

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

АПОШКИНА Елена Валерьевна

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЕВ
ТИПА ГОРЯЧЕВА-ЧАПЛЫГИНА
В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

01.01.04 – геометрия и топология

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель -
академик РАН А. Т. ФОМЕНКО

Москва 1997

Содержание

0 Введение	2
0.1 Краткая аннотация работы	2
0.2 Элементы теории Морса интегрируемых гамильтоновых систем	3
0.3 Основные результаты диссертации	6
1 Обобщенный гиростат Горячева–Чаплыгина	12
1.1 Интегрируемые случаи типа Горячева–Чаплыгина в динамике твердого тела	12
1.2 Состолия равновесия обобщенного гиростата	15
1.3 Бифуркационное множество в задаче о движении обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина	18
1.4 Построение топологического инварианта обобщенного гиростата	23
1.5 Топология изоэнергетических поверхностей	29
2 Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина (ОВГЧ) в компактном случае	32
2.1 Топологическая классификация компактного ОВГЧ	32
2.2 Геометрический анализ компактного ОВГЧ. Вывод уравнений разделяющих кривых	34
2.3 Геометрический анализ компактного ОВГЧ для случая $\alpha = 1$	39
3 Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина (ОВГЧ) в некомпактном случае	42
3.1 Разделяющие кривые для некомпактного ОВГЧ	42
3.2 Геометрический анализ некомпактного ОВГЧ	44
3.3 Топология некомпактного ОВГЧ	47
4 Интегрируемый вариант задачи Суслова в поле сил Горячева	54
А Компьютерные эксперименты	58
Библиография	77

Глава 0

Введение

0.1 Краткая аннотация работы

Диссертация посвящена топологической классификации интегрируемых случаев движения твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном потенциальном поле сил. Исследуемые в работе задачи обобщают классические интегрируемые случаи Горячева и Чаплыгина–Сретенского.

Задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой по праву является одной из центральных проблем классической механики. Ее история начинается с работ Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Ими были изучены основные интегрируемые случаи в динамике твердого тела и указаны способы их сведений к квадратурам. Поиски новых интегрируемых случаев были продолжены в работах Горячева, Чаплыгина и Сретенского. В настоящее время представляют интерес различные обобщения классической задачи о движении тела с неподвижной точкой. Так ленинградскими физиками И. В. Комаровым и В. В. Кузнечевым [16] в связи с исследованиями по квантовой механике был открыт новый интегрируемый случай обобщающий задачу о движении классического гиростата Чаплыгина–Сретенского.

Интегрируемый случай, описанный в [16], исследуется в настоящей диссертации с точки зрения теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, построенной в работах А. Т. Фоменко [28, 29, 30, 32]. Задача, рассмотренная в диссертации, сводится к исследованию гамильтоновой системы с сингулярным потенциалом, что ведет к усложнению поведения системы и выделению двух существенно различных с топологической точки зрения случаев: компактному и некомпактному. Топология обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина, где все интегральные многообразия компактны, исследуется методами общей теории перестроек торов Лиувилля [28, 29, 30, 32]. В случае некомпактного волчка Горячева–Чаплыгина фазовая топология системы описывается на основе изучения проекций интегральных многообразий на многообразие Пуассона. В обоих случаях исследована топология фазового пространства системы, получено полное описание интегральных многообразий и их бифуркаций.

0.2 Элементы теории Морса интегрируемых гамильтоновых систем

Гамильтоновы системы занимают особое положение среди систем дифференциальных уравнений. Это связано прежде всего с симметричностью принципа стационарного действия в форме Гамильтона, а также убеждением, что все физические закономерности можно вывести из условия стационарности некоторого соответствующим образом подобранным функционала.

В свою очередь, особое место среди гамильтоновых систем занимают интегрируемые гамильтоновы системы, поскольку зачастую физические задачи содержат скрытые симметрии, и поскольку интегрируемые гамильтоновы системы еще допускают качественный и количественный анализ.

Напомним коротко определение интегрируемой гамильтоновой системы и сформулируем классическую теорему Лиувилля, описывающую топологию фазового пространства интегрируемой гамильтоновой системы (в четырехмерном случае).

Пусть M^4 – гладкое четырехмерное многообразие. Симплектической структурой на M^4 называется замкнутая невырожденная 2-форма ω^2 . Форма ω^2 позволяет построить естественный изоморфизм между касательным и кокасательным расслоениями многообразия M^4

$$I : T_x^* M^4 \rightarrow T_x M^4.$$

Пусть H – гладкая функция на M^4 . Поскольку дифференциал H является ковектором, то IdH определяет гладкое векторное поле на M^4 , называемое гамильтоновым. Скобкой Пуассона двух гладких функций F и G называется гладкая функция

$$\{F, G\} := \omega^2(IdG, IdF).$$

Будем говорить, что функция K есть первый интеграл, если она постоянна на траекториях системы или, что то же самое, если

$$\omega^2(IdH, IdK) \equiv 0.$$

Гамильтонова система на четырехмерном симплектическом многообразии называется интегрируемой по Лиувиллю, если для нее существует функционально независимый с гамильтонианом H дополнительный первый интеграл. Совместная поверхность уровня двух первых интегралов H и K

$$\{H = \text{const}, K = \text{const}\}$$

называется неособой, если H и K функционально независимы. Эта совместная поверхность уровня называется также интегральным многообразием, так как траектории системы целиком лежат на ней.

С первыми интегралами H и K естественно связано отображение момента. Сопоставим каждой точке x фазового пространства M^4 пару чисел – значений интегралов в этой точке: $h = H(x)$ и $k = K(x)$. Построили отображение M фазового пространства в плоскость (h, k) , которое и называется отображением момента. Точка (h_0, k_0) , таким образом, соответствует совместная поверхность уровня $\{H = h_0, K = k_0\}$. Бифуркационным множеством системы называется

множество точек Σ , над которым отображение момента M не является локально-триангульным.

Топологию интегральных многообразий и их бифуркации удобно изучать, исследуя критические точки отображения момента. В простейшем случае некритической точки отображения момента топология системы описывается теоремой Лиувилля [5, 31]. Теорема гласит, что связная компонента прообраза некритической точки отображения момента диффеоморфна двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$ в компактном случае (т.е. когда прообраз компактен) и цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$ или плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в некомпактном случае при условии полноты всекторных полей на поверхности уровня. Причем в компактном случае фазовый поток на торе является периодическим или условно-периодическим, т.е. на торе можно ввести координаты, такие что поток имеет постоянную скорость в этих координатах.

