

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Берзин Дмитрий Викторович

УДК 513.83

**ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТ
КОПРИСОЕДИНЕННОГО
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ
ГРУПП ЛИ**

01.01.04 – геометрия и топология

*Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.В.Трофимов

МОСКВА–1997

Содержание

1 Гамильтоновы системы на орбитах коприсоединенного представления и тензорное расширение алгебр Ли.	9
1.1 Основные понятия и определения.	9
1.2 Тензорное расширение алгебр Ли посредством фактор-кольца $R[x]/(x^2)$	16
2 Бифуркационные диаграммы для систем, получаемых тензорным расширением из классического случая Эйлера.	23
2.1 Уравнения движения твердого тела как гамильтонова система.	23
2.2 Тензорное расширение алгебры Ли $e(3)$ для классического случая Эйлера и бифуркационные диаграммы.	29
2.3 Перестройки инвариантных лагранжевых подмногообразий.	36
3 Бифуркационные диаграммы для систем, получаемых тензорным расширением из случая движения четырехмерного твердого тела.	52
3.1 Уравнения движения четырехмерного твердого тела.	52
3.2 Бифуркационные диаграммы и перестройки инвариантных лагранжевых подмногообразий.	55
4 Бифуркационные диаграммы на орбитах тензорных расширений специальных групп Ли.	62
4.1 Инварианты и канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления специальных групп Ли.	63

Введение

Одной из наиболее важных и известных задач классической механики является задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Она описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера-Пуассона. Исследованием этой задачи занимались видные математики: Эйлер, Лагранж, Ковалевская и другие. Ими были найдены случаи интегрируемости систем и указаны способы сведения уравнений к квадратурам. Известны также различные обобщения этой задачи, например, движение гиростата, движение заряженного твердого тела в магнитном поле, движение твердого тела в жидкости и т.д. Кроме того, аналогом обычного случая Эйлера служат уравнения движения четырехмерного твердого тела, которыми описываются также некоторые реальные задачи физики и механики (см., например, приложение 2 в книге [1] А.Т.Фоменко). Известно также, что задачу о движении твердого тела вокруг неподвижной точки и ее обобщения на четырехмерный случай можно представить в виде гамильтоновых уравнений Эйлера, записанных на орбитах коприсоединенного представления для алгебр $Li\ e(3)$ и $so(4)$ соответственно.

Исследованию этих задач посвящено много работ, в которых найдены интегрируемые случаи, а также установлено, что в общем случае эти задачи неинтегрируемы (см. работы [2],[3],[4] В.И.Арнольда, В.В.Козлова, А.И.Нейштадта). Однако, исследование интегрируемых случаев важно для понимания общих закономерностей поведения решений этих систем. Поскольку точные решения в таких задачах обычно выражаются довольно сложно и не дают наглядного представления о движении тела, то большое значение здесь приобретают качественные методы исследования систем. Одним из таких методов является построение образа отображения момента и бифуркационной диаграммы.

В работах С.Б.Катока, А.А.Ошемкова, Т.И.Погосяна, М.П.Харламова [5]-[9] были вычислены бифуркационные диаграммы для многих из перечисленных выше случаев. В большинстве опубликованных к настоящему времени работ, в которых строятся бифуркационные диаграммы, рассматриваются перестройки компактных инвариантных лагранжевых подмногообразий. В частности, А.Т.Фоменко была доказана теорема о классификации бифуркаций торов Лиувилля (см., например, [1]). Пример бифуркаций цилиндра (т.е. некомпактного инвариантного подмногообразия) был приведен Л.Гавриловым в [38].

Важным в теории интегрируемых гамильтоновых систем является метод тензорного расширения алгебр Ли, который впервые был предложен В.В.Трофимовым в [10],[11],[12], а затем развит А.В.Браиловым в [13] и Л.Н.ТЬеуеном в [14]. Этот метод, в частности, дает весьма эффективный способ построения инволютивных семейств функций на орбитах коприсоединенного представления групп Ли. В диссертации рассматривается тензорное расширение $\Omega(\Theta) = \Theta \otimes R[x]/(x^2)$ алгебр Ли Θ посредством фактор-кольца $R[x]/(x^2)$. Имеется алгоритм (t) , принадлежащий С.Ж.Такиффи и В.В.Трофимову и позволяющий из инвариантов F_i и интегралов H_j для Θ получить соответствующие инварианты $\{F_i^{(1)}, F_i^{(2)}\}$ и интегралы $\{H_j^{(1)}, H_j^{(2)}\}$ для $\Omega(\Theta)$ (см. [12],[39]).

В настоящей диссертационной работе строятся бифуркационные диаграммы и изучаются перестройки *некомпактных* инвариантных лагранжевых подмногообразий для систем, полученных посредством алгоритма (t) из следующих:

- 1) система, заданная на орбите коприсоединенного представления в $e(3)^*$ и описывающая классический случай Эйлера движения твердого тела вокруг точки, закрепленной в центре масс этого тела;
- 2) система, заданная на орбите коприсоединенного представления в $so(4)^*$ и описывающая случай движения четырехмерного твердого тела;
- 3) система, заданная на орбите коприсоединенного представления специальных групп Ли посредством метода сдвига аргумента Мищенко-Фоменко.

Основные результаты диссертации были опубликованы автором в [34], [35], [36], [37]. Диссертация состоит из введения, четырех глав и библиографического списка. Внутри текста размещено шесть рисунков. Изложим содержание работы более подробно.

В первой главе диссертации, в §1.1 приводятся необходимые для дальнейшего сведения из симплектической геометрии и теории групп Ли. В §1.2 вводятся определения бифуркационной диаграммы в узком и широком смыслах Σ и $\hat{\Sigma}$ соответственно, а также выписываются некоторые результаты из работ [12], [15] В.В. Трофимова. Кроме того, автором доказываются несколько нужных для последующего изложения теорем, касающихся операции тензорного расширения.

Во второй главе речь идет о гамильтоновых системах, получаемых тензорным расширением из классической задачи Эйлера о движении твердого тела вокруг точки, закрепленной в центре масс. Известно, что это движение можно описать уравнениями Эйлера для алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидового пространства. Такие системы гамильтоновы на четырехмерных орбитах $\mathcal{O}^*(x)$ коприсоединенного представления (дiffeоморфных касательному расслоению TS^2 двумерной сферы), и для полной интегрируемости по Лиувиллю кроме гамильтониана H указывается еще один (дополнительный) интеграл K (об этом, в частности, идет речь в §2.1). В результате тензорного расширения получаем 12-мерную алгебру Ли $\Omega(e(3))$. Имеем отображение момента $\Phi : M^8 \rightarrow \mathbb{R}^4$, где $M^8 = \Omega(\mathcal{O}^*(x))$ — орбита общего положения коприсоединенного представления для тензорного расширения, $\Phi = (P_1, K_1, H_2, K_2)$, где $\{H_1, K_1, H_2, K_2\}$ — набор интегралов, получаемый из $\{H, K\}$ при тензорном расширении. В §2.2, в предложении 1 доказывается, что M^8 диффеоморфно $T(TS^2)$, где TS^2 — касательное расслоение двумерной сферы. В теореме 6 описывается множество особенностей S отображения момента Φ , а теоремы 7, 8, 9 описывают образ $\Phi(M^8)$ отображения момента, а также бифуркационные диаграммы

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^8 P_i, \quad \hat{\Sigma} = \left(\bigcup_{i=9}^{20} P_i \right) \cup \Sigma$$

в узком и широком смысле соответственно, где множества P_i ($i = 1, \dots, 20$) описаны на стр. 32 и 35. В отличие от случаев перестроек компактных инвариантных лагранжевых подмногообразий, в некомпактном случае, вообще говоря, $\Sigma \neq \hat{\Sigma}$, и результаты диссертации, в частности, иллюстрируют этот факт. В §2.3 исследуются особенности, получаемые из особенности типа "центр", которую обозначим через "A", и из особенности типа "седло" (обозначили через "B"). Посред-

ством тензорного расширения из этих "элементарных" перестроек получаются перестройки $\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A)', \mathcal{T}(B), \mathcal{T}(B)'$. В теореме 12 подробно описаны прообразы точек бифуркационной диаграммы. В частности, $\Phi^{-1}(z) = (T^2 \times R^2) \cup (T^2 \times R^2)$ для регулярной точки $z \in \Phi(M^8)$, где T^2 — двумерный тор, R^2 — двумерная плоскость. Доказывается, что все соответствующие перестройки здесь имеют тип прямого произведения вида $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, где $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \{\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A)', \mathcal{T}(B), \mathcal{T}(B)', \mathcal{T}(S^1)\}$, а $\mathcal{T}(S^1)$ — это цилиндр $S^1 \times R$. Всего здесь (в 20 пунктах) фигурирует 11 типов перестроек:

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(S^1), \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(S^1), \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A), \\ & \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(S^1), \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(S^1), \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A), \\ & \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A)', \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)', \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A)'. \end{aligned}$$

В третьей главе диссертации рассматривается система, получаемая посредством тензорного расширения из системы, описывающей движение "четырехмерного твердого тела". Эта система гамильтонова и задается уравнениями Эйлера на орбите общего положения (диффеоморфной $S^2 \times S^2$) в $so(4)^*$ (см. §3.1). Обозначения и доказательства совершенно аналогичны таковым из предыдущей главы. В §3.2 в теореме 15 описан образ отображения момента. Доказывается, что здесь, как и во второй главе, $\Phi^{-1}(z) = (T^2 \times R^2) \cup (T^2 \times R^2)$ для регулярной точки z образа отображения момента. В теоремах 14 и 16 построены бифуркационные диаграммы в узком и широком смыслах соответственно. В теореме 17 описаны перестройки инвариантных лагранжевых подмногообразий. Это описание включает в себя 34 пункта, в которых фигурирует те же 11 типов перестроек, что и в теореме 12 из предыдущей главы.

Четвертая глава диссертации посвящена приложению техники, наработанной в предыдущих главах, к изучению перестроек некомпактных слоев слоения Лиувилля. В §4.1 вычисляются инварианты конисединенного представления для алгебр Ли (назовем их *специальными*), заданных следующим образом. Пусть $A : V \rightarrow V$ — линейный оператор, имеющий вид жордановой клетки с собственными числами λ на диагонали и действующий в пространстве V . Тогда на прямой сумме $\Theta^A = V \oplus Re$, где e — некоторый вектор, определим структуру алгебры Ли, положив $[a, b] = 0, [ae, x] = \alpha A(x)$ для любых элементов $a, b, x \in V$,

$\alpha \in R$. Легко видеть, что определенный таким образом коммутатор задает структуру алгебры Ли. Восьмимерные и девятимерные нильпотентные алгебры Ли подобного вида рассматривались в работах [41],[42] Г.Тсагаса и А.Коботиса. На протяжении четвертой главы мы изучаем отдельно два случая: $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$. В теоремах 18,19,20 (по существу, в качестве решения отдельной задачи) вычислены инварианты специальных алгебр Ли. Обозначим орбиты, которые выделяют эти инварианты, через \mathcal{O}_1^* и \mathcal{O}_2^* для $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ соответственно. Затем, в §4.2 применяем операцию тензорного расширения и получаем отображения момента

$$\Phi_1 : \Omega(\mathcal{O}_1^*) \rightarrow R^2 , \quad \Phi_2 : \Omega(\mathcal{O}_2^*) \rightarrow R^2 ,$$

где Φ_1 и Φ_2 — отображения, построенные с помощью метода сдвига аргумента. Параметры сдвига выбираем удобным для нас образом. В теореме 23 строятся бифуркационные диаграммы для отображения момента Φ_1 в случае $\dim \Theta = 5$. Здесь $\Sigma = \hat{\Sigma}$, и перестройка имеет вид $2R^2 \rightarrow R^2 \rightarrow \emptyset$. В теореме 24 описаны бифуркационные диаграммы Σ и $\hat{\Sigma}$ для отображения момента Φ_2 в случае $\dim \Theta = 3$. Здесь $\Sigma \neq \hat{\Sigma}$, и перестройка имеет вид $R^2 \rightarrow 2R^2 \rightarrow R^2 \rightarrow \emptyset$.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору В.В.Трофимову, а также академику РАН, профессору А.Т.Фоменко и профессору А.В.Болсинову за постановку задач, ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Гамильтоновы системы на орбитах коприсоединенного представления и тензорное расширение алгебр Ли.

1.1 Основные понятия и определения.

В этом параграфе кратко излагаются некоторые понятия и определения симплектической геометрии, линейной алгебры и теории групп Ли, необходимые нам в дальнейшем (см., например, [16] [21], [40]).

Напомним, что гладкое многообразие G называется *группой Ли*, если на нем задана структура группы, согласованная со структурой гладкого многообразия, т.е. если групповые операции — гладкие.

Пусть M, N — гладкие многообразия, а $f : M \rightarrow N$ — диффеоморфизм. Определим операцию f_* *увлечения вектора* ξ из векторного поля на многообразии M :

$$(f_*\xi)_y^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \xi_x^j,$$

где $y = f(x)$, $y \in N$, $x \in M$ и x^1, \dots, x^n — локальная система координат в окрестности точки x , а y^1, \dots, y^n — локальная система координат в окрестности точки y , причем отображение f в этих координатах

задается функциями $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$. Здесь и везде символ " $\stackrel{\text{def}}{=}$ " означает "полагаем по определению".

Определим операцию f^* *увлечение дифференциальной формы*. Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, при этом $y = f(x)$, $y \in N$, $x \in M$. Пусть на N задана внешняя дифференциальная форма $\omega = \omega_{i_1 i_2 \dots i_s}$. Тогда на M определена увлеченная дифференциальная форма $f^*\omega$, задаваемая равенством:

$$f^*(\omega)_{j_1 j_2 \dots j_s} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_s}}{\partial x^{j_s}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_s}.$$

Пусть G — группа Ли. С каждым элементом a группы Ли G связано два диффеоморфизма $R_a : G \rightarrow G$, $L_a : G \rightarrow G$ группы G , которые определяются равенствами $R_a = xa$, $L_a = ax$. Отображение L_a называется *левым сдвигом*, а R_a — *правым сдвигом*. Векторное поле ξ на группе Ли G называется *левоинвариантным*, если оно переходит в себя при увлечении любым левым сдвигом, т.е. если $(L_a)_* \xi_x = \xi_{ax}$ для любых элементов $a, x \in G$. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли однозначно определяются своими значениями в единице группы, а пространство левоинвариантных векторных полей конечномерно, и его размерность равна размерности группы Ли G .

Пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$ — векторные поля на многообразии M^n . Тогда, по определению, $[\xi, \eta]$ — векторное поле с компонентами

$$[\xi, \eta]^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} \xi^k - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \eta^k,$$

где (x^1, \dots, x^n) — локальная система координат на многообразии M^n , относительно которой вычисляются координаты ξ^i и η^j векторных полей ξ и η соответственно. Векторное поле $[\xi, \eta]$ называется *коммутатором* векторных полей ξ и η . Пространство векторных полей на гладком многообразии образует алгебру Ли относительно коммутатора $[\xi, \eta]$. Напомним, что *алгеброй Ли* Θ называется векторное пространство над полем p , в котором задано умножение (коммутатор) $[\xi, \eta]$, $\xi, \eta \in \Theta$, если выполнены следующие условия:

- $[\xi, \eta]$ — билинейная кососимметрическая операция;
- справедливо тождество Якоби $[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0$.

Пусть Θ^r — алгебра Ли размерности r над полем p . Выберем в ней некоторый базис e_1, \dots, e_r . Имеем $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$, $C_{ij}^k \in p$. Числа

C_{ij}^k называются *структурными константами* в фиксированном базисе. При изменении базиса структурные константы изменяются по тензорному закону. Алгеброй Ли $\Theta^r = L(G^r)$ группы Ли G^r называется пространство всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G^r . Коммутатор $[\xi, \eta]$ левоинвариантных векторных полей ξ, η по определению есть обычный коммутатор векторных полей, при этом аксиомы алгебры Ли выполнены.

Пусть G^r — группа Ли, M^n — гладкое многообразие размерности n . Скажем, что группа Ли G^r действует на многообразии M^n , если для каждого элемента $a \in G^r$ задано гладкое отображение $\hat{a} : M^n \rightarrow M^n$. Нетрудно показать, что для произвольного действия группы Ли G^r на многообразии M^n все отображения $x \rightarrow \hat{a}(x)$, где $x \in M^n$, — диффеоморфизмы. Пусть задано действие группы Ли G^r на многообразии M^n . Орбитой точки $x \in M^n$ называется множество $\mathcal{O}(x) = \{\hat{a}x \mid a \in G^r\} \subset M^n$. Рассмотрим действие группы G^r на n -мерном векторном пространстве R^n . Это действие называется *линейным представлением* группы Ли в пространстве R^n , если для любого элемента $a \in G^r$ отображение \hat{a} — линейный оператор в пространстве R^n . Скажем, что задано *линейное представление* (или просто *представление*) алгебры Ли Θ в линейном пространстве V , если задан гомоморфизм алгебры Ли Θ в алгебру Ли $gl(V)$ всех линейных операторов, действующих в пространстве V :

$$\rho : \Theta \rightarrow gl(V),$$

т.е. каждому вектору $\xi \in \Theta$ поставлен в соответствие линейный оператор $\rho(\xi) : V \rightarrow V$, линейно зависящий от ξ , и $\rho([\xi, \eta]) = [\rho(\xi), \rho(\eta)]$. Введем важное представление произвольной алгебры Ли Θ , так называемое *присоединенное представление алгебры Ли*. Оно обозначается через ad_ξ , линейный оператор ad_ξ определяется формулой $ad_\xi(\eta) = [\xi, \eta]$, где $\xi, \eta \in \Theta$. Помним, что алгебра Ли Θ называется *полупростой*, если ее максимальный разрешимый идеал равен нулю, и называется *простой*, если все ее идеалы исчерпываются двумя тривиальными: 0 и Θ . Максимальная абелева подалгебра $H \subset \Theta$ в полупростой алгебре Ли Θ называется *подалгеброй Картана*, если операторы ad_h полупросты для всех $h \in H$, то есть существует базис, в котором ad_h записывается диагональной матрицей.

Среди алгебр Ли важное место занимают *нильпотентные* алгебры Ли. Напомним, что матрица A называется нильпотентной, если существует такое натуральное число N , что $A^N = 0$ или, что то же самое, если все ее собственные значения равны нулю. Представление $\rho : \Theta \rightarrow gl(V)$ алгебры Ли Θ называется нильпотентным, если для любого вектора $\xi \in \Theta$ линейный оператор $\rho(\xi)$ нильпотентный (т.е. в некотором базисе оператор $\rho(\xi)$ задается нильпотентной матрицей). Алгебра Ли Θ называется нильпотентной, если ее присоединенное представление нильпотентно.

Напомним, что диффеоморфизм $h : G \rightarrow G$ группы Ли G называется *автоморфизмом*, если для любых элементов $g_1, g_2 \in G$ справедливо равенство $h(g_1g_2) = h(g_1)h(g_2)$. Рассмотрим при любом фиксированном элементе $a \in G$ отображение $i_a(g) = aga^{-1}$. Легко показать, что это отображение — автоморфизм группы Ли G . Всякий автоморфизм группы Ли G порождает автоморфизм алгебры Ли $L(G)$ этой группы Ли. Автоморфизм $i_a : G \rightarrow G$ группы Ли G порождает автоморфизм алгебры Ли $L(G)$, который обозначается Ad_a , т.е. $Ad_a(\xi) = (i_a)_*(\xi)$, где $\xi \in L(G)$, $a \in G$ и называется *присоединенным представлением* группы Ли G в ее алгебре Ли $L(G)$. Построенное отображение $Ad : G \rightarrow GL(L(G))$ переводит элемент $a \in G$ в линейный оператор $Ad_a : L(G) \rightarrow L(G)$. Нетрудно показать, что отображение Ad задает линейное представление группы Ли G в алгебре Ли $L(G)$ и индуцирует присоединенное представление алгебры Ли $L(G)$. Пусть G — связная конечномерная группа Ли, Θ — ее алгебра Ли, Θ^* — двойственное к Θ пространство. Коприсоединенным представлением Ad^* группы Ли G на Θ^* называется представление, задаваемое соотношением

$$(Ad_g^*x)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} x(Ad_g^{-1}\xi).$$

Напомним определение скобки Пуассона двух гладких функций на симплектическом многообразии. Гладкое четномерное многообразие M^{2n} называется *симплектическим*, если на нем задана внешняя дифференциальная форма $\omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$ второй степени, такая, что:

- а) эта форма не вырождена, т.е. $\det \|\omega_{ij}(x)\| \neq 0$ для любой точки $x \in M^{2n}$.
- б) эта форма замкнута, т.е. $d\omega = 0$.

Такая форма ω называется *симплектической структурой* на многообразии M^{2n} . Диффеоморфизм f симплектических многообра-

зий (M_1^{2n}, ω_1) и (M_2^{2n}, ω_2) называется симплектоморфизмом, если $f^*\omega_2 = \omega_1$. Пусть N — многообразие размерности n , а (M^{2n}, ω) симплектическое многообразие. Отображение $f : N \rightarrow M^{2n}$ называется изотропным, если $f^*\omega = 0$. Предположим дополнительно, что дифференциал df инъективен во всех точках. В этом случае N (вместе с отображением f) называется погруженным лагранжевым подмногообразием в M^{2n} .

Пусть f — гладкая функция на симплектическом многообразии M^{2n} . Кососимметрическим градиентом $s\text{grad } f$ функции f называется гладкое векторное поле на M^{2n} , однозначно определяемое из соотношения $\omega(v, s\text{grad } f) = v(f)$, где v пробегает множество всех гладких векторных полей на M^{2n} , а $v(f)$ — производная функции f вдоль векторного поля v . Векторное поле на симплектическом многообразии M^{2n} называется гамильтоновым, если оно имеет вид $v = s\text{grad } H$, где H — некоторая гладкая функция на M^{2n} , называемая гамильтонианом. С точки зрения гамильтоновой механики многообразие M^{2n} представляет собой *фазовое пространство*. Система $v = s\text{grad } H$ порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов M^{2n} , называемую *фазовым потоком*. Скобкой Пуассона двух гладких функций f, g на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется функция $\{f, g\}$, определяемая формулой $\{f, g\} = \omega(s\text{grad } f, s\text{grad } g)$. Операция взятия скобки Пуассона билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, поэтому пространство гладких функций на симплектическом многообразии естественным образом превращается в бесконечномерную алгебру Ли относительно скобки Пуассона. Говорят, что две функции на симплектическом многообразии находятся в *инволюции*, если их скобка Пуассона равна нулю. Функция f на многообразии M называется *интегралом* векторного поля v , если эта функция постоянна вдоль всех интегральных траекторий поля v . Если $v = s\text{grad } H$ — гамильтоново векторное поле, и если гладкая функция f такова, что $\{f, H\} = 0$, то, как несложно показать, функция f — интеграл поля v . В частности, гамильтониан всегда является интегралом поля v . Пусть на четырехмерном симплектическом многообразии M^4 заданы две гладкие функции f, H , находящиеся в инволюции. Тогда, сопоставив элементу (a, b) группы Ли R^2 сдвиг за единицу времени вдоль векторного поля $a s\text{grad } h + b s\text{grad } f$, мы определим так называемое *пуассоново действие группы Ли* R^2 на многообразии M^4 .

