U}_0) = 0 \quad , \quad A(\mathcal{U}_N) = B(\mathcal{U}_N)\ , \ A(\mathcal{U}_k) = B(\mathcal{U}_{k-1})\ , \ k = 1, \ldots, N .$$

Л е м м а. Существуют подпространства $V_0, V_1, \ldots, V_N \subset L$ такие, что

1/ $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k-1} \dot{+} V_k \quad , \quad k = 1, \ldots, N$;

2/ $A(V_k) = B(V_{k-1}) \quad , \quad k = 1, \ldots, N$;

3/ $\mathcal{U}_0 = V_0 = \operatorname{Ker} A \quad , \quad V_N \subset \operatorname{Ker} B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Подпространства V_k строятся по индукции, начиная с V_N .

Шаг I. Имеем $B(\mathcal{U}_N) = B(\mathcal{U}_{N-1})$, следовательно, существует подпространство $V_N \subset \mathcal{U}_N$ такое, что $V_N \subset \operatorname{Ker} B$, $\mathcal{U}_N = \mathcal{U}_{N-1} \dot{+} V_N$.

Шаг $N-k$. Пусть $\mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_k \dot{+} V_{k+1}$. Тогда $B(\mathcal{U}_k) = A(\mathcal{U}_{k+1}) = A(\mathcal{U}_k \dot{+} V_{k+1})$. Учитывая, что $\operatorname{Ker} A \subset \mathcal{U}_k$ имеем $B(\mathcal{U}_k) = A(\mathcal{U}_k) \dot{+} A(V_{k+1}) = B(\mathcal{U}_{k-1}) \dot{+} A(V_{k+1})$. Ясно, что существует подпространство $V_k \subset \mathcal{U}_k$ такое, что $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k-1} \dot{+} V_k$, $A(V_{k+1}) = B(V_k)$. Лемма доказана.

В силу леммы корректно определен оператор $A^{-1}B : V_k \to V_{k+1}$, поскольку $V_k \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$, $k \neq 0$. Определим цепочку подпространств $V_0^1 \subset \ldots \subset V_0^N = V_0$, полагая $V_0^i = \{\xi \in V_0 \mid (A^{-1}B)^i \xi = 0\}$. Выберем произвольный базис в V_0^1 , дополним его до базиса в V_0^2 и так далее, получим базис $x_1^0, \ldots, x_{n-R}^0$ в пространстве V_0 . Остальные векторы базиса x_i^j в L определяются по формуле $x_i^j = (A^{-1}B)^j x_i^0$ /нулевые векторы отбрасываются/.

С л е д с т в и е. Косоортогональное дополнение $\tilde{L} = \{\xi \in T \mid B(\xi, L) = 0\}$ к подпространству L в T не зависит от выбора нетривиальной формы $B \in J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. Косоортогональное дополнение $\tilde{L}_B$ к подпространству $L \subset T$ относительно формы $B \in J$ совпадает с ортогональным дополнением в T к подпространству $B(L) \subset T^*$. Но из соотношений (I) следует, что $A(L) = B(L)$ для любых двух нетривиальных форм $A, B \in J$, поэтому $\tilde{L}_B = \tilde{L}_A = \tilde{L}$.

П р е д л о ж е н и е I.3.3. Пусть как и выше A и B две линейно независимые формы из семейства J, причем $\operatorname{rang} A = R$. Тогда $\tilde{L}$ является максимальным среди всех подпространств $K \subset T$, удовлетворяющих условию $B(K) \subset A(K)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что любое подпространство $K \subset T$ такое, что $B(K) \subset A(K)$, содержится в $\tilde{L}$. Воспользуемся соотношениями $A(V_k) = B(V_{k-1})$, $k = 1, \dots, N$. Докажем по индукции, что для любого k: $A(K, V_k) = 0$. При $k = 0$ имеем $A(K, V_0) = A(K, \operatorname{Ker} A) = 0$. Пусть $A(K, V_k) = 0$, тогда

$$A(K, V_{k+1}) = -(K, A(V_{k+1})) = -(K, B(V_k)) =$$

$$= (B(K), V_k) \subset (A(K), V_k) = A(K, V_k) = 0$$

Покажем теперь, что $B(\tilde{L}) \subset A(\tilde{L})$. Действительно, $B(\tilde{L}) \subset L^{\perp} \subset T^*$. Но $L^{\perp} = A(\tilde{L})$, поскольку $\operatorname{Ker} A \subset L$. Предложение доказано.

Для более подробного описания подпространства $\tilde{L}$ нам необходимо будет перейти к полю комплексных чисел. Обозначим через $T^{\mathbb{C}}$, $L^{\mathbb{C}}$, $\tilde{L}^{\mathbb{C}}$, $J^{\mathbb{C}}$ комплексификации пространств T, L, $\tilde{L}$, J.

В семействе $J^{\mathbb{C}}$ содержится с точностью до пропорциональности лишь конечное число форм немаксимального ранга. Рассмотрим все такие формы: $C_1, \dots, C_N$, $C_i \in J^{\mathbb{C}}$, $\operatorname{rang} C_i < R$, $C_i \neq \lambda C_j$. Положим $K_i = \{\xi \in \operatorname{Ker} C_i \mid B(\xi, \operatorname{Ker} C_i) = 0\}$, где B и C_i линейно независимы и $B \in J$. Проверим, что подпространство K_i не зависит от выбора формы $B \in J$. Действительно, если

$B' = \beta B + \gamma C_i$, то $B'(\xi, \mathrm{Ker}\, C_i) = \beta B(\xi, \mathrm{Ker}\, C_i)$.
Следовательно, $K_i = \{\xi \in \mathrm{Ker}\, C_i \mid B(\xi, \mathrm{Ker}\, C_i) = 0 \quad \forall B \in J\}$.

П р е д л о ж е н и е I.3.4. а/ Подпространство $\tilde{L}^{\mathbb{C}} \subset T^{\mathbb{C}}$ содержит ядра всех нетривиальных форм из семейства $J^{\mathbb{C}}$.

б/ $\tilde{L}^{\mathbb{C}} = \tilde{L}^{\mathbb{C}} + \sum_1^N \mathrm{Ker}\, C_i$, т.е. $\tilde{L}^{\mathbb{C}}$ порождается ядрами всех нетривиальных форм из семейства $J^{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда $\dim K_i = n - R$, $i = 1, \ldots, N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы не усложнять обозначений при доказательстве все пространства сразу предполагаются комплексифицированными, верхний индекс $\mathbb{C}$ не пишется.

Первое утверждение сразу следует из предложения I.3.3. В самом деле, $0 = B(\mathrm{Ker}\, B) \subset A(\mathrm{Ker}\, B)$, т.е. $\mathrm{Ker}\, B \subset \tilde{L}$. Но форма $B \in J$ была выбрана произвольно, поэтому $\mathrm{Ker}\, C \subset \tilde{L}$ для всех $C \in J$, отличных от нуля. Отсюда, кстати, вытекает еще одно следствие. Для любой формы C_i имеем $B(\mathrm{Ker}\, C_i \cap L, \mathrm{Ker}\, C_i) = 0$, т.е. $\mathrm{Ker}\, C_i \cap L \subset K_i$. Но $C_i(L) = A(L)$ для любой формы $A \in J$ ранга R , поэтому $\dim \mathrm{Ker}\, C_i \cap L = \dim \mathrm{Ker}\, A \cap L = \dim \mathrm{Ker}\, A = n - R$. Следовательно, $\dim K_i \geqslant n - R$.

Для доказательства второго утверждения выберем произвольное алгебраическое дополнение K к L в $\tilde{L}$. Тогда $\tilde{L} = V_0 \dotplus V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_N \dotplus K$. Рассмотрим оператор $\Phi : \tilde{L} \to \tilde{L}$, определяемый соотношением

$$A(\Phi\xi) = B\xi \quad , \quad \xi \in \tilde{L} \quad , \quad \Phi\xi \in V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_N \dotplus K$$

Из (I) следует, что подпространство L инвариантно относительно Φ и ограничение $\Phi|_L$ нильпотентно. Разложим пространство $\tilde{L}$ на обобщенные собственные подпространства оператора Φ . Имеем $\tilde{L} = \mathcal{U}_0 + \sum_{\lambda \neq 0} \mathcal{U}_\lambda$, причем $L \subset \mathcal{U}_0$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{rang}\, B = R$. Покажем, что в этом случае $L = \mathcal{U}_0$. Предположим противное.

Тогда существует элемент $\xi \in \mathcal{U}_0$ такой, что $\xi \notin L$, $\Phi\xi \in L$. По определению оператора Φ имеем $A(\Phi\xi) = B\xi$. Но $A(L) = B(L)$, поэтому существует $\eta \in L$ такой, что $B\eta = B\xi$. Отсюда $\eta - \xi \in \operatorname{Ker} B \subset L$, следовательно, $\xi \in L$. Противоречие. Итак, $\widetilde{L} = L + \sum_{\lambda \neq 0} \mathcal{U}_\lambda$.

Обозначим через $\mathcal{U}_\lambda^0$ подпространство в $\mathcal{U}_\lambda$, состоящее из собственных векторов.

Л е м м а. Подпространство $L_0 = L + \sum_{\lambda \neq 0} \mathcal{U}_\lambda^0$ порождено ядрами форм $C \in J \setminus \{0\}$. Другими словами, $L + \sum_{\lambda \neq 0} \mathcal{U}_\lambda^0 = L + \sum_1^N \operatorname{Ker} C_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Покажем, что L_0 содержит все ядра $\operatorname{Ker} C_i$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть $C_i = \alpha_i A + \beta_i B$. Тогда $\operatorname{Ker} C_i = \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A)$, где $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}$. Покажем, что $\operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) \subset L + \mathcal{U}_{\lambda_i}^0$. Из определения оператора Φ следует, что $\mathcal{U}_{\lambda_i}^0 = \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) \cap \operatorname{Im}\Phi$. Отсюда $\dim \mathcal{U}_{\lambda_i}^0 \geqslant R - \operatorname{rang}(B - \lambda_i A)$, поскольку $\dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) = n - \operatorname{rang}(B - \lambda_i A)$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im}\Phi = n - R$. Далее, $\dim L \cap \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) = n - R$, следовательно, $\operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) = (L \cap \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A)) \dot{+} \mathcal{U}_{\lambda_i}^0 \subset L \dot{+} \mathcal{U}_{\lambda_i}^0 \subset L_0$. С другой стороны, $\mathcal{U}_{\lambda_i}^0 \subset \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A)$. Лемма доказана.

Из утверждения леммы следует, что $\widetilde{L} = L + \sum_{i=1}^N \operatorname{Ker} C_i$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}_{\lambda_i}^0 = \mathcal{U}_{\lambda_i}$, т.е. отсутствуют присоединенные векторы оператора Φ веса $\lambda_i \neq 0$, где $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}$, $C_i = \alpha_i A + \beta_i B$. Пусть присоединенный вектор веса λ_i существует. Это эквивалентно тому, что система уравнений

$$\begin{cases} (\Phi - \lambda_i E)\, x = y \\ (\Phi - \lambda_i E)\, y = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

имеет решения при $y \neq 0$. Учитывая определение оператора Φ перепишем эту систему следующим образом

$$\begin{cases} (B-\lambda_i A)x = Ay \\ (B-\lambda_i A)y = 0 \\ x \in \operatorname{Im}\Phi \\ y \in \operatorname{Im}\Phi \end{cases}$$

Легко видеть, что первые два уравнения разрешимы тогда и только тогда, когда $y \in K_i \subset \operatorname{Ker}(B-\lambda_i A)$. Если $\dim K_i = n-R$, то $K_i = \operatorname{Ker} C_i \cap L$, т.е. $y \in L$. Но на L оператор Φ нильпотентен, поэтому y не может быть собственным вектором ненулевого веса. Следовательно, система (2) не имеет решений при $y \neq 0$. Если $\dim K_i > n-R$, то существует $y_0 \in K_i \cap \operatorname{Im}\Phi$, $y_0 \neq 0$. Уравнение $(B-\lambda_i A)x = Ay_0$ разрешимо, и множество его решений имеет вид $x_0 + \operatorname{Ker}(B-\lambda_i A)$, где x_0 - частное решение. Поэтому $(x_0 + \operatorname{Ker}(B-\lambda_i A)) \cap \operatorname{Im}\Phi \neq \emptyset$, так как $\dim \operatorname{Ker}(B-\lambda_i A) > n-R$. Следовательно, система (2) имеет нетривиальные решения и присоединенный вектор существует. Предложение доказано.

Следствие I. Имеют место следующие оценки

$$\dim \tilde{L} \geqslant \dim L + \sum_{i=1}^{N} (R - \operatorname{rang} C_i)$$

$$\dim L \leq n - \frac{R}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (R - \operatorname{rang} C_i)$$

причем равенства имеют место тогда и только тогда, когда $\dim K_i = n-R$, $i = 1, \dots, N$.

Следствие 2. Подпространство L является максимальным изотропным /лагранжевым/ относительно произвольной нетривиальной формы из семейства J тогда и только тогда, когда все нетривиальные формы из семейства $J^{\mathbb{C}}$ имеют одинаковый ранг.

Доказательства следствий. Все обозначения из доказательства предложения I.3.4 сохраняются. Разложим $\tilde{L}$ на обобщенные собственные подпространства $\mathcal{U}_{\lambda_i}$ оператора Φ. Имеем

$$\dim \tilde{L} = \dim L + \sum_{i=1}^{N} \dim \mathcal{U}_{\lambda_i} \geqslant \dim L + \sum_{i=1}^{N} \dim \mathcal{U}^0_{\lambda_i}$$

где $\mathcal{U}^0_{\lambda_i} \subset \mathcal{U}_{\lambda_i}$ - подпространство, состоящее из собственных векторов. Из доказательства последней леммы сразу следует, что $\dim \mathcal{U}^0_{\lambda_i} = R - \operatorname{rang} C_i$. Это доказывает справедливость первой оценки. Условие $\dim K_i = n - R$, как было показано, в точности означает совпадение подпространств $\mathcal{U}_{\lambda_i}$ и $\mathcal{U}^0_{\lambda_i}$, поэтому первая оценка переходит в точное равенство. Отетим, что каждая форма C_i дает независимый вклад в размерность пространства $\tilde{L}$, поэтому $\operatorname{Ker} C_i \not\subset L + \sum_{\ell \neq i} \operatorname{Ker} C_\ell$. Вторая оценка следует из первой и равенства $\dim L + \dim \tilde{L} = n + (n - R)$. Докажем следствие 2. Лагранжевость подпространства L означает, что $L = \tilde{L}$, поэтому из первой оценки необходимо следует $\operatorname{rang} C_i = R$, т.е. все формы из $J^{\mathbb{C}}$ имеют одинаковый ранг. Условие $\dim K_i = n - R$ в этом случае выполняется автоматически, и первая оценка переходит в равенство.

Вернемся теперь к доказательству утверждений предыдущего параграфа. Второй пункт предложения I.2.2 следует непосредственно из предложения I.3.I. Пункт а/ теоремы I.2.I является точным аналогом следствия к предложению I.3.2, пункты б/ и в/ этой теоремы в точности соответствуют пунктам а/ и б/ предложения I.3.4.

ГЛАВА 2. СОГЛАСОВАННЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА НА ДВОЙСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АЛГЕБР ЛИ

§ I. Семейства функций в инволюции, построенные методом сдвига аргумента

Пусть $\mathcal{G}$ – связная конечномерная группа Ли, G – ее алгебра Ли, G^* – двойственное пространство к G. Коприсоединенное представление Ad^* группы Ли $\mathcal{G}$ на G^* задается соотношением

$$(Ad_g^* x, \xi) = (x, Ad_g^{-1} \xi), \quad x \in G^*, \xi \in G, g \in \mathcal{G}.$$

Соответствующее представление алгебры Ли G определяется формулой

$$(ad_\eta^* x, \xi) = (x, [\xi, \eta]), \quad x \in G^*, \xi, \eta \in G.$$

Коразмерность орбиты общего положения представления Ad^* называется индексом алгебры Ли G [33]. Пусть $Ann(x) = \{\xi \in G \mid ad_\xi^* x = 0\}$ – стационарная подалгебра ковектора $x \in G^*$, тогда $ind\, G = \min\limits_{x \in G^*} \dim Ann(x)$. Каждая точка $x \in G^*$ задает кососимметрическую билинейную форму Φ_x на $G \cong T_x^*(G^*)$: $\Phi_x(\xi, \eta) = (x, [\xi, \eta])$. Тем самым на G^* задано кососимметрическое тензорное поле типа (2, 0), определяющее на G^* скобку Пуассона-Ли:

$$\{f, g\}(x) = \Phi_x(df, dg) = (x, [df, dg])$$

Инволютивное относительно скобки Пуассона-Ли семейство функций на G^* назовем полным, если из него можно выбрать $\frac{1}{2}(\dim G + ind\, G)$ функционально независимых на G^* функций. Это условие гарантирует полноту ограничения этого семейства на почти все орбиты максимальной размерности.

Напомним сущность метода сдвига аргумента, позволяющего получать функции в инволюции на G^* [4-6] , [27] . Пусть f и g – инварианты коприсоединенного представления группы Ли G , т.е. гладкие функции, постоянные на орбитах представления Ad^* . Пусть $a \in G^*$ – произвольный элемент. Тогда функции $f_{\lambda,a}(x) = f(x+\lambda a)$ и $g_{\mu,a}(x) = g(x+\mu a)$ находятся в инволюции на G^* при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Следует отметить локальность этой конструкции: мы не можем, вообще говоря, получить глобально определенные на G^* функции в инволюции, если инварианты представления Ad^* глобально не определены. Однако, если элемент $a \in G^*$ регулярен, то этот недостаток можно устранить, заменив семейство функций вида $f_{\lambda,a}$ эквивалентным набором полиномов. Эквивалентность означает, что подпространства в $G = T^*_x(G^*)$, порожденные дифференциалами функций из этих двух семейств, совпадают почти всюду на общей области определения. Очень простой способ такой замены предложен А.В.Браиловым. Достаточно в качестве инволютивного семейства рассмотреть совокупность однородных полиномов, полученных при разложении в ряд локальных инвариантов представления Ad^* в регулярной точке $a \in G^*$:

$$f(a+\lambda x) = P_0 + \lambda P_1(x) + \lambda^2 P_2(x) + \ldots$$

Обозначим полученный таким способом набор полиномов через $\mathcal{F}_a$.

Легко видеть, что метод сдвига аргумента является частным случаем общей конструкции построения инволютивных семейств по произвольной паре согласованных скобок Пуассона. В данном случае кроме скобки Пуассона-Ли следует рассмотреть еще одну скобку, задаваемую формулой / см. [8] , [30] , [31] /:

$$\{f, g\}_a(x) = (a, [df(x), dg(x)]).$$

Тензорное поле, определяющее скобку $\{\ ,\ \}_a$ постоянно и имеет вид Φ_a. Легко проверяется, что скобка Пуассона-Ли $\{\ ,\ \}$ и скобка $\{\ ,\ \}_a$ согласованы, и функции вида $f_{\lambda,a}= f(x+\lambda a)$, где f - инвариант Ad^*, являются центральными для линейной комбинации $\alpha\{\ ,\ \}+\beta\{\ ,\ \}_a$, $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$.