Однако в приложениях часто встречаются ситуации, когда гамильтониан гладко зависит от параметров, при некоторых значениях которых совместная поверхность уровня двух интегралов уже становится особой, и теорема Лиувилля не дает никакой информации о топологии системы. Аналогичная ситуация возникает при исследовании многомерных интегрируемых гамильтоновых систем путем понижения их порядка с помощью дополнительных интегралов. Кроме того, теорема Лиувилля не содержит информации о том, как торы глобально вложены в фазовое пространство.

Эти вопросы привели к созданию теории типа Морса интегрируемых гамильтоновых систем в работах А. Т. Фоменко [28, 29, 30, 32]. Опишем здесь коротко ее основные положения.

Поскольку K дополнительный первый интеграл, находящийся с H в инволюции, то можно рассмотреть ограничение гамильтоновой системы на трехмерную поверхность

$$Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = \text{const}\},$$

называемую изоэнергетической поверхностью. В дальнейшем будем рассматривать только некритические поверхности Q^3 , то есть те, на которых $\text{grad } H \neq 0$.

Определение 0.2.1 Будем говорить, что гладкий интеграл K боттовский на поверхности Q^3 , если все критические точки функции K образуют невырожденные подмногообразия, называемые критическими.

Определение 0.2.2 Критическое подмногообразие для функции K называется невырожденным, если гессиан $d^2 K$ невырожден на плоскостях, нормальных к подмногообразию.

Утверждение 0.2.1 Если Q^3 - компактное многообразие, то критическими подмногообразиями могут быть только торы, бутылки Клейна и окружности.

Будем называть систему интегрируемой на изоэнергетической поверхности Q^3 в боттовском смысле, если дополнительный интеграл боттовский. Напомним [8], что система называется перезонансной на Q^3 , если в Q^3 всюду плотны торы Лиувилля, на которых траектории системы образуют плотные иррациональные обмотки.

Определение 0.2.3 Две интегрируемые в боттовском смысле нерезонансные гамильтоновы системы v_1 и v_2 на многообразиях Q_1, Q_2 называются топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм

$$h : Q_1 \rightarrow Q_2,$$

переводящий торы Лиувилля системы v_1 в торы Лиувилля системы v_2 , а изолированные критические окружности – в изолированные критические окружности с сохранением ориентации.

Определим теперь топологический инвариант Фоменко (так называемые слова-молекулы и меченные слова-молекулы), предложенный для классификации интегрируемых гамильтоновых систем.

Основным понятием теории классификации интегрируемых гамильтоновых систем является понятие буквы-атома.

Определение 0.2.4 Пара (P, Γ) , где P – компактная ориентируемая поверхность, а Γ – непустой конечный связный граф, лежащий в P , называется буквой-атомом, если выполнены следующие условия:

1. степень каждой вершины графа равна 0, 2 или 4;
2. каждая связная компонента разности $P \setminus \Gamma$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$;
3. множество колец, из которых состоит разность $P \setminus \Gamma$, можно разбить на положительные и отрицательные кольца так, чтобы к каждому ребру графа Γ примыкало ровно одно положительное и одно отрицательное кольцо.

Буквы-атомы кодируют особенности Лиувиллева слоения. Рассмотрим содержащую критические точки связную компоненту K_c поверхности уровня $K^{-1}(c)$ интеграла K и отвечающую ей букву-атом (P_c, Γ_c) .

Рассмотрим теперь все связные компоненты критических поверхностей K_i и отвечающие им буквы-атомы (P_i, Γ_i) . Словом-молекулой будем называть граф G , построенный следующим образом:

1. вершинам графа G сопоставлены буквы-атомы (P_i, Γ_i) ;
2. из каждой вершины (P_i, Γ_i) выходят отрезки, соответствующие граничным окружностям поверхности P_i ;
3. два таких отрезка образуют ребро графа G , если соответствующие им два тора Лиувилля лежат в одной связной компоненте многообразия $Q^3 \setminus (\cup K_i)$.

Определение 0.2.5 Две интегрируемые системы на Q_1 и Q_2 называются грубо эквивалентными, если лиувиллево слоение на Q_1 можно получить, разрезая Q_2 по некоторому лиувиллеву тору и склеивая возникшие граничные торы по некоторому диффеоморфизму.

Теорема 0.2.1 (А. Т. Фоменко) I. Существует алгоритм, сопоставляющий каждой интегрируемой гамильтоновой системе v с двумя степенями свободы ее неоснащенную W и оснащенную W^* молекулы.

II. Две интегрируемые системы v_1 и v_2 грубо топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $W(v_1) = W(v_2)$.

III. Две системы v_1 и v_2 топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $W^(v_1) = W^*(v_2)$.*

IV. Множество всех классов эквивалентностей дискретно.

V. Существует алгоритм, эффективно описывающий все значения, принимаемые инвариантами W и W^ (что дает, в частности, список всех интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы).*

0.3 Основные результаты диссертации

В настоящей работе исследуется задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в потенциальном поле сил типа Горячева

$$\Pi = -r\gamma_1 + \frac{\alpha}{\gamma_3^2},$$

и ее обобщение на случай движения гиростата. Здесь, как обычно, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор вертикали, заданный в системе координат, связанной с главными осями инерции; r — произведение веса тела на расстояние от неподвижной точки до центра масс (параметр Пуанкаре). Таким образом, задача зависит от двух параметров: параметра потенциала α и гиростатического параметра λ . Рассматриваемый потенциал определяет богатую геометрию системы: при неотрицательных значениях параметра α все интегральные многообразия будут компактны, при отрицательных значениях α возникают некомпактные многообразия. Классическая задача о движении гиростата в поле сил тяжести (интегрируемый случай Сретенского), соответствующая $\alpha = 0$, исследована в работе М. П. Харламова [34].

Обобщенный гиростат Горячева–Чаплыгина

Глава I посвящена изучению топологии фазового пространства гамильтоновой системы, описывающей движение обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина, задаваемого положительными значениями параметра α .

В первом параграфе подробно описана постановка задачи и выполнена необходимая замена переменных, позволяющая записать уравнения движения обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина (более коротко: ОГГЧ) в классических переменных, более удобных для качественного анализа задачи.

Во втором параграфе определяются состояния равновесия уравнений Эйлера–Пуассона, которым соответствуют равномерные вращения или состояния покоя тела. Этим точкам отвечают особые точки на интегральных многообразиях.

В третьем параграфе строится бифуркационное множество отображения момента на плоскости констант первых интегралов (h, k) , для чего вычисляется множество точек фазового пространства задачи, где интегралы H и K функционально зависят. В бифуркационное множество входят четыре кривых, взаимное расположение которых зависит от параметров задачи α и λ . В результате получается бифуркационная диаграмма совместных уровней

$$J_{hk} = \{H = h, K = k\}$$

интегралов H и K – разбиение плоскости констант интегралов на области, в пределах каждой из которых топологический тип интегральных многообразий не меняется. Показано, что существует три качественно различных типа бифуркационных диаграмм.