Система гамильтоновых уравнений $\dot{x} = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется *вполне интегрируемой*, если существуют такие гладкие функции f_1, \dots, f_n на многообразии M^{2n} , что а) f_i — первые интегралы потока \dot{x} , то есть $\{H, f_i\} = 0$, $i = 1, \dots, n$; б) функции f_1, \dots, f_n находятся попарно в инволюции; в) функции f_1, \dots, f_n функционально независимы почти всюду на M^{2n} . Семейство функций f_1, \dots, f_n , удовлетворяющее свойствам а)-в), называется *полным инволютивным*. Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} задана интегрируемая система с полным инволютивным набором интегралов $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, где $x \in M^{2n}$. Гладкое отображение $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ многообразия M^{2n} в евклидово пространство R^n называется *отображением момента*. Задав некоторую точку $\xi \in R^n$, мы тем самым можем задать совместную поверхность уровня M_ξ интегралов $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$. Если на M_ξ функции f_i независимы, то M_ξ является гладким многообразием, инвариантным относительно каждого из n коммутирующих фазовых потоков $\dot{x} = \text{sgrad } f_i$ с функцией гамильтона $H = f_1$. Кроме того, многообразие M_ξ является лагранжевым, поскольку векторы $\text{sgrad } f_i$ образуют базис в $T_x M_\xi$, и $\omega(\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j) = \{f_i, f_j\} = 0$. Точка x называется *особой (критической)* для отображения момента F , если $\text{rank } dF(x) < n$. Образ $F(x)$ критической точки называется *критическим значением* отображения момента. Множество Σ всех критических значений называется *бифуркационным множеством*. Точки $a \in R^n$, не являющиеся критическими значениями, называются *регулярными* для данного отображения момента. Напомним, что если прообраз $F^{-1}(a)$ регулярной точки a компактен, то согласно теореме Лиувилля он состоит из торов Лиувилля.

Пусть \mathcal{P} — топологическое пространство, \mathcal{A} — подмножество \mathcal{P} и

$$T(t, \mathcal{A}) : [0; 1] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}$$

— непрерывное отображение, задающее перестройку $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_1$, где $\mathcal{A}_0 = T(0, \mathcal{A})$, $\mathcal{A}_1 = T(1, \mathcal{A})$. Назовем эту перестройку *тривиальной*, если при любом фиксированном t отображение $T(t, \mathcal{A})$ — гомеоморфизм. В противном случае перестройку назовем *нетривиальной*.

Вернемся к симплектическому многообразию M^{2n} . Если точка a движется вдоль какой-либо гладкой кривой γ в пространстве R^n , оста-

ваясь при этом регулярной точкой отображения момента, то возникающие при этом перестройки прообразов (являющихся инвариантными лагранжевыми подмногообразиями в M^{2n}) — тривиальны. Другими словами, каждый из торов Лиувилля гладко деформируется внутри M^{2n} , оставаясь при этом тором Лиувилля. Однако ситуация меняется, когда точка a приближается к диаграмме Σ и в некоторый момент времени пропыкает ее. Пусть c — точка встречи пути γ с множеством Σ . Так как c является критическим значением отображения момента, то ее прообраз может не быть тором (или объединением торов). Другими словами, в такой момент происходят нетривиальные перестройки (бифуркции) прообразов.

Напомним, что гладкая функция f называется *центральной функцией* (или *функцией Казимира*) скобки Пуассона, если $\{f, g\} = 0$ для всех гладких функций g , т.е. если она принадлежит центру алгебры Ли гладких функций. Коразмерность орбиты общего положения $\mathcal{O}^*(x)$ коприсоединенного представления Ad^* называется *индексом* $\text{ind } \Theta$ алгебры Ли Θ . Пусть $\text{Ann}(x) = \{\xi \in \Theta \mid \text{ad}_\xi^* x = 0\}$ — стационарная подалгебра (*аннулятор*) ковектора $x \in \Theta^*$, тогда

$$\text{ind } \Theta = \min_{x \in \Theta^*} \{\dim \text{Ann}(x)\}.$$

Инволютивное семейство функций на Θ^* называется *полным*, если из него можно выбрать $(\dim \Theta + \text{ind } \Theta)/2$ функционально независимых на Θ^* функций. Каждый ковектор $x \in \Theta^*$ определяет кососимметрическую 2-форму на $\Theta \cong T_x^*(\Theta^*)$ равенством $\Phi_x(\xi, \eta) = (x, [\xi, \eta])$. Тем самым на Θ^* задано кососимметрическое векторное поле типа $(2,0)$, определяющее на Θ^* скобку Пуассона-Ли $\{f, g\}(x) = \Phi_x(df, dg)$. Центральные функции здесь — это *инварианты коприсоединенного представления* (или просто *инварианты*), т.е. такие функции $f \in C^\infty(\Theta^*)$, что для любого $g \in G$ выполняется тождество $f(\text{Ad}_g^* x) \equiv f(x)$. Ограничение этой скобки Пуассона-Ли на орбиты порождает там симплектическую структуру — форму Кириллова. Напомним ее определение. Пусть Θ — алгебра Ли группы Ли G . Тогда, как нетрудно убедиться, касательное пространство в точке x к орбите $\mathcal{O}^*(x)$ состоит из всех векторов вида $\text{ad}_y^* x$, где y пробегает Θ . Пусть a, b — два касательных вектора к орбите $\mathcal{O}^*(x)$ в точке x . Тогда в силу вышесказанного можно считать, что вектора a и b допускают представление (неоднозначное) в виде $a = \text{ad}_\xi^* x$,

$b = \text{ad}_\eta^* x$, где $\xi, \eta \in \Theta$. Положим $\omega(a, b) = x([\xi, \eta])$. Эта кососимметрическая 2-форма ω является замкнутой и невырожденной на орбитах и называется *формой Кириллова*.

Пусть U_1 и U_2 — некоторые области в R^n . Скажем, что непрерывные отображения F и G , такие что

$$F : U_1 \rightarrow R^k, G : U_2 \rightarrow R^k$$

топологически эквивалентны, если существует такие гомеоморфизмы $h : U_1 \rightarrow U_2$ и $h' : R^k \rightarrow R^k$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{F} & R^k \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ U_2 & \xrightarrow{G} & R^k \end{array}$$

коммутативна.

В заключение параграфа кратко напомним некоторые понятия из линейной алгебры, которые будут нам нужны в следующей главе. Две λ -матрицы порядка n называются *эквивалентными*, если они переводятся друг в друга элементарными преобразованиями. Для обозначения эквивалентности матриц будем использовать символ " \sim ". Любая матрица над произвольным полем p однозначно приводится к канонической диагональной форме элементарными преобразованиями. Две λ -матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их канонические диагональные формы. Для того, чтобы матрицы A и B над полем p были *подобны* (т.е. чтобы существовала матрица C , что $A = C B C^{-1}$), необходимо и достаточно, чтобы их характеристические матрицы $\lambda E - A$ и $\lambda E - B$ были эквивалентны. Каждая квадратная матрица над алгебраически замкнутым полем подобна матрице, имеющей жорданову форму.

1.2 Тензорное расширение алгебр Ли посредством фактор-кольца $R[x]/(x^2)$.

В начале этого параграфа приведем некоторые сведения из работ В.В.Трофимова (главным образом, из [12],[15]), которые будут нам полезны в дальнейшем, затем сформулируем и докажем несколько теорем касательно операции тензорного расширения.

Пусть A — коммутативная ассоциативная конечномерная алгебра с единицей. Тензорное произведение $G \otimes A$ алгебры Ли G и A является алгеброй Ли относительно коммутатора $[g \otimes a, h \otimes b] = [g, h] \otimes ab$, где $g, h \in G$, $a, b \in A$ (см., например,[18]).

Будем рассматривать случай фактор-кольца $A = R[x]/(x^2)$, где $R[x]$ — кольцо многочленов, а (x^2) — идеал, порожденный x^2 . Пусть $\pi : R[x] \rightarrow R[x]/(x^2)$ — естественная проекция кольца многочленов $R[x]$ на фактор-кольцо $R[x]/(x^2)$. Если e_1, \dots, e_n — базис алгебры Ли Θ ($n = \dim \Theta$), то $e_1, \dots, e_n, \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n$ — базис алгебры Ли $\Omega(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta \otimes (R[x]/(x^2))$, которую будем называть *тензорным расширением алгебры Ли Θ* , $\varepsilon = \pi(x)$. Координаты в сопряженном пространстве $\Omega(\Theta)^*$ в базисе, дуальном к $e_1, \dots, e_n; \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n$, обозначим через $x_i; y_j$ соответственно ($i, j = 1, \dots, n$).

Пусть $F(x)$ — некоторая гладкая функция на пространстве Θ^* . Определим набор $\{F^{(1)}, F^{(2)}\}$ функций на пространстве $\Omega(\Theta)^*$ посредством следующего алгоритма (см.[18],[39]), который будем называть алгоритмом (t):

$$F^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(y), \quad F^{(2)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} x_i,$$

где $n = \dim \Theta$.

Теорема 1 (B.B. Трофимов, см.[12]). Для алгебры Ли Θ и ее тензорного расширения $\Omega(\Theta)$ выполняется соотношение $\text{ind } \Omega(\Theta) = 2 \text{ind } \Theta$.

Теорема 2 (B.B. Трофимов, см.[12]). Если функции $F_1(x), \dots, F_s(x) \in C^\infty(\Theta^*)$ находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли G , ассоциированной с алгеброй Ли Θ , тогда функции

$$F_1^{(1)}(y), \dots, F_s^{(1)}(y), F_1^{(2)}(x, y), \dots, F_s^{(2)}(x, y) \in C^\infty(\Omega(\Theta)^*)$$

находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли $\Omega(G)$, отвечающей алгебре Ли $\Omega(\Theta)$. Здесь $F_i^{(1)}, F_j^{(2)}$ — набор ($i, j = 1, \dots, s$), полученный из $F_1(x), \dots, F_s(x)$ посредством алгоритма (t). При этом если $F_i(x)$ — функционально независимы, то $F_i^{(1)}(y), F_j^{(2)}(x, y)$ функционально независимы на $\Omega(\Theta)^*$.

Для построения канонических координат на орбитах в случае тензорного расширения служит следующая теорема.

Теорема 3 (В.В. Трофимов, см.[15]).

Пусть функции $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s$, определенные на пространстве Θ^* , дают канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления группы Ли G , отвечающей алгебре Ли Θ , то есть $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Тогда функции

$$P_1 = p_1^{(1)}, \dots, P_s = p_s^{(1)}, P_{s+1} = p_1^{(2)}, \dots, P_{2s} = p_s^{(2)},$$

$$Q_1 = q_1^{(2)}, \dots, Q_s = q_s^{(2)}, Q_{s+1} = q_1^{(1)}, \dots, Q_{2s} = q_s^{(1)}$$

на пространстве $\Omega(\Theta)^*$ дают канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления группы Ли, отвечающей $\Omega(\Theta)$.

Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} задано инволютивное семейство из n гладких вещественнозначных функций $F_1(x), \dots, F_n(x)$, где $x \in M^{2n}$. Напомним, что отображением момента для многообразия M^{2n} называется отображение $\Phi : M^{2n} \rightarrow R^n$, сопоставляющее точке симплектического многообразия n значений функций $F_1(x), \dots, F_n(x)$ в этой точке:

$$\Phi(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

Множеством особенностей (или множеством критических точек) S отображения момента называется множество точек из M^{2n} , в которых функции $F_1(x), \dots, F_n(x)$ зависимы:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M^{2n}, \operatorname{rank} d\Phi(x) < n\}.$$

Определение 1 Назовем "бифуркационной диаграммой в узком смысле" множество $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(S)$.

Введем определение бифуркационной диаграммы в широком смысле $\hat{\Sigma}$ (будем также называть ее просто бифуркационной диаграммой) следующим образом.

Определение 2 Скажем, что точка $y \in R^n$ не принадлежит бифуркационной диаграмме $\hat{\Sigma}$, если существует окрестность $O(y)$ точки y в R^n , что отображение $\Phi : \Phi^{-1}(O(y)) \rightarrow O(y)$ является тривиальным расслоением. Остальные точки из R^n будем считать принадлежащими бифуркационной диаграмме $\hat{\Sigma}$.

Нетрудно понять, что всегда $\Sigma \subset \hat{\Sigma}$, и если подмножества $\Phi^{-1}(y)$ компактны для всех точек y образа отображения момента Φ , то $\Sigma = \hat{\Sigma}$.

Пусть R^N — обычное N -мерное евклидово пространство, и гладкое многообразие M^{N-k} задается в R^N системой:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} G_1(x) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ G_k(x) = 0, \end{array} \right.$$

где $\{G_i(x)\}_{i=1,\dots,k}$ — функционально независимый набор гладких функций, $G_i : R^N \rightarrow R$.

Рассмотрим набор $G_1^{(1)}(y), \dots, G_k^{(1)}(y), G_1^{(2)}(x, y), \dots, G_k^{(2)}(x, y)$, получаемый из $\{G_i(x)\}_{i=1,\dots,k}$ посредством алгоритма (t).

Лемма 1 Множество, задаваемое системой

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} G_1^{(1)}(y) = 0, \dots, G_k^{(1)}(y) = 0, \\ G_1^{(2)}(x, y) = 0, \dots, G_k^{(2)}(x, y) = 0, \end{array} \right.$$

является гладким многообразием, диффеоморфным TM^{N-k} .

Доказательство. Поскольку градиенты $\text{grad } G_1(x), \dots, \text{grad } G_k(x)$ независимы, то система $(*)$ задает гладкое $(N - k)$ -мерное многообразие M^{N-k} , вложенное в евклидово пространство R^N (см., например, [24]). В каждой точке x оно имеет $(N - k)$ -мерное касательное пространство TM_x , которое — не что иное, как ортогональное дополнение к $\{\text{grad } G_1(x), \dots, \text{grad } G_k(x)\}$, поэтому касательное расслоение TM^{N-k} задается системой

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(x) = 0, \dots, G_k(x) = 0, \\ (\text{grad } G_1(x), y) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ (\text{grad } G_k(x), y) = 0, \end{array} \right.$$

где через $(\text{grad } G_i(x), y)$ обозначено скалярное произведение градиента на вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$. Легко видеть, что эта система с точностью до переобозначения x на y и y на x совпадает с системой $(**)$. Следовательно, лемма доказана.

Пусть Θ — алгебра Ли, \mathcal{O}^* — орбита общего положения коприсоединенного представления в Θ^* , задаваемая системой $(*)$, где $\{G_i(x)\}_{i=1,\dots,k}$ — инварианты, $x \in \Theta^*, x = (x_1, \dots, x_N)$. Пусть $F = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ — отображение момента, $F : \mathcal{O}^* \rightarrow \mathbb{R}^n$. Далее, пусть точка $z \in F(\mathcal{O}^*)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, причем слой $F^{-1}(z)$ — гладкое многообразие M^{N-k-n} — определяется системой

$$\begin{cases} G_1(x) = 0, \dots, G_k(x) = 0, \\ F_1(x) = z_1, \dots, F_n(x) = z_n, \end{cases}$$

где $\{G_i(x), F_j(x)\}_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,n}$ — функционально независимый набор на $F^{-1}(z)$.

Пусть $\Omega(\mathcal{O}^*)$ — соответствующая орбита для $\Omega(\Theta)$, задаваемая системой

$$\begin{cases} G_1^{(1)}(y) = 0, \dots, G_k^{(1)}(y) = 0, \\ G_1^{(2)}(x, y) = 0, \dots, G_k^{(2)}(x, y) = 0, \end{cases}$$

и $\Phi : \Omega(\mathcal{O}^*) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — отображение момента, где

$$\Phi = (F_1^{(1)}(y), \dots, F_n^{(1)}(y), F_1^{(2)}(x, y), \dots, F_n^{(2)}(x, y)).$$

Определение 3 Будем говорить, что система $\{F_j^{(1)}, F_j^{(2)}\}_{j=1,\dots,n}$ на $\Omega(\mathcal{O}^*)$ получена "тензорным расширением" из системы $\{F_j\}_{j=1,\dots,n}$, заданной на \mathcal{O}^* .

Рассмотрим точку $\hat{z} = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n})$, $\hat{z} \in \Phi(\Omega(\mathcal{O}^*))$.

Теорема 4 В условиях выше $\Phi^{-1}(\hat{z})$ является гладким многообразием, диффеоморфным TM^{N-k-n} .

Доказательство. Эта теорема — непосредственное следствие из леммы 1, только вместо набора функций $\{G_i(x)\}_{i=1,\dots,k}$ леммы 1 теперь фигурирует набор $\{G_i(x), F_j(x)\}_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,n}$. Таким образом, теорема доказана.

Пусть, как и ранее, гладкое многообразие M^{N-k} задается в R^N системой $(*)$, и пусть на этом многообразии задан набор гладких функций $\{F_j(x)\}_{j=1,\dots,n}$. Применим операцию тензорного расширения, получим гладкое многообразие $M^{2(N-k)}$, диффеоморфное TM^{N-k} (по доказанному), задаваемое системой:

$$(\ast \ast \ast) \left\{ \begin{array}{l} G_1(y) = 0, \dots, G_k(y) = 0, \\ (\text{grad } G_1(y), x) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ (\text{grad } G_k(y), x) = 0. \end{array} \right.$$

Вместо $\{F_j(x)\}_{j=1,\dots,n}$ получаем набор функций на $M^{2(N-k)}$:

$$F_j^{(1)} = F_j(y) , \quad (1.1)$$

$$F_j^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_j(y)}{\partial y_i} x_i , \quad (1.2)$$

где x_i определяется из системы $(*)$, $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Теорема 5 *Операция тензорного расширения инвариантна, то есть набор $\{F_j^{(1)}, F_j^{(2)}\}_{j=1,\dots,n}$ не зависит от выбора локальной системы координат для M^{N-k} .*

Доказательство. Поскольку при операции тензорного расширения происходит переобозначение переменных $x \mapsto y$, то будем сразу считать, что $y' = (y'_1(y), \dots, y'_N(y))$ – новые координаты. В этих новых координатах система $(\ast\ast\ast)$ будет иметь вид:

$$(\ast \ast \ast \ast) \left\{ \begin{array}{l} G_1(y'(y)) = 0, \dots, G_k(y'(y)) = 0, \\ (\text{grad } G_1(y'(y)), \xi) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ (\text{grad } G_k(y'(y)), \xi) = 0. \end{array} \right.$$

Кроме того, получаем

$$F_i^{(1)} = F_j(y'(y)) , \quad (1.3)$$

$$F_j^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_j(y'(y))}{\partial y'_i} \xi_i , \quad (1.4)$$

где ξ_i определяется из системы $(****)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$.

Выполним преобразование

$$(\operatorname{grad} G_l(y'(y)), \xi) = ((J^{-1})^T \operatorname{grad} G_l(y), \xi) = (\operatorname{grad} G_l(y), J^{-1}\xi),$$

где $J = (\partial y'_i / \partial y_j)$ — матрица Якоби замены переменных, $1 \leq l \leq k$.

В то же время выражения (1.4) будут выглядеть следующим образом:

$$(\operatorname{grad} F_j^{(2)}(y'(y)), \xi) = ((J^{-1})^T \operatorname{grad} F_j^{(2)}(y), \xi) = (\operatorname{grad} F_j^{(2)}(y), J^{-1}\xi).$$

Сделаем переобозначение $x = J^{-1}\xi$. Получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} G_1(y'(y)) = 0, \dots, G_k(y'(y)) = 0, \\ (\operatorname{grad} G_1(y'(y)), x) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ (\operatorname{grad} G_k(y'(y)), x) = 0, \end{cases}$$

и

$$F_j^{(1)} = F_j(y'(y)),$$

$$F_j^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_j(y)}{\partial y_i} x_i.$$

Сравнивая эти системы с системами $(***)$ и (1.1), (1.2), приходим к утверждению теоремы. Таким образом, теорема доказана.

Глава 2

Бифуркационные диаграммы для систем, получаемых тензорным расширением из классического случая Эйлера.

2.1 Уравнения движения твердого тела как гамильтонова система.

В классической механике хорошо известны уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие движение твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести, которые в векторной форме выглядят так:

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega - Pr \times \nu , \quad (2.1)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega . \quad (2.2)$$

Здесь $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $r = (r_1, r_2, r_3)$; A_i — главные моменты инерции тела, P — вес тела, r_i — проекции вектора с началом в точке закрепления и с концом в центре масс тела на главные оси инерции тела, ν_i — аналогичные проекции единичного вертикального вектора ($i = 1, 2, 3$). Через $a \times b$, как обычно, обозначено векторное произведение в R^3 . В этой системе вектор

$A\dot{\omega}$ имеет смысл кинетического момента твердого тела относительно неподвижной точки.

Уравнения движения твердого тела с фиксированной точкой в произвольном потенциальном силовом поле были получены Лагранжем. Если у этого поля есть ось симметрии, то ее можно считать вертикальной, и уравнения будут иметь следующий вид:

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \nu \times \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad (2.3)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (2.4)$$

где $u(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — потенциальная функция и

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_1}, \frac{\partial u}{\partial \nu_2}, \frac{\partial u}{\partial \nu_3} \right).$$

Наиболее общий вид уравнений, описывающих различные задачи динамики твердого тела, был предъявлен М.П.Харламовым в [6]. Вводя в рассмотрение так называемые гироскопические силы, он получил следующую систему уравнений:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \sigma) \times \omega + \nu \times \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad (2.5)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (2.6)$$

Вектор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — это вектор-функция, компоненты $\sigma_i(\nu)$ которой есть коэффициенты некоторой замкнутой 2-формы на $SO(3)$ (формы гироскопических сил). При этом функция $\sigma(\nu)$ не произвольна, а имеет вид:

$$\sigma = \lambda + (E \operatorname{div} \lambda) \nu, \quad (2.7)$$

где $\lambda(\nu)$ — произвольная вектор-функция, $\Lambda = (\partial \lambda_i / \partial \nu_j)^T$ — транспонированная матрица Якоби, E — единичная 3×3 матрица ($i, j = 1, 2, 3$) и

$$\operatorname{div} \lambda = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \nu_3}.$$

Легко заметить, что система (2.1),(2.2) является частным случаем системы (2.5),(2.6),(2.7).

Важным инструментом для исследования механических систем являются геометрические методы. Как правило, пространство положений такой системы является гладким многообразием M . Это — так называемое конфигурационное пространство механической системы. Гамильтонову механику строят в фазовом пространстве, которое с математической точки зрения совпадает с кокасательным расслоением T^*M к многообразию M . Точкой пространства T^*M является пара (x, ξ) , где x — точка M , ξ — ковектор в точке x . Легко проверить, что T^*M — гладкое $2n$ -мерное многообразие (где $n = \dim M$). Кроме того, на кокасательном расслоении существует естественная симплектическая структура (см., например, [1]).