Т е о р е м а 2.I.I /случай орбит общего положения/. Пусть G - произвольная конечномерная комплексная /вещественная/ алгебра Ли, $S=\{y\in G^* \mid \dim Ann(y) > \operatorname{ind} G\}$ - множество сингулярных элементов в G^* /соот. в $(G^{\mathbb{C}})^*$/, $a\in G^*$ - регулярный элемент. Инволютивное семейство $\mathcal{F}_a$ полно на G^* тогда и только тогда, когда $\operatorname{codim} S \geq 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть элемент $x\in G^*$ регулярен. Будем проверять полноту семейства $\mathcal{F}_a$ в точке x, пользуясь теоремой I.2.2. Второе условие этой теоремы выполнено автоматически в силу регулярности элемента $x\in G^*$. Первое условие переписывается следующим образом: $\operatorname{rang}(\alpha\Phi_x+\beta\Phi_a)= \dim G - \operatorname{ind} G$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, не обращающихся одновременно в нуль. Геометрически это означает, что двумерная плоскость, натянутая на векторы x и a в пространстве G^* / или в пространстве $(G^{\mathbb{C}})^*$ в вещественном случае/, пересекается с множеством S только в нуле. Ясно, что элементы $x\in G^*$, удовлетворяющие этому условию, существуют тогда и только тогда, когда $\operatorname{codim} S \geq 2$. Теорема доказана.

Отметим, что множества сингулярных элементов в G^* и $(G^{\mathbb{C}})^*$ в случае вещественной алгебры Ли G могут иметь различные размерности. Поэтому в условиях теоремы 2.I.I множество S нельзя в вещественном случае заменить на множество сингулярных элементов в G^*. В качестве примера рассмотрим шестимерную алгебру Ли со следующими соотношениями: $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=e_5$. Множество сингулярных элементов задается уравнением $(e_5)^2+(e_6)^2=0$, т.е. является четырехмерной плоскостью в $G^* \cong \mathbb{R}^6$, но имеет коразмерность один в $(G^{\mathbb{C}})^*$.

Подчеркнем, что в случае $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ сдвиг можно производить на любой регулярный элемент $a \in G^*$. В то же время из доказательства следует, что при сингулярном ковекторе сдвига $a \in G^*$ полного инволютивного семейства методом сдвига аргумента получить нельзя.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть G – полупростая алгебра Ли /комплексная или вещественная/. Тогда коразмерность множества сингулярных элементов равна трем, и мы получаем полноту семейства сдвигов инвариантов в полупростом случае, которая была доказана ранее другими методами А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко в [5-6]. Противоположный пример – фробениусовы алгебры Ли [34], т.е. алгебры Ли с нулевым индексом. В этом случае орбиты общего положения представления Ad^* открыты в G^* и, следовательно, инвариантами являются только константы. Поэтому семейство сдвигов тривиально. С другой стороны, множество сингулярных элементов задается многочленом вида $\det(c^i_{jk} x_i)$, где c^i_{jk} – структурный тензор алгебры Ли, т.е. $\operatorname{codim} S = 1$.

Полнота семейств функций в инволюции, построенных методом сдвига аргумента, была доказана без применения описанной выше конструкции и для некоторых неполупростых алгебр Ли, в частности, для полупрямых расширений простых алгебр Ли по минимальному представлению:

1/ $so(n) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{R}^n$ – Трофимов В.В., Фоменко А.Т. [10],

2/ $u(n) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^n$ – Браилов А.В. [35],

3/ $sp(2n,\mathbb{R}) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{R}^{2n}$, $sl(n) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{R}^n$ – Болсинов А.В. [36].

По-существу доказательства сводились к явному вычислению подпространства в G, порожденного дифференциалами функций из семейства сдвигов $\mathcal{F}_a$ в фиксированной точке $x \in G^*$. Проверка условия $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ оказывается более эффективным методом при решении этой задачи. Это будет продемонстрировано в следующей главе, где будет доказана полнота семейства $\mathcal{F}_a$ для достаточно больших серий полупрямых сумм $G = K \underset{\varphi}{+} V$, где K - полупроста, $\varphi : K \longrightarrow gl(V)$ - некоторое представление, V - коммутативный идеал. Эти серии, в частности, включают все указанные выше алгебры.

Рассмотрим теперь случай сингулярных орбит. Пусть $x \in G^*$ - сингулярный элемент, т.е. $\dim \operatorname{Ann}(x) > \operatorname{ind} G$. Пусть $\mathcal{O}(x)$ - орбита точки x при действии группы Ли $\mathcal{G}$ на G^*. Вопрос: когда семейство сдвигов инвариантов $\mathcal{F}_a$ при ограничении на сингулярную орбиту $\mathcal{O}(x)$ образует полный инволютивный набор на этой орбите ? Известно, что так бывает не всегда, даже если семейство $\mathcal{F}_a$ полно на всем пространстве G^*.

Т е о р е м а 2.I.2. Пусть G - произвольная конечномерная комплексная /вещественная/ алгебра Ли, S - множество сингулярных элементов в G^* /соот. в $(G^{\mathbb{C}})^*$ /. Пусть $a \in G^*$ - произвольный регулярный элемент, $x \in G^*$ - произвольный сингулярный элемент, $\pi : G^* \longrightarrow \operatorname{Ann}(x)^*$ - естественная проекция. Инволютивное семейство $\mathcal{F}_a$ полно в сингулярной точке $x \in G^*$ тогда и только тогда, когда

I/ комплексная прямая $x + \lambda a$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ пересекает множество сингулярных элементов S только в точке x,

2/ $\dim \operatorname{Ann} \pi(a) = \operatorname{ind} G$, где $\operatorname{Ann} \pi(a)$ - аннулятор элемента $\pi(a) \in \operatorname{Ann}(x)^*$ в алгебре Ли $\operatorname{Ann}(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение является точной переформулировкой теоремы I.2.2. Действительно, первое условие означает, что все линейные комбинации $\alpha \varphi_x + \beta \varphi_a$ при $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, имеют максимальный ранг $R = \dim G - \operatorname{ind} G$. Далее, следуя обозначениям теоремы I.2.2, положим $K_x = \{\xi \in \operatorname{Ker}\Phi_x \mid \Phi_a(\xi, \operatorname{Ker}\Phi_x) = 0\}$. Учитывая, что $\operatorname{Ker}\Phi_x = \operatorname{Ann}(x)$, получаем $K_x = \{\xi \in \operatorname{Ann}(x) \mid (\operatorname{ad}^*_\xi a, \operatorname{Ann}(x)) = 0\}$, или $K_x = \operatorname{Ann}\pi(a)$. Таким образом, условие 2/ доказуемой теоремы в точности соответствует условию 2/ теоремы I.2.2.

С л е д с т в и е. Пусть семейство сдвигов инвариантов $\mathcal{F}_a$ полно на всем пространстве G^*. Пусть $x \in G^*$ - сингулярный элемент, причем $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{ind} G$. Тогда найдется регулярный элемент $b \in G^*$ такой, что инволютивное семейство $\mathcal{F}_b$ полно на сингулярной орбите $\mathcal{O}(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о   с л е д с т в и я. Полнота семейства $\mathcal{F}_a$ на G^* гарантирует выполнение условия $\operatorname{codim} S \geqslant 2$, где S - множество сингулярных элементов. Это в свою очередь гарантирует выполнение условия I/ последней теоремы почти для всех $b \in G^*$. Равенство $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{ind} G$ означает, что $\dim \operatorname{Ann}\pi(b) = \operatorname{ind} G$ для регулярных проекций $\pi(b)$, т.е. почти для всех $b \in G^*$. Ясно, что $b \in G^*$ можно выбрать удовлетворяющим двум условиям одновременно. Тогда семейство $\mathcal{F}_b$ будет полно в точке $x \in G^*$ и, следовательно, на всей орбите $\mathcal{O}(x)$.

Если алгебра Ли G полупроста, то условие $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{ind} G$ выполнено для всех полупростых сингулярных элементов. Тем самым, мы получаем новое доказательство известного результата о полноте семейства сдвигов на полупростых сингулярных орбитах в полупростых алгебрах Ли [20-22]. Однако, в некоторых случаях условие полупростоты сингулярного элемента $x \in G^*$ существенным не является. Например, справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е 2.I.I. Для всех элементов $x \in sl(n)$ выполнено равенство $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{ind} sl(n)$. Таким образом, методом сдвига аргумента можно построить полные инволютивные семейства функций на всех сингулярных орбитах (ко)присоединенного представления группы Ли $SL(n)$.

Доказательство состоит в явном вычислении централизатора произвольного элемента $x \in sl(n)$ и его индекса. Случай алгебры Ли $sl(n)$ наиболее прост, поскольку любой элемент можно представить в стандартной жордановой нормальной форме, после чего вычисления проводятся достаточно легко.

§ 2. Функции в инволюции на симметрически-градуированных алгебрах Ли

В этом параграфе рассматриваются согласованные скобки Пуассона, связанные с симметрической градуировкой алгебры Ли, и соответствующие семейства функций в инволюции. Напомним эту конструкцию, следуя работе А.Г.Реймана [8]. Пусть G – симметрически-градуированная алгебра Ли. Это означает, что на G задан инволютивный автоморфизм θ, и G разложена в прямую сумму $H+V$ собственных подпространств автоморфизма θ, отвечающих собственным значениям +I и –I соответственно. При этом имеют место следующие коммутационные соотношения

$$[H,H]\subset H\ ,\quad [H,V]\subset V\ ,\quad [V,V]\subset H .$$

Обозначим через G_θ полупрямую сумму подалгебры H и коммутативного пространства V по представлению ad : $H \to gl(V)$. Другими словами, зададим на линейном пространстве G еще один коммутатор $[\,,\,]_\theta$ по формуле

$$[h_1+v_1, h_2+v_2]_\theta = [h_1,h_2]+[h_1,v_2]+[v_1,h_2]\ ,$$
$$h_i+v_i \in H+V\ ,\quad h_i\in H\ ,\quad v_i\in V\ ,\quad i=1,2.$$

Двойственное пространство G^* мы отождествим с прямой суммой $H^* + V^*$, полагая $H^* = V^\perp$, $V^* = H^\perp$.

Рассмотрим на пространстве $G^* = H^* + V^*$ три различные скобки Пуассона :

I/ скобка Пуассона-Ли $\{\ ,\ \}$, отвечающая алгебре Ли G,

2/ скобка Пуассона-Ли $\{\ ,\ \}_\theta$, отвечающая алгебре Ли G_θ,

3/ скобка $\{\ ,\ \}_a$, где $a \in V^*$.

Напомним, что третья скобка $\{\ ,\ \}_a$ задается формулой $\{f,g\}_a(x) = (a, [df(x), dg(x)])$, причем в данном случае коммутатор можно рассматривать в любой из алгебр Ли G и G_θ. Известно, что любая линейная комбинация этих трех скобок является скобкой Пуассона на $H^* + V^*$. Поэтому для построения функций в инволюции на $G^* = H^* + V^*$ мы можем применить общую конструкцию /гл. I, § 2/, рассмотрев любое двумерное подпространство в пространстве, порожденном скобками $\{\ ,\ \}$, $\{\ ,\ \}_\theta$ и $\{\ ,\ \}_a$. Будем считать далее для простоты, что алгебра Ли G обладает полным набором полиномиальных или рациональных инвариантов представления Ad^*.

П р е д л о ж е н и е 2.2.I ([8]) Центральными функциями скобки $\alpha\{\ ,\ \} + \beta\{\ ,\ \}_\theta + \gamma\{\ ,\ \}_a$ при $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$, являются функции вида $f_{\alpha,\beta,\gamma,a}(h+v) = f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, h + v + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} a\right)$, где f пробегает кольцо инвариантов алгебры Ли G.

Рассмотрим линейное семейство скобок Пуассона, натянутое на скобки $\{\ ,\ \} + \{\ ,\ \}_a$ и $\{\ ,\ \}_\theta$. Из предложения 2.2.I и общей конструкции § 2, гл.I следует, что функции вида $f(\lambda h + v + \lambda^2 a)$ находятся в инволюции относительно всех скобок вида $\alpha(\{\ ,\ \} + \{\ ,\ \}_a) + \beta\{\ ,\ \}_\theta$. Теорема I.2.I позволяет проанализировать полноту построенного этим методом семейства функций в каждом конкретном случае. Мы рассмотрим случай наиболее интересный с точки зрения приложений.

Пусть G – полупростая вещественная алгебра Ли, θ – инволюция Картана. Как обычно в этом случае мы отождествляем H с H^* и V с V^* с помощью формы Киллинга. В общем случае семейство функций в инволюции $\mathcal{F}_{a,\theta} = \{f(\lambda h+v+\lambda^2 a) \mid f\in I(G), \lambda\in\mathbb{R}\}$ полным не является. Однако, легко убедиться, что функции $f\in\mathcal{F}_{a,\theta}$ коммутируют с элементами подалгебры $St(a)$, где $St(a)$ – стационарная подалгебра элемента $a\in V$ при действии H на V. Рассмотрим произвольный полный инволютивный набор $\mathcal{F}_{St(a)}$ на двойственном пространстве $St(a)^*$. Функции $g\in\mathcal{F}_{St(a)}$ естественным образом продолжаются на все пространство G^* с помощью проекции $\pi: G^*\to St(a)^*$. Объединяя семейства $\mathcal{F}_{a,\theta}$ и $\mathcal{F}_{St(a)}$, мы получаем инволютивное семейство на G^* в смысле скобки $\{\ ,\ \}_\theta$.

Теорема 2.2.I. Пусть G – полупростая вещественная алгебра Ли, θ – инволюция Картана, $H+V$ – соответствующее разложение алгебры Ли G, $a\in V$ – произвольный элемент, Тогда инволютивное семейство $\mathcal{F}_{a,\theta}\cup\mathcal{F}_{St(a)}$ полно на $G=H+V$ относительно скобки Пуассона-Ли $\{\ ,\ \}_\theta$.

Доказательство. Фиксируем точку $h+v\in H+V$. Обозначим через M подпространство в G, порожденное дифференциалами функций вида $f(\lambda h+v+\lambda^2 a)$. Через $\widetilde{M}$ обозначим косоортогональное дополнение к M относительно 2-формы на G, задаваемой скобкой $\{\ ,\ \}_\theta$ в точке $h+v$. Утверждение теоремы эквивалентно существованию точки $h+v$ такой, что $\widetilde{M}=M+St(a)$.

При доказательстве, как обычно, нам будет удобно перейти к комплексным алгебрам Ли. Чтобы не усложнять обозначений будем сразу считать алгебры Ли G и G_θ комплексными. Отметим, что после перехода к комплексным алгебрам элемент $a\in V$ произвольным уже считать нельзя, поскольку вещественное подпространство V состоит из полупростых элементов. Поэтому и в комплексном случае мы будем считать $a \in V$ полупростым. Обозначим через $A_{\alpha,\beta}$ кососимметрическую форму на G, задаваемую скобкой $\alpha(\{,\}+\{,\}_a)+\beta\{,\}_\theta$ в точке $h+v$. Покажем, что точка $h+v$ может быть выбрана так, что

I/ $\operatorname{rang} A_{\alpha,\beta} = R = \dim G - \operatorname{ind} G$, $\alpha+\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$;

2/ $\operatorname{rang} A_{0,1} = R = \dim G - \operatorname{ind} G$;

3/ $\dim K_{1,-1} = \operatorname{ind} G$, где $K_{1,-1} = \{\xi \in \operatorname{Ker} A_{1,-1} \mid A_{0,1}(\xi, \operatorname{Ker} A_{1,-1}) = 0\}$.

В силу пункта в/ теоремы I.2.I эти условия эквивалентны тому, что $\widetilde{M} = M + \operatorname{Ker} A_{1,-1}$.

Л е м м а. Условие I/ эквивалентно регулярности элементов вида $\lambda h + v + \lambda^2 a$ $(\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0)$ в алгебре Ли G.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Форма $A_{\alpha,\beta}$ задается кососимметрическим оператором $G \to G$ вида

$$\underset{H}{\xi} + \underset{V}{\eta} \longrightarrow \underset{H}{\left([\xi,(\alpha+\beta)h]+[\eta,(\alpha+\beta)v+\alpha a]\right)} + \underset{V}{\left([\xi,(\alpha+\beta)v+\alpha a]+[\eta,\alpha h]\right)}$$

Сделаем замену $\xi' = \xi/\lambda$, $\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$. Тогда ядро формы $A_{\alpha,\beta}$ совпадает с пространством решений системы уравнений

$$\begin{cases} [\xi', \lambda h] + [\eta, v + \lambda^2 a] = 0 \\ [\xi', v+\lambda^2 a] + [\eta, \lambda h] = 0 \end{cases}$$

т.е. $\xi' + \eta$ принадлежит централизатору элемента $\lambda h + v + \lambda^2 a$ в алгебре Ли G. Поэтому условие $\operatorname{rang} A_{\alpha,\beta} = R = \dim G - \operatorname{ind} G$ эквивалентно регулярности элемента $\lambda h + v + \lambda^2 a$ в алгебре Ли G.

Поскольку $\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} G_\theta$ /см. [I6] /, то второе условие эквивалентно регулярности элемента $h+v$ как ковектора двойственного пространства G_θ^* .

Рассмотрим теперь третье условие. Ядро формы $A_{1,-1}$ совпадает с пространством решений системы уравнений

$$\begin{cases} [\eta, a] = 0 \\ [\eta, h] + [\xi, a] = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Введем следующие обозначения: $C(a)$ - централизатор элемента a в алгебре Ли G , $V(a) = V \cap C(a)$, $St(a)^\perp$ - ортогональное дополнение к $St(a)$ в H относительно формы Киллинга, $V(a)^\perp$ - ортогональное дополнение к $V(a)$ в V . Имеют место разложения в прямые суммы $G = H + V = St(a) + St(a)^\perp + V(a) + V(a)^\perp$, $C(a) = V(a) + St(a)$. Здесь мы учитываем, что элемент $a \in V$ полупрост.

В системе уравнений (3) положим $h = h_1 + h_2$, $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $h_1, \xi_1 \in St(a)$, $h_2, \xi_2 \in St(a)^\perp$. Тогда второе уравнение системы распадается на два:

$$[\eta, h_1] = 0$$

$$[\eta, h_2] + [\xi_2, a] = 0$$

Последнее из этих уравнений однозначно разрешимо относительно $\xi_2 \in St(a)^\perp$ при любых $\eta \in V(a)$, $h_2 \in St(a)^\perp$. Элемент $\xi_1 \in St(a)$ в уравнения не входит, т.е. $St(a) \subset \operatorname{Ker} A_{1,-1}$. Из этого следует, что размерность ядра формы $A_{1,-1}$ равна сумме $\dim St(a) + \dim W$, где W - пространство решений системы уравнений относительно η

$$\begin{cases} [\eta, a] = 0 \\ [\eta, h_1] = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Л е м м а. Почти для всех $h_1 \in St(a)$ имеем $\dim W = \operatorname{ind} G - \operatorname{ind} St(a)$.