В четвертом параграфе получена топологическая классификация гамильтоновой системы, описывающей движение обобщенного гиростата, с точностью до групповой топологической эквивалентности.

Теорема 0.3.1 Для обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина существует три класса грубо топологически эквивалентных на Q^3 систем, соответствующих молекулам, приведенным на рис. 0.1.

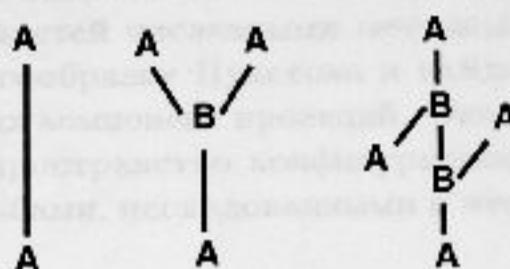


Рис. 0.1:

В параграфе описаны критические интегральные поверхности и все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента, исследован вопрос о боттовости дополнительного интеграла. Показано, что дополнительный интеграл является боттовским на почти всех изоэнергетических поверхностях.

В пятом параграфе на основе обобщения методики Смейла [23] на системы с гироскопическими силами [34] исследуется топология поверхностей постоянной энергии $Q^3 = \{H = h\}$. Строится бифуркационная диаграмма уровней $\{H = h\}$ на плоскости (λ, h) при условии $\alpha = \text{const}$, которая оказывается одинаковой для всех значений α . Поверхности постоянной энергии оказываются гомеоморфны либо трехмерной сфере S^3 , либо произведению двумерной сферы на окружность $S^2 \times S^1$.

Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина в компактном случае

Вторая глава посвящена рассмотрению обобщенного волчка Горячева–Чаплыгина (более коротко: ОВГЧ) в компактном случае (при положительных значениях параметра α). Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 0.3.2 Для обобщенного волчка Горячева–Чаплыгина существует два класса грубо топологически эквивалентных на Q^3 систем, соответствующих молекулам, приведенным на рис. 0.2.

Этот результат получен в первом параграфе второй главы.

Во втором и третьем параграфах проводится геометрический анализ обобщенного волчка Горячева–Чаплыгина. Во втором параграфе главы для компактного ОВГЧ выводятся уравнения кривых, разделяющих на плоскости констант первых интегралов (h, k) области с одинаковым типом областей возможности движения.

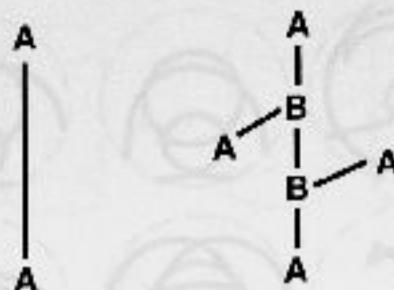


Рис. 0.2:

В третьем параграфе разбиение плоскости параметров (h, k) на области с неизменным типом областей возможности движения проведено на примере случая $\alpha = 1$. Для каждой из областей численными методами определен соответствующий тип проекции на многообразие Пуассона и найдено число допустимых скоростей в каждой из связных компонент проекций. Оказывается, что интегральные торы проектируются на пространство конфигурационных переменных $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ шестью различными способами, исследованными в этом параграфе.

Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина в некомпактном случае

Третья глава диссертации посвящена исследованию обобщенного волчка Горячева–Чаплыгина с некомпактными интегральными многообразиями. Существенная роль в анализе задачи отводится численным методам. Это связано с исключительной громоздкостью аналитических выражений для разделяющих кривых.

В первом параграфе получены уравнения кривых, дополняющих множество разделяющих кривых, где происходят перестройки областей возможности движения, в некомпактном случае. Эти кривые найдены на основе анализа взаимного расположения областей возможности движения U_{hk} и особого уровня $\{\gamma_3 = 0\}$.

Далее ввиду технической сложности задачи специфика некомпактного случая исследуется на примере движения волчка при $\alpha = -1$, хотя полученные формулы позволяют провести анализ для произвольных значений параметра. Интегральные многообразия в этом случае строятся на основе изучения их проекций на многообразие Пуассона.

Во втором параграфе построено множество разделяющих кривых и определены все типы проекций интегральных многообразий на пространство конфигурационных переменных $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – верхнюю единичную полусферу $\{\gamma_3 > 0\}$. Полученные проекции показаны на рис. 0.3 в координатах (γ_1, γ_2) , где пунктирной линией изображена граничная окружность $\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1\}$. В каждой из связных компонент определено число допустимых скоростей.

Большинство из приведенных проекций соответствуют существованию различных типов проекций диффеоморфных между собой интегральных многообразий. Часть возникающих перестройк, однако, связана с некомпактностью конфигурационного пространства и отражает специфику некомпактного случая. Такие перестройки реализуются как выход части границы проекции интегрального многообразия за пределы единичного круга $\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 < 1\}$. В фазовом пространстве при этом "вырезается" соответствующая часть интегрального многообразия. При