Так как конфигурационное пространство системы зачастую не только многообразие, но и группа, то существует и несколько иной подход к изучению механических систем. Напомним, что для гладкой функции H на симплектическом многообразии можно построить гамильтоново векторное поле X , которое называется косым градиентом и обозначается символом $X = \text{sgrad } H$. Функция H называется гамильтонианом системы. Пусть G — группа Ли, Θ — ее алгебра Ли, и $\mathcal{O}^*(t)$ — орбита коприсоединенного представления Ad^* группы Ли G , проходящая через точку $t \in \Theta^*$, где Θ^* — пространство, сопряженное с Θ . На каждой орбите $\mathcal{O}^*(t)$ коприсоединенного представления группы G можно определить симплектическую структуру ω . Эта 2-форма называется формой Кириллова. Можно показать (см., например, [18]), что гамильтоновы уравнения $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$ на орбите $\mathcal{O}^*(t)$ относительно формы Кириллова ω имеют вид $\dot{x} = \text{ad}_{dH(x)}^*(x)$. Таким образом, на каждой орбите возникают гамильтоновы уравнения

$$\dot{x} = \text{ad}_{dH(x)}^*(x), \quad x \in \Theta^*, H \in C^\infty(\Theta^*). \quad (2.8)$$

Эту систему на Θ^* называют *уравнениями Эйлера*. Известно, что многие физически интересные задачи приводятся к такому виду. Описание подобных задач, возникающих в механике, а также изложение истории данного вопроса, можно найти, например, в [23]-[28]. В частности, оказывается, что систему уравнений (2.5), (2.6), (2.7) можно представить в виде уравнений Эйлера (2.8) для алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидового пространства. Такие системы гамильтоновы на 4-мерных орбитах коприсоединенного представления, и, как обычно, для полной интегрируемости по Лиувиллю необходимо указать еще

один интеграл (см., например, [29]). В работе [6] показано, что уравнения (2.5), (2.6), (2.7) также гамильтоновы относительно некоторой симплектической структуры на совместных поверхностях уровня геометрического интеграла и интеграла площадей.

Напомним, что группа $E(n)$ движений пространства R^n , отвечающая алгебре Ли $e(n)$, является полупрямым произведением ортогональной группы $O(n)$ и группы $F(n)$ трансляций (параллельных переносов). Группа $F(n)$ — коммутативный нормальный делитель в $E(n)$, изоморфный R^n . Действие $O(n)$ на $F(n)$ — это стандартное представление $O(n)$ в R^n . Алгебра Ли $e(n)$ группы $E(n)$ — это полупрямая сумма $so(n) \oplus R^n$, где $\phi : so(n) \rightarrow End(R^n)$ — дифференциал стандартного представления $O(n)$ в R^n , а R^n рассматривается как коммутативная алгебра Ли. Произвольный элемент из $e(n)$ можно записать в виде $z = x \oplus y$, где $x \in so(n)$, $y \in R^n$. Полный набор инвариантов коприсоединенного представления $Ad^*(E(n))$ приведен, например, в [30]. Нас интересует случай $n = 3$. Имеем алгебру Ли $e(3) = so(3) \oplus R^3$, где алгебра Ли $so(3) = \{e_1, e_2, e_3\}$ реализуется в виде кососимметрических матриц размера 3×3 с коммутатором $[A, B] = AB - BA$, при этом $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1$. Инварианты коприсоединенного представления на $e(3)^*$ выглядят так:

$$f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2, \quad f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3, \quad (2.9)$$

где $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$ — координатные функции на $e(3)^*$ (S_1, S_2, S_3 — отвечают базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, R_1, R_2, R_3 — базису пространства R^3).

Напомним определение скобки Пуассона на симплектическом многообразии (M, ω) . Пусть x^1, \dots, x^n — локальная система координат на (M, ω) , ω_{ij} — координаты формы ω , а ω^{ij} определены из равенства $\omega^{is} \omega_{sj} = \delta_j^i$. Скобкой Пуассона $\{f, g\}$ функций $f, g \in C^\infty(M)$ на симплектическом многообразии (M, ω) называется функция, определенная равенством

$$\{f, g\} = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \quad (2.10)$$

Скобку Пуассона на орбитах коприсоединенного представления можно "склеить" в единую скобку — скобку Пуассона-Ли на всем пространстве Θ^* . Если $f, g \in C^\infty(\Theta^*)$, то достаточно положить по определению

$$\{f, g\}(x) = \{f \mid \mathcal{O}^*(x), g \mid \mathcal{O}^*(x)\}(x). \quad (2.11)$$

Поскольку пространство Θ^* расслаивается на орбиты представления Ad^* , то это определение корректно.

Пусть e^i — базис пространства Θ^* , e_j — базис пространства Θ , что $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). В указанных выше базисах обозначим через x^i координаты в Θ , а через x_j — координаты в Θ^* ($i, j = 1, \dots, n$). И пусть C_{ij}^k — структурный тензор алгебры Ли Θ в вышеуказанном базисе ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$). Тогда скобку (2.10) можно переписать в следующем виде:

$$\{f, g\} = \sum_{k,i,j} C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \quad (2.12)$$

Эта скобка называется *скобкой Березина*. Используя (2.12), можно показать, что скобка Пуассона-Ли в нашем случае имеет вид:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = 0. \quad (2.13)$$

Здесь ε_{ijk} означает знак перестановки индексов (i, j, k) , если все i, j, k различны, и $\varepsilon_{ijk} = 0$, если среди этих индексов есть совпадающие ($i, j, k = 1, 2, 3$).

Таким образом, для произвольных функций на $e(3)^*$ скобка Пуассона определяется по формуле

$$\{f, g\}(x) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} (S_k \frac{\partial f}{\partial S_i} \frac{\partial g}{\partial S_j} + R_k \frac{\partial f}{\partial S_i} \frac{\partial g}{\partial R_j} + R_k \frac{\partial f}{\partial R_i} \frac{\partial g}{\partial S_j}). \quad (2.14)$$

Несложно показать, что гамильтонова система (2.8) на пространстве $e(3)^*$ со скобкой Пуассона-Ли (2.13),(2.14) имеет вид

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad (2.15)$$

$$\dot{R}_i = \{R_i, H\}, \quad (2.16)$$

где H — некоторая функция на $e(3)^*$ (гамильтониан).

Введем трехмерные вектора:

$$S = (S_1, S_2, S_3), R = (R_1, R_2, R_3),$$

$$\frac{\partial H}{\partial S} = \left(\frac{\partial H}{\partial S_1}, \frac{\partial H}{\partial S_2}, \frac{\partial H}{\partial S_3} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial R} = \left(\frac{\partial H}{\partial R_1}, \frac{\partial H}{\partial R_2}, \frac{\partial H}{\partial R_3} \right).$$

Перепишем уравнения (2.15),(2.16) в виде:

$$\dot{S} = \frac{\partial H}{\partial S} \times S + \frac{\partial H}{\partial R} \times R, \quad (2.17)$$

$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial S} \times R. \quad (2.18)$$

Оказывается, мы можем выбрать гамильтониан H таким образом, что система (2.17),(2.18) будет эквивалентна системе уравнений (2.5),(2.6),(2.7). Нетрудно видеть, что отображение $\varphi : R^6(\omega, \nu) \rightarrow R^6(S, R)$, задаваемое формулами

$$S_i = A_i \omega_i + \lambda_i, \quad (2.19)$$

$$R_i = \nu_i, \quad (2.20)$$

где $i = 1, 2, 3$, устанавливает изоморфизм системы (2.5),(2.6),(2.7) и системы (2.17),(2.18) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2A_1}(S_1 + \lambda_1)^2 + \frac{1}{2A_2}(S_2 + \lambda_2)^2 + \frac{1}{2A_3}(S_3 + \lambda_3)^2 + U, \quad (2.21)$$

где параметры A_1, A_2, A_3 и функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, U$ берутся из систем (2.5),(2.6),(2.7), но заданы не на $R^3(\nu)$, а на $R^3(R)$ (см., например, [8]). Заметим, что при указанном изоморфизме интеграты $F = (\nu, \nu)$ и $G = (A\omega + \lambda, \nu)$ переходят в инварианты f_1, f_2 алгебры Ли $e(3)$, а интеграл энергии $E = (A\omega, \omega)/2$ — в гамильтониан (2.21).

Так как скобка (2.13) является вырожденной, то для системы (2.15),(2.16) всегда существуют два функционально независимых интеграла (2.9). Неособые совместные поверхности уровня интегралов (2.9)

$$\{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c, S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g\} \subset R^6(S, R) \quad (2.22)$$

есть симплектические многообразия, гомоморфные TS^2 (касательному расслоению двумерной сферы). Ограничим систему (2.15),(2.16) на некоторую совместную поверхность уровня (2.22). Получаем гамильтонианную систему на четырехмерном симплектическом многообразии. Для ее полной интегрируемости по Лиувиллю необходимо существование двух функционально независимых на TS^2 интегралов (см., например, [22]). Так как гамильтониан, очевидно, всегда является интегралом системы,

то интегрируемость по Лиувиллю системы (2.15),(2.16) означает существование интеграла, функционально независимого с гамильтонианом на этой поверхности уровня. Стоит отметить, что дополнительный интеграл может существовать не на всех поверхностях уровня, а лишь на некоторых из них. Для поверхностей (2.22) можно считать, что $c = 1$, поскольку линейное преобразование $R' = \alpha R, S' = S$ ($\alpha = \text{const}$) сохраняет скобку (2.13).

Системой уравнений (2.15),(2.16) с гамильтонианом (2.21) описываются различные задачи динамики твердого тела и некоторые другие. До некоторого времени все эти задачи рассматривались отдельно, и для каждой из них были найдены интегрируемые случаи, то есть указан дополнительный интеграл. Связи между различными классическими задачами механики, в частности, существование замены координат, приводящей уравнения к эквивалентному виду, отмечались многими авторами (см., например,[27],[31]). Список основных известных интегрируемых случаев для уравнений (2.15),(2.16) с гамильтонианом (2.21), то есть случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева-Чаплыгина, Жуковского, Сretenского, Клебша, Стеклова-Ляпунова с указанием гамильтониана H и дополнительного интеграла K можно найти, например, в [8].

2.2 Тензорное расширение алгебры Ли $e(3)$ для классического случая Эйлера и бифуркационные диаграммы.

Как уже отмечалось, задача Эйлера движения твердого тела вокруг закрепленной в центре масс этого тела точки описывается уравнениями (2.8) для алгебры Ли $\Theta = e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного пространства R^3 . Для удобства введем переобозначения:

$$x_1 = S_1, x_2 = S_2, x_3 = S_3, x_4 = R_1, x_5 = R_2, x_6 = R_3.$$

Тогда инварианты коприсоединенного представления для алгебры Ли $e(3)$ в переменных x_i ($i = 1, \dots, 6$) выглядят следующим образом (см.(2.9)):

$$F_1 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \quad F_2 = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6. \quad (2.23)$$

Гамильтониап H и дополнительный интеграл K будут выглядеть так (см., например, [8]):

$$H = \frac{x_1^2}{2A_1} + \frac{x_2^2}{2A_2} + \frac{x_3^2}{2A_3}, \quad K = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (2.24)$$

Лемма 2 Для $\Omega(\Theta)$ имеем следующий набор инвариантов:

$$F_1^{(1)}(x, y) = y_4^2 + y_5^2 + y_6^2, \quad (2.25)$$

$$F_2^{(1)}(x, y) = y_1y_4 + y_2y_5 + y_3y_6, \quad (2.26)$$

$$F_1^{(2)}(x, y) = 2(y_4x_4 + y_5x_5 + y_6x_6), \quad (2.27)$$

$$F_2^{(2)}(x, y) = y_1x_4 + y_2x_5 + y_3x_6 + x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6, \quad (2.28)$$

и интегралов:

$$K_1(x, y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad (2.29)$$

$$H_1(x, y) = \frac{y_1^2}{2A_1} + \frac{y_2^2}{2A_2} + \frac{y_3^2}{2A_3}, \quad (2.30)$$

$$K_2(x, y) = 2(y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3), \quad (2.31)$$

$$H_2(x, y) = \frac{y_1x_1}{A_1} + \frac{y_2x_2}{A_2} + \frac{y_3x_3}{A_3}. \quad (2.32)$$

Доказательство. Инварианты коприсоединенного представления для алгебры Ли Θ мы знаем. Следовательно, теперь мы можем найти соответствующие инварианты для тензорного расширения $\Omega(\Theta)$, если воспользуемся алгоритмом (t) , см.стр. 17. Применяя этот алгоритм к инвариантам алгебры Ли Θ , гамильтониану H и дополнительному интегралу K , приходим к утверждению леммы.

Нашей задачей будет рассмотрение отображения $\Phi : M^8 \rightarrow R^4$, где $\Phi = (K_1, H_1, K_2, H_2)$ — отображение момента, $M^8 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}^*(\Omega(\Theta))$ — орбита (общего положения) коприсоединенного представления в $\Omega(\Theta)^*$.

Предложение 1 Множество M^8 является гладким некомпактным многообразием, диффеоморфным $T(TS^2)$.

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из леммы 1. Предложение доказано.

Можно считать, что орбита в R^{12} задается следующей системой (где a, b — вещественные константы, $g \neq 0$):

$$\begin{cases} y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1, \\ y_1y_4 + y_2y_5 + y_3y_6 = g, \\ y_4x_4 + y_5x_5 + y_6x_6 = a, \\ y_1x_4 + y_2x_5 + y_3x_6 + x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 = b. \end{cases}$$

Теорема 6 Множество особенностей S для отображения момента $\Phi = (K_1, H_1, K_2, H_2)$ есть объединение четырех множеств $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, каждое из которых гомеоморфно $S^2 \times R^4$, где S_i ($i = 1, \dots, 4$) определяются следующими условиями:

- a) $y_1 = y_2 = 0$ (для множества S_1),
- б) $y_1 = y_3 = 0$ (для множества S_2),
- в) $y_2 = y_3 = 0$ (для множества S_3),
- г) $y_1 = gy_4, y_2 = gy_5, y_3 = gy_6$ (для множества S_4).

Доказательство. Для нахождения множества особенностей S отображения момента нужно исследовать следующую систему из девяти уравнений:

$$y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1, \quad (2.33)$$

$$y_1y_4 + y_2y_5 + y_3y_6 = g, \quad (2.34)$$

$$y_4x_4 + y_5x_5 + y_6x_6 = a, \quad (2.35)$$

$$y_1x_4 + y_2x_5 + y_3x_6 + x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 = b, \quad (2.36)$$

$$y_4dy_4 + y_5dy_5 + y_6dy_6 = 0, \quad (2.37)$$

$$y_4dy_1 + y_5dy_2 + y_6dy_3 + y_1dy_4 + y_2dy_5 + y_3dy_6 = 0, \quad (2.38)$$

$$y_4dx_4 + y_5dx_5 + y_6dx_6 + x_4dy_4 + x_5dy_5 + x_6dy_6 = 0, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & y_4dx_1 + y_5dx_2 + y_6dx_3 + y_1dx_4 + y_2dx_5 + y_3dx_6 + \\ & + x_4dy_1 + x_5dy_2 + x_6dy_3 + x_1dy_4 + x_2dy_5 + x_3dy_6 = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$p\left(\frac{y_1}{A_1}dy_1 + \frac{y_2}{A_2}dy_2 + \frac{y_3}{A_3}dy_3\right) + q(y_1dy_1 + y_2dy_2 + y_3dy_3) +$$

$$+r\left(\frac{y_1}{A_1}dx_1 + \frac{y_2}{A_2}dx_2 + \frac{y_3}{A_3}dx_3 + \frac{x_1}{A_1}dy_1 + \frac{x_2}{A_2}dy_2 + \frac{x_3}{A_3}dy_3\right) + \\ + t(y_1dx_1 + y_2dx_2 + y_3dx_3 + x_1dy_1 + x_2dy_2 + x_3dy_3) = 0. \quad (2.41)$$

Здесь первые четыре уравнения (2.33)–(2.36) описывают орбиту, следующие четыре (2.37)–(2.40) — получаются взятием дифференциала от обеих частей уравнений, задающих орбиту, а последнее уравнение (2.41) задает условие зависимости функций K_1, H_1, K_2, H_2 (p, q, r, t — некоторые вещественные константы, не равные нулю одновременно) — см. лемму 2. Условие (2.41) означает линейную зависимость четырех дифференциальных 1-форм, на которые умножаются константы p, q, r, t соответственно. Нетрудно видеть, что это эквивалентно линейной зависимости первых двух дифференциальных форм, таким образом, либо выполняется одно из условий а), б) или в), либо

$$y_1dy_1 + y_2dy_2 + y_3dy_3 = 0, \quad (2.42)$$

при этом все y_i ($i = 1, 2, 3$) не равны одновременно нулю. Несложно понять, что осталось исследовать систему уравнений (2.37), (2.38), (2.42). Получаем условие $y_1 = \lambda y_4, y_2 = \lambda y_5, y_3 = \lambda y_6$, где λ — некоторый коэффициент, который находится из уравнений (2.33), (2.34): $\lambda = g$. Исследование системы (2.33)–(2.36) при ограничениях а), б), в) и г) завершает доказательство теоремы.

Чтобы сформулировать следующую теорему, введем обозначения для некоторых подмножеств из $R^4 = k_1 \times h_1 \times k_2 \times h_2$ (где k_1, h_1, k_2, h_2 — оси координат, отвечающие отображениям K_1, H_1, K_2, H_2 соответственно, см. рис. 1 на стр. 33).

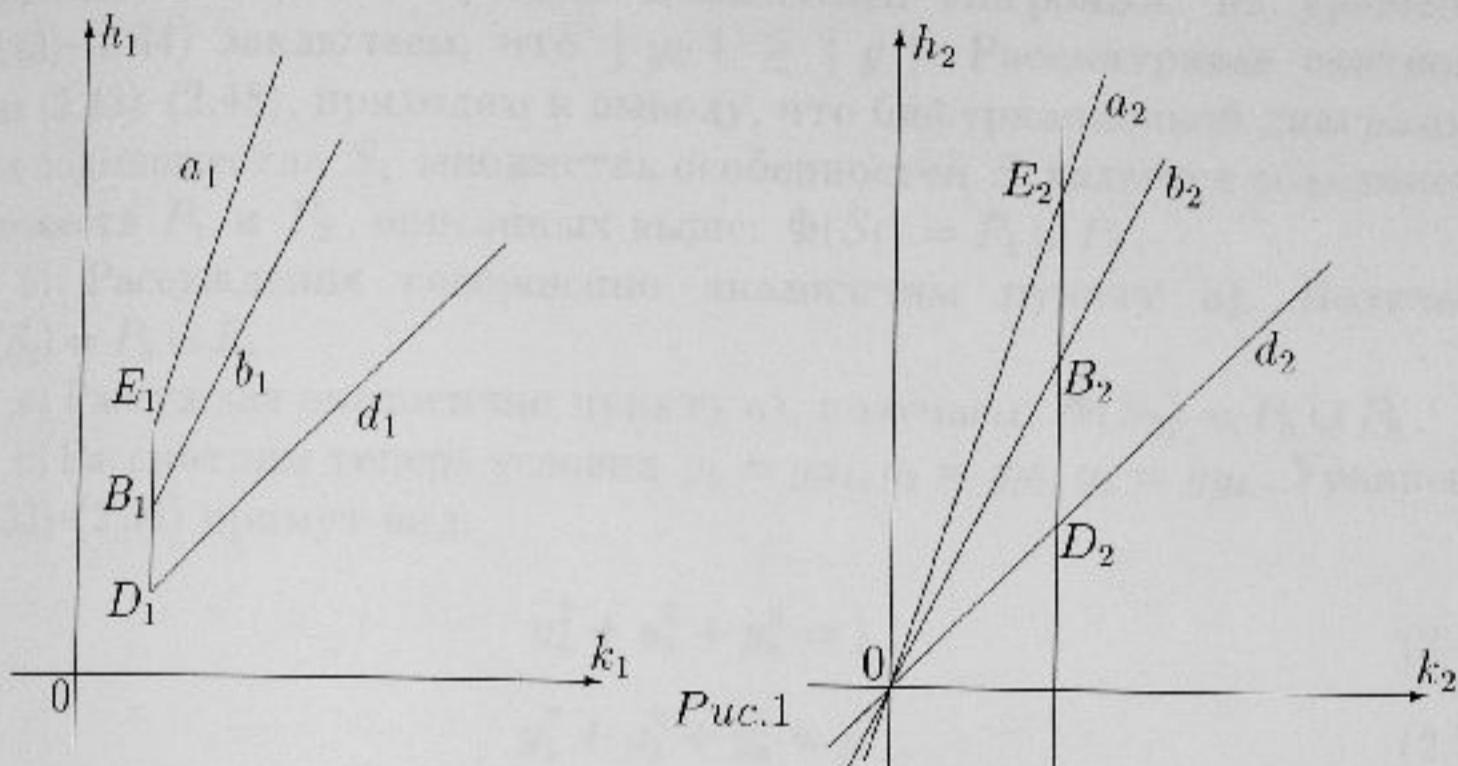
- 1) $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} d_1 \times d_2$ — прямое произведение интервала $d_1 = \{h_1 = k_1/(2A_3), k_1 > g^2\}$ на прямую $d_2 = \{h_2 = k_2/(2A_3)\}$.
- 2) $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} (D_1, D_2)$ — точка, где $D_1 \in k_1 \times h_1, D_2 \in k_2 \times h_2$, причем $D_1 = (g^2, g^2/(2A_3)), D_2 = (2c, c/A_3)$, $c \stackrel{\text{def}}{=} (b - ag)g$.
- 3) $P_3 \stackrel{\text{def}}{=} b_1 \times b_2$ — прямое произведение интервала $b_1 = \{h_1 = k_1/(2A_2), k_1 > g^2\}$ на прямую $b_2 = \{h_2 = k_2/(2A_2)\}$.
- 4) $P_4 \stackrel{\text{def}}{=} (B_1, B_2)$ — точка, где $B_1 \in k_1 \times h_1, B_2 \in k_2 \times h_2$, с координатами $B_1 = (g^2, g^2/(2A_2)), B_2 = (2c, c/A_2)$.

5) $P_5 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \times a_2$ — прямое произведение интервала $a_1 = \{h_1 = k_1/(2A_1), k_1 > g^2\}$ на прямую $a_2 = \{h_2 = k_2/(2A_1)\}$.

6) $P_6 \stackrel{\text{def}}{=} (E_1, E_2)$ — точка, где $E_1 \in k_1 \times h_1, E_2 \in k_2 \times h_2$, при этом $E_1 = (g^2, g^2/(2A_1)), E_2 = (2c, c/A_1)$.

7) $P_7 \stackrel{\text{def}}{=} (E_1 D_1 \setminus B_1) \times E_2 D_2$ — прямое произведение интервала $E_1 D_1$ без точки B_1 на прямую $E_2 D_2$.

8) $P_8 \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \times (E_2 D_2 \setminus B_2)$ — прямое произведение точки B_1 на прямую $E_2 D_2$ без точки B_2 .



Теорема 7 Бифуркационной диаграммой для отображения момента (2.29)–(2.32) является множество

$$\Sigma = \Phi(S) = \bigcup_{j=1}^8 P_j,$$

где P_j ($j = 1, \dots, 8$) описаны выше.

Доказательство.

а) Рассмотрим условие $y_1 = y_2 = 0$. Уравнения (2.33)–(2.36) перепишутся так:

$$y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1, \quad (2.43)$$

$$y_3 y_6 = g, \quad (2.44)$$

$$y_4x_4 + y_5x_5 + y_6x_6 = a, \quad (2.45)$$

$$y_3x_6 + x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 = b. \quad (2.46)$$

При этом интегралы примут следующий вид:

$$K_1(x, y) = y_3^2, H_1(x, y) = \frac{y_3^2}{2A_3}. \quad (2.47)$$

$$K_2(x, y) = 2y_3x_3, H_2(x, y) = \frac{y_3x_3}{A_3}. \quad (2.48)$$

Применяя известное правило множителей Лагранжа, из уравнений (2.43)–(2.44) заключаем, что $|y_3| \geq |g|$. Рассматривая соотношения (2.43)–(2.48), приходим к выводу, что бифуркационной диаграммой для подмножества S_1 множества особенностей S является объединение множеств P_1 и P_2 , описанных выше: $\Phi(S_1) = P_1 \cup P_2$.