Доказательство леммы. Пусть K – подалгебра Картана в $St(a)$. Утверждается, что централизатор подалгебры K в $C(a)$ есть подалгебра Картана в $C(a)$ /и, следовательно, в G, поскольку $\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} C(a)$ /. Достаточно проверить, что централизатор подалгебры K в $C(a)$ коммутативен. Предположим противное, т.е. существуют $h'+v'$, $h''+v'' \in C(a)$ такие, что $[K, h'+v'] = [K, h''+v''] = 0$, но $[h'+v', h''+v''] \neq 0$. Легко видеть, что $h', h'' \in K$, поэтому $[K, v'] = [K, v''] = 0$, но $[v', v''] \neq 0$. Имеем $[K, [v', v'']] = 0$, с другой стороны, $[v', v''] \in St(a)$. Но подалгебра $K \subset St(a)$ является максимальной коммутативной в $St(a)$. Следовательно, $[v', v''] \in K$. Ограничение формы Киллинга на K невырождено, поэтому найдется $x \in K$ такой, что $(x, [v', v'']) \neq 0$, но это невозможно, поскольку $[x, v'] = [x, v''] = 0$. Далее, существует элемент $h_1 \in K$ такой, что его централизатор в $C(a)$ совпадает с централизатором подалгебры K в $C(a)$, причем такие элементы образуют в K множество, являющееся дополнением к некоторому конечному семейству гиперплоскостей. Централизатор такого элемента h_1 в алгебре Ли $C(a)$ совпадает с прямой суммой $K + W$, где W – пространство решений (4). Следовательно, $\dim W = \operatorname{ind} C(a) - \dim K = \operatorname{ind} G - \operatorname{ind} St(a)$. Лемма доказана.

Пусть $h = h_1 + h_2 \in H$, причем $h_1 \in St(a)$ удовлетворяет условиям леммы, в частности, h_1 регулярен в $St(a)$. Пусть K – подалгебра Картана в $St(a)$, содержащая h_1. Рассмотрим разложение $St(a) = K + B^+ + B^-$, где B^+ и B^- нильпотентные подалгебры в $St(a)$, отвечающие соответственно множествам положительных и отрицательных корней. Утверждается, что ограничение формы $A_{0,1}$ на подпространство $B^+ + B^-$ невырождено. В самом деле, на этом подпространстве форма $A_{0,1}$

имеет вид $A_{0,1}(b_1, b_2) = (h_1, [b_1, b_2])$. Поэтому невырожденность следует из регулярности элемента h_1 в $St(a)$. Следовательно, размерность подпространства $K_{1,-1}$, т.е. ядра формы $A_{0,1}$, ограниченной на ядро формы $A_{1,-1}$ не превосходит

$$\dim \mathrm{Ker}\, A_{1,-1} - \dim (B^+ + B^-) = \dim St(a) + \mathrm{ind}\, G - \mathrm{ind}\, St(a) - (\dim St(a) - \mathrm{ind}\, St(a)) = \mathrm{ind}\, G$$

Итак, мы показали, что условие 3/ выполнено почти для всех элементов $h + v \in H + V$. Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и для условия 2/. Наконец, первое условие означает, что комплексная кривая $\lambda h + v + \lambda^2 a$ $(\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ не пересекает множество сингулярных элементов S в алгебре Ли G. Ясно, что это условие также выполняется почти для всех $h + v$, поскольку $\mathrm{codim}\, S = 3 > 1$. Итак, мы можем выбрать точку $h + v$ в которой условия I/, 2/, 3/ выполняются одновременно. В этой точке $\widetilde{M} = M + \mathrm{Ker}\, A_{1,-1}$.

Покажем, что $M + \mathrm{Ker}\, A_{1,-1} = M + St(a)$. Все предыдущие обозначения сохраняются. Рассмотрим цепочку вложений

$$M + (B^+ + B^-) \subset M + St(a) \subset M + \mathrm{Ker}\, A_{1,-1}$$

Сумма $M + (B^+ + B^-)$ прямая. В противном случае существует $\xi \in M \cap (B^+ + B^-)$. Тогда $A_{0,1}(\xi, B^+ + B^-) = 0$, поскольку $B^+ + B^- \subset \widetilde{M}$. Это противоречит невырожденности формы $A_{0,1}$ на $B^+ + B^-$. Теперь остается сравнить размерности.

$$\dim (M + \mathrm{Ker}\, A_{1,-1}) = \dim M + \dim \mathrm{Ker}\, A_{1,-1} - \dim M \cap \mathrm{Ker}\, A_{1,-1} =$$
$$= \dim M + \dim St(a) + \mathrm{ind}\, G - \mathrm{ind}\, St(a) - \mathrm{ind}\, G =$$
$$= \dim M + \dim St(a) - \mathrm{ind}\, St(a) = \dim M + \dim (B^+ + B^-) =$$
$$= \dim (M + B^+ + B^-).$$

Мы использовали то, что $\dim M \cap \operatorname{Ker} A_{1,-1} = \operatorname{ind} G$

§ 3. Семейства скобок Пуассона, связанные с лиевыми пучками

В этом параграфе рассматривается еще одна серия согласованных скобок Пуассона на алгебрах Ли, на которую указал автору И.Л.Кантор.

Определение. Пусть L - конечномерное линейное пространство. Линейное семейство структур алгебр Ли на L называется лиевым пучком. Пусть $([\,,\,]_\alpha)_{\alpha \in J}$ соответствующее семейство коммутаторов на L. Линейность означает, что множество параметров J является линейным пространством, при этом $a[\,,\,]_\alpha + b[\,,\,]_\beta = [\,,\,]_{a\alpha+b\beta}$, $a\alpha + b\beta \in J$. Размерность пространства J называется размерностью лиева пучка.

Поясним связь лиевых пучков с согласованными скобками Пуассона. Если на пространстве L задан лиев пучок $([\,,\,]_\alpha)_{\alpha\in J}$, то на двойственном пространстве естественным образом возникает линейное семейство согласованных скобок Пуассона-Ли $(\{\,,\,\}_\alpha)_{\alpha\in J}$, где $\{f,g\}_\alpha(x) = (x, [df, dg]_\alpha)$. Если мы хотим теперь построить инволютивное семейство на L^* относительно некоторой скобки $\{\,,\,\}_\alpha$, $\alpha \in J$, мы можем применить общую конструкцию главы I для двумерного семейства скобок $(\{\,,\,\}_\gamma)_{\gamma\in J_0}$, где $J_0 \subset J$ - двумерное подпространство, содержащее α. Выясним, при каких условиях полученное семейство будет полным.

Итак, пусть на конечномерном комплексном пространстве L задан пучок $([\,,\,]_\alpha)_{\alpha\in J}$ размерности два, $J \cong \mathbb{C}^2$. На L^* рассмотрим соответствующее семейство скобок Пуассона-Ли $(\{\,,\,\}_\alpha)_{\alpha\in J}$. Пусть максимум рангов скобок из этого семейства равен R, другими словами, $R = \dim L - \min_{\alpha\in J} \operatorname{ind} L_\alpha$. Следуя общему методу, рассмотрим семейство функций $\mathcal{F}_J$, состоящее из центральных функций скобок $\{\,,\}_\alpha, \alpha\in J$, ранга R, т.е. $\mathcal{F}_J = \bigcup_{\alpha\in J, \operatorname{ind} L_\alpha = \dim L - R} I(L_\alpha)$, где $I(L_\alpha)$ - кольцо инвариантов коприсоединенного представления алгебры Ли L_α, задаваемой коммутатором $[\,,]_\alpha$. Будем предполагать, что алгебры Ли из пучка обладают полными наборами полиномиальных /рациональных/ инвариантов, например, все алгебры Ли L_α алгебраические. Прежде чем обсуждать полноту семейства $\mathcal{F}_J$, введем следующие обозначения.

S_α - множество сингулярных элементов в L^* в смысле коприсоединенного представления алгебры Ли L_α, $\alpha\in J$;

$\operatorname{Ann}_\alpha(x)$ - стационарная подалгебра ковектора $x\in L^*$ относительно коприсоединенного действия алгебры Ли L_α на L^*;

Z_α - центр алгебры Ли L_α.

П р е д л о ж е н и е 2.3.I. Z_α является подалгеброй в любой алгебре Ли L_β, $\beta\in J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что для любых двух алгебр Ли L_α и L_β из пучка выполняется тождество

$$[[\xi,\eta]_\alpha,\zeta]_\beta + [[\xi,\eta]_\beta,\zeta]_\alpha + (\text{циклическая перестановка}) = 0$$

/сравните с предложением I.2.I/. Отметим, что это условие означает в точности, что операция $[\,,]_\beta$ является коциклом в смысле когомологий алгебры Ли L_α относительно присоединенного представления. Пусть $\xi, \eta\in Z_\alpha$, тогда из тождества немедленно следует, что $[[\xi,\eta]_\beta,\zeta]_\alpha = 0$ для любого $\zeta\in L$, т.е. $[\xi,\eta]_\beta\in Z_\alpha$. Следовательно, Z_α подалгебра в L_β.

Пучки, которые будут рассматриваться ниже, обладают одним весьма удобным свойством: все алгебры Ли пучка за исключением конечного числа /с точностью до пропорциональности параметра/ изоморфны между собой. Будем предполагать, что это условие выполнено, и фиксируем какой-нибудь представитель L_ω из этих алгебр "общего положения". Пусть $L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_k}$ - все с точностью до пропорциональности алгебры Ли из пучка, которые не являются алгебрами общего положения.

Элементы центра Z_{α_i} мы будем рассматривать как линейные функции на L^*. Любая функция $v \in Z_{\alpha_i}$ принадлежит кольцу инвариантов $I(L_{\alpha_i})$ и поэтому коммутирует со всеми функциями из $\mathcal{F}_J$ относительно произвольной скобки $\{\ ,\ \}_\alpha$, $\alpha \neq \lambda\alpha_i$. Обозначим через $\mathcal{F}_i$ полный инволютивный набор функций на $Z^*_{\alpha_i}$ относительно скобки $\{\ ,\ \}_\omega$ "общего положения". Скобка $\{\ ,\ \}_\omega$ естественным образом ограничивается на $Z^*_{\alpha_i}$, поскольку Z_{α_i} - подалгебра в L_ω. Функции $f \in \mathcal{F}_i$ продолжаются на все пространство L^* с помощью естественной проекции $\pi_i : L^* \to Z^*_{\alpha_i}$. В силу выбора семейств $\mathcal{F}_i$ и предложения I.2.2 семейство $\mathcal{F}_J \cup \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_k$ является инволютивным относительно любой скобки $\{\ ,\ \}_\alpha$, $\alpha \in J$.

П р е д л о ж е н и е 2.3.2. Пусть для любой алгебры Ли L_{α_i} выполняется равенство

$$\operatorname{ind} L_{\alpha_i} = \operatorname{ind} L_\omega + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}$$

/здесь Z_{α_i} рассматривается как подалгебра в L_ω, т.е. как алгебра Ли с коммутатором $[\ ,\ ]_\omega$ /. Пусть для алгебры Ли L_ω "общего положения" выполнено условие $\operatorname{codim} S_\omega \geqslant 2$. Тогда инволютивное семейство $\mathcal{F}_J \cup \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_k$ является полным на L^* относительно скобки $\{\ ,\ \}_\omega$.

<u>Замечание</u>. Если условие об изоморфности почти всех алгебр

Ли из пучка не выполняется, то нужно ввести несколько иное определение алгебры Ли "общего положения", накладывая на такие алгебры Ли два условия: I/ $\operatorname{ind} L_\alpha = \min\limits_{\beta \in J} \operatorname{ind} L_\beta = r$, 2/ $\operatorname{codim} S_\alpha = \max\limits_{\substack{\beta \in J \\ \operatorname{ind} L_\beta = r}} \operatorname{codim} S_\beta$. Можно легко показать, что все алгебры Ли любого двумерного лиева пучка за исключением конечного числа являются алгебрами "общего положения" в этом смысле.

Замечание. Утверждение предложения 2.3.2 допускает следующую эквивалентную переформулировку. Рассмотрим семейство функций $\mathcal{F}_J \cup Z_{\alpha_1} \cup \ldots \cup Z_{\alpha_k}$. Из предложения 2.3.I следует, что это алгебра Ли относительно любой из скобок $\{\ ,\ \}_\alpha$, $\alpha \in J$. Предложение 2.3.2 фактически утверждает, что алгебра Ли функций $\mathcal{F}_J \cup Z_{\alpha_1} \cup \ldots \cup Z_{\alpha_k}$ является полной в некоммутативном смысле относительно скобки $\{\ ,\ \}_\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\operatorname{codim} S_\omega \geqslant 2$ гарантирует, что существуют точки $x \in L^*$, которые являются регулярными в смысле коприсоединенного представления всех алгебр Ли L_α из пучка одновременно. Действительно, достаточно показать, что дополнение к множеству $S_J = \bigcup\limits_{\alpha \in J} S_\alpha$ в L^* содержит всюду плотное открытое множество. Но множество S_J является объединением множеств коразмерности два за исключением, быть может, конечного числа $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_k}$. При этом объединение происходит фактически не по двум, а по одному параметру, поскольку $S_\alpha = S_{\lambda\alpha}$ /удобно считать, что параметр α пробегает не множество $J \cong \mathbb{C}^2$, а соответствующее проективное пространство $P(J) \cong \mathbb{C}P^1$ /. Поэтому размерность S_J может увеличиться только на единицу по сравнению с размерностью типичного множества S_ω, т.е. $\operatorname{codim} S_J \geqslant 1$.

Потребуем далее, чтобы точка $x \in L^*$ удовлетворяла одновременно трем условиям:

1/ точка x регулярна как ковектор в смысле всех алгебр Ли L_α из пучка, т.е. $x \in L^* \setminus S_J$;

2/ ковектор $\pi_i(x)$ регулярен в $Z^*_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, где $\pi_i : L^* \to Z^*_{\alpha_i}$ - естественная проекция, Z_{α_i} рассматривается как подалгебра в L_ω ;

3/ все инволютивные семейства $\mathcal{F}_i$ полны в точке x , или, более строго, инволютивные семейства $\mathcal{F}_i$ на $Z^*_{\alpha_i}$ полны в точках $\pi_i(x)$.

Обозначим через M подпространство в L , порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}_J$ в точке x . Пусть $\widetilde{M}$ - кособортогональное дополнение к M в L относительно 2-формы, задаваемой произвольной скобкой $\{\ ,\ \}_\alpha$. Напомним, что $\widetilde{M}$ не зависит от выбора скобки $\{\ ,\ \}_\alpha$, $\alpha \neq 0$, в силу теоремы I.2.I. Покажем, что $\widetilde{M} = M + \mathrm{Ann}_{\alpha_1}(x) + \ldots + \mathrm{Ann}_{\alpha_k}(x)$. Из теоремы I.2.I следует, что для этого необходимым и достаточным является условие $\dim K_i = \mathrm{ind}\, L_\omega, i = 1, \ldots, k$, где $K_i = \{\xi \in \mathrm{Ann}_{\alpha_i}(x) \mid (x, [\xi, \mathrm{Ann}_{\alpha_i}(x)]_\omega) = 0\}$. Рассмотрим подпространства $K_i' = \{\xi \in Z_{\alpha_i} \mid (x, [\xi, Z_{\alpha_i}]_\omega) = 0\}$, таким образом, это аннулятор ковектора $\pi_i(x)$ в подалгебре $Z_{\alpha_i} \subset L_\omega$. Точка $\pi_i(x)$ регулярна в $Z^*_{\alpha_i}$, поэтому $\dim K_i' = \mathrm{ind}\, Z_{\alpha_i}$.

Л е м м а. Пусть на конечномерном пространстве K задана кососимметрическая форма B , K' - подпространство в K , $B|_{K'}$ - ограничение формы B на K' . Тогда имеет место оценка $\dim K - \dim \mathrm{Ker}\, B \geqslant \dim K' - \dim \mathrm{Ker}\, B|_{K'}$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Разность $\dim K - \dim \mathrm{Ker}\, B$ равна рангу формы B на K , аналогично, ранг ограничения $B|_{K'}$ равен $\dim K' - \dim \mathrm{Ker}\, B|_{K'}$. Но ранг ограничения не превосходит ранга формы на объемлющем пространстве.

Из утверждения леммы следует, что $\dim \mathrm{Ann}_{\alpha_i}(x) - \dim K_i \geqslant \dim Z_{\alpha_i} - \dim K_i'$. Но по условию $\dim \mathrm{Ann}_{\alpha_i}(x) = \mathrm{ind}\, L_{\alpha_i} =$

$= \operatorname{ind} L_\omega + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}$. Поэтому $\dim K_i = \operatorname{ind} L_\omega$, так как всегда $\dim K_i \geqslant \operatorname{ind} L_\omega$. Отметим, кстати, еще одну оценку, которая пригодится нам в дальнейшем:

$$\operatorname{ind} L_\omega \leqslant \dim K_i \leqslant \dim \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) - \dim Z_{\alpha_i} + \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}$$

или

$$\operatorname{ind} L_{\alpha_i} \geqslant \operatorname{ind} L_\omega + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i} \qquad (5)$$

Итак, $\widetilde{M} = M + \operatorname{Ann}_{\alpha_1}(x) + \ldots + \operatorname{Ann}_{\alpha_k}(x)$. Покажем, что на самом деле $\widetilde{M} = M + Z_{\alpha_1} + \ldots + Z_{\alpha_k}$. Ясно, что $M + Z_{\alpha_i} \subset M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)$. Подпространство Z_{α_i} содержится в кососортогональном дополнении $\widetilde{M}$ к M , поэтому $M \cap Z_{\alpha_i} \subset K_i'$, следовательно,

$$\dim (M + Z_{\alpha_i}) = \dim M + \dim Z_{\alpha_i} - \dim (M \cap Z_{\alpha_i}) \geqslant$$
$$\geqslant \dim M + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}$$

С другой стороны

$$\dim (M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)) = \dim M + \dim \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) - \dim (M \cap \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)) =$$
$$= \dim M + \operatorname{ind} L_{\alpha_i} - \dim K_i = \dim M + \operatorname{ind} L_{\alpha_i} - \operatorname{ind} L_\omega$$

Поэтому $\dim (M + Z_{\alpha_i}) \geqslant \dim (M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x))$. Следовательно, $M + Z_{\alpha_i} = M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)$ и $\widetilde{M} = M + Z_{\alpha_1} + \ldots + Z_{\alpha_k}$. Пусть M_i – подпространство в Z_{α_i} , порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}_i$ в точке x . По построению семейства $\mathcal{F}_i$ полны в точке x , поэтому подпространства M_i являются максимальными изотропными подпространствами в Z_{α_i} в смысле скобки $\{\ ,\ \}_\omega$. Учитывая, что все подпространства M_i кососортогональны между собой, заключаем, что подпространство $M + M_1 + \ldots + M_k$ является максимальным изотропным в L . Это означает полноту семейства $\mathcal{F}_J \cup \mathcal{F}_1 \cup \ldots$

$\ldots \cup \mathcal{F}_k$ в точке $x \in L^*$ и, следовательно, на всем пространстве L^* .

Теперь мы изучим некоторые конкретные примеры лиевых пучков. Дадим прежде два определения. Лиев пучок называется неприводимым, если не существует нетривиального подпространства $K \subset L$, которое является идеалом для всех элементов пучка одновременно. Пусть A - линейная операция на L , B - билинейная. Определим действие операции A на множестве всех билинейных операций, полагая

$$A(B)(X,Y) = A(B(X,Y)) - B(AX,Y) - B(X,AY) \ , \quad X,Y \in L$$

Пусть $([\ ,\ ]_\alpha)_{\alpha \in J}$ - лиев пучок на L . Для $x \in L$, $\alpha \in J$ определим оператор $A_{x,\alpha}$ по формуле $A_{x,\alpha}(y) = [x,y]_\alpha$. Будем говорить, что лиев пучок замкнут, если множество коммутаторов $([\ ,\ ]_\alpha)_{\alpha \in J}$ инвариантно относительно действия всех операторов $A_{x,\gamma}$. Имеется полная классификация замкнутых неприводимых лиевых пучков.