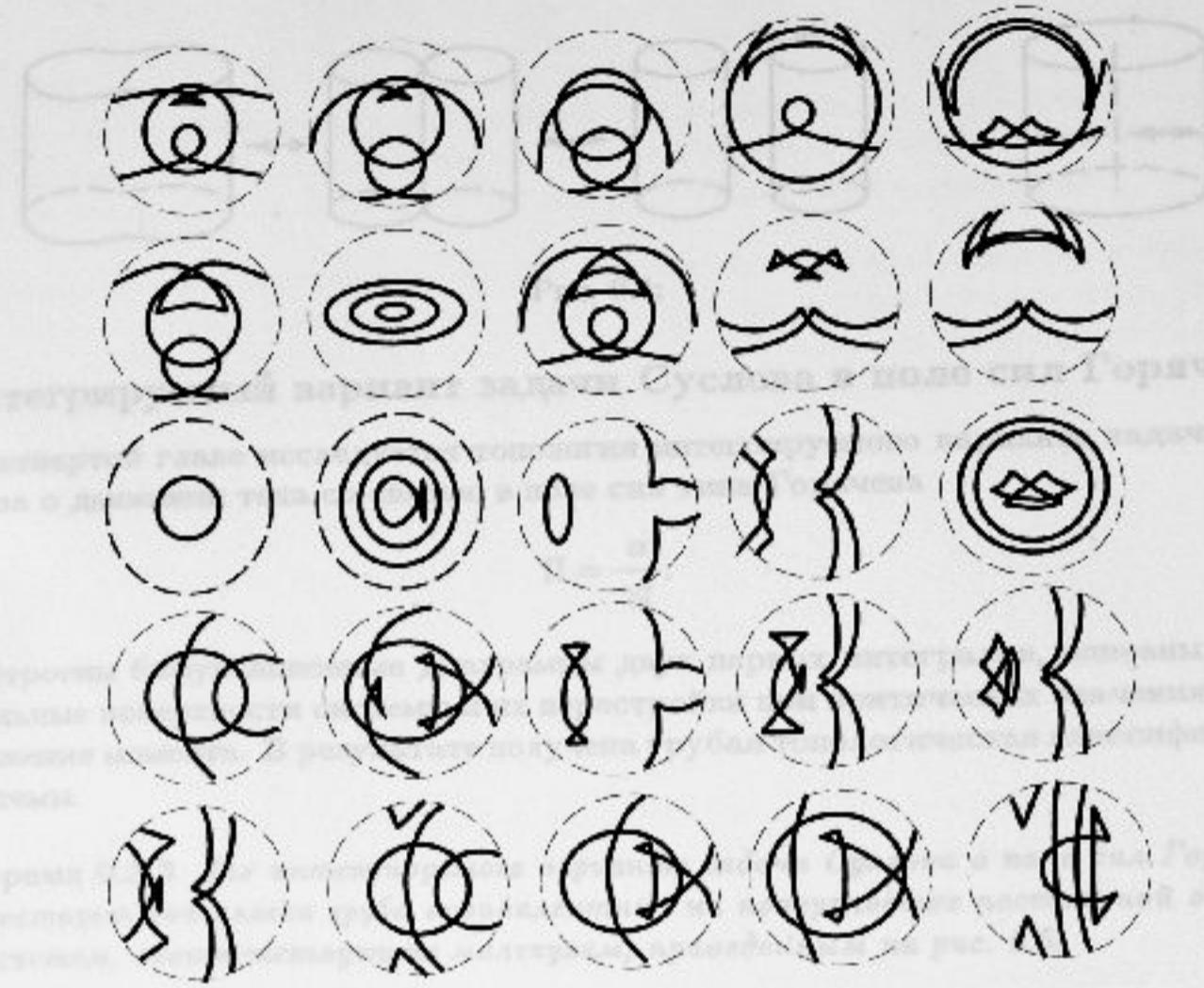


Рис. 0.3:

в этом тип многообразия может измениться, а может и остаться прежним. Только вторая ситуация возникает в настоящей задаче. Описание всех типов областей возможности движения и их перестроек представлены в втором параграфе. Эти результаты получены на основе анализа численных экспериментов, выполненных с помощью пакета символьных вычислений Maple. Просекции интегральных многообразий, полученные численными методами, представлены в приложении А.

На основе этих результатов в третьем параграфе построена бифуркационная диаграмма некомпактного ОВГЧ для $\alpha = -1$, соответствующая перестройкам интегральных многообразий, и описаны интегральные многообразия задачи. Бифуркационная диаграмма в данном случае совпадает, как и в компактном случае, с множеством критических значений отображения момента. Все интегральные многообразия J_{hk} оказываются некомпактными и диффеоморфны невязкому объединению цилиндров:

$$\{\mathbf{R} \times S^1\}, \quad 2\{\mathbf{R} \times S^1\}, \quad 3\{\mathbf{R} \times S^1\}.$$

Перестройки интегральных многообразий, возникающие в этой задаче, представляют собой некомпактный аналог перестроек торов Лиувилля. В случае некомпактного ОВГЧ реализуется две перестройки: рождение цилиндра из прямой и перестройка одного цилиндра в два вдоль критической прямой (и им обратные). Обе схематично показаны на рис. 0.4.

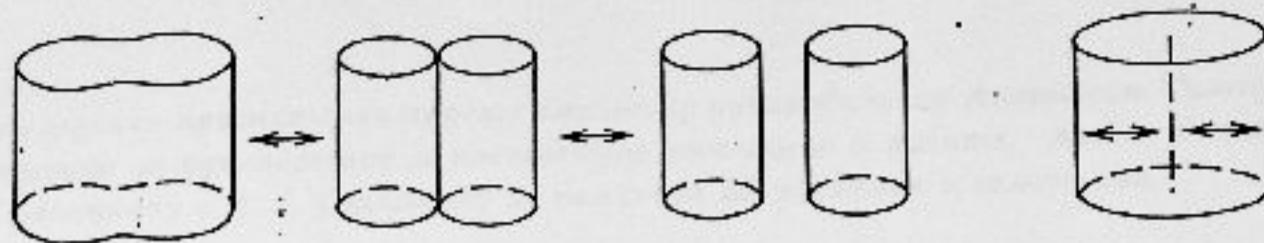


Рис. 0.4:

Интегрируемый вариант задачи Суслова в поле сил Горячева

В четвертой главе исследуется топология интегрируемого варианта задачи Суслова о движении тела со связью в поле сил типа Горячева

$$\Pi = \frac{\alpha}{\gamma_3^2}.$$

Построены бифуркационные диаграммы двух первых интегралов, описаны интегральные поверхности системы и их перестройки при критических значениях отображения момента. В результате получена грубая топологическая классификация системы.

Теорема 0.3.3 Для интегрируемого варианта задачи Суслова в поле сил Горячева существует два класса грубо эквивалентных на поверхностях постоянной энергии Q^L систем, соответствующих молекулам, приведенным на рис. 0.5.

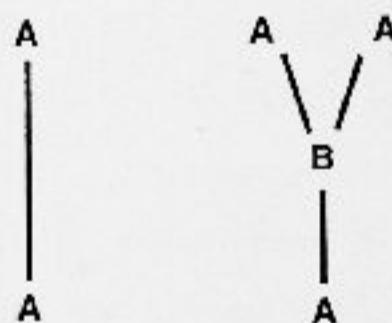


Рис. 0.5:

Компьютерные эксперименты

В приложении А приводятся графические результаты компьютерных экспериментов по исследованию областей возможности движения для некомпактного волчка Горячева-Чаплыгина, получающегося при $\alpha = -1$. На рисунках изображены проекции интегральных поверхностей на полусферу $\{\gamma_3 > 0\}$ в координатах γ_1, γ_2 .

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Анатолию Тимофеевичу Фоменко за руководство и постоянное внимание к работе. Автор благодарит А. В. Болсунову и А. А. Ошемкову за полезные обсуждения и замечания.

Все компьютерные эксперименты, результаты которых представлены в диссертации, были выполнены автором в течение его работы в университете Айзу, Япония. Автор благодарит профессора Т. Л. Куни и сотрудников лаборатории компьютерных и инженерных методов за помощь и поддержку в работе.