б) Рассуждения совершенно аналогичны пункту а). Получаем: $\Phi(S_2) = P_3 \cup P_4$.

в) Рассуждая аналогично пункту а), получаем: $\Phi(S_3) = P_5 \cup P_6$.

г) Рассмотрим теперь условия $y_1 = gy_4, y_2 = gy_5, y_3 = gy_6$. Уравнения (2.33)–(2.36) примут вид:

$$y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1, \quad (2.49)$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = g^2, \quad (2.50)$$

$$y_1x_4 + y_2x_5 + y_3x_6 = ag, \quad (2.51)$$

$$y_1(x_1/g + x_4) + y_2(x_2/g + x_5) + y_3(x_3/g + x_6) = b. \quad (2.52)$$

Интегралы будут выглядеть следующим образом:

$$K_1(x, y) = g^2, H_1(x, y) = \frac{y_1^2}{2A_1} + \frac{y_2^2}{2A_2} + \frac{y_3^2}{2A_3},$$

$$K_2(x, y) = 2(y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3), H_2(x, y) = \frac{y_1x_1}{A_1} + \frac{y_2x_2}{A_2} + \frac{y_3x_3}{A_3}.$$

Исследуя систему (2.49)–(2.52), приходим к выводу, что образ $\Phi(S_4)$ выглядит так:

$$\Phi(S_4) = \left(g^2, \frac{y_1^2}{2A_1} + \frac{y_2^2}{2A_2} + \frac{y_3^2}{2A_3}, 2c, \frac{y_1x_1}{A_1} + \frac{y_2x_2}{A_2} + \frac{y_3x_3}{A_3}\right) \quad (2.53)$$

при условиях

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = g^2, \quad (2.54)$$

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = c. \quad (2.55)$$

Применяя правило множителей Лагранжа и исследуя выражения (2.53)–(2.55), получаем, что $\Phi(S_4) = P_2 \cup P_4 \cup P_6 \cup P_7 \cup P_8$. Это и завершает доказательство теоремы.

Обозначим через V открытую область в $R^2 = k_1 \times h_1$, которая ограничена отрезком $E_1 D_1$ и интервалами a_1, d_1 , обозначим через \bar{V} замыкание области V , а через $\partial\bar{V}$ – границу \bar{V} .

Теорема 8 *Образ отображения момента Φ есть объединение прямого произведения области V на $R^2 = k_2 \times h_2$ с бифуркационной диаграммой:*

$$\Phi(M^8) = \{V \times R^2\} \cup \Sigma.$$

Доказательство. Для доказательства надо исследовать выражения (2.29)–(2.32) при ограничениях (2.33)–(2.36). Применяя правило множителей Лагранжа, заключаем, что $\{(K_1(x), H_1(x)) \mid x \in M^8\} = V$, а также, что $\{(K_2(x), H_2(x)) \mid x \in M^8, (K_1(x), H_1(x)) \notin \partial\bar{V}\} = k_2 \times h_2$. При этом для любой точки $(z_1, z_2) \in \{\bar{V} \setminus \partial\bar{V}\}$ и для любой точки $(z_3, z_4) \in k_2 \times h_2$ существует точка $x \in M^8$, что $\Phi(x) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. На основании вышесказанного, а также теоремы 7, приходим к выводу, что $\Phi(M^8) = \{V \times R^2\} \cup \Sigma$. Следовательно, теорема доказана.

Прежде, чем приступить к следующей теореме, опишем еще несколько подмножеств из $R^4 = k_1 \times h_1 \times k_2 \times h_2$ (интервалы $a_1, a_2, b_1, b_2, E_1 D_1$, а также прямая $E_2 D_2$ были описаны выше в пунктах 1)-8), см.стр.32).

- 9) $P_9 \stackrel{\text{def}}{=} b_1 \times (R^2 \setminus b_2); \quad 10) \quad P_{10} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \times (R^2 \setminus a_2);$
- 11) $P_{11} \stackrel{\text{def}}{=} d_1 \times (R^2 \setminus d_2); \quad 12) \quad P_{12} \stackrel{\text{def}}{=} (E_1 D_1 \setminus B_1) \times R^2;$
- 13) $P_{13} \stackrel{\text{def}}{=} E_1 \times (a_2 \setminus E_2); \quad 14) \quad P_{14} \stackrel{\text{def}}{=} E_1 \times (E_2 D_2 \setminus E_2);$
- 15) $P_{15} \stackrel{\text{def}}{=} E_1 \times (R^2 \setminus \{a_2 \cup E_2 D_2\}); \quad 16) \quad P_{16} \stackrel{\text{def}}{=} D_1 \times (d_2 \setminus D_2);$
- 17) $P_{17} \stackrel{\text{def}}{=} D_1 \times (E_2 D_2 \setminus D_2); \quad 18) \quad P_{18} \stackrel{\text{def}}{=} D_1 \times (R^2 \setminus \{d_2 \cup E_2 D_2\});$
- 19) $P_{19} \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \times (b_2 \setminus B_2); \quad 20) \quad P_{20} \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \times (R^2 \setminus \{b_2 \cup E_2 D_2\}).$

Теорема 9 Бифуркационная диаграмма в широком смысле $\hat{\Sigma}$ включает в себя, помимо множества Σ , еще и множество $\bigcup_{i=9}^{20} P_i$, таким образом,

$$\hat{\Sigma} = \left(\bigcup_{i=9}^{20} P_i \right) \cup \Sigma ,$$

при этом множество $P_3 \cup P_9$ представляет собой трехмерную стенку, разделяющую образ отображения момента на две камеры, каждая из которых гомеоморфна четырехмерному диску, а подмножество P_j , где $j = 10, \dots, 20$, принадлежат границе образа отображения момента.

Доказательство. В нашем случае, как несложно видеть, граничные точки образа отображения момента не всегда лежат в $\Phi(M^8)$. Учитывая это, а также воспользовавшись определением бифуркационной диаграммы в широком смысле (см.стр.18), устанавливаем, что множества P_j , где $j = 10, \dots, 20$ принадлежат $\hat{\Sigma}$. Далее, исследуя выражения (2.29)–(2.32) при ограничениях (2.33)–(2.36), а также замечая, что в прообразе точек из $\Phi(M^8)$, соответствующему интервалу b_1 , лежат не только критические точки, т.е. не только те точки, для которых выполняется условие $y_1 = y_3 = 0$, обнаруживаем трехмерную стенку $P_3 \cup P_9$. Теорема доказана.

2.3 Перестройки инвариантных лагранжевых подмногообразий.

Рассмотрим для начала систему с одной степенью свободы на $so(3)^*$ с координатами (x_1, x_2, x_3) , где орбита задается уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 , \quad (2.56)$$

т.е. представляет собой двумерную сферу, а гамильтониан —

$$H = x_1^2/(2A_1) + x_2^2/(2A_2) + x_3^2/(2A_3) , \text{ где } 0 < A_1 < A_2 < A_3 . \quad (2.57)$$

Бифуркационная диаграмма здесь, как нетрудно видеть, представляет собой три точки D, B, E на числовой прямой с координатами $1/(2A_3), 1/(2A_2), 1/(2A_1)$ соответственно. Образ отображения $H(x)$ —

отрезок DE , $H^{-1}(B) = c_1$, где c_1 — по определению — пара окружностей, пересекающихся по двум точкам. Прообраз $H^{-1}(z)$ точки $z \in (DE \setminus B)$ — пара непересекающихся окружностей, а каждый из прообразов $H^{-1}(D)$ и $H^{-1}(E)$ представляет собой пару точек.

Рассмотрим перестройки связных компонент прообразов. Известно (см., например, [45],[46]), что особенности, отвечающие точкам D, E и B , соответственно в локальных канонических координатах (p, q) в окрестности особой точки $(0, 0)$ можно записать так:

$$f_D = f_E = p^2 + q^2 \text{ ("центр", обозначим ее "A")}, \quad (2.58)$$

$$f_B = p^2 - q^2 \text{ ("седло", обозначим ее "B")}. \quad (2.59)$$

Произведем тензорное расширение системы (2.56),(2.57) на $so(3)^*$ посредством фактор кольца $R[x]/(x^2)$. Получим $\Omega(so(3)) \simeq e(3)$ со следующей системой на $\Omega(so(3))^*$:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = k_1^0, \quad y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = k_2^0. \quad (2.60)$$

$$H_1 = \frac{y_1^2}{2A_1} + \frac{y_2^2}{2A_2} + \frac{y_3^2}{2A_3}, \quad H_2 = \frac{y_1x_1}{A_1} + \frac{y_2x_2}{A_2} + \frac{y_3x_3}{A_3}, \quad (2.61)$$

где k_1^0, k_2^0 — некоторые фиксированные константы, $k_1^0 > 0$. Здесь уравнения (2.60) для инвариантов коприсоединенного представления определяют орбиту (обозначим ее через M^4), диффеоморфную касательному расслоению двумерной сферы, H_1, H_2 — интегралы, находящиеся в инволюции относительно скобки Пуассона-Ли для $\Omega(so(3))^*$.

Рассмотрим отображение момента $H = (H_1, H_2)$. Будем считать, что уравнения (2.60),(2.61) записаны для пространства R^6 с координатами $(y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, x_3)$. Как и ранее, будем обозначать через R_1^3 подпространство R^6 , соответствующее координатам (y_1, y_2, y_3) , а через R_3^3 — соответствующее координатам (x_1, x_2, x_3) . Пусть C — некоторая точка из образа отображения момента, но не принадлежащая бифуркационной диаграмме см. рис.2 на стр.38 (смысл надписей $\mathcal{T}(S^1), \mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A)', \mathcal{T}(B), \mathcal{T}(B)'$ будет прояснен ниже, см.стр. 39,40,42).

Теорема 10 *Бифуркационной диаграммой в осях h_1, h_2 , соответствующих отображениям H_1, H_2 , для системы (2.60),(2.61) является объединение следующих множеств (см.рис.2 на стр.38): прямой b , задаваемой уравнением $h_1 = \frac{k_1^0}{2A_2}$, точки $E(\frac{k_1^0}{2A_1}, \frac{k_2^0}{2A_1})$ и точки $D(\frac{k_1^0}{2A_3}, \frac{k_2^0}{2A_3})$.*

Образом отображения момента H служит объединение открытой полосы $\frac{k_1^0}{2A_3} < h_1 < \frac{k_2^0}{2A_1}$ с двумя точками: E и D . При этом бифуркационной диаграммой в узком смысле является множество, состоящее из трех точек: E, D и $B\left(\frac{k_1^0}{2A_2}, \frac{k_2^0}{2A_2}\right)$. Кроме того:

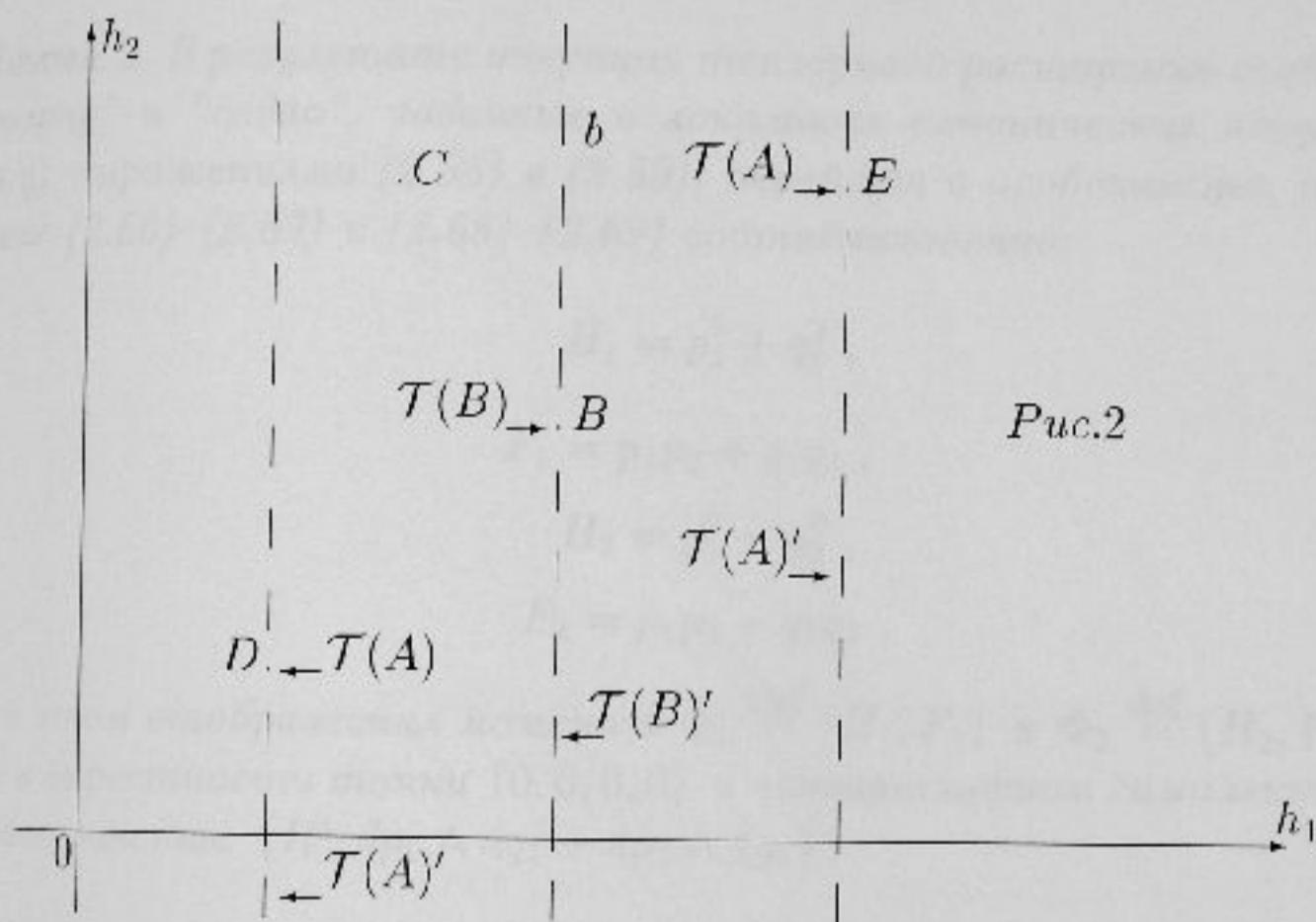
$H^{-1}(D) = (F_1 \times R^2) \cup (F_2 \times R^2)$, где получены $F_1, F_2 \in R^3_1; R^2 \subset R^3_2$.

$H^{-1}(B) = (c_1 \setminus \{F_5 \cup F_6\}) \times R^1 \cup (F_5 \times R^2) \cup (F_6 \times R^2)$, где точки $F_5, F_6 \in R_1^3; R^2 \subset R_3^3; R^1 \subset R_3^3$;

$$H^{-1}(E) = (F_{11} \times R^2) \cup (F_{12} \times R^2), \text{ где } F_{11}, F_{12} \in R_1^3; R^2 \subset R_2^3;$$

$$H^{-1}(z) = (c_1 \setminus \{F_5 \cup F_6\}) \times R^1, \text{ edge } z \in (b \setminus B)$$

$$H^{-1}(C) = (S^1 \times R^1) \cup (S^1 \times R^1), \text{ where } S^1 \in R_1^3; R^1 \subset R_3^3.$$



Доказательство. Для нахождения множества критических точек рассмотрим систему:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = k_1^0, \quad y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = k_2^0, \quad (2.62)$$

$$y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3 = 0 , \quad (2.63)$$

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 + x_3 dy_3 + y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3 = 0 \ , \quad (2.64)$$

$$p\left(\frac{y_1}{A_1}dy_1 + \frac{y_2}{A_2}dy_2 + \frac{y_3}{A_3}dy_3\right) +$$

$$+ q \left(\frac{y_1}{A_1} dx_1 + \frac{y_2}{A_2} dx_2 + \frac{y_3}{A_3} dx_3 + \frac{x_1}{A_1} dy_1 + \frac{x_2}{A_2} dy_2 + \frac{x_3}{A_3} dy_3 \right) = 0 . \quad (2.65)$$

Здесь p, q — коэффициенты, которые не должны равняться нулю одновременно. Исследуя систему (2.62)–(2.65), получаем, что критические точки задаются условиями: $y_1 = y_2 = 0$, или $y_1 = y_3 = 0$, или $y_2 = y_3 = 0$. Эти три условия дают в образе отображения момента точки E, B и D соответственно, определяя бифуркационную диаграмму в узком смысле. То, что связная компонента прообраза точки общего положения, — окружность, — перейдет в результате операции тензорного расширения в цилиндр, обозначим его $T(S^1)$, следует из теоремы 4 на стр. 20. Далее, будем перемещать точку $z = (z_1, z_2)$ по плоскости $h_1 \times h_2$. Исследование $H^{-1}(z)$ завершает доказательство теоремы.

Лемма 3 В результате операции тензорного расширения особенности "центр" и "седло", заданные в локальных канонических координатах (p, q) выражениями (2.58) и (2.59), перейдут в особенности, определяемые (2.66)–(2.67) и (2.68) (2.69) соответственно:

$$H_1 = p_1^2 + q_2^2 , \quad (2.66)$$

$$F_1 = p_1 p_2 + q_1 q_2 , \quad (2.67)$$

$$H_2 = p_1^2 - q_2^2 , \quad (2.68)$$

$$F_2 = p_1 p_2 - q_1 q_2 , \quad (2.69)$$

при этом отображения момента $\Phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} (H_1, F_1)$ и $\Phi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (H_2, F_2)$ заданы в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$ в четырехмерном симплектическом пространстве $\{R^4, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2\}$.

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 3 и теоремы 5. Лемма доказана.

1°. Рассмотрим отображение момента (2.66) (2.67). Построим бифуркационную диаграмму для Φ_1 .

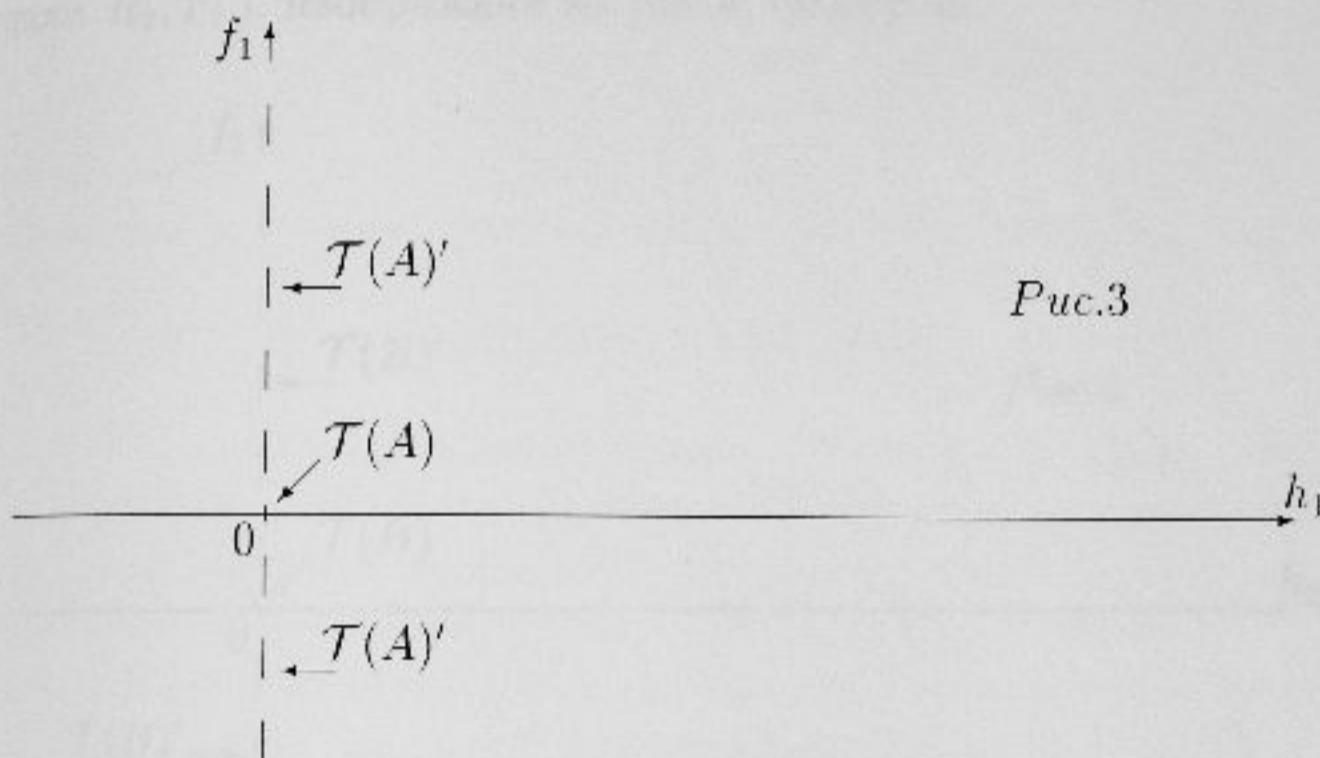
Предложение 2 Образ отображения момента Φ_1 в осях h_1, f_1 , отвечающих H_1, F_1 , правая полуплоскость $h_1 > 0$, объединенная с

критическим значением — началом координат (см.рис.3 на с.40). Бифуркационные диаграммы в узком и широком смысле соответственно:

$$\Sigma = (0, 0) \quad , \quad \hat{\Sigma} = \{h_1 = 0\} \quad . \quad (2.70)$$

Для любой точки z из полуплоскости $h_1 > 0$ прообраз $\Phi^{-1}(z)$ представляет собой цилиндр в R^4 и $\Phi^{-1}(0, 0) = R^2$.

Доказательство. Доказательство не вызывает большого труда и проходит по схеме теоремы 10. Предложение доказано.



Видим, что перестройке A при тензорном расширении соответствуют две перестройки, обозначим их $\mathcal{T}(A)$ и $\mathcal{T}(A)'$ (см.рис.2 и рис.3), причем $\mathcal{T}(A)$ описывается системой (2.66), (2.67), а $\mathcal{T}(A)'$ соответствует $\{h_1 = 0, f_1 \neq 0\}$. Перестройка $\mathcal{T}(A)$ в терминах уравнений выглядит так :

$$\begin{cases} p_1^2 + q_2^2 = \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0, \\ p_1 p_2 + q_1 q_2 = \delta, \text{ где } \delta \rightarrow 0. \end{cases}$$

Таким образом, окружность (основание цилиндра) стягивается в точку, а образующие перестраиваются в плоскость (см.также предыдущую теорему):

$$S^1 \times R^1 \rightarrow R^2.$$

Перестройку $\mathcal{T}(A)'$ можно описать следующим образом: имеем вначале цилиндр $\mathcal{T}(S^1)$ в R^4 (каждая точка окружности прямо умножена на касательную к окружности в этой точке), затем окружность сгиги-вается на свой "выколотый" центр, таким образом, цилиндр исчезает. В терминах уравнений $\mathcal{T}(A)'$ можно изобразить так:

$$\begin{cases} p_1^2 + q_2^2 = \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0, \\ p_1 p_2 + q_1 q_2 = \delta, \text{ где } \delta \rightarrow c, c \neq 0. \end{cases}$$

2⁰. Рассмотрение (2.68),(2.69) совершенно аналогично пункту 1⁰. Бифуркационная диаграмма (в осах h_2, f_2 , соответствующих отображениям H_2, F_2), изображена на рис.4, см.стр.41.