Т е о р е м а 2.3.I /Кантор И.Л., Персиц Д.Б./ Неприводимые замкнутые лиевы пучки над $\mathbb{C}$ исчерпываются следующим списком:

I/ L - множество кососимметрических матриц размером $n \times n$,

J - множество симметрических матриц размером $n \times n$,

коммутатор $[\ ,\ ]_A$, $A \in J$, задается формулой $[X,Y]_A = XAY - YAX$;

2/ L - множество симметрических матриц размером $n \times n$,

J - множество кососимметрических матриц размером $n \times n$,

коммутатор $[\,,\,]_A$, $A \in J$ задается формулой
$[X,Y]_A = XAY - YAX$;

3/ L - множество матриц размером $n \times m$,
J - множество матриц размером $m \times n$,
коммутатор $[\,,\,]_A$, $A \in J$ задается формулой
$[X,Y]_A = XAY - YAX$;

4/ L - четномерное линейное пространство, $J = L$,
коммутатор $[\,,\,]_A$, $A \in J$ задается формулой
$[X,Y]_A = \langle A,X\rangle Y - \langle A,Y\rangle X - \langle X,Y\rangle A$,
где $\langle\,,\,\rangle$ - невырожденная кососимметрическая форма на L;

5/ одномерный пучок, порожденный простой алгеброй Ли.

Изучим эти пучки более подробно, следуя следующей схеме. Во-первых, установим, какие неизоморфные алгебры Ли содержатся в данном пучке; во-вторых, укажем индексы этих алгебр, их центры и явный вид инвариантов коприсоединенного представления типичных алгебр Ли из пучка / множество параметров J содержит открытое по Зарисскому множество $\mathcal{U}$, такое, что алгебры Ли L_A и L_B изоморфны для любых $A, B \in \mathcal{U}$, такие алгебры Ли мы будем называть типичными или алгебрами "общего положения" в пучке $\{L_C\}_{C\in J}$ /; в-третьих, проверим полноту инволютивных семейств, построенных по некоторому двумерному подпучку.

<u>I случай</u>. Заранее можно ожидать, что изучение этого пучка может быть интересным с точки зрения приложений. И действительно, как будет показано ниже, здесь естественным образом возникают семейства первых интегралов уравнений Эйлера динамики твердого тела [I], [4] и n-мерного случая Клебша [II].

Итак, пусть $A, B \in J$ - симметрические матрицы. Если $A = C^T B C$, где C - некоторая невырожденная матрица, то алгебры Ли L_A и L_B изоморфны. Изоморфизм устанавливается отображением $X \to CXC^T$. В самом деле,

$$C[X,Y]_A C^T = CXAYC^T - CYAXC^T = [CXC^T, CYC^T]_B$$

Наоборот, если симметрические матрицы A и B неэквивалентны, то $L_A \not\cong L_B$. Из этого замечания следует, что класс алгебры Ли L_A, т.е. множество алгебр L_B изоморфных L_A, определяется рангом матрицы A, поскольку в комплексном случае любая симметрическая матрица A ранга k может быть приведена к стандартному виду

$$E_k = \begin{array}{c} k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

П р е д л о ж е н и е 2.3.3. $ind\, L_{E_k} = ind\, so(n) + dim\, so(n-k) - ind\, so(n-k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что алгебра Ли L_{E_k} является полупрямой суммой алгебры Ли $so(k)$ и радикала V, который естественным образом разлагается в прямую сумму $V_1 + V_2$. На V_1 действие алгебры Ли $so(k)$ является суммой $n-k$ экземпляров простейшего представления $so(k)$ на $\mathbb{C}^k$, на V_2 действие $so(k)$ тривиально, $[V_1, V_1] \subset V_2$, V_2 - центр алгебры Ли L_{E_k}. Представив матрицы $X, Y \in L$ в виде блоков

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2^T & X_3 \end{pmatrix}}_{k}\}k \qquad Y = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ -Y_2^T & Y_3 \end{pmatrix}}_{k}\}k$$

имеем

$$[X,Y]_{E_k} = \begin{array}{|c|c|} \hline X_1Y_1-Y_1X_1 & \begin{array}{c} X_1Y_2- \\ -Y_1X_2 \end{array} \\ \hline (Y_1X_2-X_1Y_2)^T & \begin{array}{c} -X_2^TY_2+ \\ +Y_2^TX_2 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Центр Z_k алгебры Ли L_{E_k} является подалгеброй в алгебре $L_{E_n} = so(n)$, изоморфной $so(n-k)$. Поэтому формулу, которую нужно доказать, можно переписать в виде

$$\operatorname{ind} L_{E_k} = \operatorname{ind} L_{E_n} + \dim Z_k - \operatorname{ind} Z_k$$

где Z_k рассматривается как подалгебра в $so(n)$ /сравните с предложением 3.2.2/. Рассмотрим два случая. Пусть сначала $(n-k)$ четно. Отождествим пространства L и L^* при помощи невырожденного скалярного произведения $(X,Y) = \operatorname{Tr} XY$. Тогда коприсоединенное действие алгебры Ли L_A на $L^* = L$ имеет следующий вид: $(ad_A^*)_X Z = AXZ - ZXA$. Положим

$$Z = \begin{array}{|c|c|} \hline Z_1 & 0 \\ \hline 0 & Z_3 \\ \hline \end{array}$$

, $\det Z_3 \neq 0$, Z_1 полупрост и регулярен в $so(k)$.

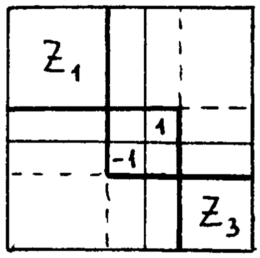
Простым вычислением проверяется, что аннулятор ковектора Z в алгебре Ли L_{E_k} имеет вид

$$\operatorname{Ann}_{E_k}(Z) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline H & 0 \\ \hline 0 & V_2 \\ \hline \end{array} \right\}$$

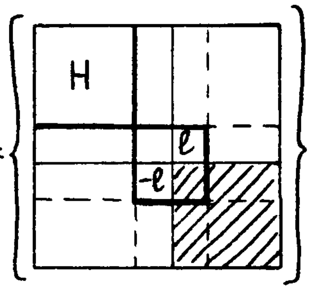
, где H – подалгебра Картана в $so(k)$, содержащая Z_1 .

Таким образом, $\dim \operatorname{Ann}_{E_k}(Z) = \operatorname{ind} so(k) + \dim so(n-k) = \operatorname{ind} so(n) + \dim so(n-k) - \operatorname{ind} so(n-k)$. Следовательно, $\operatorname{ind} L_{E_k} \leq \dim \operatorname{Ann}_{E_k}(Z)$, но при доказательстве предложения 3.2.2 была получена обратная оценка (5) . Поэтому $\operatorname{ind} L_{E_k} = \operatorname{ind} L_{E_n} + \dim Z_k - \operatorname{ind} Z_k$.

Пусть $(n-k)$ нечетно. Положим

$Z =$ 

Тогда

$Ann_{E_k}(Z) =$ 

Подсчитывая размерность, получаем $\operatorname{ind} L_{E_k} \leq \dim Ann_{E_k} Z = \operatorname{ind} L_{E_n} + \dim Z_k - \operatorname{ind} Z_k$. Как и в предыдущем случае обратную оценку получаем из (5).

Теперь мы установим явный вид центральных функций скобок $\{\, ,\}_A$, $A \in J$, т.е. инвариантов коприсоединенного представления алгебры Ли L_A. Сформулируем общее утверждение, из которого следует связь между явным видом инвариантов алгебр L_A и L_B, если $L_A \cong L_B$. Пусть на линейном пространстве L заданы две различные, но изоморфные структуры алгебр Ли, $[\, ,]_0$ и $[\, ,]_1$ – соответствующие коммутаторы. Пусть $\varphi : L \to L$ – отображение, устанавливающее изоморфизм между этими алгебрами Ли, т.е. $\varphi[x,y]_0 = [\varphi x, \varphi y]_1$. Пусть $\{\, ,\}_0$, $\{\, ,\}_1$ – скобки Пуассона-Ли на L^*, $\varphi^* : L^* \to L^*$ – сопряженный оператор к φ, Φ – отображение, переводящее пространство функций $C^\infty(L^*)$ в себя, индуцированное отображением $\varphi^* : L^* \to L^*$. Тогда Φ устанавливает изоморфизм между кольцами инвариантов $I(L,[\, ,]_0)$ и $I(L,[\, ,]_1)$. Другими словами, если f – инвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $(L, [\, ,]_0)$, то $\Phi f(x) = f(\varphi^* x)$ – инвариант алгебры Ли $(L, [\, ,]_1)$ и наоборот.

Проверим это. Пусть $f \in I(L,[,]_0)$. Положим $y=\varphi^* x$, $\xi=\varphi\eta$. Тогда

$$(x, [d(f(\varphi^* x)), \xi]_1) = (x, [\varphi df(y), \varphi\eta]_1) =$$

$$= (x, \varphi[df(y), \eta]_0) = (\varphi^* x, [df(y), \eta]_0) =$$

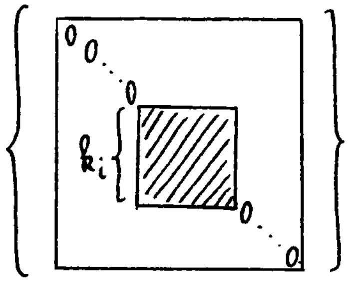
$$= (y, [df(y), \eta]_0) = 0$$

т.е. $\Phi f \in I(L,[,]_1)$.

Итак, если $\det A \neq 0$, то кольцо полиномиальных инвариантов алгебры Ли L_A при указанном выше отождествлении L с L^* состоит из функций вида $f(CXC^T)$, где $f \in I(L_{E_n})$, $E_n = CAC^T$. Учитывая, что кольцо $I(L_{E_n})$ порождается функциями вида $\mathrm{Tr}\, Y^{2\ell}$ $(2\ell < n)$, когда n нечетно, и $\mathrm{Tr}\, Y^{2\ell}(2\ell < n)$, $\mathrm{Pf}\, Y = \sqrt{\det Y}$, когда n четно, мы можем в качестве образующих кольца $I(L_A)$ взять функции $\mathrm{Tr}(CXC^T)^{2\ell} = \mathrm{Tr}(XA^{-1})^{2\ell}$ $(2\ell < n)$, когда n нечетно, и $\mathrm{Tr}(XA^{-1})^{2\ell}$ $(2\ell < n)$, $\mathrm{Pf}\, X$, когда n четно.

Перейдем теперь к построению инволютивных семейств на алгебрах Ли из этого пучка. Пусть A и B - произвольные симметрические матрицы, пусть при этом $\max\limits_{\lambda,\mu} \mathrm{rang}(\lambda A + \mu B) = n$. Тогда двумерный пучок, натянутый на алгебры A и B изоморфен пучку, порожденному алгебрами L_E и L_{B_0} , где $E = \mathrm{diag}(1, \dots, 1)$, $B_0 = \mathrm{diag}(\underbrace{b_1, \dots, b_1}_{k_1}, \underbrace{b_2, \dots, b_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{b_s, \dots, b_s}_{k_s})$ Это следует из того, что над полем $\mathbb{C}$ две любые симметричные матрицы, одна из которых невырождена, можно привести к диагональному виду одновременно. Поэтому мы ограничиваемся изучением пучка, построенного по стандартной паре L_E , L_{B_0} .

Следуя общей конструкции выделим из пучка $(L_{\lambda E + \mu B_0})_{\lambda,\mu \in \mathbb{C}}$ все алгебры Ли, которые не изоморфны $L_E \cong so(n)$. Ясно, что такими будут только алгебры L_{C_i} , где $C_i = B_0 - b_i E$. Центр алгебры Ли L_{C_i} имеет вид

$Z_i =$ 

и как подалгебра в $L_E = so(n)$ изоморфен $so(k_i)$. Пусть $\mathcal{F}_i$ произвольное полное инволютивное семейство функций на $Z_i^* \cong so(k_i)^*$.

Т е о р е м а 2.3.2. Семейство функций $\mathcal{F}_{B_0} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_s \cup \cup \left(\bigcup_{\lambda \neq -b_i} I(L_{B_0 + \lambda E}) \right)$ на пространстве L^* инволютивно и полно относительно скобки Пуассона-Ли, отвечающей алгебре Ли $L_E = so(n)$, или более общим образом относительно скобок $\{\ ,\ \}_{\lambda E + \mu B_0}$, где $\operatorname{ind} L_{\lambda E + \mu B_0} = \operatorname{ind} L_E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о немедленно следует из предложения 2.3.2. В самом деле, $\operatorname{ind} L_{C_i} = \operatorname{ind} L_E + \dim Z_i - \operatorname{ind} Z_i$ /см. предложение 2.3.3/ и $\operatorname{codim} S_E = 3 > 2$, где S_E - множество сингулярных элементов в $L^* \cong (so(n))^*$. Полнота этого семейства относительно любой скобки $\{\ ,\ \}_{\lambda E + \mu B_0}$, $\operatorname{ind} L_{\lambda E + \mu B_0} = \operatorname{ind} L_E$, следует из того, что полные семейства функций на L^* в смысле скобок $\{\ ,\ \}_E$ и $\{\ ,\ \}_{\lambda E + \mu B_0}$ состоят из одинакового числа независимых функций.

С л е д с т в и е I. Пусть $C_i = B_0 - b_i E$. Для того чтобы получить полное инволютивное семейство на L^* относительно скобки $\{\ ,\ \}_{C_i}$, достаточно добавить к семейству $\mathcal{F}_{B_0}$ функции из центра Z_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. Нужно проверить сколько новых функций добавится к семейству $\mathcal{F}_{B_0}$. Нас, конечно, интересуют только функционально независимые функции, поэтому следует учитывать, что набор $\mathcal{F}_i$ выражается через линейные функции $v \in Z_i$. Набор $\mathcal{F}_i$ состоит из

$\frac{1}{2}(\dim Z_i + \operatorname{ind} Z_i)$ функционально независимых функций, поэтому добавится не более $\dim Z_i - \frac{1}{2}(\dim Z_i + \operatorname{ind} Z_i)$ функций. На самом деле ровно столько, иначе набор $\mathcal{F}_{B_0}$ можно было бы расширить с сохранением инволютивности относительно скобки $\{\,,\}_E$, что невозможно. Итак, в наборе $\mathcal{F}_{B_0}$ было $\frac{1}{2}(\dim L_E + \operatorname{ind} L_E)$ независимых функций. Добавив $\frac{1}{2}(\dim Z_i - \operatorname{ind} Z_i)$ новых функций мы получим семейство, состоящее из $\frac{1}{2}(\dim L_E + \operatorname{ind} L_E +$
$+ \dim Z_i - \operatorname{ind} Z_i) = \frac{1}{2}(\dim L_{C_i} + \operatorname{ind} L_{C_i})$
функций, т.е. полное относительно скобки $\{\,,\}_{C_i}$.

Отметим еще один важный частный случай. Пусть $A_0 = \operatorname{diag}(1, \ldots$ $\ldots, 1, 0)$. Алгебра Ли L_{A_0} изоморфна в этом случае алгебре Ли $E(n-1)$ группы движений $(n-1)$-мерного евклидова пространства. Пусть $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, $b_n \neq 0$. Тогда $\max\limits_{\lambda,\mu} \operatorname{rang}(\lambda A_0 + \mu B) = n$, и мы можем применить к пучку, натянутому на алгебры Ли L_{A_0} и L_B, теорему 2.3.2, поскольку такой пучок изоморфен стандартному. Пусть для простоты $b_i \neq b_j$, $i \neq j$. Тогда справедливо следующее

С л е д с т в и е 2. Семейство функций $\bigcup\limits_{(\lambda,\mu)\neq(0,0)} (I_{\lambda A_0 + \mu B})$ инволютивно и полно на L^* относительно скобки $\{\,,\}_{A_0}$, отвечающей алгебре Ли $E(n-1)$.

Рассмотрим теперь более кратко оставшиеся серии замкнутых неприводимых лиевых пучков.

<u>Случай 2</u>. L – пространство симметрических матриц размером $n \times n$, J – пространство кососимметрических матриц размером $n \times n$, коммутатор $[\,,]_A$, $A \in J$ задается формулой: $[X, Y]_A = XAY - YAX$, $Y, X \in L$. Изучение этого случая во многом аналогично предыдущему, поэтому мы не будем останавливаться на деталях.

Алгебры Ли из пучка $(L_A)_{A \in J}$ разбиваются на $[\frac{n}{2}] + 1$ классов, каждый из которых содержит изоморфные между собой алгебры. Алгебры Ли L_A и L_B принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\, B$. Канонические представители классов имеют вид L_{F_k}, $F_k \in J$, где

$$F_k = \begin{array}{c} \\ 2k\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0\;1 & & & & \\ & & -1\;0 & \ddots & & & \\ & & & 0\;1 & & & \\ & & & -1\;0 & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots\; 0 \end{array}\right]$$

Алгебра Ли L_{F_k} является полупрямой суммой симплектической алгебры Ли $sp(2k, \mathbb{C})$ и радикала V. который разлагается в прямую сумму $V_1 + V_2$. На V_1 действие алгебры Ли $sp(2k, \mathbb{C})$ является суммой $n-2k$ экземпляров простейшего представления ρ_0 размерности $2k$. На V_2 действие тривиально, $[V_1, V_1] = V_2$, V_2 - центр алгебры Ли L_{F_k}. Если n четно, то алгебра Ли $L_{F_{\frac{n}{2}}}$ изоморфна симплектической алгебре Ли $sp(n, \mathbb{C})$.

П р е д л о ж е н и е 2.3.4.

$$\mathrm{ind}\, L_{F_k} = \frac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1) + k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение можно было бы доказать так же как и предложение 2.3.3, но здесь мы продемонстрируем еще один метод вычисления индекса, который удобно применять в случае, когда стационарные подалгебры общего положения представления Ad^* сопряжены. Этот метод был предложен А.Г.Элашвили и основан на следующем утверждении.

Л е м м а. Пусть G - комплексная конечномерная алгебра Ли, $x \in G^*$ - некоторый элемент, $\mathrm{Ann}\,(x)$ - стационарная подалгебра ковектора x относительно коприсоединенного действия алгебры Ли G. Пусть $\mathrm{Ann}(x) \cap [G, \mathrm{Ann}(x)] = 0$, тогда элемент x регулярен и $\mathrm{ind}\, G = \dim \mathrm{Ann}\,(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Обозначим через

K_x подпространство в G^*, состоящее из ковекторов $y \in G^*$ таких, что $Ann(y) \subset Ann(x)$, т.е. $K_x = \{y \in G^* \,|\, ad^*_\xi y = 0 \ \ \forall \xi \in Ann(x)\}$. Легко видеть, что $K_x = [G, Ann(x)]^\perp$. Кроме того, $Ann(x)^\perp = T_x O(x)$. Поэтому условие $Ann(x) \cap [G, Ann(x)] = 0$ в точности означает, что $G^* = K_x + T_x O(x)$. Выпуская орбиты из точек $y \in K_x$ близких с $x \in G^*$, мы заполним этими орбитами некоторую окрестность точки x. Ясно, что стационарные подалгебры точек этих орбит сопряжены аннулятору $Ann(x)$. Итак, имеется открытое подмножество в G^*, состоящее из точек $v \in G^*$, стационарные подалгебры которых имеют одинаковую размерность. Ясно, что это возможно лишь в том случае, когда все эти точки регулярны. Лемма доказана.