Горячев А.А.

3.1 Математическое описание метода Горячева-Чаплыгина в динамике зародыша тела

Математическое описание метода Горячева-Чаплыгина в динамике зародыша тела включает в себя описание гидродинамики течения жидкости в окрестности зародыша тела, описание динамики зародыша тела в жидкости, описание взаимодействия зародыша тела с жидкостью. Рассмотрим общий метод математического описания динамики зародыша тела в жидкости, а затем рассмотрим его применение для описания динамики зародыша тела в жидкости.

Для описания динамики зародыша тела в жидкости необходимо решить задачу о движении зародыша тела в жидкости. Для этого необходимо решить задачу о движении зародыша тела в жидкости.

Для описания динамики зародыша тела в жидкости необходимо решить задачу о движении зародыша тела в жидкости. Для этого необходимо решить задачу о движении зародыша тела в жидкости.

Для описания динамики зародыша тела в жидкости необходимо решить задачу о движении зародыша тела в жидкости. Для этого необходимо решить задачу о движении зародыша тела в жидкости. Для этого необходимо решить задачу о движении зародыша тела в жидкости.

Следует отметить, что метод Горячева-Чаплыгина не является единственно возможным методом описания динамики зародыша тела в жидкости. Существуют другие методы, такие как методы, основанные на использовании различных приближений и аппроксимаций.

Глава 1

Обобщенный гиросват Горячева–Чаплыгина

1.1 Интегрируемые случаи типа Горячева–Чаплыгина в динамике твердого тела

Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном поле потенциальных и гироскопических сил. Обозначим через $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ тензор инерции тела, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор мгновенной угловой скорости в системе координат, связанной с главными осями инерции, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали заданный в подвижной системе координат. Наиболее общие уравнения движения твердого тела в поле осесимметричных потенциальных и гироскопических сил были получены М. П. Харламовым [34]:

$$A\dot{\omega} - [A\omega + \lambda + (\Lambda - E \cdot \text{div}\lambda)] \times \omega + \gamma \times \text{grad} \Pi, \quad (1.1)$$

где $\Pi = \Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – потенциальная энергия тела, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента, $\Lambda^T = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \gamma_j} \right)$ – матрица Якоби, E – единичная матрица, и через \times обозначено векторное произведение в \mathbf{R}^3 . Система (1.1) совместно с уравнениями Пуассона описывает многие задачи динамики твердого тела. В случае $\lambda = \text{const}$ система (1.1) принимает вид

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \gamma \times \text{grad} \Pi \quad (1.2)$$

и описывает движение гиросата в осесимметричном потенциальном поле сил. При $\lambda = 0$ мы получаем уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в произвольном осесимметричном потенциальном поле сил. Система (1.1) обладает следующими интегралами: $H = ((A\omega, \omega)/2 + \Pi)$ – интеграл энергии, $G = (A\omega + \lambda, \gamma)$ – интеграл площадей, $\Gamma = (\gamma, \gamma)$ – геометрический интеграл, поскольку γ – единичный вектор вертикали. Оказывается, система (1.1) гамильтонова на совместных поверхностях уровня геометрического интеграла и интеграла площадей относительно некоторой симплектической структуры, приведенной в [34].

Система (1.1) может быть представлена в виде уравнений Эйлера на алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства [31]. Системы такого вида гамильтоновы на четырехмерных орбитах коприсоединенного представления

алгебры Ли $e(3)$. Таким образом, для интегрируемости системы по Лиувиллю необходимо наличие одного дополнительного интеграла.

Задача о движении классического волчка Горячева–Чаплыгина [12] и ее обобщение на случай движения гиростата [25] хорошо известна и исследовалась с различных точек зрения в работах [6], [14], [10], [15]. Наиболее подробный анализ фазовой топологии этих интегрируемых случаев выполнен М. П. Харламовым [34]. В работе А. А. Ошемкова [20] получена полная топологическая классификация (с точностью до грубой эквивалентности) изоэнергетических поверхностей интегрируемого случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского.

Существует, однако, малоизвестный интегрируемый случай, открытый Д. Н. Горячевым [13], который представляет собой обобщение классического случая интегрируемости Горячева–Чаплыгина. В этом случае моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A_1 = A_2 = 4A_3$, то есть эллипсоид инерции тела относительно неподвижной точки есть эллипсоид вращения, и центр тяжести тела лежит в плоскости экватора этого эллипсоида. Система оказывается интегрируемой на поверхности $G = 0$ в поле сил

$$\Pi = -r\gamma_1 + \frac{\alpha}{\gamma_3^2}, \quad (1.3)$$

где r – параметр Пуанкаре (произведение веса тела на расстояние от центра масс до неподвижной точки), α – произвольная постоянная. Сделаем замену переменных, полагая $\omega_i = \sqrt{r/A_3}\hat{\omega}_i$, (для простоты далее будем обозначать новые переменные теми же буквами). Тогда гамильтониан и дополнительный интеграл системы с точностью до постоянного множителя ($\hat{H} = H/r$, $\hat{\alpha} = \alpha/r$) будут иметь вид:

$$H = 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \gamma_1,$$

$$K = 2\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + 2\omega_1\gamma_3.$$

Сила, обуславливающая наличие члена с коэффициентом α , имеет постоянное направление, параллельное неподвижной в пространстве оси $O\zeta$, и приложена к одной из точек оси вращения тела Oz . По величине эта сила обратно пропорциональна кубу расстояния от точки ее приложения до неподвижной в пространстве координатной плоскости $\xi O\eta$ (здесь $Oxyz$ – система координат, соответствующая главным осям инерции тела, $O\xi\eta\zeta$ – неподвижная в пространстве система координат с углами Эйлера ϕ, θ, ψ).