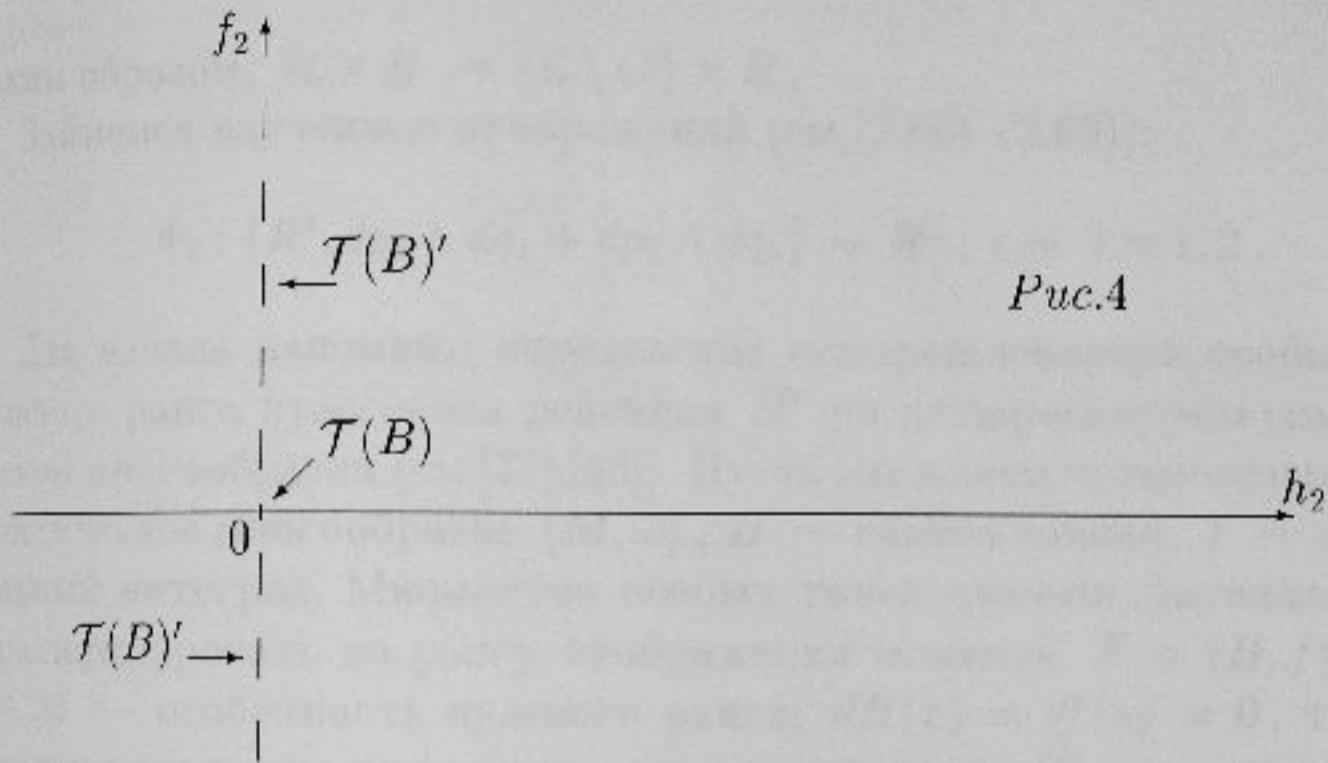


Рис.4

Образ отображения момента Φ_2 — вся плоскость, $(0,0)$ — критическое значение,

$$\Sigma = (0,0) , \quad \hat{\Sigma} = \{h_2 = 0\} . \quad (2.71)$$

Обозначим через \mathcal{H} гиперболу $p_1^2 - q_2^2 = h_2$, через \mathcal{L} — пару пересекающихся прямых $p_1^2 - q_2^2 = 0$, а через O — точку $p_1 = 0, q_2 = 0$ в $R^2 = (p_1, q_2)$. Нетрудно видеть, что

$$\Phi^{-1}(z) = \mathcal{H} \times R \text{ для } z \in \{h_2 \neq 0, f_2 \in R\} ,$$

$$\Phi^{-1}(z) = \{\mathcal{L} \setminus O\} \times R \text{ для } z \in \{h_2 = 0, f_2 \neq 0\} ,$$

$$\Phi^{-1}(z) = \{\{\mathcal{L} \setminus O\} \times R\} \cup \{O \times R^2\} \text{ для } z = (0,0) .$$

Таким образом, видим, что перестройке B , отвечающей (2.59), при тензорном расширении соответствуют две перестройки, которые обозначим $\mathcal{T}(B)$ и $\mathcal{T}(B)'$ (см.рис.2 и рис.4). Перестройку $\mathcal{T}(B)$ в терминах уравнений можно описать так:

$$\begin{cases} p_1^2 - q_2^2 = \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0, \\ p_1 p_2 - q_1 q_2 = \delta, \text{ где } \delta \rightarrow 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\mathcal{H} \times R \rightarrow \{(\mathcal{L} \setminus O) \times R\} \cup \{O \times R^2\}$ (ветви гиперболы "ложатся" па лучи \mathcal{L}). Перестройку $\mathcal{T}(B)'$ можно описать так:

$$\begin{cases} p_1^2 - q_2^2 = \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0, \\ p_1 p_2 - q_1 q_2 = \delta, \text{ где } \delta \rightarrow c, c \neq 0, \end{cases}$$

таким образом, $\mathcal{H} \times R \rightarrow \{\mathcal{L} \setminus O\} \times R$.

Займемся изучением отображений (см.(2.66)–(2.69)):

$$\Phi_i : \{R^4, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2\} \rightarrow R^2, \text{ где } i = 1, 2.$$

Для начала напомним определение невырожденности особых точек нулевого ранга пуассонова действия R^2 на четырехмерном симплектическом многообразии (см.[32],[43]). Пусть мы имеем четырехмерное симплектическое многообразие (M, ω) , H — гамильтониан, f — дополнительный интеграл. Множество особых точек слоения Лиувилля можно стратифицировать по рангу отображения момента $\mathcal{F} = (H, f)$. Пусть $x \in M$ — особенность нулевого ранга: $dH(x) = df(x) = 0$, т.е. x — неподвижная точка пуассонова действия группы R^2 , тогда эта группа естественно действует на касательной плоскости $T_x M$ к многообразию M в точке x . Так как группа сохраняет 2-форму ω , то она индуцирует симплектические преобразования в $T_x M$. Получаем некоторую абелеву подгруппу $C(H, f)$ в группе $Sp(2, R)$ симплектических преобразований в $T_x M$. Через $K(H, f)$ обозначим ее алгебру Ли. Она является некоторой коммутативной подалгеброй в алгебре Ли $sp(2, R)$ группы $Sp(2, R)$.

Определение 4 Точка x называется "невырожденной" для отображения момента \mathcal{F} , если подалгебра $K(H, f)$ является подалгеброй Картана в $sp(2, R)$. В противном случае точка x называется "вырожденной" для отображения момента \mathcal{F} .

Нетрудно видеть, что точка $(0, 0, 0, 0)$ является особенностью нулевого ранга для отображений момента Φ_1 и Φ_2 . Известно (см.[43],[44], а также приложение 6 книги [24]), что существует 15 различных типов нормальных форм для интеграла H . Эти типы различаются собственными значениями и жордановой формой матрицы ΩA , где

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

A — симметрическая 4×4 матрица квадратичной части гамильтонана. Таблица, в которую сведены эти типы, приведена в конце работы [3]. Забегая вперед, скажем, что нас будет прежде всего интересовать тип номер 14, который характеризуется тем, что жорданова нормальная форма матрицы ΩA имеет следующий вид:

$$J_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот тип можно разделить на два подтипа (см. таблицу в конце [43], а также приложение 6 в [24]) нормальных форм интегралов H , не переводимых друг в друга вещественным симплектическим преобразованием:

$$14\text{-a}) H = \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 ; \quad (2.72)$$

$$14\text{-b}) H = \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 . \quad (2.73)$$

Обозначим через $\hat{H}_1, \hat{F}_1, \hat{H}_2, \hat{F}_2$ матрицы квадратичных форм H, F_1, H_2, F_2 соответственно, будем рассматривать $\Omega \hat{H}_1, \Omega \hat{F}_1, \Omega \hat{H}_2, \Omega \hat{F}_2$ в алгебре Ли $sp(2, R)$. Имеем:

$$\Omega \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega \hat{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega \hat{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega \hat{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно рассмотреть две двумерные подалгебры в $\mathfrak{sp}(2, R)$:

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\Omega\hat{H}_1 + \beta\Omega\hat{F}_1 , \quad (2.74)$$

$$A_2 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma\Omega\hat{H}_2 + \delta\Omega\hat{F}_2 , \quad (2.75)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные вещественные константы.

Теорема 11 Особенности (2.66)-(2.67) и (2.68)-(2.69) — вырожденные и относятся к типам 14-а) и 14-б) соответственно. Матрицы A_1 и A_2 подобны над R тогда и только тогда, когда $\beta^2 + \delta^2 = 0$. Таким образом, двумерные подалгебры A_1 и A_2 не являются подалгебрами Картана и не сопряжены.

Доказательство. Приводя элементарными преобразованиями характеристические λ -матрицы $\lambda E - \Omega\hat{H}_1$, $\lambda E - \Omega\hat{H}_2$, $\lambda E - J_2$ к канонической диагональной форме, видим, что у всех этих матриц каноническая диагональная форма одна и та же:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} .$$

Следовательно, собственные значения $\Omega\hat{H}_1$, $\Omega\hat{H}_2$ равны нулю, и эти матрицы подобны жордановой 4×4 матрице J_2 с двумя двумерными ядрами. Далее, симплектической заменой базиса

$$\hat{p}_1 = -q_1, \hat{p}_2 = p_2, \hat{q}_1 = p_1, \hat{q}_2 = q_2$$

Хамильтонианы H_1 и H_2 одновременно приводятся к виду (2.72) и (2.73) соответственно. Воспользовавшись таблицей, приведенной в конце работы [43], убеждаемся, что рассматриваемые особенности относятся к типам 14-а) и 14-б) соответственно. Из той же таблицы следует, что эти особенности — вырожденные. Рассмотрим теперь A_1 и A_2 . Для начала предположим, что все коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ отличны от нуля. Приведем $\lambda E - A_1$ и $\lambda E - A_2$ к канонической диагональной форме. Опуская

ыкладки, выпишем:

$$\lambda E - A_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2 + \beta^2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda E - A_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2 - \delta^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получается, что если $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, то A_1 и A_2 не сопряжены. Рассмотрим теперь $\lambda E - A_1$ при условии $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Опуская выкладки, запишем:

$$\lambda E - A_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Если же $\gamma = 0, \delta \neq 0$, то в итоге получаем:

$$\lambda E - A_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, A_1 и A_2 сопряжены тогда и только тогда, когда одновременно $\beta = 0$ и $\delta = 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 5 Непрерывное отображение $F : R^n \rightarrow R^k$ имеет "прямого произведения", если F топологически эквивалентно (с.стр.16) некоторому непрерывному отображению G :

$$G = f_1 \times \dots \times f_l : R^{n_1} \oplus \dots \oplus R^{n_l} \longrightarrow R^{k_1} \oplus \dots \oplus R^{k_l}, \text{ где}$$

$$f_i : R^{n_i} \rightarrow R^{k_i}, \sum_{i=1}^l n_i = n, \sum_{i=1}^l k_i = k, i = 1, \dots, l.$$

Напомним, что в классическом случае Эйлера мы имели систему на (3)¹:

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1, \quad x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = g, \quad (2.76)$$

$$H = \frac{x_1^2}{2A_1} + \frac{x_2^2}{2A_2} + \frac{x_3^2}{2A_3}, \quad K = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (2.77)$$

Бифуркационной диаграммой здесь (см., например, [8]) будет диаграмма, изображенная на рис.1 слева (т.е. в осях k_1, h_1 , отвечающих интеграм H, K соответственно), образ отображения момента — \bar{V} . При этом в прообразе отображения момента лежат следующие множества точек. Для интервалов $a_1, d_1, (E_1B_1), (B_1D_1)$ — две окружности $S^1 \cup S^1$. Для точки B_1 — это множество c_1 , где по определению c_1 — две окружности, пересекающиеся по двум точкам. Для точки E_1 в прообразе отображения момента имеем две точки, для D_1 — также две точки. Для каждой точки интервала b_1 в прообразе лежит $c_2 \stackrel{\text{def}}{=} c_1 \times S^1$. И, павер, для каждой из остальных точек \bar{V} в прообразе имеем два тора $T \cup T^2$. В работах Н.Зунга и Л.Элиассона (см. [45], [46]) было показано, что возникающие в этом случае перестройки имеют тип прямого произведения (то есть соответствующие отображения момента локально имеют тип прямого произведения), причем точкам E_1, D_1 отвечают локальности "центр–центр" $A \times A$ (см. также [43]), точке B_1 — "седло–нод" $B \times A$, интервалам a_1, d_1 — перестройки $A \times S^1$, интервалу b_1 — $B \times S^1$, интервалам B_1E_1 и D_1B_1 — $S^1 \times A$.

Итак, будем изучать перестройки инвариантных лагранжевых подмногообразий для рассматриваемого случая — тензорного расширения для классической задачи Эйлера. Обозначим через $\mathcal{T}(P_i)$ перестройки, отвечающие подмножествам P_i ($i = 1, \dots, 20$). Кроме того, обозначим через R_1^3 подпространство в R^{12} , соответствующее координатам (y_1, y_2, y_3) , через R_2^3, R_3^3, R_4^3 — соответственно координатам $(y_4, y_5, y_6), (x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6)$, таким образом, можно записать $R_1^3 \oplus R_2^3 \oplus R_3^3 \oplus R_4^3 = R^{12} = (y_1, \dots, y_6, x_1, \dots, x_6)$. Следующие 20 пунктов исследуют, какие множества лежат в прообразах отображений момента для точек из P_i , а также перестройки $\mathcal{T}(P_i)$ ($i = 1, \dots, 20$). Обозначения $\mathcal{T}(S^1)$, $\mathcal{T}(A)$, $\mathcal{T}(A)'$, $\mathcal{T}(B)$, $\mathcal{T}(B)'$ были объяснены выше — стр. 39, 40, 42.

¹⁾ $P_1 = d_1 \times d_2$. В этом случае полный прообраз точки $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in P_1$ — две окружности, каждая из которых прямо умно-

зена на трехмерную плоскость $R^3 = R^2 \times R^1$, $R^2 \subset R_3^3, R^1 \subset R_4^3$:

$$\Phi^{-1}(z) = (F_1 \times S^1 \times R^2 \times R^1) \cup (F_2 \times S^1 \times R^2 \times R^1)$$

При этом окружности определяются соотношениями:

$$y_1 = y_2 = 0, y_3 = \sqrt{z_1}, y_6 = \frac{g}{\sqrt{z_1}}, y_4^2 + y_5^2 = 1 - \frac{g^2}{z_1}, z_1 > g^2;$$

$$y_1 = y_2 = 0, y_3 = -\sqrt{z_1}, y_6 = -\frac{g}{\sqrt{z_1}}, y_4^2 + y_5^2 = 1 - \frac{g^2}{z_1}, z_1 > g^2.$$

Точки $F_1, F_2 \in R_1^3$ имеют следующие координаты в R_1^3 :

$$F_1 = (0, 0, \sqrt{z_1}), F_2 = (0, 0, -\sqrt{z_1}).$$

$$\mathcal{T}(P_1) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(S^1).$$

2) $P_2 = (D_1, D_2)$. Полный прообраз — две четырехмерные плоскости, более подробно:

$$\Phi^{-1}(P_2) = (F_3 \times R^2 \times R^2) \cup (F_4 \times R^2 \times R^2),$$

две вторые сомножители в скобках из R_3^3 , третий — из R_4^3 , при этом точки $F_3, F_4 \in R_1^3 \oplus R_2^3$ и имеют в $R_1^3 \oplus R_2^3$ соответственно координаты

$$F_3 = (0, 0, g, 0, 0, 1), F_4 = (0, 0, -g, 0, 0, -1).$$

$$\mathcal{T}(P_1) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A).$$

3) $P_3 = b_1 \times b_2$. Пусть точка $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in P_3$. Прообраз $\Phi^{-1}(z)$ — это c_2 без двух критических окружностей, прямо умноженное на двумерную плоскость, объединенное с этими двумя критическими окружностями, прямо умноженными на трехмерные плоскости:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(z) = & (c_2 \setminus \{(F_5 \times S^1) \cup (F_6 \times S^1)\}) \times R^1 \times R^1 \cup \\ & \cup (F_5 \times S^1 \times R^2 \times R^1) \cup (F_6 \times S^1 \times R^2 \times R^1). \end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(P_3) = \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(S^1).$$

4) $P_4 = (B_1, B_2)$. В этом случае

$$\Phi^{-1}(P_4) = (c_1 \setminus \{F_7 \cup F_8\}) \times R^1 \times R^2 \cup (F_9 \times R^2 \times R^2) \cup (F_{10} \times R^2 \times R^2).$$

При этом $c_1 \subset R_1^3$; $F_7, F_8 \subset R_1^3$; $R^1 \subset R_3^3$; $F_9, F_{10} \subset R_1^3 \oplus R_2^3$. Точки F_7, F_8 имеют следующие координаты в R_1^3 :

$$F_7 = (0, g, 0), \quad F_8 = (0, -g, 0).$$

Точки F_9, F_{10} имеют в $R_1^3 \oplus R_2^3$ координаты

$$F_9 = (0, g, 0, 0, 1, 0), \quad F_{10} = (0, -g, 0, 0, -1, 0).$$

$$\mathcal{T}(P_4) = \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A).$$

5) $P_5 = a_1 \times a_2$. Этот случай аналогичен случаю 1). Пусть $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in P_5$. Тогда:

$$\Phi^{-1}(z) = (F_{11} \times S^1 \times R^2 \times R^1) \cup (F_{12} \times S^1 \times R^2 \times R^1).$$

На этом окружности определяются соотношениями:

$$y_2 = y_3 = 0, y_1 = -\sqrt{z_1}, y_4 = \frac{g}{\sqrt{z_1}}, y_5^2 + y_6^2 = 1 - \frac{g^2}{z_1}, \quad z_1 > g^2;$$

$$y_2 = y_3 = 0, y_1 = \sqrt{z_1}, y_4 = -\frac{g}{\sqrt{z_1}}, y_5^2 + y_6^2 = 1 - \frac{g^2}{z_1}, \quad z_1 > g^2.$$

Точки $F_{11}, F_{12} \in R_1^3$ и имеют следующие координаты в R_1^3 :

$$F_{11} = (\sqrt{z_1}, 0, 0), \quad F_{12} = (-\sqrt{z_1}, 0, 0).$$

$$\mathcal{T}(P_5) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(S^1).$$

6) $P_6 = (E_1, E_2)$. Случай аналогичен случаю 2). Полный прообраз — две четырехмерные плоскости R^4 :

$$\Phi^{-1}(P_6) = (F_{13} \times R^2 \times R^2) \cup (F_{14} \times R^2 \times R^2),$$

На этом точки $F_{13}, F_{14} \in R_1^3 \oplus R_2^3$ и имеют в $R_1^3 \oplus R_2^3$ соответственно координаты

$$F_{13} = (g, 0, 0, 1, 0, 0), \quad F_{14} = (-g, 0, 0, -1, 0, 0).$$

$$\mathcal{T}(P_6) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A).$$

7) $P_7 = (E_1 D_1 \setminus B_1) \times E_2 D_2$. Пусть $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in P_7$. В прообразе лежат две окружности, каждая из которых умножена на трехмерную плоскость:

$$\Phi^{-1}(z) = (S^1 \times F_{15} \times R^1 \times R^2) \cup (S^1 \times F_{16} \times R^1 \times R^2).$$

Здесь $S^1 \subset R_1^3; F_{15}, F_{16} \in R_2^3; R^1 \subset R_3^3; R^2 \subset R_4^3$. При этом окружности определяются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = g^2, \\ \frac{1}{2A_1}y_1^2 + \frac{1}{2A_2}y_2^2 + \frac{1}{2A_3}y_3^2 = z_2. \end{cases}$$

$$\mathcal{T}(P_7) = \mathcal{T}(S^1) \times \mathcal{T}(A).$$

8) $P_8 = B_1 \times (E_2 D_2 \setminus B_2)$. Пусть $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in P_8$. Тогда (см. случай 4) :

$$\Phi^{-1}(z) = (c_1 \setminus \{F_7 \cup F_8\}) \times R^1 \times R^2.$$

$$\mathcal{T}(P_8) = \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A).$$

9) $P_9 = b_1 \times (R^2 \setminus b_2)$, где $R^2 = k_2 \times h_2$. Пусть $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in P_9$. Прообраз $\Phi^{-1}(z)$ — это c_2 без двух (критических) окружностей, прямо умноженное на двумерную плоскость (см. случай 3):

$$\Phi^{-1}(z) = (c_2 \setminus \{(F_5 \times S^1) \cup (F_6 \times S^1)\}) \times R^1 \times R^1.$$

$$\mathcal{T}(P_9) = \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(S^1).$$

10) $P_{10} = a_1 \times (R^2 \setminus a_2)$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{10}$,

$$\mathcal{T}(P_{10}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(S^1).$$

11) $P_{11} = d_1 \times (R^2 \setminus d_2)$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{11}$,

$$\mathcal{T}(P_{11}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(S^1).$$

12) $P_{12} = (E_1 D_1 \setminus B_1) \times R^2$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{12}$,

$$\mathcal{T}(P_{12}) = \mathcal{T}(S^1) \times \mathcal{T}(A)'.$$

13) $P_{13} = E_1 \times (a_2 \setminus E_2)$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{13}$,

$$\mathcal{T}(P_{13}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A).$$

14) $P_{14} = E_1 \times (E_2 D_2 \setminus E_2)$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{14}$,

$$\mathcal{T}(P_{14}) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A)'.$$

15) $P_{15} = E_1 \times (R^2 \setminus \{a_2 \cup E_2 D_2\})$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{15}$,

$$\mathcal{T}(P_{15}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A)'.$$

16) $P_{16} = D_1 \times (d_2 \setminus D_2)$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{16}$,

$$\mathcal{T}(P_{16}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A).$$

- 17) $P_{17} = D_1 \times (E_2 D_2 \setminus D_2)$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{17}$,
 $\mathcal{T}(P_{17}) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A)'$.
- 18) $P_{18} = D_1 \times (R^2 \setminus \{d_2 \cup E_2 D_2\})$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{18}$,
 $\mathcal{T}(P_{18}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A)'$.
- 19) $P_{19} = B_1 \times (b_2 \setminus B_2)$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{19}$,
 $\mathcal{T}(P_{19}) = \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)'$.
- 20) $P_{20} = B_1 \times (R^2 \setminus \{b_2 \cup E_2 D_2\})$. $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_{20}$,
 $\mathcal{T}(P_{20}) = \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A)'$.