Теперь мы легко докажем предложение 2.3.4, подобрав подходящим образом ковектор $X \in L^*$. Как и в предыдущем случае коприсоединенное действие алгебры Ли L_{F_k} имеет вид

$$(ad_{F_k})^*_Y X = F_k Y X - X Y F_k ,$$

если отождествить L и L^* с помощью скалярного произведения $Tr\, XY$. Записывая матрицы X и Y в блочном виде

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_2^T & X_3 \end{array}\right], \qquad Y = \left[\begin{array}{c|c} Y_1 & Y_2 \\ \hline Y_2^T & Y_3 \end{array}\right],$$

имеем

$$(ad_{F_k})^*_Y X = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} J_k Y_1 X_1 - X_1 Y_1 J_k + \\ + J_k Y_2 X_2^T - X_2 Y_2^T J_k \end{array} & \begin{array}{c} J_k Y_1 X_2 \\ + \\ J_k Y_2 X_3 \end{array} \\ \hline (J_k Y_1 X_2 + J Y_2 X_3)^T & 0 \end{array}\right], \quad \text{где} \quad J_k = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{2k}$$

Положим $X_2 = 0$, X_1 - регулярный ковектор в смысле алгебры Ли $sp(2k, \mathbb{C})$, X_3 невырождена. Тогда стационарная подалгебра $Ann_{F_k}(X)$ имеет вид

$$Ann_{F_k}(X) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline H & 0 \\ \hline 0 & Y_3 \\ \hline \end{array} \right\}$$

где Y_3 - произвольная матрица, $Y_3^T = Y_3$, H - стационарная подалгебра элемента X_1 в смысле алгебры Ли $sp(2k, \mathbb{C})$, т.е. подалгебра Картана в $sp(2k, \mathbb{C})$. Очевидно, $Ann_{F_k}(X) \cap \cap [Ann_{F_k}(X), L]_{F_k} = 0$. Поэтому

$$\operatorname{ind} L_{F_k} = \dim Ann_{F_k}(X) = \dim H + \dim V_2 = k + \tfrac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1).$$

Отметим, что при доказательстве предложения 2.3.3 в случае нечетного $(n-k)$ этот метод применить нельзя, поскольку стационарные подалгебры минимальной размерности не сопряжены.

Положим

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & & \\ -b_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & b_2 & & \\ & & -b_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & b_{\frac{n}{2}} \\ & & & & -b_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & b'_1 & & & & \\ & -b'_1 & 0 & & & & \\ & & & 0 & b'_2 & & \\ & & & -b'_2 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & b'_{\frac{n-1}{2}} \\ & & & & & -b'_{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Через Z_k обозначим подпространство в L вида

$$Z_k = \left\{ \begin{array}{r|c|c|} \cline{2-3} 2k\{ & 0 & 0 \\ \cline{2-3} & 0 & * \\ \cline{2-3} \end{array} \right\}$$

Кроме этого определим векторы A_i, полагая

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & \underbrace{\boxed{a_i}}_{2} & & \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} 2i \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\end{matrix}}\right\} 2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Т е о р е м а 2.3.3. а/ Пусть n - четно, тогда семейство функций $(\bigcup_{\lambda\neq b_i} I(L_{B-\lambda F_k}))\cup A_1\cup\ldots\cup A_k\cup Z_k$ является инволютивным и полным на L^* относительно скобки $\{\,,\}_{F_k}$.

б/ Пусть n нечетно, тогда семейство функций $\bigcup_{\lambda} I(L_{F_k+\lambda B'})$ является инволютивным и полным на L^* относительно скобки $\{\,,\}_{F_k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.3.2 и является непосредственным следствием предложений 2.3.2 и 2.3.4.

Случай 3. L - пространство матриц размером $n\times m$, J - пространство матриц размером $m\times n$, коммутатор $[\,,]_A$ задается формулой $[X,Y]_A = XAY-YAX$, $A\in J$, $X,Y\in L$. Как и в двух предыдущих случаях алгебры Ли L_A и L_B изоморфны между собой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. Мы рассмотрим здесь только случай алгебр Ли L_A "общего положения", т.е. $\operatorname{rang} A = \min(n,m)$. Пусть для определенности $n\geqslant m$. Тогда алгебра Ли L_A является полупрямой суммой алгебры Ли $gl(m)$ и коммутативного идеала V , действие $gl(m)$ на V является полупрямой суммой $n-m$ экземпляров простейшего представления. Если $n=m$, то $L_A\cong gl(m)$. Индексы этих алгебр известны /см. [37] /, инварианты найдены А.В.Беляевым [38] .

Т е о р е м а 2.3.4. Пусть $n \bmod (n-m)\neq 0$, либо $n=m$. Тогда для любой матрицы A ранга m найдется матрица B ранга m такая, что семейство функций $\bigcup_{\lambda} I(L_{A+\lambda B})$ инволютивно и полно на L^* относительно скобки $\{\,,\}_A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $m=n$, то без ограничения общности можно считать, что $A=\operatorname{diag}(1,1,\ldots,1)$. Пусть $B=\operatorname{diag}(b_1,\ldots,b_n)$, $b_i\neq b_j$ при $i\neq j$. Тогда все алгебры Ли пучка, порожденного алгебрами L_A и L_B , за исключением абелевой алгебры L_0 имеют индекс n. Поэтому семейство $\bigcup_\lambda I(L_{A+\lambda B})$ инволютивно. Полнота следует из того, что почти все алгебры из этого пучка изоморфны $L_A \cong gl(m)$ и $\operatorname{codim} S_A = 3 > 2$, где $S_A \subset L^*$ – множество сингулярных элементов в смысле коприсоединенного действия алгебры Ли L_A. Если $n > m$, то положим

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0 & & & \\ & 1\,0 & & \\ & & 1\,0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1\,0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0\,1 & & & \\ & 0\,1 & & \\ & & 0\,1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0\,1 \end{pmatrix}$$

Тогда $\operatorname{rang}(\lambda A + \mu B) = m$ при всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, не обращающихся одновременно в нуль. Поэтому все нетривиальные алгебры Ли из пучка $(L_{\lambda A+\mu B})_{\lambda,\mu\in\mathbb{C}}$ изоморфны между собой. Кроме того, $\operatorname{codim} S_A \geqslant 2$ в случае $n \bmod (n-m) \neq 0$. Оценка коразмерности множества S_A легко проводится по индукции с использованием общей методики оценки коразмерности множества сингулярных элементов в случае полупрямых сумм /см. ниже предложение 3.I.2/. Теперь инволютивность и полнота семейства $\bigcup_\lambda I(L_{A+\lambda B})$ непосредственно следуют из предложения 2.3.2. Отметим, что в случае $n \bmod (n-m) = 0$ алгебра Ли L_A является фробениусовой /см. [34], [37] /, поэтому $\operatorname{codim} S_A = 1$, кольца инвариантов $I(L_{A+\lambda B})$ тривиальны.

Случай 4. L – четномерное комплексное пространство, $J = L$, коммутатор $[\ ,\ ]_A$ задается формулой $[X,Y]_A = \langle A,X\rangle Y - \langle A,Y\rangle X - \langle X,Y\rangle A$, где $\langle\ ,\ \rangle$ – невырожденная кососимметрическая форма на L.

В этом случае все алгебры Ли L_A изоморфны между собой /исключением является абелева алгебра Ли L_0 /. Покажем, что все эти алгебры Ли являются фробениусовыми, т.е. $\operatorname{ind} L_A = 0$ при $A \neq 0$. Отождествим L и L^* с помощью формы $\langle\ ,\ \rangle$.

Тогда коприсоединенное действие алгебры Ли L_A на L^* запишется в виде

$$(ad_A)^*_X Y = \langle A,X\rangle Y + \langle A,Y\rangle X + \langle X,Y\rangle A$$

Пусть $\langle A, Y\rangle \neq 0$. Решим уравнение $(ad^*_A)_X Y = 0$ относительно X . Из формулы видно, что X линейно выражается через Y и A . Положим $X = \alpha Y + \beta A$ и подставим в формулу:

$$\langle A, \alpha Y+\beta A\rangle Y + \langle A, Y\rangle (\alpha Y+\beta A) + \langle \alpha Y+\beta A, Y\rangle A =$$
$$= 2\langle A, Y\rangle (\alpha Y+\beta A) = 0$$

Итак, $\alpha Y + \beta A = 0$, т.е. $X = 0$ и $ind\, L_A = 0$. Поэтому, пользуясь методом построения инволютивного семейства по двумерному лиеву пучку, мы не сможем получить полного семейства на L^* . Заметим, однако, что полное семейство функций в инволюции на L^* легко построить другим способом. Достаточно, например, в качестве такого семейства взять произвольное лагранжево подпространство в L , содержащее A . Легко видеть, что это подпространство является абелевой подалгеброй размерности $\frac{1}{2} \dim L$ и потому полно и инволютивно на L^* .

§ 4. Вполне интегрируемые системы на алгебрах Ли и секционные операторы.

В предыдущих параграфах были построены полные семейства функций в инволюции на некоторых сериях алгебр Ли. Здесь мы укажем гамильтоновы системы, для которых построенные семейства являются семействами первых интегралов, и изучим некоторые свойства таких систем. Наибольший интерес обычно представляют системы с квадратичными гамильтонианами /возможно с линейными добавками/. Квадратичные гамильтонианы на двойственных пространствах алгебр Ли удобно записывать в виде $h(x) = \frac{1}{2}(Cx, x)$, где $C : G^* \to G$ – самосопряженный линейный оператор. Нашей задачей будет описание операторов C, при этом мы пользуемся методикой и идеями работ А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [5], [6], А.Т.Фоменко [39], В.В.Трофимова и А.Т.Фоменко [10].

Итак, пусть G – конечномерная алгебра Ли, G^* – двойственное пространство. Начнем с изучения систем, интегралами которых являются сдвиги инвариантов коприсоединенного представления. Пусть $a \in G^*$ – регулярный элемент, $\mathcal{F}_a$ – семейство полиномов, полученных при разложении в ряд локальных инвариантов алгебры Ли G в точке $a \in G^*$.

О п р е д е л е н и е. Самосопряженный оператор $C : G^* \to G$ будем называть секционным, если выполнено тождество

$$\varphi_a C(x) = ad_b^* x \qquad (6)$$

где b – произвольный элемент из $Ann(a)$.

П р е д л о ж е н и е 2.4.1. Пусть C – секционный оператор, $h(x) = \frac{1}{2}(Cx, x)$ – соответствующий квадратичный гамильтониан. Тогда $\{h, f\} \equiv 0$ для всех $f \in \mathcal{F}_a$, т.е. семейство $\mathcal{F}_a$ состоит из первых интегралов в инволюции уравнений Эйлера $\dot{x} = ad^*_{dh} x$.

Доказательство. Пусть f_b - локальный инвариант представления Ad^* в окрестности точки $a \in G^*$ такой, что $df(a) = -b$. Рассмотрим разложение в ряд

$$h(a+x) = P_0 + P_1(x) + P_2(x) + \dots$$

где $P_i(x)$ - однородные полиномы степени $i \in N$. Легко видеть, что дифференциалы полиномов P_i удовлетворяют цепочке реккурентных соотношений

$$\begin{gathered} \Phi_a dP_1 = 0, \\ \Phi_a dP_2 + \Phi_x dP_1 = 0, \\ \Phi_a dP_3 + \Phi_x dP_2 = 0, \\ \dots \end{gathered}$$

Напомним, что $\Phi_a \xi = ad^*_\xi a$. В силу выбора $f_b \in I(G)$ имеем $dP_1 = -b$. Поэтому

$$\Phi_a C(x) - \Phi_a dP_2(x) = ad^*_b x - \Phi_x b = 0 \qquad \text{, т.е.}$$

$$\operatorname{sgrad}_a (h - P_2) = 0$$

Функция $h - P_2$ является, таким образом, центральной для скобки $\{\,.\,\}_a$, следовательно, коммутирует с семейством $\mathcal{F}_a$. Функция $P_2(x)$ принадлежит инволютивному семейству $\mathcal{F}_a$ по определению. Поэтому $\{h, f\} \equiv 0$ для всех $f \in \mathcal{F}_a$.

Изучим некоторые свойства секционных операторов. Рассмотрим подпространство $K(a) = \{y \in G^* \mid \Phi_y(Ann(a)) = 0\}$ /см. доказательство предложения 2.3.4/. Из равенства $(G, \Phi_y(Ann(a))) = ([G, Ann(a)], y)$ следует, что $K(a) = [G, Ann(a)]^\perp$.

Предложение 2.4.2. $C(K(a)) \subset Ann(a)$.

Доказательство. Пусть $y \in K(a)$, тогда $ad_{b}^{*} y = 0$, так как $b \in Ann(a)$. Таким образом, $\Phi_{a} C(y) = 0$, т.е. $C(y) \in Ann(a)$.

Заметим, что в силу самосопряженности оператор C из условия $C(K(a)) \subset Ann(a)$ следует $C(Ann(a)^{\perp}) \subset K(a)^{\perp}$, т.е. $C(T_{a}\mathcal{O}(a)) \subset [G, Ann(a)]$.

Предложение 2.4.3. Если $Ann(a)$ не является максимальной коммутативной подалгеброй в G, то секционный оператор C вырожден.

Доказательство. Пусть $Z(Ann(a))$ - централизатор подалгебры $Ann(a)$ в G. Имеем $\dim Ann(a) < \dim Z(Ann(a)) \leq \dim Ker\, ad_{b} = \dim Ker\, ad_{b}^{*}$. Но $C(Ker\, ad_{b}^{*}) \subset$ $\subset Ann(a)$, поэтому $Ker\, C \cap Ker\, ad_{b}^{*} \neq \{0\}$.

Предложение 2.4.4. Если $[G, Ann(a)] + Ann(a) \neq G$, то оператор C не может быть положительно определен.

Доказательство. Если $[G, Ann(a)] + Ann(a) \neq G$, то $T_{a}\mathcal{O}(a) \cap K(a) \neq \{0\}$. Пусть $0 \neq y \in T_{a}\mathcal{O}(a) \cap K(a)$. Тогда $C(y) \in Ann(a) = T_{a}\mathcal{O}(a)^{\perp}$ и $(C(y), y) = 0$.

Предложение 2.4.5. Пусть $h(x) = \frac{1}{2}(Cx, x)$ - квадратичный гамильтониан, отвечающий секционному оператору $C: G^{*} \to G$. Тогда уравнения Эйлера $\dot{x} = ad_{dh(x)}^{*} x$ на G^{*} являются гамильтоновыми относительно скобок Пуассона $\lambda\{,\} + \mu\{,\}_{a}$ одновременно.

Доказательство. Гамильтоновость уравнений относительно скобки $\{,\} + \lambda\{,\}_{a}$ при $\lambda \neq 0$ проверяется тривиально. В качестве гамильтониана следует рассмотреть функцию $g(x) = h(x) - \lambda(b, x)$. Тогда

$$\dot{x} = \Phi_{x}\, dh(x) = \Phi_{x} C(x) = \Phi_{x} C(x) + \lambda \Phi_{a} C(x) -$$

$$- \lambda\, ad_{b}^{*} x = \Phi_{x+\lambda a}\,(C(x) - \lambda b) = \Phi_{x+\lambda a}\, dg(x).$$

Гамильтоновость относительно скобки $\{\,.\,\}_a$ можно проверить, например, следующим образом. Для локальной гамильтоновости необходимыми и достаточными являются два условия: I/ производная Ли постоянного тензорного поля Φ_a вдоль векторного поля $v=ad^*_{dh}\,x$, 2/ векторное поле $v=ad^*_{dh}\,x$ касается симплектических слоев формы Φ_a , или $(ad^*_{dh}\,x,\,Ann(a))=0$. Первое условие выполняется из соображений непрерывности, поскольку производная Ли любого тензорного поля $\Phi_a+\lambda\Phi_x$ при $\lambda\neq 0$ вдоль $v=ad^*_{dh}\,x$ равна нулю. Второе условие также выполнено, так как любой элемент $b'\in Ann(a)$ можно рассматривать как линейную функцию на G^* , поэтому

$(ad^*_{dh}\,x,\,b')=\{h,\,b'\}=0$, поскольку $b'\in\mathcal{F}_a$.

Глобальная гамильтоновость следует из того, что симплектическими слоями скобки $\{\,.\,\}_a$ являются подпространства в G^* .

Замечание. Если G полупроста, то секционные операторы являются операторами так называемой полупростой серии /см.[5-6] /. В этом частном случае утверждение предложения 2.4.5 было доказано М.В.Мещеряковым в [3I] , кроме того в [3I] показано, что гамильтоновость относительно пары скобок $\{\,,\,\}$ и $\{\,,\,\}_a$ является характеристическим свойством уравнений, задаваемых операторами полупростой серии. Пользуясь методикой работы [3I], легко показать, что это свойство выполняется для секционных операторов, если все дифференцирования алгебры Ли G внутренние.

Дадим теперь явное описание секционных операторов в случае произвольной алгебры Ли G . Выберем произвольное алгебраическое дополнение L к $Ann(a)$ в G . Пусть $L^{\perp}$ – ортогональное дополнение к L в G^*, тогда $G^*=T_a\mathcal{O}(a)\dotplus$ $\dotplus\, L^{\perp}$. Имеет место изоморфизм $\Phi_a: L\to T_a\mathcal{O}(a)$, поэтому корректно определен оператор $\Phi_a^{-1} : T_a \mathcal{O}(a) \to L$. Положим $C_0(x) = \Phi_a^{-1} ad_b^* x$. Определение корректно, поскольку $ad_b^* (G^*) \subset T_a \mathcal{O}(a)$. Оператор $C_0 : G^* \to G$ не является, вообще говоря, секционным, поскольку может не быть самосопряженным. Поэтому его следует немного подправить. Обозначим через $\pi : G^* \longrightarrow T_a \mathcal{O}(a)$ проекцию, соответствующую разложению $G^* = T_a \mathcal{O}(a) \dotplus L^\perp$. Положим $C = C_0 + C_0^* - C_0 \pi$. Утверждается, что C - секционный оператор. Для доказательства следует проверить справедливость соотношения (6) и самосопряженность оператора $C_0 \pi$. Оператор C_0 удовлетворяет соотношению (6) , поэтому необходимо показать, что

$$\Phi_a (C_0^* x - C_0(\pi(x))) = 0$$

Для любого $\xi \in G$ имеем

$$(\Phi_a (C_0^* x - C_0(\pi(x))), \xi) = (-x , C_0 \Phi_a \xi) -$$

$$- (\Phi_a \Phi_a^{-1} ad_b^* \pi(x), \xi) = (-x, \Phi_a^{-1} ad_b^* \Phi_a \xi) - (ad_b^* \pi(x), \xi) =$$

$$= -(x , \Phi_a^{-1} \Phi_a [b, \xi]) + (\pi(x), [b, \xi]) =$$

$$= -(\pi(x) , (\Phi_a^{-1} \Phi_a - E)[b, \xi])$$

Мы использовали в последнем равенстве, что $\operatorname{Im} \Phi_a^{-1} = L$, поэтому $(x, \eta) = (\pi(x), \eta)$ для любого $\eta \in \operatorname{Im} \Phi_a^{-1}$. Далее, $(\Phi_a^{-1}\Phi_a - E)[b, \xi] = \zeta \in \operatorname{Ann}(a)$, поэтому $(\pi(x), \zeta) = 0$.