В 1978 г. И. В. Комаров и В. В. Кузнецов [16] обобщили задачу о движении волчка Горячева–Чаплыгина [13] на случай движения гиростата. В работе [16] рассматривается стандартная динамическая система на орбитах алгебры Ли $e(3)$, генераторы которой удовлетворяют скобкам Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

где $\varepsilon_{ijk} = 0$, если какис-нибудь два индекса совпадают, $\varepsilon_{ijk} = 1$, если перестановка (i, j, k) четная, и $\varepsilon_{ijk} = -1$, если перестановка (i, j, k) нечетная. При фиксированных значениях инвариантов алгебры Ли

$$\rho = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad \sigma = x_1J_1 + x_2J_2 + x_3J_3 = 0$$

гамильтониан обобщенного гиростата имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2) - bx_1 + pJ_3 + \frac{\alpha}{x_3^2}, \quad (1.4)$$

где b определяет мощность поля, p – гиростатический параметр. Когда $\alpha = 0$, $p = 0$ гамильтониан (1.3) задает волчок Горячева–Чаплыгина, при $\alpha = 0$, $p \neq 0$ – гиростат Горячева–Чаплыгина (или интегрируемый случай Сретенского). Тогда для произвольных параметров на орбите $\sigma = 0$ с гамильтонианом H коммутирует интеграл

$$K = (2J_3 + p)(J_1^2 + J_2^2 + \frac{2\alpha}{x_3^2}) + 2bx_3J_1.$$

Можно построить изоморфизм, приводящий систему (1.3) к виду (1.1) с потенциалом (1.3), задаваемый формулами:

$$J_1 = -4A_3\omega_1, \quad J_2 = -4A_3\omega_2, \quad J_3 = -(A_3\omega_3 + \lambda), \quad x_i = \gamma_i,$$

с $b = 4r$, $p = 4\lambda$. Окончательно, гамильтониан и первый интеграл примут вид:

$$H = 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \gamma_1,$$

$$K = 2(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + 2\omega_1\gamma_3.$$

В дальнейшем уравнения движения обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина (коротко: ОГГЧ) будем представлять не как уравнения Эйлера на алгебре $e(3)$, а в виде (1.1).

Уравнения Эйлера–Пуассона, движения обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\dot{\omega}_1 = 3\omega_3\omega_2 - \lambda\omega_2 - \gamma_2\frac{2\alpha}{\gamma_3^2}; \\ 4\dot{\omega}_2 = -3\omega_1\omega_3 + \lambda\omega_1 - \gamma_3 + \gamma_1\frac{2\alpha}{\gamma_3^2}; \\ \dot{\omega}_3 = \gamma_2; \\ \dot{\gamma}_1 = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2; \\ \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3; \\ \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1; \end{array} \right.$$

Эти уравнения обладают следующими первыми интегралами:

$$H = 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \gamma_1;$$

$$K = 2(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + 2\omega_1\gamma_3;$$

$$G = 4(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + (\omega_3 + \lambda)\gamma_3 \equiv 0$$

$$\Gamma = \sum \gamma_i^2 \equiv 1,$$

которые определяют динамическую систему на четырехмерном симплектическом многообразии, задаваемом уравнениями

$$\{G = 0, \Gamma = 1\}.$$

Многообразие M^4 , на котором задана исследуемая система, получается удалением уровня $\{\gamma_3 = 0\}$, где потенциал имеет особенность. Таким образом, M^4 представляет собой две копии $\dot{D}^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \times \mathbf{R}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, где $\dot{D}^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — открытый диск. Эти многообразия переходят друг в друга при линейном ортогональном преобразовании

$$\mu : (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mapsto (-\omega_1, -\omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3),$$

сохраняющем первые интегралы системы. Поэтому в дальнейшем разумно рассматривать систему на одном из дисков, считая, например, $\gamma_3 > 0$.

При отрицательных значениях α среди интегральных многообразий заведомо будут некомпактные. В случае $\alpha > 0$, как легко проверить, отображение момента будет собственным (т. е. прообраз компакта компактен) и, следовательно, справедливо следующее

Утверждение 1.1.1 При $\alpha > 0$ связные компоненты прообраза в некритических точках отображения момента будут торами.

Доказательство. Гамильтониан H переводит границу многообразия M^4 в бесконечно удаленные точки.

Как легко видеть, в этом случае γ_3 отделена от нуля.

1.2 Состояния равновесия обобщенного гиростата

Определим неподвижные точки уравнений Эйлера–Пуассона. Эти точки состояния равновесия уравнений Эйлера–Пуассона соответствуют состояниям покоя твердого тела, а также вращениям тела с постоянной угловой скоростью вокруг вертикали.

Приравняв нуль правые части системы Эйлера–Пуассона, приходим к уравнениям:

$$\begin{cases} (3\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \gamma_3 - 2\alpha\gamma_1/\gamma_3^3 = 0, \\ (3\omega_3 - \lambda)\omega_2 - 2\alpha\gamma_2/\gamma_3^3 = 0, \\ \gamma_2 = 0, \\ \omega_2\gamma_3 = \omega_1\gamma_1 = 0, \\ \omega_3\gamma_1 = \omega_1\gamma_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

При $\lambda = 0$ это уравнение имеет одинственный корень $\omega_3 = 0$ для всех значений α , при $\lambda > 0$ у уравнения (1.7) всегда существует единственный отрицательный корень. Значение α как функции от параметра λ , при котором у многообразия $H(\omega_3)$ появляется притягивающий корень, также определяется однозначно.

Найдем теперь линейное сопряжение между параметрами α и λ . Методом по симметрическому принципу систему исходных уравнений сводится к линейному и

Учитывая уравнение $G = 0$ и ограничение $\gamma_3 \neq 0$, находим

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{16\omega_3^2}{(3\omega_3 - \lambda)^2(4\omega_3^2 - 2\alpha)}, \\ \gamma_2 = 0, \\ \gamma_3 = \left(\frac{4\omega_3}{3\omega_3 - \lambda}\right)^{1/2}, \\ \omega_1 = -\frac{\omega_3}{4\omega_3^2 - 2\alpha} \left(\frac{4\omega_3}{3\omega_3 - \lambda}\right)^{3/2}, \\ \omega_2 = 0. \end{cases}$$

Условие единичности вектора γ с учетом равенства $\gamma_2 = 0$ определяет величину ω_3 как корень уравнения

$$P(\omega_3) = 16^2\omega_3^4 + (3\omega_3 - \lambda)^3(\omega_3 + \lambda)(4\omega_3^2 - 2\alpha)^2 = 0. \quad (1.5)$$

При этом берутся только корни, удовлетворяющие неравенству

$$\omega_3(3\omega_3 - \lambda) > 0. \quad (1.6)$$

Решения уравнения (1.5) удобно представлять как пересечение графиков функций

$$g_1 = (3\omega_3 - \lambda)^3(\omega_3 + \lambda)(4\omega_3^2 - 2\alpha)^2 \quad \text{и} \quad g_2 = -16^2\omega_3^4,$$

рассматривая при этом, как следует из (1.5), (1.6), только значения $\omega_3 < 0$. Анализируя все возможные взаимные расположения графиков функций g_1 и g_2 при различных значениях параметров α и λ , можно видеть, что уравнение (1.5) при условии (1.6) всегда имеет один действительный отрицательный корень если $2\lambda^2 > \alpha$, и может иметь один, два или три различных действительных отрицательных корня при условии $2\lambda^2 \leq \alpha$. Разделяющие случаи получаем когда многочлен $P(\omega_3)$ имеет кратный корень, т. е. $P(\omega_3) = 0$, $P'(\omega_3) = 0$. Последние два условия эквивалентны системе

$$\begin{cases} P(\omega_3) = 0, \\ 6\omega_3^4 + 4\lambda\omega_3^3 - \alpha\lambda^2 = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