Теорема 12 Полным прообразом $\Phi^{-1}(z)$ точки $z \in (\Phi(M^8) \setminus \hat{\Sigma})$ является объединение двух двумерных торов, каждый из которых прямо умножен на двумерную плоскость:

$$\Phi^{-1}(z) = (T^2 \times R^2) \cup (T^2 \times R^2),$$

более подробно, расписав это выражение по прямым сомножителям из $R_1^3, R_2^3, R_3^3, R_4^3$ соответственно:

$$\Phi^{-1}(z) = (S^1 \times R^1 \times S^1 \times R^1) \cup (S^1 \times R^1 \times S^1 \times R^1).$$

Прообразы точек, принадлежащих бифуркационной диаграмме, а также соответствующие перестройки описаны в пунктах 1)–20).

Доказательство. Пусть точка $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ лежит в образе отображения момента: $z \in \Phi(M^8)$. Будем рассматривать систему:

$$y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1, \quad (2.78)$$

$$y_1 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_6 = g, \quad (2.79)$$

$$y_4 x_4 + y_5 x_5 + y_6 x_6 = a, \quad (2.80)$$

$$y_1 x_4 + y_2 x_5 + y_3 x_6 + x_1 y_4 + x_2 y_5 + x_3 y_6 = b, \quad (2.81)$$

$$K_1(x, y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = z_1, \quad (2.82)$$

$$H_1(x, y) = \frac{y_1^2}{2A_1} + \frac{y_2^2}{2A_2} + \frac{y_3^2}{2A_3} = z_2, \quad (2.83)$$

$$K_2(x, y) = 2(y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3) = z_3, \quad (2.84)$$

$$H_2(x, y) = \frac{y_1 x_1}{A_1} + \frac{y_2 x_2}{A_2} + \frac{y_3 x_3}{A_3} = z_4. \quad (2.85)$$

Пусть сначала $z \in (\Phi(M^8) \setminus \hat{\Sigma})$. То, что связная компонента $\Phi^{-1}(z)$ – это $T^2 \times R^2$, непосредственно вытекает из теоремы 4. Пусть теперь точка z , имеющая координаты (z_1, z_2, z_3, z_4) соответственно в осях h_1, k_1, h_2, k_2 , перемещается по образу отображения момента вдоль какой-либо гладкой кривой, при этом, если z переходит через точки $\hat{\Sigma}$, то возникает нетривиальная перестройка инвариантного лагранжевого подмногообразия. Прообразы $\Phi^{-1}(z)$ для $z \in P_i$, где $i = 1, \dots, 9$, находятся прямыми выкладками при исследовании системы (2.78)–(2.85). То, что $\Phi^{-1}(z) = \emptyset$ для $z \in P_i$ ($i = 10, \dots, 20$) очевидно, так как $P_i \cap \Phi(M^8) = \emptyset$ для $i = 10, \dots, 20$.

Рассмотрим $P_2 = (D_1, D_2)$. Классическому случаю Эйлера здесь, как мы отмечали выше, соответствует особенность $A \times A$. При тензорном расширении эта особенность в силу теоремы 5 (см.стр.21) перейдет в $\mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A)$. Рассуждая аналогично для других подмножеств P_i бифуркационной диаграммы, а также исследуя систему (2.78)–(2.85), определяем остальные перестройки, описанные в пунктах 1)–20). Таким образом, теорема доказана.

Глава 3

Бифуркационные диаграммы для систем, получаемых тензорным расширением из случая движения четырех- мерного твердого тела.

3.1 Уравнения движения четырехмерно- го твердого тела.

Как отмечалось ранее, различные обобщения классической задачи о движении твердого тела описываются уравнениями Эйлера для алгебры Ли $e(3)$. Аналогичные уравнения можно рассматривать и для других алгебр Ли, в частности, для алгебры Ли $so(4)$, которая реализуется в виде кососимметрических 4×4 матриц с обычным коммутатором

$$[X, Y] = XY - YX \quad (3.1)$$

и разлагается на простые слагаемые так: $so(4) = so(3) \oplus so(3)$. Пусть M^1, M^2, M^3 и p^1, p^2, p^3 — координаты в $so(4)$, отвечающие первому и второму простому слагаемому соответственно, а M_1, M_2, M_3 и p_1, p_2, p_3 соответствующие координаты в $so(4)^*$, то есть в пространстве, сопря-

женном к $so(4)$. Скобка Пуассона-Ли на $so(4)^*$, соответствующая коммутатору (3.1), имеет вид:

$$\{M_i, M_j\} = \{p_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k. \quad (3.2)$$

Здесь, как и в предыдущей главе, символ ε_{ijk} означает знак перестановки индексов (i, j, k) , если все i, j, k различны, и $\varepsilon_{ijk} = 0$, если среди этих индексов есть совпадающие ($i, j, k = 1, 2, 3$).

Заметим, что скобка (3.2) вырождена в $R^6(M, p)$. Гамильтонова система для алгебры Ли $so(4)$ записывается в виде уравнений Эйлера:

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (3.3)$$

где $H(M, p)$ — гамильтониан. Инварианты для $so(4)$ выглядят так:

$$F_1 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad (3.4)$$

$$F_2 = M_1 p_1 + M_2 p_2 + M_3 p_3. \quad (3.5)$$

Совместные поверхности уровня функций F_1, F_2 есть орбиты коприсоединенного представления

$$\mathcal{O}^*(c_1, c_2) = \{|M|^2 + |p|^2 = c_1, (M, p) = c_2\}. \quad (3.6)$$

Нетрудно видеть, что при $c_1 > 2|c_2|$ имеем орбиту общего положения, гомеоморфную прямому произведению двумерных сфер $S^2 \times S^2$. При $c_1 = 2|c_2|$, получаются сингулярные орбиты, гомеоморфные сфере S^2 . И, наконец, если $c_1 < 2|c_2|$, то $\mathcal{O}^*(c_1, c_2) = \emptyset$.

Таким образом, скобка (3.2) задает на орbitах $S^2 \times S^2$ симплектическую структуру, а (3.3) определяет на этих орбитах гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Для ее полной интегрируемости по Лиувиллю необходимо и достаточно существование одного дополнительного интеграла K , функционально независимого с гамильтонианом H на орбитах. Рассмотрим квадратичный гамильтониан вида

$$H = a_1 M_1^2 + a_2 M_2^2 + a_3 M_3^2 + d_1 p_1^2 + d_2 p_2^2 + d_3 p_3^2, \quad (3.7)$$

где a_i, d_i — некоторые вещественные параметры ($i = 1, 2, 3$). В работе [33] было показано, что для гамильтониана (3.7) дополнительный квадратичный интеграл существует только в том случае, когда параметры гамильтониана удовлетворяют соотношениям:

$$a_1 d_1 (a_2 + d_2 - a_3 - d_3) + a_2 d_2 (a_3 + d_3 - a_1 - d_1) + a_3 d_3 (a_1 + d_1 - a_2 - d_2) = 0 \quad (3.8)$$

Систему уравнений (3.3) с гамильтонианом (3.7), (3.8) называют *уравнениями движения четырехмерного твердого тела*. Эти уравнения являются аналогом обычного случая Эйлера, и ими описываются также некоторые реальные задачи механики и физики (см., например, приложение 2 в книге [1]).

Легко показать, что соотношение (3.8) равносильно выполнению одного из следующих двух условий:

$$a_1 + d_1 = a_2 + d_2 = a_3 + d_3 \quad (3.9)$$

или системы трех уравнений:

$$a_i d_i = q + r(a_i + d_i), \quad (3.10)$$

где q, r — некоторые вещественные константы, $i = 1, 2, 3$. Если выполнено условие (3.9), то гамильтониан (3.7) примет вид

$$H_0 = b_1 M_1^2 + b_2 M_2^2 + b_3 M_3^2 - b_1 p_1^2 - b_2 p_2^2 - b_3 p_3^2, \quad (3.11)$$

где b_i — некоторые константы. Условие (3.10) перепишем в виде системы

$$(r - a_i)(r - d_i) = r^2 + q, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.12)$$

Если $r^2 + q = 0$, то линейной заменой координат в $R^6(M, p)$, сохраняющей скобку Пуассона-Ли, гамильтониан (3.7) приводится к одному из следующих видов (см., например, [8]):

$$H_1 = b_1 M_1^2 + b_2 M_2^2 + b_3 M_3^2, \quad (3.13)$$

$$H_2 = b_1 p_1^2 + b_2 p_2^2 + b_3 p_3^2. \quad (3.14)$$

Пусть теперь $r^2 + q \neq 0$. Тогда гамильтониан (3.7) можно записать в виде

$$H = AH_3 + rF_1, \quad \text{где} \quad (3.15)$$

$$H_3 = b_1 M_1^2 + b_2 M_2^2 + b_3 M_3^2 + b_2 b_3 p_1^2 + b_3 b_1 p_2^2 + b_1 b_2 p_3^2, \quad (3.16)$$

при этом

$$b_1 = (d_2 - r)(d_3 - r)/(r^2 + q), \quad b_2 = (d_3 - r)(d_1 - r)/(r^2 + q),$$

$$b_3 = (d_1 - r)(d_2 - r)/(r^2 + q), \quad A = (a_1 - r)(a_2 - r)(a_3 - r)/(r^2 + q).$$

Так как прибавление инварианта F_1 к гамильтониану не изменяет системы (3.3), то получаем, что любой гамильтониан вида (3.7), (3.8) эквивалентен одному из гамильтонианов H_0, H_1, H_2, H_3 , каждый из которых зависит лишь от трех параметров b_1, b_2, b_3 . Мы будем рассматривать только случай $H = H_1$. Очевидно, что гамильтонова система (3.3) с гамильтонианом (3.13) определяет в R^6 тот же фазовый поток, что и в обычном случае Эйлера. Дополнительный интеграл здесь

$$K = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 . \quad (3.17)$$

Для удобства введем переобозначения, аналогичные таковым из предыдущей главы:

$$x_1 = M_1, x_2 = M_2, x_3 = M_3, x_4 = p_1, x_5 = p_2, x_6 = p_3 ,$$

$$A_1 = \frac{1}{2b_1}, A_2 = \frac{1}{2b_2}, A_3 = \frac{1}{2b_3} (0 < A_1 < A_2 < A_3).$$

Дополнительный интеграл и гамильтониан в новых переобозначениях примут вид:

$$K = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, H = \frac{x_1^2}{2A_1} + \frac{x_2^2}{2A_2} + \frac{x_3^2}{2A_3} . \quad (3.18)$$

Инварианты будут выглядеть так:

$$F_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, F_2 = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 . \quad (3.19)$$

3.2 Бифуркационные диаграммы и перестройки инвариантных лагранжевых подмногообразий.

Расширим тензорно алгебру Ли $\Theta = so(4)$ с помощью факторкольца $R[x]/(x^2)$. Получим двенадцатимерную алгебру Ли $\Omega(so(4)) = so(4) \otimes R[x]/(x^2)$. Пусть (x, y) — соответствующие координаты в $\Omega(so(4))^*$.

Лемма 4 Для $\Omega(so(4))$ имеем следующий набор инвариантов:

$$F_1^{(1)}(x, y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 , \quad (3.20)$$

$$F_2^{(1)}(x, y) = y_1y_4 + y_2y_5 + y_3y_6 , \quad (3.21)$$

$$F_1^{(2)}(x, y) = 2(y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4 + y_5x_5 + y_6x_6) , \quad (3.22)$$

$$F_2^{(2)}(x, y) = y_1x_4 + y_2x_5 + y_3x_6 + x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 . \quad (3.23)$$

Интегралы выглядят так:

$$K_1(x, y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 , \quad (3.24)$$

$$H_1(x, y) = \frac{y_1^2}{2A_1} + \frac{y_2^2}{2A_2} + \frac{y_3^2}{2A_3} , \quad (3.25)$$

$$K_2(x, y) = 2(y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3) , \quad (3.26)$$

$$H_2(x, y) = \frac{y_1x_1}{A_1} + \frac{y_2x_2}{A_2} + \frac{y_3x_3}{A_3} . \quad (3.27)$$

Доказательство. Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 2.

Будем рассматривать отображение момента $\Phi : M^8 \rightarrow R^4$, где $\Phi = (K_1, H_1, K_2, H_2)$, $M^8 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}^*(\Omega(so(4)))$ — орбита общего положения коприсоединенного представления в $\Omega(so(4))^*$.

Предложение 3 Множество M^8 является гладким некомпактным многообразием, диффеоморфным $TS^2 \times TS^2$.

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из леммы 1. Предложение доказано.

Можно считать, что орбита общего положения M^8 задается в R^{12} системой

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = c_1 , \\ y_1y_4 + y_2y_5 + y_3y_6 = c_2 , \\ y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4 + y_5x_5 + y_6x_6 = c_3 , \\ y_1x_4 + y_2x_5 + y_3x_6 + x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 = c_4 , \end{cases}$$

где все константы вещественны, при этом, в силу вышесказанного, считаем, что $c_1 > 2|c_2|$, $c_2 \neq 0$.

Теорема 13 Множество особенностей S для отображения момента $\Phi = (K_1, H_1, K_2, H_2)$ есть объединение пяти множеств $S = \bigcup_{i=1}^5 S_i$, каждое из которых гомеоморфно $S^2 \times R^4$, где S_i ($i = 1, \dots, 5$) определяются следующими условиями:

- a) $y_2 = y_3 = 0$ (для множества S_1),
- б) $y_1 = y_3 = 0$ (для множества S_2),
- в) $y_1 = y_2 = 0$ (для множества S_3),
- г) $y_4 = \lambda_1 y_1, y_5 = \lambda_1 y_2, y_6 = \lambda_1 y_3$ (для множества S_4),
- д) $y_4 = \lambda_2 y_1, y_5 = \lambda_2 y_2, y_6 = \lambda_2 y_3$ (для множества S_5), где

$$\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2^2}}{2c_2}, \quad \lambda_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2^2}}{2c_2}.$$

Доказательство. Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 6 предыдущей главы.

Положим по определению

$$\mu_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_2}{\lambda_2}, \quad \mu_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_2}{\lambda_1}, \quad \eta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_3 - \lambda_2 c_4}{1 - \lambda_2^2}, \quad \eta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_3 - \lambda_1 c_4}{1 - \lambda_1^2}.$$

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $\eta_2 > \eta_1$.

Для того, чтобы сформулировать следующую теорему, введем обозначения для некоторых подмножеств из $R^4 = k_1 \times h_1 \times k_2 \times h_2$ (где k_1, h_1, k_2, h_2 — оси координат, отвечающие отображениям K_1, H_1, K_2, H_2 соответственно, см. рис. 5 на стр. 59).

- 1) $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} d_1 \times d_2$ — прямое произведение интервала $d_1 = \{h_1 = k_1/(2A_3), \mu_1 < k_1 < \mu_2\}$ на прямую $d_2 = \{h_2 = k_2/(2A_3)\}$.
- 2) $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} (D_1, D_2)$ — точка, где $D_1 \in d_1, D_2 \in d_2$, причем $D_1 = (\mu_1, \mu_1/(2A_3)), D_2 = (2\eta_1, \eta_1/A_3)$.
- 3) $P_3 \stackrel{\text{def}}{=} b_1 \times b_2$ — прямое произведение интервала $b_1 = \{h_1 = k_1/(2A_2), \mu_1 < k_1 < \mu_2\}$ на прямую $b_2 = \{h_2 = k_2/(2A_2)\}$.
- 4) $P_4 \stackrel{\text{def}}{=} (B_1, B_2)$ — точка, где $B_1 \in b_1, B_2 \in b_2$, с координатами $B_1 = (\mu_1, \mu_1/(2A_2)), B_2 = (2\eta_1, \eta_1/A_2)$.
- 5) $P_5 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \times a_2$ — прямое произведение интервала $a_1 = \{h_1 = k_1/(2A_1), \mu_1 < k_1 < \mu_2\}$ на прямую $a_2 = \{h_2 = k_2/(2A_1)\}$.

6) $P_6 \stackrel{\text{def}}{=} (E_1, E_2)$ — точка, где $E_1 \in k_1 \times h_1, E_2 \in k_2 \times h_2$, при этом $E_1 = (\mu_1, \mu_1/(2A_1)), E_2 = (2\eta_1, \eta_1/A_1)$.

7) $P_7 \stackrel{\text{def}}{=} (E_1 D_1 \setminus B_1) \times E_2 D_2$ — прямое произведение интервала $E_1 D_1$ без точки B_1 на прямую $E_2 D_2$.

8) $P_8 \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \times (E_2 D_2 \setminus B_2)$ — прямое произведение точки B_1 на прямую $E_2 D_2$ без точки B_2 .

9) $P_9 \stackrel{\text{def}}{=} (N_1, N_2)$ — точка, где $N_1 \in k_1 \times h_1, N_2 \in k_2 \times h_2$, причем $N_1 = (\mu_2, \mu_2/(2A_3)), N_2 = (2\eta_2, \eta_2/A_3)$.

10) $P_{10} \stackrel{\text{def}}{=} (M_1, M_2)$ — точка, где $M_1 \in k_1 \times h_1, M_2 \in k_2 \times h_2$, причем $M_1 = (\mu_2, \mu_2/(2A_2)), M_2 = (2\eta_2, \eta_2/A_2)$.

11) $P_{11} \stackrel{\text{def}}{=} (L_1, L_2)$ — точка, где $L_1 \in k_1 \times h_1, L_2 \in k_2 \times h_2$, причем $L_1 = (\mu_2, \mu_2/(2A_1)), L_2 = (2\eta_2, \eta_2/A_1)$.

12) $P_{12} \stackrel{\text{def}}{=} (L_1 N_1 \setminus M_1) \times L_2 N_2$ — прямое произведение открытого интервала $L_1 N_1$ без точки M_1 на прямую $L_2 N_2$.

13) $P_{13} \stackrel{\text{def}}{=} M_1 \times (L_2 N_2 \setminus M_2)$ — прямое произведение точки M_1 на прямую $L_2 N_2$ без точки M_2 .

Теорема 14 *Бифуркационной диаграммой в узком смысле для отображения момента (3.24)–(3.27) является множество*

$$\Sigma = \Phi(S) = \bigcup_{i=1}^{13} P_i,$$

где P_i ($i = 1, \dots, 13$) описаны выше.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

Обозначим через V открытую область в $R^2 = k_1 \times h_1$, которая ограничена отрезками $E_1 D_1, L_1 N_1$ и интервалами a_1, d_1 , обозначим через \bar{V} замыкание области V , а через $\partial \bar{V}$ — границу \bar{V} .

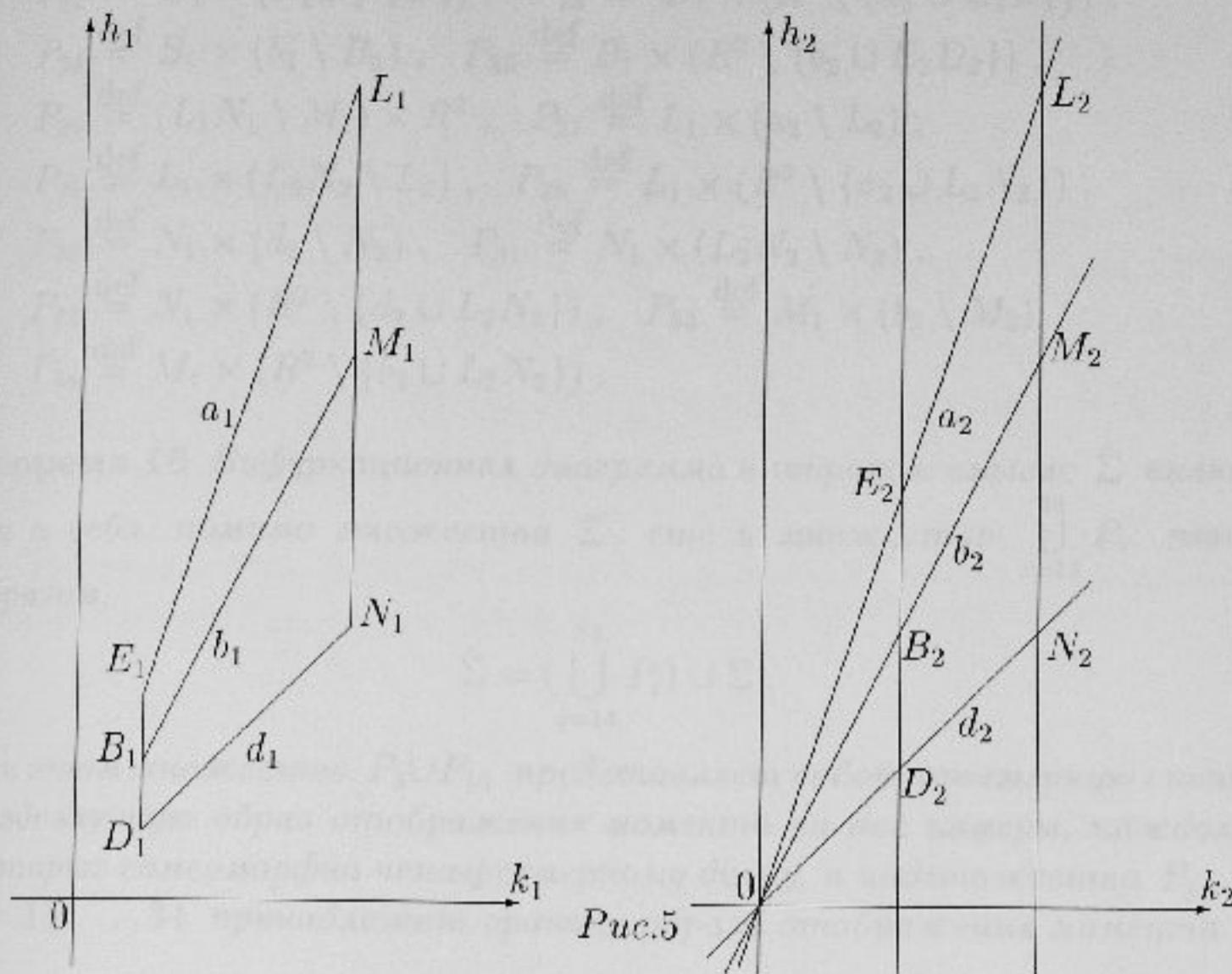


Рис.5

Теорема 15 Образ отображения момента Φ есть объединение прямого произведения области V на $R^2 = k_2 \times h_2$ с бифуркационной диаграммой:

$$\Phi(M^8) = \{V \times R^2\} \cup \Sigma.$$

Доказательство. Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 8.