Докажем самосопряженность оператора $C_0 \pi : G^* \to G$. Для произвольных $x, y \in G^*$ имеем $(C_0(\pi(x)), y) = (\Phi_a^{-1} ad_b^* \pi(x), \pi(y))$. Положим $\pi(x) = \Phi_a \xi$, $\pi(y) = \Phi_a \eta$. Тогда

$$(C_0(\pi(x)), y) = (\Phi_a^{-1} ad_b^* \Phi_a \xi , \Phi_a \eta) = -(\Phi_a \Phi_a^{-1} ad_b^* \Phi_a \xi , \eta) =$$

$$= -(ad_b^* \Phi_a \xi, \eta) = (\Phi_a \xi , [b, \eta]) = -(\xi , \Phi_a [b, \eta]) =$$

$$= -(\xi, \mathrm{ad}_b^* \Phi_a \eta) = -(\xi, \Phi_a \Phi_a^{-1} \mathrm{ad}_b^* \Phi_a \eta) =$$

$$= (\Phi_a \xi, \Phi_a^{-1} \mathrm{ad}_b^* \Phi_a \eta) = (\pi(x), C_0(\pi(y))) = (x, C_0(\pi(y))).$$

Мы использовали тождество $\mathrm{ad}_b^* \Phi_a = \Phi_a \mathrm{ad}_b$, которое следует из того, что $b \in \mathrm{Ann}(a)$. Итак, мы показали, что оператор $C = C_0 + C_0^* - C_0\pi$, где $\pi : G^* \to T_a O(a)$, является секционным. Из определения секционного оператора следует, что этот оператор при фиксированных элементах $a \in G^*, b \in \mathrm{Ann}(a)$ определен неоднозначно, а с точностью до произвольного самосопряженного оператора $\mathcal{D} : G^* \to G$, образ которого содержится в $\mathrm{Ann}(a)$. Поэтому общий вид секционного оператора C при фиксированных $a \in G^*$, $b \in \mathrm{Ann}(a)$, такой

$$C = C_0 + C_0^* - C_0\pi + \mathcal{D}$$

где $C_0 = \Phi_a^{-1} \mathrm{ad}_b^*$, $\Phi_a^{-1} : T_a O(a) \to L$, $\pi : G^* \to T_a O(a)$, $\mathcal{D}$ самосопряжен и $\mathrm{Im}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Ann}(a)$.

Если G компактна, то секционный оператор можно выбрать положительно определенным, соответствующие уравнения Эйлера вполне интегрируемы и являются аналогами уравнений движения твердого тела с закрепленной точкой. Кроме того, каждому такому оператору отвечает вполне интегрируемый геодезический поток на компактной группе Ли с левоинваринтной метрикой /см. работу А.С. Мищенко и А.Т.Фоменко [6]/. Если $\mathcal{G} = SO(n) \underset{\varphi}{+} \mathbb{R}^n$ - группа движений евклидова пространства, $E(n)$ - ее алгебра Ли, то секционные операторы соответствуют некоторым случаям полной интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости /см. работу В.В.Трофимова и А.Т.Фоменко [10]/.

Пусть теперь G вещественная полупростая алгебра Ли, θ - инволюция Картана, $G = H + V$ - соответствующее разложение, $a \in V$ - произвольный элемент. Рассмотрим гамильтоновы

системы, связанные с семейством скобок $\alpha(\{,\}+\{,\}_a)+\beta\{,\}_\theta$
Напомним некоторые обозначения, введенные в § 2 настоящей главы:
$C(a)$ – централизатор элемента $a\in V$ в алгебре Ли G,
$St(a)$ – стационарная подалгебра элемента $a\in V$ при действии H на V, или $St(a)=H\cap C(a)$,
$V(a)=V\cap C(a)$, $St(a)^\perp$ – ортогональное дополнение к $St(a)$ в H, $V(a)^\perp$ – ортогональное дополнение к $V(a)$ в V.
Выберем элемент $b\in V$, удовлетворяющий условиям $[b,a]=0$, $[b,St(a)]=0$. Легко проверить, что в этом случае $ad_b(St(a)^\perp)\subset V(a)^\perp$, кроме того $ad_a: St(a)^\perp\to V(a)^\perp$ – изоморфизм.
Поэтому корректно определен оператор

$$L_{a,b,\mathcal{D}}(h) = ad_a^{-1} ad_b h_2 + \mathcal{D} h_1$$

где $h=h_1+h_2$, $h_1\in St(a)$, $h_2\in St(a)^\perp$, $\mathcal{D}: St(a)\to St(a)$ произвольный самосопряженный оператор.

П р е д л о ж е н и е 2.4.6. Оператор $L_{a,b,\mathcal{D}}: H\to H$ самосопряжен относительно ограничения формы Киллинга на H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать самосопряженность оператора $ad_a^{-1}ad_b: St(a)^\perp\to St(a)^\perp$, т.е. выполнение тождества

$$(ad_a^{-1} ad_b x, y) = (x, ad_a^{-1} ad_b y)$$

для любых $x,y\in St(a)^\perp$. Представим $x,y\in St(a)^\perp$ в виде $x=ad_a x'$, $y=ad_a y'$, где $x',y'\in V(a)^\perp$. Это возможно, поскольку $St(a)^\perp\subset \operatorname{Im} ad_a$. Имеем

$$(ad_a^{-1} ad_b x, y) = (ad_a^{-1} ad_b ad_a x', ad_a y') = (ad_b x', ad_a y') =$$

$$= -(x', ad_b ad_a y') = -(x', ad_a ad_b y') = (ad_a x', ad_b y') =$$

$$= (ad_a x', ad_a^{-1} ad_b ad_a y') = (x, ad_a^{-1} ad_b y)$$

П р е д л о ж е н и е 2.4.7. Функции вида

$$g(h+v) = \frac{1}{2}\left(L_{a,b,\mathfrak{D}}(h), h\right) - (b, v)$$

являются центральными функциями скобки Пуассона $\{\,,\} + \{\,,\}_a - \{\,,\}_\theta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо проверить, что дифференциал dg функции $g(h+v)$ является решением системы уравнений (3) . Дифференциал dg в силу предыдущего утверждения имеет вид $dg(h+v) = L_{a,b,\mathfrak{D}}(h) - b$. Имеем $[b,a]=0$ по условию. Далее,

$$[L_{a,b,\mathfrak{D}}, a] - [b, h] = [ad_a^{-1} ad_b h_2 + \mathfrak{D}h_1, a] - [b, h_1 + h_2] = [ad_a^{-1} ad_b h_2, a] - [b, h_2] = 0$$

Предложение доказано.

С л е д с т в и е. Функции из семейства $\mathcal{F}_{a,\theta}$ являются первыми интегралами гамильтоновых относительно скобки $\{\,,\}_\theta$ систем на G с гамильтонианами $g(h+v)$.

Семейство $\mathcal{F}_{a,\theta} = \{f(\lambda h + v + \lambda^2 a) \mid f \in I(G), \lambda \in \mathbb{R}\}$ может оказаться неполным, поэтому при произвольном выборе оператора $\mathfrak{D} : St(a) \to St(a)$ гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{h} = [L_{a,b,\mathfrak{D}}(h), h] - [b, v] \\ \dot{v} = [L_{a,b,\mathfrak{D}}(h), v] \end{cases} \qquad (7)$$

относительно скобки $\{\,,\}_\theta$ может оказаться неинтегрируемой. Для получения вполне интегрируемой системы оператор $\mathfrak{D}$ следует выбирать так, чтобы уравнения Эйлера $\dot{h}_1 = [\mathfrak{D}h_1, h_1]$ на $St(a)$ были вполне интегрируемы. Тогда, добавив к семейству $\mathcal{F}_{a,\theta}$ полное семейство интегралов $\mathcal{F}_{St(a)}$ уравнения $\dot{h}_1 = [\mathfrak{D}h_1, h_1]$, мы получим в силу теоремы 2.2.I полное семейство первых интегралов в инволюции уравнений Эйлера (7). Если положить $\mathcal{D} = \lambda E$, то мы получим систему вполне интегрируемую в некоммутативном смысле /см. 25-26 /, некоммутативная алгебра первых интегралов – $\mathcal{F}_{a,\theta} \cup St(a)$. Итак, имеет место следующее

П р е д л о ж е н и е 2.4.8. Пусть гамильтонова система $\dot{h}_1 = [\mathcal{D}h_1, h_1]$ интегрируема по Лиувиллю на алгебре Ли $St(a)$, $\mathcal{F}_{St(a)}$ – полное семейство первых интегралов в инволюции. Тогда уравнения Эйлера (7), отвечающие скобке $\{\ ,\ \}_\theta$ вполне интегрируемы по Лиувиллю на G, и первыми интегралами в инволюции являются функции из семейства $\mathcal{F}_{a,\theta} \cup \mathcal{F}_{St(a)}$.

Из наиболее интересных примеров гамильтоновых систем, интегрируемых в рамках этой конструкции, отметим n-мерное обобщение случая Лагранжа [8],[12],[18],[40] и движение n-мерного твердого тела в квадратичном потенциале [8],[13], некоторые другие примеры см. в [8].

Рассмотрим, наконец, семейства функций в инволюции, связанные с лиевыми пучками. Пусть L – пространство кососимметрических матриц, для любой симметрической матрицы A на L задается коммутатор $[X,Y]_A = XAY - YAX$. Все такие коммутаторы задают на пространстве L неприводимый замкнутый лиев пучок. Рассмотрим двумерный подпучок, порожденный алгебрами L_E и L_B, где $E = \mathrm{diag}(1,\dots,1)$, $B = \mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n)$. В предыдущем параграфе мы показали, что семейство функций $\bigcup_{\lambda \neq -b_i} I(L_{B+\lambda E})$ инволютивно на L^* относительно скобки $\{\ ,\ \}_E$, отвечающей стандартной алгебре $so(n)$. Оказывается, это семейство эквивалентно стандартному семейству сдвигов в случае нормальной серии на $so(n)$ [5], т.е. семейству первых интегралов уравнений движения n-мерного твердого тела, обнаруженных С.В.Манаковым [4]. Для того, чтобы в этом убедиться, можно рассмотреть коэффициенты разложения в ряд по λ функций $\operatorname{Tr}(X+\lambda B)^k$ и $\operatorname{Tr}(X(E+\lambda B)^{-1})^\ell$ и проверить, что они совпадают. Такая проверка, однако, громоздка, и мы поступим другим способом. Пусть матрица B регулярна в $gl(n)$, т.е. $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Тогда оба семейства $\bigcup_{\lambda \neq -b_i} I(L_{B+\lambda E})$ и $\{\operatorname{Tr}(X+\lambda B)^k\}_{k=1,2,\dots}^{\lambda\in R}$ инволютивны и полны относительно скобки $\{,\}_E$, поэтому для доказательства их эквивалентности достаточно проверить, что они коммутируют между собой. Итак, пусть $f=(X+\lambda B)^k$ $g \in I(L_{E+\mu B})$. Дифференциал $dg(X) \in L$ удовлетворяет тождеству $(E+\mu B)dg(X)X - Xdg(X)(E+\mu B) = 0$, а дифференциал $df(X) \in L$ имеет вид $df(X) = \pi(k(X+\lambda B)^{k-1})$, где $\pi : gl(n) \longrightarrow so(n)$ - ортогональная проекция относительно скалярного произведения $(X,Y) = \operatorname{Tr} XY$. Имеем

$$\{f,g\}_E(X) = \operatorname{Tr}(df\,dg - dg\,df)X = \operatorname{Tr} df\,(dg\cdot X - X dg)$$

Но $dg\cdot X - X dg \in L$, поэтому

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_E(X) &= k\operatorname{Tr}(X+\lambda B)^{k-1}(dg\cdot X - X\,dg) = \\
&= k\operatorname{Tr}(X+\lambda B)^{k-2}((X+\lambda B)dg\cdot X - X\,dg\cdot(X+\lambda B)) = \\
&= \lambda k\operatorname{Tr}(X+\lambda B)^{k-2}(B\,dg\cdot X - X\,dg\cdot B) = \\
&= -\frac{\lambda}{\mu} k\operatorname{Tr}(X+\lambda B)^{k-2}(dg\cdot X - X\,dg) = \\
&= -\frac{\lambda}{\mu} k\operatorname{Tr}(X+\lambda B)^{k-3}((X+\lambda B)dg\cdot X - X\cdot dg\cdot(X+\lambda B)) = \dots \\
\dots &= k\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \operatorname{Tr}(X+\lambda B)(dg\cdot X - X\cdot dg) = 0
\end{aligned}$$

Отметим, что стандартные уравнения движения твердого тела на $so(n)$

$$\dot X = [X,\Omega]_E, \qquad X = B\Omega + \Omega B, \qquad X,\Omega \in L \tag{8}$$

гамильтоновы не только относительно обычной скобки Пуассона-Ли $\{,\}_E$, но и относительно любой нетривиальной линейной комбинации $\lambda\{,\}_E + \mu\{,\}_B$. Чтобы это проверить, рассмотрим функции $f_k(X)$, которые являются коэффициентами при λ^k в разложении $\mathrm{Tr}(X+\lambda B)^{k+2}$ по степеням λ :

$$\mathrm{Tr}(X+\lambda B)^{k+2} = \mathrm{Tr}\,\lambda^{k+2}B^{k+2} + \mathrm{Tr}\,\lambda^{k+1}(k+2)B^{k+1}X + $$
$$+ \mathrm{Tr}\,\lambda^k \underbrace{(B^k X^2 + \ldots + X^2 B^k)}_{f_k} + \ldots ,$$

$$f_0(X) = \mathrm{Tr}\,X^2 , \quad f_1(X) = \mathrm{Tr}\,3BX^2 , \quad f_2(X) = \mathrm{Tr}\,(4B^2X^2 + 2\,BXBX), \ldots$$

Обозначим через sgrad_E и sgrad_B косые градиенты относительно скобок $\{,\}_E$ и $\{,\}_B$. Непосредственной выкладкой легко убедиться в справедливости соотношений

$$\mathrm{sgrad}_E f_0 = 0$$
$$\mathrm{sgrad}_E f_1 = \mathrm{sgrad}_B f_0$$
$$\mathrm{sgrad}_E f_2 = \mathrm{sgrad}_B f_1$$
$$\ldots$$
$$\mathrm{sgrad}_E f_k = \mathrm{sgrad}_B f_{k-1}$$
$$\ldots$$

Гамильтониан, соответствующий уравнениям (8) является конечной линейной комбинацией функций $f_0, f_1, f_2, \ldots$, т.е. $g(X) = \sum_{i=0}^{s} c_i f_i(X)$ и $\mathrm{sgrad}_E\, g(X) = \sum_{i=0}^{s} c_i\, \mathrm{sgrad}_E\, f_i(x)$, поэтому

$$\dot X = [X,\Omega] = \mathrm{sgrad}_E\, g(X) = \sum_{i=1}^{s} c_i\, \mathrm{sgrad}_B f_{i-1}(X) = \mathrm{sgrad}_B\Big(\sum_{i=1}^{s} c_i f_{i-1}(X)\Big)$$

Таким образом, мы показали гамильтоновость уравнений (8) относительно скобки $\{,\}_B$. Аналогично,

$$\dot X = \mathrm{sgrad}_{E+\lambda B} \sum_{i=0}^{s-1} d_i f_i(X)$$

где коэффициенты d_i находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda d_{s-1} = c_s \\ \lambda d_{s-2} + d_{s-1} = c_{s-1} \\ \ldots \\ \lambda d_0 + d_1 = c_1 \end{cases}$$

Не менее интересный случай возникает, если рассмотреть двумерный лиев пучок, содержащий алгебру Ли $E(n) = so(n) + \mathbb{R}^n$. Эта алгебра Ли соответствует симметрической матрице $A_0 = diag(1, \ldots, 1, 0)$, т.е. $E(n) \cong L_{A_0}$. Положим $B_0 = diag(b_1, \ldots, b_{n+1})$, $b_i \neq b_j$, $b_{n+1} \neq 0$. Тогда семейство функций $\bigcup\limits_{(\lambda,\mu)\neq(0,0)} I(L_{\lambda A_0 + \mu B_0})$ инволютивно на L^* относительно скобки $\{\ ,\ \}_{A_0}$, отвечающей алгебре Ли $E(n)$. Посмотрим, какие квадратичные гамильтонианы содержатся в этом семействе. В кольце инвариантов $I(L_{A_0+\mu B_0})$ содержится квадратичная функция вида

$$f_\mu(X) = Tr\ X(A_0 + \mu B_0)^{-1} X (A_0 + \mu B_0)^{-1}$$

Чтобы получить удобное описание линейных комбинаций функций $f_\mu(X)$ сделаем замену $Y = B_0^{-\frac{1}{2}} X B_0^{-\frac{1}{2}}$, тогда

$$f_\mu(Y) = Tr\ Y(\mu E + A_0 B_0^{-1})^{-1} Y (\mu E + A_0 B_0^{-1})^{-1}$$

Общий вид линейных комбинаций таких функций следующий

$$g(Y) = \frac{1}{2}\left(ad^{-1}_{A_0 B_0^{-1}}\, ad_C Y\ ,\ Y\right)$$, C диагональна.

Итак, с помощью инволютивного семейства $\bigcup\limits_{(\lambda,\mu)\neq(0,0)} I(L_{\lambda A_0 + \mu B_0})$ можно проинтегрировать по Лиувиллю уравнения Эйлера на $E(n)^*$ с гамильтонианами

$$g(X) = \frac{1}{2}\left(ad^{-1}_{A_0 B_0^{-1}}\, ad_C\, B_0^{-\frac{1}{2}} X B_0^{-\frac{1}{2}}\ ,\ B_0^{-\frac{1}{2}} X B_0^{-\frac{1}{2}}\right)$$

или, используя стандартные координаты x_{ij}, y_i на $E(n)^*$

$$2g(X) = \sum_{1\le i<j\le n} x_{ij}^2 \left(\frac{c_i - c_j}{b_i - b_j}\right) + \sum_{1\le i\le n} y_i^2\, \frac{c_i - c_{n+1}}{b_{n+1}}$$

Если мы представим квадратичный гамильтониан на $E(n)^*$ в более общем виде

$$h(X) = \sum_{1\le i<j\le n} x_{ij}^2 a_{ij} + \sum_{1\le i\le n} a_i y_i^2 ,$$

то гамильтонианы $g(X)$ и только они выделяются условиями

$$\frac{a_i - a_j}{a_{ij}} + \frac{a_j - a_k}{a_{jk}} + \frac{a_k - a_i}{a_{ki}} = 0 \qquad 1 \leq k, i, j \leq n$$

что в точности соответствует n -мерному обобщению случая Клебша, обнаруженному А.М.Переломовым [II] .