которая дает соотношение между α и λ . Выражая из второго уравнения

$$\alpha = 2\frac{\omega_3^3}{\lambda^2}(3\omega_3 + 2\lambda),$$

и подставляя это значение в $P(\omega_3)$, получаем уравнение, определяющее величину ω_3 :

$$16\lambda^4 + (3\omega_3 - \lambda)^5(\omega_3 + \lambda)^3 = 0. \quad (1.7)$$

При $\lambda = 0$ это уравнение имеет единственный корень $\omega_3 = 0$ для всех значений α , при $\lambda > 0$ у уравнения (1.7) всегда существует единственный отрицательный корень. Значение α как функции от параметра λ , при котором у многочлена $P(\omega_3)$ возникает кратный корень, также определяется однозначно.

Найдем теперь явное соотношение между параметрами α и λ . Методом последовательного понижения степеней исходная система сводится к линейному и

квадратному уравнению по ω_3 . Выразив значение ω_3 , получаем искомое уравнение:

$$\begin{aligned} 2304\lambda^{16} - 55296\alpha\lambda^{14} + (546048\alpha^2 - 114688)\lambda^{12} - (1199088\alpha \\ + 2838528\alpha^3)\lambda^{10} + (1966080 - 50294784\alpha^2 + 8229600\alpha^4)\lambda^8 \\ + (76267520\alpha^3 - 12970368\alpha^5 - 26738688\alpha)\lambda^6 + (10182672\alpha^6 \\ - 28283904\alpha^4 + 210173952\alpha^2)\lambda^4 + (-3779136\alpha^7 + 63700992\alpha^3 \\ + 100663296\alpha)\lambda^2 + 531441\alpha^8 + 5038848\alpha^6 + 17915904\alpha^4 \\ + 28311552\alpha^2 + 16777216 = 0 \end{aligned}$$

На рис. 1.1 изображена полученная аналитическими и численными методами кривая кратных корней многочлена $P(\omega_3)$ в плоскости (λ^2, α) .

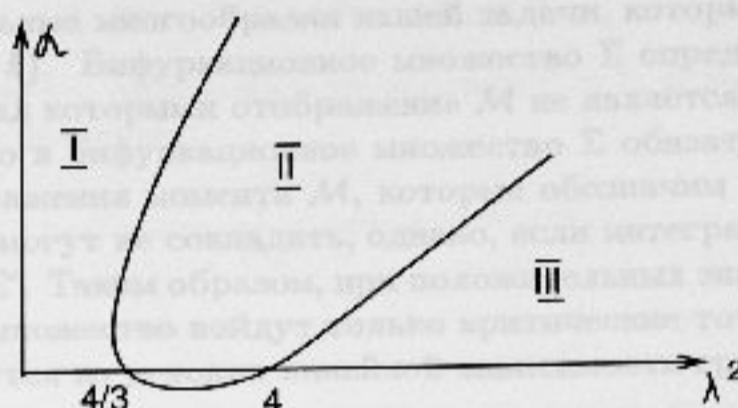


Рис. 1.1:

Эта кривая пересекает ось абсцисс λ^2 в точках $\lambda^2 = 4$, $\lambda^2 = 4/3$ и имеет асимптоты $\alpha = 2\lambda^2$, $\alpha = 2\lambda^2/9$. В области I многочлен $P(\omega_3)$ всегда имеет один действительный отрицательный корень, в области II у многочлена всегда три действительных отрицательных корня. При остальных значениях параметров (область III на рис. 1.1) многочлен $P(\omega_3)$ может иметь либо один, либо три отрицательных корня. Таким образом гамильтониан H может иметь одну, две (разделяющий случай) или три критических точки на M^4 . Значения постоянных первых интегралов в этих точках следующие:

$$h = \frac{1}{4}(-3\omega_3^2 - 4\lambda\omega_3 + \lambda^2) + \frac{\alpha}{8\omega_3^2}(9\omega_3^2 - \lambda^2), \quad (1.8)$$

$$k = \omega_3^2(\omega_3 + \lambda) - \frac{\alpha}{4\omega_3}(3\omega_3 - \lambda)(\omega_3 + \lambda), \quad (1.9)$$

если $\lambda \neq 0$;

$$h = \frac{\alpha}{\gamma_3^2} - \frac{\gamma_3^4}{2\alpha}, \quad k = 0, \quad (1.10)$$

если $\lambda = 0$.

Комбинируя первое трехуравненное система с коэффициентами ω_3 , ω_3 , $2(\omega_3 - \lambda)$ и последнее уравнение с коэффициентом α , получаем значение ω_3 . После подстановки

1.3 Бифуркационное множество в задаче о движении обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина

Исследование свойств отображения момента в интегрируемых задачах динамики твердого тела является важной частью изучения топологии системы. Бифуркации совместных уровней интеграла энергии и одного или двух интегралов были изучены для многих задач механики [27], [34], [22], [19], [21].

Рассмотрим отображение момента $M : M^4 \rightarrow \mathbf{R}_{(h,k)}^2$, являющееся прямым произведением отображений, задаваемых интегралами H и K . Тогда прообразы точек (h, k) есть интегральные многообразия нашей задачи, которые будем обозначать $J_{hk} = \{H = h, K = k\}$. Бифуркационное множество Σ определим как множество точек $(h, k) \in \mathbf{R}^2$, над которыми отображение M не является локально тривиальным. Очевидно, что в бифуркационное множество Σ обязательно входят критические точки отображения момента M , которые обозначим Σ' . В общем случае эти два множества могут не совпадать, однако, если интегральные многообразия компактны, то $\Sigma = \Sigma'$. Таким образом, при положительных значениях параметра α в бифуркационное множество войдут только критические точки отображения момента, которые ищутся из условия линейной зависимости градиентов функций K , H , G и Γ :

$$\begin{cases} \operatorname{grad} K = \sigma \operatorname{grad} H + \sigma_1 \operatorname{grad} G + \sigma_2 \operatorname{grad} \Gamma, \\ G = 0, \quad \Gamma = 1, \end{cases}$$