Прежде, чем приступить к следующей теореме, опишем еще несколько подмножеств из $R^4 = k_1 \times h_1 \times k_2 \times h_2$ (см. обозначения на стр.57).

$$\begin{aligned} P_{14} &\stackrel{\text{def}}{=} b_1 \times (R^2 \setminus b_2), & P_{15} &\stackrel{\text{def}}{=} a_1 \times (R^2 \setminus a_2), \\ P_{16} &\stackrel{\text{def}}{=} d_1 \times (R^2 \setminus d_2), & P_{17} &\stackrel{\text{def}}{=} (E_1 D_1 \setminus B_1) \times R^2, \\ P_{18} &\stackrel{\text{def}}{=} E_1 \times (a_2 \setminus E_2), & P_{19} &\stackrel{\text{def}}{=} E_1 \times (E_2 D_2 \setminus E_2), \\ P_{20} &\stackrel{\text{def}}{=} E_1 \times (R^2 \setminus \{a_2 \cup E_2 D_2\}), & P_{21} &\stackrel{\text{def}}{=} D_1 \times (d_2 \setminus D_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{22} &\stackrel{\text{def}}{=} D_1 \times (E_2 D_2 \setminus D_2) , \quad P_{23} \stackrel{\text{def}}{=} D_1 \times (R^2 \setminus \{d_2 \cup E_2 D_2\}) , \\
P_{24} &\stackrel{\text{def}}{=} B_1 \times (b_2 \setminus B_2) , \quad P_{25} \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \times (R^2 \setminus \{b_2 \cup E_2 D_2\}) , \\
P_{26} &\stackrel{\text{def}}{=} (L_1 N_1 \setminus M_1) \times R^2 , \quad P_{27} \stackrel{\text{def}}{=} L_1 \times (a_2 \setminus L_2) , \\
P_{28} &\stackrel{\text{def}}{=} L_1 \times (L_2 N_2 \setminus L_2) , \quad P_{29} \stackrel{\text{def}}{=} L_1 \times (R^2 \setminus \{a_2 \cup L_2 N_2\}) , \\
P_{30} &\stackrel{\text{def}}{=} N_1 \times (d_2 \setminus N_2) , \quad P_{31} \stackrel{\text{def}}{=} N_1 \times (L_2 N_2 \setminus N_2) , \\
P_{32} &\stackrel{\text{def}}{=} N_1 \times (R^2 \setminus \{d_2 \cup L_2 N_2\}) , \quad P_{33} \stackrel{\text{def}}{=} M_1 \times (b_2 \setminus M_2) , \\
P_{34} &\stackrel{\text{def}}{=} M_1 \times (R^2 \setminus \{b_2 \cup L_2 N_2\}) .
\end{aligned}$$

Теорема 16 *Бифуркационная диаграмма в широком смысле $\hat{\Sigma}$ включает в себя, помимо множества Σ , еще и множество $\bigcup_{i=14}^{34} P_i$, таким образом,*

$$\hat{\Sigma} = \left(\bigcup_{i=14}^{34} P_i \right) \cup \Sigma ,$$

при этом множество $P_3 \cup P_{14}$ представляет собой трехмерную стенку, разделяющую образ отображения момента на две камеры, каждая из которых гомеоморфна четырехмерному диску, а подмножество P_j , где $j = 15, \dots, 34$ принадлежат границе образа отображения момента.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

Теорема 17 *Полным прообразом $\Phi^{-1}(z)$ точки $z \in (\Phi(M^8) \setminus \hat{\Sigma})$ является объединение двух двумерных торов, каждый из которых прямо умножен на двумерную плоскость:*

$$\Phi^{-1}(z) = (T^2 \times R^2) \cup (T^2 \times R^2),$$

Соответствующие перестройки (см. главу 2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(P_1) &= \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(S^1) , \quad \mathcal{T}(P_2) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A) , \quad \mathcal{T}(P_3) = \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(S^1) , \\
\mathcal{T}(P_4) &= \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A) , \quad \mathcal{T}(P_5) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(S^1) , \quad \mathcal{T}(P_6) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A) , \\
\mathcal{T}(P_7) &= \mathcal{T}(S^1) \times \mathcal{T}(A) , \quad \mathcal{T}(P_8) = \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A) , \quad \mathcal{T}(P_9) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A) , \\
\mathcal{T}(P_{10}) &= \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A) , \quad \mathcal{T}(P_{11}) = \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A) , \quad \mathcal{T}(P_{12}) = \mathcal{T}(S^1) \times \mathcal{T}(A) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(P_{13}) &= \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A) , \mathcal{T}(P_{14}) = \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(S^1) , \mathcal{T}(P_{15}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(S^1) , \\
\mathcal{T}(P_{16}) &= \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(S^1) , \mathcal{T}(P_{17}) = \mathcal{T}(S^1) \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{18}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A) , \\
\mathcal{T}(P_{19}) &= \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{20}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{21}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A) , \\
\mathcal{T}(P_{22}) &= \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{23}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{24}) = \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)' , \\
\mathcal{T}(P_{25}) &= \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{26}) = \mathcal{T}(S^1) \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{27}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A) , \\
\mathcal{T}(P_{28}) &= \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{29}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{30}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A) , \\
\mathcal{T}(P_{31}) &= \mathcal{T}(A) \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{32}) = \mathcal{T}(A)' \times \mathcal{T}(A)' , \mathcal{T}(P_{33}) = \mathcal{T}(B) \times \mathcal{T}(A)' , \\
\mathcal{T}(P_{34}) &= \mathcal{T}(B)' \times \mathcal{T}(A)' .
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 12 из предыдущей главы.

Глава 4

Бифуркационные диаграммы на орбитах тензорных расширений специальных групп Ли.

Пусть Θ — алгебра Ли размерности n ($n > 2$), G — группа Ли, ассоциированная с алгеброй Ли Θ (т.е. $\Theta = L(G)$, см.стр.11). Пусть C_{ij}^k — структурный тензор алгебры Ли Θ в базисе e_j , x_i — координаты в Θ^* , соответствующие базису e^i пространства Θ^* , такому, что $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$). Известно (см., например, [17]), что аналитическая функция F на Θ^* является инвариантом коприсоединенного представления группы Ли G , ассоциированной с Θ , тогда и только тогда, когда F удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\sum_{k,j=1}^n C_{ij}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0. \quad (4.1)$$

Рассмотрим теперь следующий частный случай. Зададим алгебру Ли таким образом. Пусть $A : V \rightarrow V$ — линейный оператор, имеющий вид жордановой клетки и действующий в пространстве V . Тогда на прямой сумме $V \oplus Re$ определим структуру алгебры Ли:

$$[a, b] = 0, [\alpha e, x] = \alpha A(x)$$

для любых элементов $a, b, x \in V$, $\alpha \in R$. Другими словами, полагаем, что структурные константы C_{nj}^k представляют собой жорданову клетку с λ на диагонали и с единицами над диагональю, а $C_{ij}^k = 0$, если $i \neq n$ ($j = 1, 2, \dots, n-1; k = 1, 2, \dots, n$).

Определение 6 Алгебры Ли такого вида будем называть "специальными алгебрами Ли".

Нильпотентные специальные алгебры Ли размерностей 8 и 9 рассматривались в работах [41] и [42].

Определение 7 "Специальной группой Ли" назовем односвязную группу Ли, отвечающую специальной алгебре Ли.

Нашей ближайшей целью будет вычисление инвариантов коприсоединенного представления групп Ли, заданных описанным выше способом. Мы будем рассматривать отдельно два случая: $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$. Обозначим такие алгебры Ли через Θ_1 и Θ_2 соответственно.

4.1 Инварианты и канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления специальных групп Ли.

Рассмотрим сначала случай $\Theta = \Theta_1$. Система (4.1) в этом случае примет вид следующей системы из $n-1$ дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\ -x_2 \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\ \dots \\ -x_{n-2} \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\ x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} + \dots + x_{n-2} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0. \end{array} \right.$$

Из первых $n-2$ уравнений системы следует, что инварианты не зависят от переменной x_n . Последнее уравнение этой системы

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} + \dots + x_{n-2} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0 \quad (4.2)$$

эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_{n-2}} = \frac{ds}{s} \quad (4.3)$$

в том смысле, что любой первый интеграл (4.3) есть решение (4.2), и наоборот. Обозначим через F_r искомые инварианты коприсоединенного представления, а через $k!$ — факториал числа k , т.е. $k! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \times 2 \times \dots \times k$.

Теорема 18 Имеет место следующая рекуррентная зависимость для инвариантов F_r :

$$F_1 = x_1, \quad (4.4)$$

$$F_2 = \frac{x_2^2}{2} - x_1 x_3, \quad (4.5)$$

$$F_r = \frac{x_2^r}{r!} - \sum_{k=1}^{r-2} \frac{x_2^k}{k!} F_{r-k} - x_1^{r-1} x_{r+1}, \quad r = 3, 4, \dots, n-2. \quad (4.6)$$

Доказательство. Интеграл (4.4) находится сразу. Полагая $F_1 = c_1$, где c_1 — константа, и сравнивая первый и второй члены в (4.3), получаем

$$\frac{dx_2}{c_1} = \frac{dx_3}{x_2}, \quad \frac{x_2^2}{2} - c_1 x_3 = c_2,$$

где c_2 — константа, $F_2 = c_2$, следовательно,

$$F_2 = \frac{x_2^2}{2} - x_1 x_3.$$

Затем, сравнивая первый и третий член в (4.3), находим инвариант F_3 . Проводя эту процедуру далее, устанавливаем рекуррентную закономерность (4.6). Теорема доказана.

Опуская длинные выкладки, выпишем в явном виде инварианты коприсоединенного представления для алгебр Ли Θ_1 ($\dim \Theta_1 = n$) до

$n = 11$ включительно:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= x_1, \\
 F_2 &= x_2^2/2 - x_1x_3, \\
 F_3 &= -x_2^3/3 + x_1x_2x_3 - x_1^2x_4, \\
 F_4 &= x_2^4/8 - x_1x_2^2x_3/2 + x_1^2x_2x_4 - x_1^3x_5, \\
 F_5 &= -x_2^5/30 + x_1x_2^3x_3/6 - x_1^2x_2^2x_4/2 + x_1^3x_2x_5 - x_1^4x_6, \\
 F_6 &= x_2^6/144 - x_1x_2^4x_3/24 + x_1^2x_2^3x_4/6 - x_1^3x_2^2x_5/2 + x_1^4x_2x_6 - x_1^5x_7, \\
 F_7 &= -x_2^7/840 + x_1x_2^5x_3/5! - x_1^2x_2^4x_4/4! + x_1^3x_2^3x_3/6 - x_1^4x_2^2x_6/2 + \\
 &\quad + x_1^5x_2x_7 - x_1^6x_8, \\
 F_8 &= x_2^8/5760 - x_1x_2^6x_3/6! + x_1^2x_2^5x_4/5! - x_1^3x_2^4x_5/4! + x_1^4x_2^3x_6/6 - \\
 &\quad - x_1^5x_2^2x_7/2 + x_1^6x_2x_8 - x_1^7x_9, \\
 F_9 &= -x_2^9/45360 + x_1x_2^7x_3/7! - x_1^2x_2^6x_3/6! + x_1^3x_2^5x_5/5! - x_1^4x_2^4x_6/4! + \\
 &\quad + x_1^5x_2^3x_7/6 - x_1^6x_2^2x_8/2 + x_1^7x_2x_9 - x_1^8x_{10}.
 \end{aligned}$$

Теорема 19 Инварианты коприсоединенного представления для алгебры Ли Θ_1 имеют следующий вид ($r = 3, 4, \dots, n-2$):

$$F_1 = x_1, F_2 = \frac{x_2^2}{2} - x_1x_3, \quad (4.7)$$

$$F_r = (-1)^r \frac{x_2^r}{r((r-2)!)^2} + \sum_{k=1}^{r-2} (-1)^{r-k} \frac{x_1^k x_2^{r-k-1} x_{k+2}}{(r-k-1)!} - x_1^{r-1} x_{r+1}. \quad (4.8)$$

Доказательство. Выражения (4.8) получаются прямыми выкладками с использованием результатов теоремы 18. Подставив (4.8) непосредственно в (4.2), убеждаемся, что инварианты F_r , даваемые (4.8), действительно искомые. Теорема доказана.

Перейдем теперь к случаю $\Theta = \Theta_2$. Система (4.1) в этом случае примет вид следующей системы из n уравнений в частных производных:

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 -\lambda x_1 \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\
 (-x_1 - \lambda x_2) \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\
 \dots \\
 (-x_{n-2} - \lambda x_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \\
 \lambda x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (x_1 + \lambda x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + (x_{n-2} + \lambda x_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0.
 \end{array}
 \right.$$

Из первых $n - 1$ уравнений этой системы вытекает, что инварианты не зависят от x_n . Рассмотрим последнее уравнение этой системы:

$$\lambda x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (x_1 + \lambda x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + (x_{n-2} + \lambda x_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) в указанном выше смысле эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{\lambda x_1} = \frac{dx_2}{x_1 + \lambda x_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_{n-2} + \lambda x_{n-1}} = \frac{ds}{s}. \quad (4.10)$$

Обозначим через G_l инварианты коприсоединенного представления для Θ_2 .

Теорема 20 Инварианты G_l имеют следующий вид:

$$G_1 = x_1 \exp(-\lambda x_2/x_1), \quad (4.11)$$

$$G_2 = \frac{x_2^2}{2x_1^2} - \frac{x_3}{x_1}, \quad (4.12)$$

$$G_l = \frac{1}{x_1^l} \left((-1)^l \frac{x_2^l}{l((l-2)!)^2} + \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^{l-k} \frac{x_1^k x_2^{l-k-1} x_{k+2}}{(l-k-1)!} - x_1^{l-1} x_{l-1} \right), \quad (4.13)$$

где $l = 3, 4, \dots, n - 2$. Кроме того, инварианты для Θ_1 и Θ_2 связаны соотношением

$$F_k = x_1^k G_k, \quad k = 2, 3, \dots, n - 2. \quad (4.14)$$

Доказательство. Сделав замену $y = xk(x)$, несложно показать, что дифференциальное уравнение $\frac{dx}{\mu x} = \frac{dy}{xf(x)+\mu y}$ имеет первый интеграл $C = \frac{1}{\mu} \int \frac{f(x)dx}{x} - \frac{y}{x}$. Опираясь на этот факт и сравнивая первый со вторым членом в (4.10), находим инвариант G_1 . Аналогично, сравнивая первый и третий, а затем — первый и четвертый член (4.10), находим инварианты G_2 и G_3 соответственно. Устанавливая закономерность в нахождении инвариантов, получаем формулу (4.13), справедливость которой проверяется непосредственной подстановкой в (4.9). И, наконец, сравнивая (4.13) с (4.8), находим (4.14). Теорема доказана.

Пусть Θ — специальная алгебра Ли, $\Theta = \Theta_1$ или $\Theta = \Theta_2$.

Предложение 4 Размерность орбиты $\mathcal{O}^*(x)$ общего положения для алгебры Ли Θ равна двум.

Доказательство. Пусть G — группа Ли, соответствующая Θ . Орбита коприсоединенного представления, проходящая через $x \in \Theta^*$, определяется как $\mathcal{O}^*(x) = \{\text{Ad}_g^* x \mid g \in G\}$. Определим элементы матрицы $(a_{ij}(x))$ следующим образом: $a_{ij}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_k C_{ij}^k$, где $i, j, k = 1, \dots, n$. Легко показать, что размерность анулятора $\text{Ann}(x)$ вектора x равняется $n - \text{rank}(a_{ij})$, где, по определению, $\text{Ann}(x) = \{\xi \in \Theta \mid \text{ad}_\xi^* x = 0\}$. А, поскольку, $\text{ind } \Theta = \min_{x \in \Theta^*} (\dim \text{Ann}(x))$, то, рассмотрение явного вида матрицы $(a_{ij}(x))$ завершает доказательство предложения. Предложение доказано.

Далее будем полагать, что орбиты коприсоединенного представления задаются системами вида

$$\begin{cases} f_1(x) = c_1, \\ \dots \dots \\ f_{n-2}(x) = c_{n-2}, \end{cases}$$

где f_k — инварианты ($k = 1, \dots, n-2$), причем $f_k = F_k$ для Θ_1 и $f_k = G_k$ для Θ_2 , $c_1 \neq 0$. Обозначим эти орбиты через $\mathcal{O}_1^*(x)$ и $\mathcal{O}_2^*(x)$.

Предложение 5 Орбиты коприсоединенного представления $\mathcal{O}_1^*(x)$ и $\mathcal{O}_2^*(x)$ — орбиты общего положения, являющиеся гладкими двумерными многообразиями.

Доказательство. Доказательство не составляет труда, если рассмотреть явный вид матриц $(a_{ij}(x))$ и $(b_{kj}(x)) = (\partial f_k / \partial x_j)$ для алгебр Ли Θ_1 и Θ_2 . Предложение доказано.

Перейдем к построению формы Кириллова и канонических координат на орбитах общего положения.

Теорема 21 Для $\mathcal{O}_1^*(x)$ имеем форму Кириллова:

$$\omega = -\frac{1}{x_1} dx_2 \wedge dx_n = dp \wedge dq, \quad (4.15)$$

где $p = -x_2/c_1$, $q = x_n$.

Для $\mathcal{O}_2^*(x)$ форма Кириллова выглядит так:

$$\omega = -\frac{1}{\lambda x_1} dx_1 \wedge dx_n = dp \wedge dq, \quad (4.16)$$

где $p = \ln |x_1|$, $q = -x_n/\lambda$.

Доказательство. Доказательство получается прямыми выкладками с использованием (2.10), (2.12). Поскольку для $\mathcal{O}_1^*(x)$ имеем $x_1 = c_1 = \text{const}$, то форма Кириллова для $\mathcal{O}_1^*(x)$ приводится к виду (4.15). Теорема доказана.

Следствие 1 Гладкие двумерные многообразия $\mathcal{O}_1^*(x)$ и $\mathcal{O}_2^*(x)$ симплектоморфны двумерной плоскости R^2 с канонической симплектической структурой $dp \wedge dq$.

4.2 Инволютивные семейства функций на орбитах коприсоединенного представления для тензорного расширения и бифуркационные диаграммы.

Напомним, что через $\Omega(\Theta)$ мы обозначили тензорное расширение алгебры Ли Θ посредством фактор-кольца $A = R[x]/(x^2)$, где $R[x]$ — кольцо многочленов, а (x^2) — идеал, порожденный x^2 . Пусть $\pi : R[x] \rightarrow R[x]/(x^2)$ — естественная проекция кольца многочленов $R[x]$ на фактор-кольцо $R[x]/(x^2)$. Напомним, что если e_1, \dots, e_n — базис алгебры Ли Θ , то $e_1, \dots, e_n, \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n$ — базис алгебры Ли $\Omega(\Theta) = \Theta \otimes (R[x]/(x^2))$, где $\varepsilon = \pi(x)$. Координаты в сопряженном пространстве $\Omega(\Theta)^*$ в базисе, дуальном к $e_1, \dots, e_n; \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n$, мы обозначаем через $x_i; y_j$ соответственно ($i, j = 1, \dots, n$).

Лемма 5 Инварианты $F_i^{(1)}, F_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $G_j^{(1)}, G_j^{(2)}$ ($j = 1, 2, 3$) для алгебр Ли $\Omega(\Theta_1)$, где $n = 3, 4, 5, 6$ и $\Omega(\Theta_2)$, где $n = 3, 4, 5$ соответственно имеют следующий явный вид:

$$F_1^{(1)} = y_1, F_1^{(2)} = x_1, \quad (4.17)$$

$$F_2^{(1)} = y_2^2/2 - y_1y_3, F_2^{(2)} = -x_3y_1 + x_2y_2 - x_1y_3, \quad (4.18)$$

$$F_3^{(1)} = -y_2^3/3 + y_1y_2y_3 - y_1^2y_4, \quad (4.19)$$

$$F_3^{(2)} = (y_2y_3 - 2y_1y_4)x_1 + (-y_2^2 + y_1y_3)x_2 + y_1y_2x_3 - y_1^2x_4, \quad (4.20)$$

$$F_4^{(1)} = y_2^4/8 - y_1y_2^2y_3/2 + y_1^2y_2y_4 - y_1^3y_5, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} F_4^{(2)} = & (-y_2^3y_3/2 + 2y_1y_2y_4 - 3y_1^2y_5)x_1 + (y_2^3/2 - y_1y_2y_3 + y_1^2y_4)x_2 - \\ & - y_1y_2^2x_3/2 + y_1^2y_2x_4 - y_1^3x_5, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$G_1^{(1)} = y_1 \exp(-\lambda y_2/y_1), G_1^{(2)} = \exp(-\lambda y_2/y_1)(x_1 + \lambda x_1y_2/y_1 - \lambda x_2), \quad (4.23)$$

$$G_2^{(1)} = y_2^2/(2y_1^2) - y_3/y_1, G_2^{(2)} = (-y_2^2/y_1^3 + y_3/y_1^2)x_1 + y_2x_2/y_1^2 - x_3/y_1, \quad (4.24)$$

$$G_3^{(1)} = (-y_2^3/3 + y_1y_2y_3 - y_1^2y_4)/y_1^3, \quad (4.25)$$

$$G_3^{(2)} = x_1(y_2^3 - 2y_1y_2y_3 + y_1^2y_4)/y_1^4 + x_2(y_1y_3 - y_2^2)/y_1^3 + y_2x_3/y_1^2 - x_4/y_1. \quad (4.26)$$

Доказательство. Инварианты коприсоединенного представления для алгебр Ли Θ_1 и Θ_2 мы уже вычислили. Следовательно, теперь мы прямыми выкладками находим инварианты для $\Omega(\Theta_1)$ и $\Omega(\Theta_2)$ посредством алгоритма (t). Лемма доказана.

Далее будем считать, что орбиты для $\Omega(\Theta_1)$ и $\Omega(\Theta_2)$ задаются системами вида

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(1)}(x, y) = c_1, f_1^{(2)}(x, y) = c_2, \\ \dots \\ f_{n-2}^{(1)}(x, y) = c_{2n-5}, f_{n-2}^{(2)}(x, y) = c_{2n-4}, \end{array} \right.$$

где $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}$ — инварианты ($k = 1, \dots, n-2$), $c_1 \neq 0$, причем $f_k^{(m)} = F_k^{(m)}$ для $\Omega(\Theta_1)$ и $f_k^{(m)} = G_k^{(m)}$ для $\Omega(\Theta_2)$, $m = 1, 2$. Обозначим эти орбиты через $\Omega(\mathcal{O}_1^*)$ и $\Omega(\mathcal{O}_2^*)$ соответственно.

Предложение 6 Орбиты коприсоединенного представления $\Omega(\mathcal{O}_1^*)$ и $\Omega(\mathcal{O}_2^*)$ — орбиты общего положения, являющиеся гладкими четырехмерными многообразиями, диффеоморфными $T(R^2) = R^4$.

Доказательство. Доказательство того, что орбиты $\Omega(\mathcal{O}_1^*)$ и $\Omega(\mathcal{O}_2^*)$ – орбиты общего положения, являющиеся гладкими четырехмерными многообразиями, совершенно аналогично доказательству предложения 5. То, что эти многообразия диффеоморфны касательному расслоению плоскости R^2 затем сразу следует леммы 1, см. стр.19. Предложение доказано.

Перейдем к построению канонических координат на орбитах копри- соединенного представления для тензорного расширения $\Omega(\Theta)$.

Предложение 7 Для $\Omega(\mathcal{O}_1^*)$ имеем канонические координаты:

$$P_1 = -\frac{y_2}{c}, Q_1 = x_n,$$

$$P_2 = -\frac{x_2}{c}, Q_2 = y_n.$$

Для $\Omega(\mathcal{O}_2^*)$ канонические координаты выглядят так:

$$P_1 = \ln |y_1|, Q_1 = -\frac{x_n}{\lambda},$$

$$P_2 = \frac{x_1}{y_1}, Q_2 = -\frac{y_n}{\lambda}.$$

Доказательство. Канонические координаты для орбит $\mathcal{O}_1^*(x)$ и $\mathcal{O}_2^*(x)$ мы нашли в теореме 21. Следовательно, теперь соответствующие координаты для $\Omega(\mathcal{O}_1^*)$ и $\Omega(\mathcal{O}_2^*)$ получаются несложным вычислением с использованием теоремы 3, см.стр. 18. Утверждение доказано.

Следствие 2 Гладкие четырехмерные многообразия $\Omega(\mathcal{O}_1^*)$ и $\Omega(\mathcal{O}_2^*)$ симплектоморфны четырехмерной плоскости R^4 с канонической симплектической структурой $dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2$.