Отметим, что двумерные пучки $(L_{\lambda E + \mu B})_{\lambda, \mu \in \mathbb{C}}$ и $(L_{\lambda A_0 + \mu B_0})_{\lambda, \mu \in \mathbb{C}}$ изоморфны при $B = A_0 B_0^{-1}$. Из этого следует, что многомерный случай Клебша и многомерный случай Эйлера ничем принципиально не отличаются в том смысле, что расслоение пространства L^* на лиувиллевские торы одинаково в обоих случаях. Разница лишь в выборе квадратичного гамильтониана в инволютивном семействе. Так же как уравнения (8) на $so(n)$, уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости в случае Клебша являются гамильтоновыми относительно целого семейства скобок $\lambda\{\ ,\ \}_{A_0} + \mu\{\ ,\ \}_{B_0}$.

ГЛАВА 3. ИНВОЛЮТИВНЫЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ НА ПОЛУПРЯМЫХ СУММАХ АЛГЕБР ЛИ

§ I. Коприсоединенное представление полупрямых сумм алгебр Ли.

В этом параграфе излагаются некоторые известные результаты о строении орбит коприсоединенного представления полупрямых произведений типа $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times_{\Phi} V$, где $\mathcal{H}$ - группа Ли, V - конечномерное линейное пространство, $\Phi : \mathcal{H} \to GL(V)$ - линейное представление, и доказывается утверждение о коразмерности множества сингулярных ковекторов в коалгебре G^*.

Итак, пусть $\mathcal{H}$ - конечномерная группа Ли, действующая в линейном пространстве V, $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times_{\Phi} V$ - соответствующее полупрямое произведение. Алгебра Ли G группы Ли $\mathcal{G}$ является полупрямой суммой $G = H +_{\varphi} V$ алгебры Ли H и пространства V по индуцированному представлению $\varphi = d\Phi : H \to gl(V)$. Отождествим двойственное пространство G^* с прямой суммой $H^* + V^*$, полагая $H^* = V^{\perp}$, $V^* = H^{\perp}$. Тогда коприсоединенное представление группы Ли $\mathcal{G}$ и алгебры Ли G на $G^* = H^* + V^*$ в явном виде запишется следующим образом:

$$Ad^*_{(g,a)}(x+v) = \underbrace{((Ad^*_{\mathcal{H}})_g\, x + A(a, \Phi^*(g)v))}_{\in H^*} + \underbrace{\Phi^*(g)\,v}_{\in V^*} ,$$

$$ad^*_{(\xi,a)}(x+v) = \underbrace{((ad^*_H)_\xi\, x + A(a,v))}_{\in H^*} + \underbrace{\varphi^*(\xi)\,v}_{\in V^*} ,$$

где $Ad^*_{\mathcal{H}}$ - коприсоединенное действие группы Ли $\mathcal{H}$ на H^*, ad^*_H - коприсоединенное действие алгебры Ли H на H^*, Φ^* - действие группы Ли $\mathcal{H}$ на V^* сопряженное к Φ, φ^* - действие алгебры Ли H на V^* сопряженное к φ,

$A : V\times V^* \to H^*$ - линейное отображение, определяемое тождеством $(A(a,v),\xi)=(\varphi(\xi)a, v)$, $g\in \mathfrak{h}$, $\xi\in H$, $a\in V$, $x\in H^*$, $v\in V^*$.

В работе Раиса [4I] предложен метод вычисления размерности аннулятора $Ann(x+v)=\{\xi+a\in G \mid ad^*_{\xi+a}(x+v)=0\}$ для любого ковектора $x+v\in H^*+V^*=G^*$. Этот способ состоит в следующем. Пусть $x+v\in G^*$ - произвольный ковектор, $St(v)\subset H$ - стационарная подалгебра элемента $v\in V^*$ относительно φ^*, и $\pi : H^*\to St(v)^*$ - естественная проекция. Утверждается, что размерность аннулятора $Ann(x+v)$ равна сумме размерности аннулятора ковектора $\pi(x)\in St(v)^*$ в алгебре Ли $St(v)$ и коразмерности орбиты $\mathcal{O}(v)$ элемента v при действии Φ^* группы Ли $\mathfrak{h}$ на V^*. Отсюда сразу следует формула для индекса полупрямой суммы

$$ind\; H\underset{\varphi}{+}V = ind\; St_0 + ind\,\varphi$$

где $ind\,\varphi$ - минимальная коразмерность орбиты представления Φ^*, St_0 - стационарная подалгебра общего положения представления φ^*. Эту формулу обычно называют формулой Раиса. Поясним, что будет ниже пониматься под "общностью положения". В пространстве V^* имеется всюду плотное открытое множество $\mathcal{U}$ такое, что стационарные подалгебры $St(v)\subset H$ всех его элементов в смысле представления φ^* имеют: I/ одинаковые размерности, 2/ одинаковые индексы, 3/ одинаковые коразмерности множеств сингулярных элементов в $St(v)^*$. Элементы множества $\mathcal{U}$ и соответствующие стационарные подалгебры мы будем называть элементами, соответственно стационарными подалгебрами общего положения. Дадим еще одно

О п р е д е л е н и е. Элемент $v\in V^*$ будем называть слабо регулярным, если для стационарной подалгебры $St(v)\subset H$ выполняется условие

$$\dim St(v) + \operatorname{ind} St(v) = \min_{u \in V^*} (\dim St(u) + \operatorname{ind} St(u)).$$

Ясно, что элементы общего положения являются слабо регулярными, но обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть $S = \{x+v \in H^* + V^* \mid \dim \operatorname{Ann}(x+v) > \operatorname{ind} G\}$ - множество сингулярных элементов в G^*.

П р е д л о ж е н и е 3.I.I. Элемент $v \in V^*$ слабо регулярен тогда и только тогда, когда существует $x \in H^*$ такой, что $x+v \notin S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x+v \in G^*$, $\pi : H^* \to St(v)^*$ - естественная проекция. Вычислим $\dim \operatorname{Ann}(x+v)$. Имеем

$$\dim \operatorname{Ann}(x+v) = \dim \operatorname{Ann}(\pi(x)) + \operatorname{codim} O(v) = \dim \operatorname{Ann}(\pi(x)) +$$
$$+ \dim V - \dim H + \dim St(v) \geqslant (\operatorname{ind} St(v) + \dim St(v)) + \dim V - \dim H,$$

причем, если ковектор $\pi(x)$ регулярен в $St(v)^*$, то в точности

$$\dim \operatorname{Ann}(x+v) = (\operatorname{ind} St(v) + \dim St(v)) + \dim V - \dim H.$$

Таким образом,

$$\min_{x \in H^*} \dim \operatorname{Ann}(x+v) = \operatorname{ind} St(v) + \dim St(v) + \dim V - \dim H$$

$$\operatorname{ind} G = \min_{x+v \in H^*+V^*} \dim \operatorname{Ann}(x+v) = \min_{u \in V^*} (\operatorname{ind} St(u) + \dim St(u)) + \dim V - \dim H.$$

Утверждение сразу следует из этих равенств.

Обозначим через S_V дополнение к множеству слабо регулярных точек в пространстве V^*, через S_{St_0} множество сингулярных элементов в St_0^* в смысле представления ad^*, где $St_0 \subset H$ - стационарная подалгебра общего положения.

П р е д л о ж е н и е 3.I.2. $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда одновременно $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$ и $\operatorname{codim} S_{St_0} \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сечения множества

$\mathcal{S} \subset H^* + V^*$ аффинными плоскостями вида $v + H^*$, $v \in V^*$. Легко видеть, что условие $\operatorname{codim} \mathcal{S} = 1$ эквивалентно выполнению одного из следующих двух условий:

I/ множество точек $v \in V^*$, для которых коразмерность пересечения $(v + H^*) \cap \mathcal{S}$ в плоскости $v + H^*$ равна единице, открыто по Зарисскому в V^* и непусто, $\Rightarrow \operatorname{codim} \mathcal{S}_{St_0} = 1$

2/ множество точек $v \in V^*$ таких, что $v + H^* \subset \mathcal{S}$, имеет коразмерность I в V^*.

В силу предложения 3.I.I условие 2 в точности означает, что $\operatorname{codim} \mathcal{S}_V = 1$. Рассмотрим пересечение $(v + H^*) \cap \mathcal{S}$. Пусть $v + H^* \not\subset \mathcal{S}$, т.е. точка $v \in V^*$ слабо регулярна. Элемент $x + v$ содержится в пересечении $(v + H^*) \cap \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\pi(x) \in \mathcal{S}_{St(v)} \subset St(v)^*$, где $\mathcal{S}_{St(v)}$ – множество сингулярных элементов в $St(v)^*$. Поэтому $\operatorname{codim} (v + H^*) \cap \mathcal{S} = \operatorname{codim} \mathcal{S}_{St(v)}$. Следовательно, первое условие означает, что существует непустое открытое по Зарисскому множество $\mathcal{U}' \subset V^*$, состоящее из элементов v таких, что $\operatorname{codim} \mathcal{S}_{St(v)} = 1$. Поскольку множество точек общего положения тоже открыто по Зарисскому, то условие I на самом деле эквивалентно тому, что $\operatorname{codim} \mathcal{S}_{St_0} = 1$. Предложение доказано.

Доказанное утверждение позволяет эффективно оценивать коразмерность множества $\mathcal{S}$ и тем самым проверять полноту инволютивного семейства сдвигов инвариантов на пространстве G^*. В следующем параграфе это будет продемонстрировано на примере полупрямых расширений простых алгебр Ли. В заключение отметим еще одно довольно неожиданное следствие нашей конструкции.

Пусть L – произвольная алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$ – произвольное представление такое, что стационарные подалгебры общего положения тривиальны, в частности,

$\dim L \leq \dim V$. Предположим, что представление φ обладает полным набором полиномиальных инвариантов, т.е. существуют алгебраически независимые инвариантные полиномы $f_1, \ldots, f_k : V \to \mathbb{C}$ и $k = \dim V - \dim L$, другими словами, степень трасцендентности кольца инвариантных полиномов равна коразмерности орбиты общего положения. Это условие всегда выполняется, если L алгебраична и $[L,L] = L$, например, L полупроста.

Предложение 3.I.3. Пусть S_φ - множество точек из V, стационарные подалгебры которых нетривиальны, $f_1, \ldots, f_k$ - максимальный набор алгебраически независимых инвариантных полиномов. Если $\operatorname{codim} S_\varphi \geqslant 2$, то $\sum \deg f_i \geqslant \dim V$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что утверждение относится к произвольному представлению алгебры Ли, хотя до сих пор речь шла главным образом о коприсоединенном представлении. Однако, условие тривиальности стационарной подалгебры общего положения позволяет рассматривать инварианты представления φ как инварианты коприсоединенного представления некоторой другой большей алгебры. Рассмотрим полупрямую сумму $L \underset{\varphi^*}{+} V^*$ алгебры Ли L и двойственного пространства V^* по представлению φ^* сопряженному к φ. Из формулы Раиса следует, что $\operatorname{ind}(L \underset{\varphi^*}{+} V^*) = \operatorname{ind} \varphi^*$. Известно, что в этом случае кольцо инвариантных полиномов коприсоединенного представления $I(L \underset{\varphi^*}{+} V^*)$ алгебры Ли $L \underset{\varphi^*}{+} V^*$ естественным образом изоморфно кольцу инвариантных полиномов представления $(\varphi^*)^* = \varphi$ алгебры Ли L. Изоморфизм устанавливается отображением $f(\ell + v) \to f(0 + v) = \tilde{f}(v)$, где $\ell + v \in (L \underset{\varphi^*}{+} V^*)^*$, $\ell \in L^*$, $v \in V$. Из предложения 3.I.2 следует, что $\operatorname{codim} S \geqslant 2$, где S - множество сингулярных элементов из $(L \underset{\varphi^*}{+} V^*)^* = L^* + V$.

Поэтому в силу критерия полноты семейство сдвигов инвариантов в данном случае полно. Но в качестве базисных инвариантов можно рассматривать полиномы $f_1, \dots, f_k$, их сдвиги - это частные производные всех порядков по некоторому фиксированному направлению. Поэтому число функционально независимых сдвигов не превосходит суммы степеней $\sum \deg f_i$. С другой стороны, в силу полноты число функционально независимых сдвигов равно

$$\frac{1}{2}\left(\dim (L \mathop{+}_{\varphi^*} V^*) + \operatorname{ind} (L \mathop{+}_{\varphi^*} V^*)\right) = \frac{1}{2}\left(\dim L + \dim V + \operatorname{ind} \varphi^*\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\dim L + \dim V + \dim V - \dim L\right) = \dim V$$

Следовательно, $\dim V \leqslant \sum \deg f_i$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Винберг Э.Б. указал автору на недавно вышедшую работу Кнопа [42], в которой доказано более сильное утверждение в полупростом случае.

§ 2. Инволютивные семейства функций на полупрямых расширениях простых алгебр Ли.

Пусть K - полупростая алгебра Ли, $\varphi : K \to gl(V)$ - ее линейное представление, $G = K \mathop{+}_{\varphi} V$ - полупрямая сумма. Задача построения полных инволютивных наборов на двойственном пространстве G^* возникала в работах А.Г.Реймана [8], В.В.Трофимова, А.Т.Фоменко [10], А.В.Браилова [16]. Специально этот вопрос изучался Т.А.Певцовой в [29]. Для многих частных случаев такие семейства построены, однако, полнота семейства сдвигов инвариантов была доказана лишь для некоторых частных случаев /см. выше с. 31 /. Здесь мы получим этот результат для целой серии алгебр Ли такого типа.

Т е о р е м а 3.2.1. Пусть K - классическая комплексная простая алгебра Ли, $\varphi : K \to gl(V)$ - неприводимое представление. Пусть $G = K +_{\varphi} V$ - полупрямая сумма. Тогда сдвиги инвариантов представления Ad^* на произвольный регулярный ковектор $a \in G^*$ образуют полный инволютивный набор на G^*.

Доказательство. Пусть сначала $\dim K \geqslant \dim V$, что эквивалентно нетривиальности стационарной подалгебры общего положения [43]. В работе А.Г.Элашвили [44] получен список представлений простых алгебр Ли, удовлетворяющих этому условию, и найдены стационарные подалгебры общего положения. В данном случае существует открытое по Зарисскому непустое подмножество в V, все точки которого имеют сопряженные стационарные подалгебры. Именно эти точки естественно называть точками общего положения, и при доказательстве теоремы мы будем придерживаться такой терминологии. В силу критерия полноты семейства сдвигов и предложения 3.I.2 достаточно проверить выполнение двух условий: I/ $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$ и 2/ $\operatorname{codim} S_{St_0} \geqslant 2$.

Известно, что представления φ и φ^*, вообще говоря, не эквивалентны даже для полупростых алгебр Ли, однако, полупрямые суммы $K +_{\varphi} V$ и $K +_{\varphi^*} V^*$ изоморфны как алгебры Ли. Поэтому ниже мы будем рассматривать только одно из этих представлений. Разберем два случая.

Случай I. Стационарная подалгебра общего положения St_0 редуктивна. В этом случае автоматически $\operatorname{codim} S_{St_0} \geqslant 2$. Остается проверить первое условие. Метод будет состоять в указании слабо регулярного нильпотентного элемента $v_n \in V^*$. Мы будем называть элемент $v \in V^*$ нильпотентным, если замыкание его орбиты $\mathcal{O}(v) \subset V^*$ при действии группы $\mathcal{K} = \exp K$ на V^* содержит нуль. Пусть, как и выше, S_V - дополнение в V^* к подмножеству слабо регулярных элементов.

Лемма. Если существует слабо регулярный нильпотентный элемент $v_n \in V^*$, то $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы. Предположим, что условие $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$ не выполняется, т.е. S_V является алгебраической гиперповерхностью и задается уравнением $P(v) = 0$, где P – некоторый однородный полином. Кроме того, множество S_V инвариантно относительно действия группы $\mathcal{K}$, отвечающей алгебре Ли K, поэтому полином P является полуинвариантом представления φ^*. Но у полупростых алгебр Ли не существует нетривиальных характеров, поэтому на самом деле P – инвариант. Пусть v_n – слабо регулярный нильпотентный элемент. Тогда $P|_{\mathcal{O}(v_n)} = const$, но замыкание орбиты $\mathcal{O}(v_n)$ содержит нуль, следовательно, $P|_{\mathcal{O}(v_n)} = 0$ и $P(v_n) = 0$, т.е. $v_n \in S_V$. Противоречие.

Оказывается, если алгебра Ли K простая классическая, представление φ^* неприводимо и $\dim V \leqslant \dim K$, то слабо регулярные нильпотентные элементы всегда существуют. Для того, чтобы их найти, достаточно иметь классификацию типов орбит представления φ^*. Если представление φ^* не слишком сложно, то изучение типов орбит не представляет больших трудностей. Наиболее нетривиальными являются случаи представлений в пространстве тривекторов, спинорных и полуспинорных представлений. Однако, и в этих случаях необходимые для нас сведения получены в работах [45 – 50]. Классификация орбит действия группы Ли $SL(n)$ в пространстве тривекторов получена при $n=6,7$ Рейхелем [45] и Схоутеном [46], при $n=8$ Г.Б.Гуревичем [47]. Классификация орбит действия группы $Sp(6,\mathbb{C})$ в пространстве тривекторов размерности 6 получена В.Л.Поповым в [48], в этой же работе дана классификация спиноров размерности I4. Классификация спиноров до размерности двенадцать включительно проведена Игузой [50], размерности I3 Э.Б.Винбергом и В.Г.Кацем [49]. Список стационарных подалгебр слабо регулярных нильпотентных элементов

$v_n \in V^*$ приведен в следующей таблице /с. 83 /. В таблице указаны также для сравнения стационарные подалгебры общего положения, индексы и размерности. Слабая регулярность элементов следует из равенств $\dim St(v_n) = \dim St_0$, $\operatorname{ind} St(v_n) = \operatorname{ind} St_0$.

Пояснения к таблице. В таблице использованы следующие обозначения

$\mathcal{U}_\ell$ - унипотентный некоммутативный радикал размерности ℓ,

$\mathbb{C}^\ell$ - коммутативная алгебра размерности ℓ,

ρ_0 - простейшее представление,

τ - одномерное тривиальное представление.

В пункте II $\psi = \rho_0 + \rho_0 + \Lambda^2\rho_0$, соответственно $\mathcal{U}_{14} = V_1 + V_2 + V_3$ и $[V_2, V_3] = V_1$.

В пункте I2 $\psi = \rho_0 + \tau + \rho_0 + ad + \rho_0 + \tau + \rho_0$, соответственно $\mathcal{U}_{13} = V_1 + \ldots + V_7$, причем $[V_i, V_j] = V_{i+j}$ при $i+j \le 7$, исключения: $[V_2, V_2] = 0$, $[V_2, V_4] = 0$.

В пункте I3 $\psi = \underbrace{ad + \ldots + ad}_{n-1}$, соответственно $\mathcal{U}_{3(n-1)} = V_1 + \ldots + V_{n-1}$, причем $[V_i, V_j] = V_{i+j}$, $i+j \le n-1$. Другими словами, $sl(2) \underset{\psi}{+} \mathcal{U}_{3(n-1)} = sl(2) \otimes A$, где $A = \mathbb{C}[x]/\mathbb{C}[x^n]$.

Разберем несколько случаев более подробно. Пусть $K = sp(n, \mathbb{C})$, $\varphi = \Lambda^2\rho_0$. Элементы алгебры Ли $sp(n, \mathbb{C})$ представим в стандартном виде

$$X = \begin{array}{|c|c|} \hline D & C \\ \hline B & -D^T \\ \hline \end{array}, \quad \text{где} \quad C = C^T,\ B = B^T$$

Представление $\varphi = \Lambda^2\rho_0$ реализуется в пространстве кососимметрических матриц: $\varphi(X)A = XA + AX^T$, $A^T = -A$.

Положим

Таблица.

№	K	φ или φ^*	$St(v_n)$	St_0	$\dim St_0$, $\dim St(v_n)$	$\operatorname{ind} St_0$, $\operatorname{ind} St(v_n)$
1	$sl(2n)$	$\Lambda^2\rho_0$	$(sp(2n-2)\times sl(2)) \underset{\psi}{+} \mathbb{C}^{4n-4}$, $\psi=\rho_0\times\rho_0'$	$sp(2n)$	$n(2n+1)$	n
2	$sl(n)$	$S^2\rho_0$	$so(n-1) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^{n-1}$	$so(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$[\frac{n}{2}]$
3	$sl(n)$	ad	$\mathbb{C}^{n-1}$	$\mathbb{C}^{n-1}$	$n-1$	$n-1$
4	$sl(6)$	$\Lambda^3\rho_0$	$sl(3) \underset{ad}{+} \mathbb{C}^8$	$sl(3)\times sl(3)$	16	4
5	$sl(7)$	$\Lambda^3\rho_0$	$(sl(2)\times sl(2)) \underset{S^3\rho_0\times\rho_0'}{+} \mathbb{C}^8$	g_2	14	2
6	$sl(8)$	$\Lambda^3\rho_0$	$sl(2) \underset{S^4\rho_0}{+} \mathbb{C}^5$	$sl(3)$	8	2
7	$so(n)$	ρ_0	$so(n-2) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^{n-2}$	$so(n-1)$	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$	$[\frac{n-1}{2}]$
8	$so(n)$	ad	$\mathbb{C}^{[\frac{n}{2}]}$	$\mathbb{C}^{[\frac{n}{2}]}$	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{n}{2}]$
9	$so(7)$	spin	$sl(3) \underset{\rho_0+\rho_0^*}{+} \mathbb{C}^6$	g_2	14	2
10	$so(9)$	spin	$g_2 \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^7$	$so(7)$	21	3
11	$so(11)$	spin	$sp(4) \underset{\psi}{+} \mathcal{U}_{14}$	$sl(5)$	24	4
12	$so(13)$	spin	$sl(2) \underset{\psi}{+} \mathcal{U}_{13}$	$sl(3)\times sl(3)$	16	4
13	$sp(2n)$	$\Lambda^2\rho_0=\varphi+\tau$	$sl(2) \underset{\psi}{+} \mathcal{U}_{3(n-1)}$	$\underbrace{sl(2)\times\ldots\times sl(2)}_{n}$	$3n$	n
14	$sp(2n)$	ad	$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{C}^n$	n	n
15	$sp(6)$	$\Lambda^3\rho_0=\varphi+\rho_0$	$sl(2) \underset{S^4\rho_0}{+} \mathbb{C}^5$	$sl(3)$	8	2
16	$so(12)$	s-spin	$sp(6) \underset{\psi}{+} \mathbb{C}^{14}$, $\Lambda^2\rho_0=\psi+\tau$	$sl(6)$	35	5
17	$so(14)$	s-spin	$g_2 \underset{ad}{+} \mathbb{C}^{14}$	$g_2\times g_2$	28	4

$$A_0 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & -1 & \ddots & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \end{array}\right)$$

Решая уравнение $XA_0 + A_0X^T = 0$ находим стационарную подалгебру

$$St(A_0) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & a_1 & b_1 & \ddots & & 0 \\ & & & a_0 & b_0 & & & \\ \hline & & & c_0 & -a_0 & & & \\ & 0 & \ddots & c_1 & -a_1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & -a_{n-1} & \dots & -a_1 & -a_0 \end{array}\right)$$

Легко проверяется, что $St(A_0) = sl(2) \otimes A$, где $A = \mathbb{C}[x]/\mathbb{C}[x^n]$. Поэтому $\operatorname{ind} St(A_0) = \operatorname{ind} sl(2) \cdot \dim A = n = \operatorname{ind} St_0$ /см. [9] /, $\dim St(A_0) = \dim St_0$. Остается проверить, что элемент A_0 нильпотентен. Сформулируем в общем случае очень простое достаточное условие нильпотентности. Если элемент $v_n \in V$ является собственным вектором ненулевого веса для некоторого оператора $\varphi(X)$, $X \in K$, то v_n нильпотентен. Для доказательства рассмотрим кривую $\gamma(t) = t \cdot v_n$, $t \in (0,1]$. Утверждается, что $\gamma(t) \subset \mathcal{O}(v_n)$. Достаточно проверить, что $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \mathcal{O}(\gamma(t))$, т.е. $v_n \in T_{tv_n} \mathcal{O}(tv_n)$ для всех $t \in (0,1]$. Это условие выполнено, поскольку в силу линейности представления $T_{tv_n} \mathcal{O}(tv_n) = T_{v_n} \mathcal{O}(v_n)$, и по предположению существует $X \in K$ такой, что $\varphi(X) v_n = \alpha v_n \in T_{v_n} \mathcal{O}(v_n)$, $\alpha \neq 0$.

Элемент A_0 удовлетворяет сформулированному достаточному условию, поскольку является собственным вектором единичного веса оператора $\varphi(X)$ при $X = \operatorname{diag}(1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n)$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $K = sl(6)$, $\varphi = \Lambda^3 \rho_0$. Пусть $e_1, \dots, e_6$ - произвольный базис в пространстве $\mathbb{C}^6$. Представление $\Lambda^3 \rho_0$ реализуется в пространстве $\Lambda^3 \mathbb{C}^6$. Положим $v_n = e_1 \wedge e_6 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_4 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_5$. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$St(v_n) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 0 & A \\ \hline \end{array} \; , \; A, B \in sl(3) \right\}.$$

Очевидно, что $ind\, St(v_n) = 4$, $dim\, St(v_n) = 16$, $St(v_n) = sl(3) \underset{ad}{+} \mathbb{C}^8$. Для сравнения укажем элемент общего положения v_0 и его стационарную подалгебру:

$$v_0 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 ,$$

$$St(v_0) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline \end{array} \; , \; A, B \in sl(3) \right\},$$

т.е. $St(v_0) = sl(3) \times sl(3)$, $dim\, St(v_0) = 16$, $ind\, St(v_0) = 4$.

Нильпотентность элемента $v_n \in \Lambda^3 \mathbb{C}^6$ следует из того, что $\varphi(X) v_n = - v_n$ при $X = diag\,(1,1,1,-1,-1,-1)$.

<u>Случай 2</u>. Стационарная подалгебра общего положения нередуктивна. Имеется 4 представления с таким свойством:

I/ $K = sl(n)$, $\varphi = \rho_0$;

2/ $K = sp(n, \mathbb{C})$, $\varphi = \rho_0$;

3/ $K = sl(2n+1)$, $\varphi = \Lambda^2 \rho_0$;

4/ $K = so(10)$, $\varphi = s\text{-}spin$.

Представление φ^* во всех случаях локально транзитивно, поэтому выполнено условие $codim\, S_V \geqslant 2$. Действительно, любой элемент общего положения является нильпотентным. Итак, остается проверить условие $codim\, S_{St_0} \geqslant 2$ для стационарной подалгебры общего положения. Стационарные подалгебры в этих четырех случаях имеют вид:

I/ $St_{0,1} = sl(n-1) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^{n-1}$;

2/ $\mathcal{S}t_{0,2} = sp(2n-2, \mathbb{C}) \underset{\rho_0+\tau}{+} \mathcal{U}_{2n-1}$, радикал $\mathcal{U}_{2n-1}$ некоммутативен, $\mathcal{U}_{2n-1} = V_1 + V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $V_2 = Z(\mathcal{S}t_{0,2})$, $\dim V_2 = 1$,

3/ $\mathcal{S}t_{0,3} = sp(2n, \mathbb{C}) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^{2n}$,

4/ $\mathcal{S}t_{0,4} = so(7) \underset{spin}{+} \mathbb{C}^8$.

Случай 4 уже разобран /см. таблицу/. Случай I легко рассматривается по индукции. Действительно, мы только что показали, что $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{codim} S_{0,1} \geqslant 2$, где S – множество сингулярных элементов в $(s\ell(n) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^n)^*$, $S_{0,1}$ – множество сингулярных элементов в $(s\ell(n-1) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^{n-1})^*$. Снижая размерность, мы доходим до алгебры Ли $s\ell(1) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^1$, она абелева, поэтому множество сингулярных элементов пусто. Случаи 2 и 3 тесно связаны друг с другом и тоже рассматриваются по индукции с использованием следующей леммы.

Л е м м а. Пусть $L_0 = L/M$ – фактор-алгебра алгебры Ли L по идеалу M . Пусть S_L и S_{L_0} – множества сингулярных элементов в L^* и L_0^* соответственно, и $\operatorname{ind} L_0 = \operatorname{ind} L - \dim M$. Тогда если $\operatorname{codim} S_{L_0} \geqslant 2$, то $\operatorname{codim} S_L \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть $\pi: L \to L_0$ – естественная проекция. Тогда определено естественное вложение $\pi^*: L_0^* \to L^*$. Пусть ad^* и ad_0^* коприсоединенные представления алгебр Ли L и L_0 соответственно. Легко проверить, исходя из определений, что $\pi^*(ad^*_{0\,\pi(g)} x) = ad^*_g \pi^*(x)$. Утверждается, что $\pi^*(S_{L_0}) = S_L \cap \pi^*(L_0^*)$ Проверим это. Из тождества $\pi^*(ad^*_{0\,\pi(g)} x) = ad^*_g \pi^*(x)$ следует, что $\operatorname{Ann} \pi^*(x) = \pi^{-1}(\operatorname{Ann} x)$ для любого $x \in L_0^*$. Сингулярность элемента $x \in L_0^*$ означает, что $\dim \operatorname{Ann} x > \operatorname{ind} L_0$, следовательно, $\dim \operatorname{Ann} \pi^*(x) = \dim \operatorname{Ann} x + \dim M > \operatorname{ind} L$, т.е. элемент $\pi^*(x)$ сингулярен в L^* . Таким образом, $\pi^*(S_{L_0}) \subset S_L \cap \pi^*(L_0^*)$. Обратное включение доказывается аналогично. Поскольку отображение π^* является вложением, то коразмерность S_{L_0} в L_0^* равна коразмерности множества $\pi^*(S_{L_0}) = S_L \cap \pi^*(L_0^*)$ в $\pi^*(L_0^*)$. Множество S_L выделяется в L^* некоторым набором однородных полиномов, поэтому при переходе к сечению $S_L \cap \pi^*(L_0^*)$ коразмерность может только возрасти /имеется ввиду коразмерность в $\pi^*(L_0^*)$ /, поэтому $\operatorname{codim} S_{L_0} \geqslant \operatorname{codim} S_L$. Лемма доказана.

В нашем случае $L = sp(2n-2,\mathbb{C}) \underset{\rho_0+\tau}{+} U_{2n-1}$, $M = Z(L) = V_2$, $L_0 = L/M = sp(2n-2,\mathbb{C}) \underset{\tau}{+} \mathbb{C}^{2n-2}$. Известно /см., например, [4I] /, что $\operatorname{ind} St_{0,2} = \operatorname{ind}(St_{0,2}/Z(St_{0,2}))+1$. Поэтому если $\operatorname{codim} S_{L_0} \geqslant 2$, то $\operatorname{codim} S_{St_{0,2}} \geqslant 2$. Это позволяет в случаях 2 и 3 применить индукцию, переходя на каждом шаге к стационарной подалгебре общего положения $St_{0,2}$, затем от нее, пользуясь леммой, к алгебре Ли $L_0 = St_{0,2}/Z(St_{0,2})$ и так далее. В результате мы придем к алгебре Ли $sp(2,\mathbb{C}) \underset{\rho_0}{+} \mathbb{C}^2$. Стационарная подалгебра общего положения в этом случае одномерна, следовательно удовлетворяет условию $\operatorname{codim} S_{St_0} \geqslant 2$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\dim V > \dim K$. Стационарная подалгебра общего положения в этом случае тривиальна, поэтому следует проверять условие $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$. В [5I] получен полный список представлений простых алгебр Ли, для которых выполнены условия $\dim V > \dim K$ и $\operatorname{codim} S_V = 1$. Оказывается, все такие представления приводимы. Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. Условия простоты алгебры Ли K и неприводимости представления φ в формулировке теоремы нельзя ослабить. Соответствующие контрпримеры имеются, например, в [5I] .

Для наиболее простых приводимых представлений /т.е. сумм $\rho_0 + \ldots + \rho_0$, где ρ_0 – представление минимальной размерности/ легко доказывается аналогичным методом следующее

П р е д л о ж е н и е 3.2.I. Пусть $G = K \underset{\varphi}{+} V$ полупрямая

ЛИТЕРАТУРА

I. Arnold V.I. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses application a l'hydrodynamique des fluides parfaits.- Ann. Inst. Fourier, 1966, v. 16, № 1, p. 319-361.

2. Арнольд В.И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости.- УМН, 1969, т.24, № 3, с. 225-226.

3. Кириллов А.А. Элементы теории представлений.- М.: Наука, 1978, 344 с.

4. Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела.- Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 4, с. 93-94.

5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли.- В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. XIX. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 3-94.

6. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли.- Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 2, с. 396-415.

7. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А., Френкель И.Б. Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые динамические системы.- ДАН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 802-805.

8. Рейман А.Г. Интегрируемые системы, связанные с градуированными алгебрами Ли.- Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 95, 1980, с. 3-54.

9. Трофимов В.В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре.- ДАН

СССР, 1982, т. 263, № 4, с. 812-816.

10. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах.- В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. XXI. М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 23-83.
11. Переломов А.М. Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости.- Функц. анализ, 1981, т. 15, вып. 2, с. 83-85.
12. Беляев А.В. О движении многомерного твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести.- Матем. сборник, 1981, т. 114, № 3, с. 465-470.
13. Богоявленский О.И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики.- Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, т. 48, № 5, с. 883-938.
14. Богоявленский О.И. Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n .- Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985, т. 49, № 5, с. 899-915.
15. Браилов А.В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения.- ДАН СССР, 1983, т. 268, № 6 , с. 1043-1046.
16. Браилов А.В. Некоторые конструкции полных семейств функций, находящихся в инволюции.- В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. XXII. М.: Изд-во МГУ, 1985, с. 17-24.
17. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем.- УМН, 1981, т. 36, № 5, с. 109-151.
18. Ratiu T. Euler-Poisson equation on Lie algebras and the N-dimensional heavy rigid bodi. - Amer. J. Math., 1982, v. 104, N 2, p. 409-448.
19. Adler M., van Moerbeke P. Completely integrable

systems, euclidean Lie algebras, and curves.– Adv. in Math., 1980, v. 38, N 3, p. 267-317.

20. Дао Чонг Тхи. Интегрируемость уравнений Эйлера на однородных симплектических многообразиях.- Матем. сборник, 1981, т. 106, № 2, с. 154-161.
21. Мищенко А.С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах.- В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. XXI. М.: Изд-во МГУ, 1982, с. 13-22.
22. Браилов А.В. Построение вполне интегрируемых геодезических потоков на компактных симметрических пространствах.- Изв. АН СССР. Сер. матем., 1986, т. 50, № 4, с. 661-674.
23. Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. – J. Math. Phys., 1978, 19, p. 1156-1162.
24. Гельфанд И.М., Дорфман И.Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры.- Функц. анализ, 1979, т. 13, вып. 4, с. 13-30.
25. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями.- В кн.: Труды семин. по вект.и тенз. анализу. Вып. XX. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 5-54.
26. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем.- Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 2, с. 46-56.
27. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли.- УМН, 1984, т. 39, вып. 2, с. 3-56.
28. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли.- Изв. АН СССР, Сер. матем., 1979, т. 43, № 3, с. 714-732.
29. Певцова Т.А. Симплектическая структура орбит коприсоединен-

ного представления алгебр Ли типа $E \times_{\mathcal{S}} G$.- Матем. сборник, 1984, т. 123, № 2, с. 276-286.

30. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия.- В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1985, с. 7-139.
31. Мещеряков М.В. О характеристическом свойстве тензора инерции многомерного твердого тела.- УМН, 1983, т.38, № 5,с.201-202.
32. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds.- J. Different. Geom., 1983, v. 18, №2, p. 523-557.
33. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры.-М.: Мир, 1978.
34. Элашвили А.Г. Фробениусовы алгебры Ли.- Функц. анализ, 1982, т. 16, № 4, с. 94-95.
35. Фоменко А.Т. Алгебраическая структура некоторых интегрируемых гамильтоновых систем.- В кн.: Топологические и геометрические методы в математической физике. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983, с. 84-110.
36. Болсинов А.В. Инволютивные семейства функций на двойственных пространствах к алгебрам Ли типа $G +_{\mathcal{S}} V$.-УМН/сдано в печать/.
37. Rais M. La representation coadjointe du groupe affine.- Ann. Inst. Fourier, 1978, v. 28, №1, p. 207-237.
38. Беляев А.В. Инварианты коприсоединенного представления алгебр Ли вида $\mathfrak{f} \oplus V$.- В кн.: Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения. Воронеж.: Изд-во ВГУ, 1986, с. 139-145.
39. Фоменко А.Т. О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах.- Матем. сборник, 1981, т. 115, № 2, с. 263-280.
40. Болсинов А.В. Вполне интегрируемые системы на сжатиях алгебр Ли.- В кн.: Труды семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. XXII. М.: Изд-во МГУ, 1985, с. 8-16.

41. Rais M. L'indice des produits semi-directs $E \times_{\rho} g$.- C.R. Acad. Sc. Paris, V. 287, sect. A, № 4, 1978, p. 195-197.

42. Knop F. Über die Glattheit von Quotientenabbildungen.- Man. Math.

43. Андреев Е.М., Винберг Э.Б., Элашвили А.Г. Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли.- Функц. анализ, 1967, т. I, вып. 4, с. 3-7.

44. Элашвили А.Г. Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли.- Функц. анализ, 1972, т. 6, с. 51-62.

45. Reichel M.M. Über trilineare alternierende Formen in 6 und 7 Veränderlichen.- Dissertation, 1907.

46. Schouten J.A. Klassifizierreng der alternierenden Grössen dritten Grades in 7 dimensionen.- Rend. Circ. mat. Palermo, 1931, IV.

47. Гуревич Г.Б. Основы алгебраической теории инвариантов.- М.: Гостехиздат, 1948.

48. Попов В.Л. Классификация спиноров размерности четырнадцать.- Труды Московского матем. общ-ва, 1978, т. 37, с. 173-217.

49. Gatti V., Viniberghi E. Spinors of 13-dimensional space.- Advances in Math., 1978, v. 30, № 2, p. 137-155.

50. Igusa J. A classification of spinors up to dimension twelve.- Amer. J. Math., 1970, v. 92, № 4, p. 997-1028.

51. Knop F., Littelmann P. Der Grad erzeugender Funktionen von Invariantenringen.- Preprint, 1986.