Будем смотреть на орбиты общего положения $\Omega(\mathcal{O}^*)$ как на гладкие некомпактные 4-мерные симплектические многообразия. Имеется регулярный способ построения инволютивных относительно скобки Пуассона семейств функций на пространстве, сопряженном к алгебре Ли. Он дается следующей теоремой (*метод сдвига аргумента*).

Теорема 22 (A.C. Мищенко, A.T. Фоменко — см., например, [1]). Пусть Θ — произвольная алгебра Ли, f, g — инварианты коприсоединенного представления группы Ли, отвечающей алгебре Ли Θ , $a \in \Theta^*$ — произвольный ковектор, λ, μ — произвольные вещественные скаляры. Тогда функции $f(x + \lambda a)$ и $g(x + \mu a)$ находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли, отвечающей алгебре Ли Θ .

Таким образом, для $\Omega(\Theta) = \Omega(\Theta_1)$ имеем инволютивное семейство функций

$$\{F_j^{(i)}(a) = F_j^{(i)}(z + a^{ij}); i = 1, 2; j = 1, \dots, n - 2\} , \quad (4.27)$$

где $a^{ij} = (a_k^{ij})$ — произвольные ковекторы ($k = 1, \dots, 2n$), $\{F_j^{(i)}(z)\}$ — инварианты. Аналогично для $\Omega(\Theta) = \Omega(\Theta_2)$ имеем семейство

$$\{G_j^{(i)}(b) = G_j^{(i)}(z + b^{ij}); i = 1, 2; j = 1, \dots, n - 2\}, \quad (4.28)$$

где $b^{ij} = (b_k^{ij})$ — произвольные ковекторы, ($k = 1, \dots, 2n$), $\{G_j^{(i)}(z)\}$ — инварианты. Как и ранее, считаем, что орбиты $\Omega(\mathcal{O}_1^*)$ и $\Omega(\mathcal{O}_2^*)$ задаются системами вида

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(1)}(z) = c_1, f_1^{(2)}(z) = c_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_{n-2}^{(1)}(z) = c_{2n-5}, f_{n-2}^{(2)}(z) = c_{2n-4}, \end{array} \right.$$

где $c_1 \neq 0$, $z = (x, y)$, а $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}$ — инварианты ($k = 1, \dots, n - 2$), причем $f_k^{(m)} = F_k^{(m)}$ для $\Omega(\Theta_1)$ и $f_k^{(m)} = G_k^{(m)}$ для $\Omega(\Theta_2)$, $m = 1, 2$.

Рассмотрим два инварианта из множества $\{f_j^{(i)}(z)\}_{j=1,2,\dots,n-2}^{i=1,2}$, обозначим их $f(z)$ и $g(z)$. Применим к ним метод сдвига аргумента. Получим интегралы $f_\alpha(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z + \alpha)$ и $g_\beta(z) \stackrel{\text{def}}{=} g(z + \beta)$, т.е. пару функций из семейства (4.27) или (4.28) в случаях $\Omega(\mathcal{O}^*) = \Omega(\mathcal{O}_1^*)$ и $\Omega(\mathcal{O}^*) = \Omega(\mathcal{O}_2^*)$ соответственно (α и β — ковектора, на которые производится сдвиг). Обозначим $\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (f_\alpha(z), g_\beta(z))$. Займемся изучением отображения момента

$$\Phi : \Omega(\mathcal{O}^*) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.29)$$

и построения соответствующей бифуркационной диаграммы. Снова будем рассматривать отдельно два случая:

1) $\Omega(\mathcal{O}^*) = \Omega(\mathcal{O}_1^*)$, и интегралы имеют вид (4.27) — в этом случае обозначим $\Phi = \Phi_1$;

2) $\Omega(\mathcal{O}^*) = \Omega(\mathcal{O}_2^*)$, и интегралы имеют вид (4.28) — в этом случае обозначим $\Phi = \Phi_2$.

Начнем со случая 1), т.е. когда отображение момента (4.29) выглядит так:

$$\Phi_1 : \Omega(\mathcal{O}_1^*) \rightarrow \mathbb{R}^2 . \quad (4.30)$$

Пусть $n = 5$, так как инварианты здесь от x_5, y_5 не зависят, то обозначим $z = (x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_8)$. Орбита задается системой уравнений:

$$F_1^{(1)}(z) = c_1 , F_1^{(2)}(z) = c_2 , \quad (4.31)$$

$$F_2^{(1)}(z) = c_3 , F_2^{(2)}(z) = c_4 , \quad (4.32)$$

$$F_3^{(1)}(z) = c_5 , F_3^{(2)}(z) = c_6 . \quad (4.33)$$

В качестве $f_\alpha(z)$ и $g_\beta(z)$ выберем функции

$$\begin{aligned} f_\alpha(z) = F_2^{(2)}(z + \alpha) &= -(x_3 + \alpha_3)(y_1 + \alpha_5) + \\ &+ (x_2 + \alpha_2)(y_2 + \alpha_6) - (x_1 + \alpha_1)(y_3 + \alpha_7) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} g_\beta(z) = F_3^{(2)}(z + \beta) &= ((y_2 + \beta_6)(y_3 + \beta_7) - 2(y_1 + \beta_5)(y_4 + \beta_8))(x_1 + \beta_1) + \\ &+ (-y_2 + \beta_6)^2 + (y_1 + \beta_5)(y_3 + \beta_7))(x_2 + \beta_2) + \\ &+ (y_1 + \beta_5)(y_2 + \beta_6)(x_3 + \beta_3) - (y_1 + \beta_5)^2(x_4 + \beta_4) , \end{aligned} \quad (4.35)$$

и, без ограничения общности, положим $c_1 = 1$.

Лемма 6 Необходимым и достаточным условием существования особых точек для отображения момента (4.34), (4.35) является выполнение соотношения $\beta_1 = \beta_6 = \beta_7 = \alpha_5 = 0$ и $\beta_8/\alpha_6 = -\beta_2/\alpha_1$. Тогда особые точки определяются из соотношения $(\beta_8 c_2 - 2y_2 \beta_2)/\alpha_2 = \beta_8/\alpha_6$.

Доказательство. Особые точки отображения момента находятся из системы:

$$f_1^{(1)}(z) = c_1, f_1^{(2)}(z) = c_2, \quad (4.36)$$

.....

$$f_{n-2}^{(1)}(z) = c_{2n-5}, f_{n-2}^{(2)}(z) = c_{2n-4}, \quad (4.37)$$

$$df_1^{(1)}(z) = 0, df_1^{(2)}(z) = 0, \quad (4.38)$$

.....

$$df_{n-2}^{(1)}(z) = 0, df_{n-2}^{(2)}(z) = 0, \quad (4.39)$$

$$pd\beta_\alpha + qdg_\beta = 0, \quad (4.40)$$

где p и q — константы, не равные нулю одновременно.

Из системы (4.36)–(4.40) получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & p(dx_2(-2y_2\beta_7 - \beta_7^2 + y_1\beta_8 + y_3\beta_6 + \beta_6\beta_8) + dx_3(y_1\beta_7 + y_2\beta_6 + \beta_6\beta_7) - \\ & - dx_4(2y_1\beta_6 + \beta_6^2) + dy_2(y_3\beta_1 + \beta_8x_1 + \beta_1\beta_8 - 2(y_2\beta_2 + x_2\beta_7 + \beta_2\beta_7) + \\ & + y_1\beta_3 + \beta_6x_3 + \beta_6\beta_3) + dy_3(y_2\beta_1 + \beta_7(x_1 + \beta_1) + y_1\beta_2 + \beta_6(x_2 + \beta_2)) - \\ & - 2dy_4(y_1\beta_1 + \beta_6x_1 + \beta_1\beta_6)) + q(\alpha_6dx_2 - \alpha_5dx_3 + \alpha_2dy_2 - \alpha_1dy_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Рассмотрение уравнения (4.41) и нахождение условий для существования пары $(p, q) \neq (0, 0)$ завершает доказательство леммы.

Положим $\alpha_3 = \alpha_7 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_9 = 0$, тогда выражения (4.34), (4.35) перепишутся в виде

$$f_\alpha(z) = x_2\alpha_6 + y_2\alpha_2 - y_3\alpha_1 + c_4 + \alpha_2\alpha_6, \quad (4.42)$$

$$g_\beta(z) = k(x_2\alpha_6 + y_2\alpha_2 - y_3\alpha_1) + y_2^2\beta_2 + c_6 + \beta_2\beta_8, \quad (4.43)$$

где $k \stackrel{\text{def}}{=} \beta_8/\alpha_6$. Положим для определенности $c_2 = c_4 = \alpha_2 = \alpha_6 = \beta_2 = \beta_8 = 1$, $c_3 = \alpha_1 = -1$, $c_6 = 2$. Тогда $k = 1$ и выражения (4.42), (4.43) приобретут вид:

$$f_\alpha(z) = x_2 + y_2 + y_3 + 2, \quad (4.44)$$

$$g_\beta(z) = x_2 + y_2 + y_3 + y_2^2 + 3. \quad (4.45)$$

В этом случае критические точки, как нетрудно видеть, будут определяться условием $y_2 = 0$. Введем обозначение $R^2 = h_1 \times h_2$, где h_1, h_2 оси, отвечающие отображениям $f_\alpha(z)$ и $g_\beta(z)$ соответственно. Обозначим $c \stackrel{\text{def}}{=} h_2 - h_1 - 1$ (т.е. $y_2^2 = c$, если $f_\alpha(z) = h_1, g_\beta(z) = h_2$).

Теорема 23 *Бифуркационной диаграммой для отображения момента (4.44), (4.45) служит прямая $h_2 = h_1 + 1$, а образом отображения момента — множество $h_2 \geq h_1 + 1$. Прообразом $\Phi^{-1}(w)$ точки w из множества $h_2 > h_1 + 1$ служит пара двумерных плоскостей в R^{10} :*

$$R_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} (1, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_5, 1, \sqrt{c}, y_3^{(1)}, y_4^{(1)}, y_5), \quad (4.46)$$

$$R_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} (1, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}, x_5, 1, -\sqrt{c}, y_3^{(2)}, y_4^{(2)}, y_5). \quad (4.47)$$

Прообразом же $\Phi^{-1}(w)$ точки w из множества $h_2 = h_1 + 1$ служит двумерная плоскость

$$R_3^2 \stackrel{\text{def}}{=} (1, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, x_4^{(3)}, x_5, 1, 0, y_3^{(3)}, y_4^{(3)}, y_5), \quad (4.48)$$

где x_5, y_5 — переменные, а константы $x_i^{(1)}, y_j^{(1)}$; $x_i^{(2)}, y_j^{(2)}$ и $x_i^{(3)}, y_j^{(3)}$ находятся из уравнений (4.31)–(4.33) при $y_2 = \sqrt{c}$, $y_2 = -\sqrt{c}$ и $y_2 = 0$ соответственно ($i = 2, 3, 4$; $j = 3, 4$).

Доказательство. Фиксируя значения для $f_\alpha(z)$ и $g_\beta(z)$ из образа отображения момента и находя y_2^2 , а затем рассматривая уравнения (4.31)–(4.33), а также используя лемму 6, приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.

Таким образом, имеем перестройку, которую условно можно изобразить как $R_1^2 \cup R_2^2 \rightarrow R_3^2$, то есть две плоскости "сливаются" в одну.

Перейдем к случаю 2), т.е. когда отображение момента (4.29) выглядит так:

$$\Phi_2 : \Omega(\mathcal{O}_2^*) \rightarrow R^2 \quad (4.49)$$

Пусть $n = 3$. Введем обозначения $z = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_6)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_6)$. Орбита задается уравнениями

$$G_1^{(1)} = y_1 \exp(-\lambda y_2/y_1) = 1, \quad (4.50)$$

$$G_1^{(2)} = \exp(-\lambda y_2/y_1)(x_1 + \lambda x_1 y_2/y_1 - \lambda x_2) = c_2. \quad (4.51)$$

Интегралы будут иметь вид:

$$f_\alpha(z) = (y_1 + \alpha_4) \exp(-\lambda(y_2 + \alpha_4)/(y_1 + \alpha_4)), \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} g_\beta(z) &= \exp(-\lambda(y_2 + \beta_5)/(y_1 + \beta_4)) \times \\ &\times (x_1 + \beta_1 + \lambda(x_1 + \beta_1)(y_2 + \beta_2)/(y_1 + \beta_4) - \lambda(x_2 + \beta_2)). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Лемма 7 Особые точки отображения момента (4.52), (4.53) определяются соотношением $y_2/y_1 = \alpha_5/\alpha_4$.

Доказательство. Расписывая уравнения системы (4.36)–(4.40) для нашего случая и находя условия, при которых существует пара чисел $(p, q) \neq (0, 0)$ аналогично тому, как мы это делали для случая 1), приходим к утверждению леммы.

Положим для определенности $\alpha_5 = \alpha_4 = \lambda = \beta_5 = 1$, а также $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$. Прежде чем сформулировать следующую теорему, введем обозначения для некоторых подмножеств из $R^2 = h_1 \times h_2$ (см. рис. 6 на стр. 75). Пусть

$$\begin{aligned} V_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{1/e < h_1 \leq 1, h_2 \in R\}, V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1 < h_1 < 1 + 1/e, h_2 \in R\}, \\ \Sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \{h_1 = 1 + 1/e, h_2 \in R\}, \\ \hat{\Sigma}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{h_1 = 1/e, h_2 \in R\}, \hat{\Sigma}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{h_1 = 1, h_2 \in R\}. \end{aligned}$$

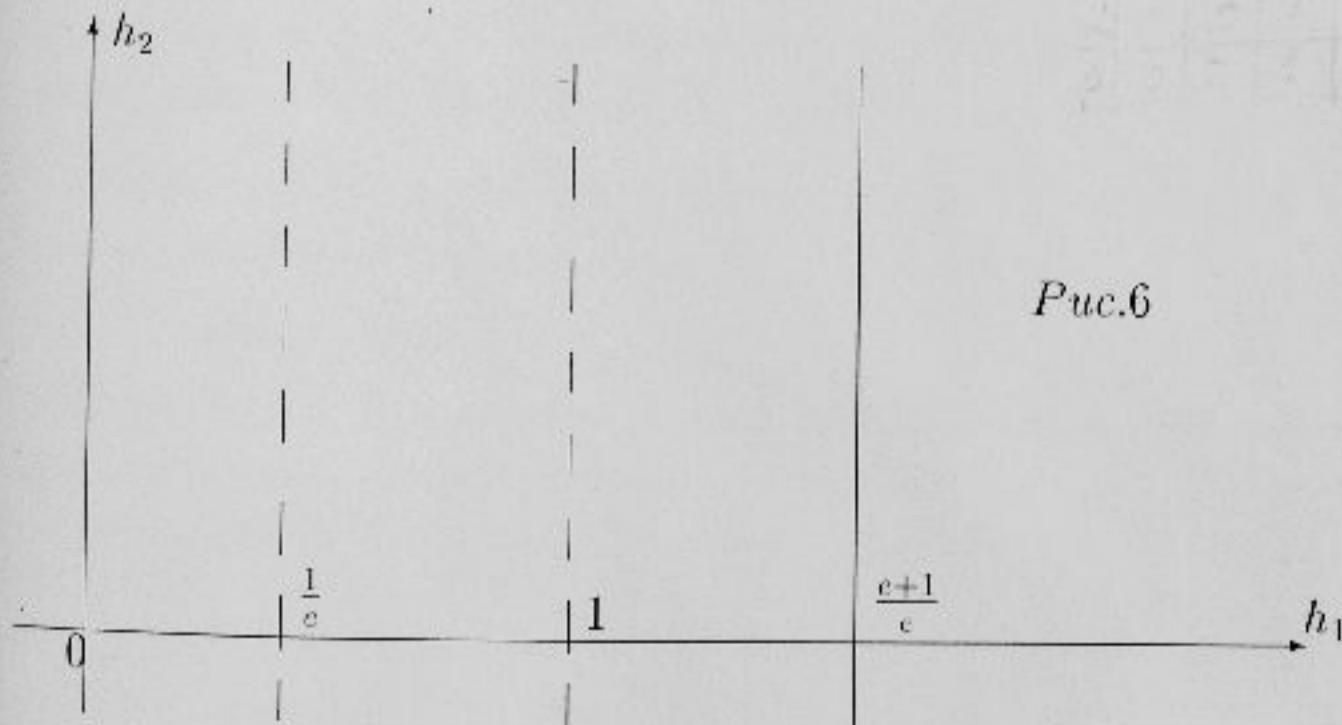


Рис. 6

Теорема 24 *Бифуркационной диаграммой в узком смысле для отображения момента (4.52), (4.53) служит множество Σ , а бифуркационной диаграммой в широком смысле — множество $\hat{\Sigma}_1 \cup \hat{\Sigma}_2 \cup \Sigma$. Образ отображения момента — множество $V_1 \cup V_2 \cup \Sigma$. Прообразом $\Phi^{-1}(w)$ точки w из множестве V_1 и Σ является двумерная плоскость в R^8 , а $\Phi^{-1}(w)$ — пара двумерных плоскостей в R^8 для $w \in V_2$.*

Доказательство. Обозначим $t \stackrel{\text{def}}{=} y_2$. При сделанных выше предположениях с учетом (4.50) функция f_α принимает вид

$$f_\alpha(t) = (t+1) \exp\left(-\frac{t \ln t + 1}{t+1}\right).$$

Исследуя эту функцию, несложно заметить, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_\alpha(t) = 1/e, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_\alpha(t) = 1, \quad \sup_{t > 0} f_\alpha(t) = f_\alpha(e) = 1 + 1/e.$$

Теперь, рассматривая системы (4.50)–(4.51) и (4.52)–(4.53) с учетом вышесказанного и леммы 7 заключаем, что перестройки слоев можно описать так (будем двигаться справа налево по оси h_1): сначала при $h_1 = 1 + 1/e$ плоскость разделяется на две, затем при $h_1 = 1$ две плоскости “слипаются” в одну (см. перестройку на стр. 74), и, наконец, $R^2 \rightarrow \emptyset$ при $h_1 \rightarrow 1/e$. Теорема доказана.

Библиография

- [1] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [2] Козлов В.В. Методы качественного анализа в движении твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [3] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат.наук, 1983, т.38, № 1, с.3–67.
- [4] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики: фундаментальные направления, 1985, т.3, с.5–303.
- [5] Каток С.Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Успехи мат.наук, 1972, т.27, № 2, с.124–133.
- [6] Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Изд-во ЛГУ, 1988.
- [7] Погосян Т.И. Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела // Изв. АН СССР: МТТ, 1980, т.12, с.9–16.
- [8] Ошемков А.А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып.25, ч.2. Изд-во МГУ, 1993, с.23–109

- [9] Ошемков А.А. Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $so(4)$ // Успехи мат.наук, 1987, т.42, № 6, с.199–200.
- [10] Трофимов В.В. Теоретико-групповая интерпретация уравнений магнитной гидродинамики идеально проводящей жидкости // Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск, 1981, № 3, с.118–124.
- [11] Трофимов В.В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре // ДАН СССР, 1982, т.263, № 4, с.812–816.
- [12] Трофимов В.В. Расширения алгебр Ли и гамильтоновы системы // Изв. АН СССР, Серия матем., 1983, т.47, № 6, с.1303–1321.
- [13] Браилов А.В. Инволютивные наборы на алгебрах Ли и расширения кольца скаляров // Вестник МГУ, Сер.1. Математика, механика. 1983, № 1, с.47–51.
- [14] Ле Нгок Тьеуен. Полные инволютивные наборы функций на расширениях алгебр Ли, связанных с алгебрами Фробениуса // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып.22, с.69–106. Изд-во МГУ, 1985.
- [15] Трофимов В.В. Построение канонических координат на орбитах коприсоединенного представления групп Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып.25, ч.2, с.148–151. Изд-во МГУ, 1993.
- [16] Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М., Изд-во МГУ, 1980.
- [17] Трофимов В.В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. М., Изд-во МГУ, 1989.
- [18] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.

- [19] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
- [20] Серр Ж.П. Алгебры Ли и группы Ли. М., Мир, 1969.
- [21] Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 1988.
- [22] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи мат.наук, 1990, т.45, № 2, с.49–77.
- [23] Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 1978.
- [24] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Наука, 1974.
- [25] Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике. М., Изд-во МГУ, 1984.
- [26] Якоби К. Лекции по динамике. М., Л.: ГТТИ, 1933.
- [27] Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат.наук, 1982, т.37, № 5, с.3–49.
- [28] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
- [29] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики: фундаментальные направления, 1987, т.16, с.227–299.
- [30] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Функциональный анализ и его приложения, 1983, т.17, № 1, с.31–39.

- [31] Харламов Е.И., Степанова Л.А. Об изоморфизме некоторых классических задач динамики твердого тела и попытках построения новых решений путем замены переменных // Механика твердого тела, вып.20. Киев, Наукова думка, 1988, с.1–13.
- [32] Лерман Л.М., Уманский Я.Л. Классификация четырехмерных гамильтоновых систем и пуассоновских действий R^2 в расширенных простых окрестностях особых точек // Матем.сб., 1986, № 10, с.89–102.
- [33] Веселов А.П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$ // ДАН СССР, 1983, т.270, № 6, с.1298–1300.
- [34] Берзин Д.В. Инварианты коприсоединенного представления для алгебр Ли некоторого специального вида // Успехи мат. наук, 1996, т.51, № 1, с.141.
- [35] Берзин Д.В. Геометрия орбит тензорных расширений специальных групп Ли // М.,1996. Деп. в ВИНТИ 03.03.97 № 654-В97, 12 с.
- [36] Берзин Д.В. Бифуркационные диаграммы для систем, получаемых тензорным расширением из классических случаев динамики твердого тела // М.,1997. Деп. в ВИНТИ 13.06.97 № 1969-В97, 32 с.
- [37] Berzin D.V. The orbits of the coadjoint representation for Lie groups, which have some special structure // International topological conference dedicated to P.S.Alexandroff's 100th birthday. Moscow, May 27-31, 1996. Abstracts, pp.125-126.
- [38] Gavrilov L. Bifurcations of invariant manifolds in generalized Hénon-Heiles system // Physica D., 1989, V.34 , № 1-2, p.223-239.
- [39] Takiff S.J. Rings of invariant polynomials for a class of Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc., 1971, V.160, p.249–262.
- [40] Fomenko A.T., Trofimov V.V. Integrable systems on Lie algebras and symmetric spaces. — London, New York: Gordon and Breach science publishers, 1988.

- [41] Tsagas G., Kobotis A. Classification of special nilpotent Lie algebras of dimension eight and their invariants // Tensor N.S., 1988, № 47, p.116–118.
- [42] Tsagas G., Kobotis A. Classification of special nilpotent Lie algebras of dimension nine and their invariants // Tensor N.S., 1990, № 50, p.51–54.
- [43] Lerman L.M., Umanskii Ya.L. Structure of the Poisson action of R^2 on a four-dimensional symplectic manifold // Selecta Mathematica Sovietica, 1987, v.6, № 4, p.365–396.
- [44] Williamson J. On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // Amer.J.Math., 58, № 1, 1936, pp.141–163.
- [45] Nguyen Tien Zung. Arnold Liouville with singularities // Preprint SISSA-ISAS, 1995.
- [46] Eliasson L. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals. Elliptic case // Comment.Math.Helvetici, № 65, 1990, pp.4–35.