где $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ – параметры, не обращающиеся одновременно в ноль. Записав эту систему в развернутом виде, получаем следующие условия на критические точки интегрального отображения:

$$\begin{cases} 4(\omega_3 - \lambda)\omega_1 + 2\gamma_3 = 4\omega_1\sigma + 4\sigma_1\gamma_1, \\ 4(\omega_3 - \lambda)\omega_2 = 4\sigma\omega_2 + 4\sigma_1\gamma_2, \\ 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) = \sigma\omega_3 + \sigma_1\gamma_3, \\ 0 = -\sigma + 4\sigma_1\omega_1 + 2\sigma_2\gamma_1, \\ 0 = 4\sigma_1\omega_2 + 2\sigma_2\gamma_2, \\ -\frac{2\alpha}{\gamma_3^2}(\omega_3 - \lambda) + 2\omega_1 = -\frac{2\alpha}{\gamma_3^2}\sigma + \sigma_1(\omega_3 + \lambda) + 2\sigma_2\gamma_3, \end{cases}$$

При этом должны быть выполнены условия

$$4(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + (\omega_3 + \lambda)\gamma_3 = 0,$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Комбинируя первые три уравнения системы с коэффициентами $\omega_1, \omega_2, 2(\omega_3 - \lambda)$ и последнее уравнение с коэффициентом γ_3 , получаем значение σ_2 . После подст-

новки полученного значения σ_2 имеем значения ужс двух параметров:

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2\gamma_3}(\omega_3 - \lambda - \sigma), \quad \sigma_2 = -\frac{\sigma^2}{2\gamma_3^2}(\omega_3 - \lambda - \sigma).$$

При этом одно из уравнений системы становится тождеством, а оставшиеся уравнения перепишем как

$$\begin{cases} 4\gamma_3\omega_2 + \sigma\gamma_2 = 0, \\ 4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) = \sigma(\omega_3 - \lambda - \sigma), \\ \sigma\gamma_3 - 2\sigma_2(2\omega_1\gamma_3 + \sigma\gamma_1) = 0. \end{cases}$$

Подставляя значение ω_3 , полученное из условия $\Gamma = 0$, и величину ω_2 во второе уравнение, находим значение

$$\omega_1 = \frac{1}{2\gamma_3}(-\sigma\gamma_1 \pm \sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}).$$

После подстановки полученных выражений в оставшиеся уравнения системы одно уравнение становится тождеством и все переменные выражаются через σ и ω_3 . В результате получаем два семейства критических точек отображения момента:

I.

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{4\gamma_3} \left(-\sigma(\omega_3 - \lambda - \sigma)(\omega_3 + \lambda + 2\sigma) - 4\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} \right), \\ \omega_2 = -\frac{\sigma\gamma_2}{2\gamma_3}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}(\omega_3 - \lambda - \sigma)(\omega_3 + \lambda + 2\sigma) + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \\ \gamma_2^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_3^2, \quad \gamma_3^2 = -(\omega_3 - \lambda - \sigma)\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}. \end{cases}$$

На плоскости параметров (h, k) эти точки определяют кривую, задаваемую параметрическими уравнениями:

$$h = \frac{3}{2}\sigma^2 + 2\lambda\sigma - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} + \frac{\lambda^2}{2}, \quad k = \sigma^3 + \lambda\sigma^2 - \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}. \quad (1.11)$$

II.

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{4\gamma_3} \left(-\sigma(\omega_3 - \lambda - \sigma)(\omega_3 + \lambda + 2\sigma) + 4\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} \right), \\ \omega_2 = -\frac{\sigma\gamma_2}{2\gamma_3}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}(\omega_3 - \lambda - \sigma)(\omega_3 + \lambda + 2\sigma) - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \\ \gamma_2^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_3^2, \quad \gamma_3^2 = (\omega_3 - \lambda - \sigma)\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}. \end{cases}$$

Значения параметров первых интегралов H, K в этих точках будут следующие:

$$h = \frac{3}{2}\sigma^2 + 2\lambda\sigma + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} + \frac{\lambda^2}{2}, \quad k = \sigma^3 + \lambda\sigma^2 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}. \quad (1.12)$$

Заметим, что сделав замену переменных $\sigma = u + \alpha/(2u)$, можно избавиться от радикалов и обе кривых (1.11), (1.12) записать как

$$\begin{aligned} h &= \frac{3}{2}(u + \frac{\alpha}{2u})^2 + 2\lambda(u + \frac{\alpha}{2u}) + \frac{2u^2 + \alpha}{2u^2 - a} + \frac{\lambda^2}{2}, \\ k &= (u + \frac{\alpha}{2u})^3 + \lambda(u + \frac{\alpha}{2u})^2 + \frac{2\alpha u}{2u^2 - a}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $u \in (0, \sqrt{\alpha/2}) \cup (\sqrt{\alpha/2}, +\infty)$.

Как следует из формул I, II, в бифуркационную диаграмму войдут точки, удовлетворяющие неравенствам

$$\left(\frac{1}{2}(\omega_3 - \lambda - \sigma)(\omega_3 + \lambda + \sigma) \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} \right)^2 \mp (\omega_3 - \lambda - \sigma)\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha} < 1 \quad (1.13)$$

взятые с верхним и нижним знаками для кривых (1.11) и (1.12) соответственно. Количество связных компонент в прообразе точки диаграммы определяется числом связных компонент по переменной ω_3 , то есть числом решений ω_3 в плоскости $\gamma_2 = 0$.

Таким образом, пришли к следующему утверждению.

Утверждение 1.3.1 Множество критических значений отображения момента есть точки кривых (1.11), (1.12), удовлетворяющие условию (1.13).

Исследуем качественно свойства бифуркационных кривых. Каждая из систем (1.11), (1.12) определяет на плоскости пару кривых: клюв $\{(1.11), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$, $\{(1.12), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$ и ветвь $\{(1.11), \sigma > -\sqrt{2\alpha}\}$, $\{(1.12), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$. Определим их взаимное расположение относительно друг друга. Пусть σ параметризует кривую (1.11), а σ_1 — параметр на кривой (1.12). Тогда условия пересечения кривых (1.11), (1.12) можно переписать в более удобной для анализа форме:

$$\begin{cases} \sigma^3 + \sigma^2(\sigma + \lambda) - \sigma_1(3\alpha - \sigma^2 - \lambda\sigma) - 3\alpha\sigma - 4\alpha\lambda - \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} = 0, \\ \sigma_1^3 - \sigma_1^2 + \lambda(\sigma_1^2 - \sigma^2) + 2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2\alpha}}\right) = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем, что верхний клюв $\{(1.12), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$ не имеет точек пересечения с ветвью $\{(1.11), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$.

Условия самопересечения кривой (1.11) определяются системой

$$\begin{cases} \sigma^3 + \sigma^2(\sigma + \lambda) - \sigma_1(3\alpha - \sigma^2 - \lambda\sigma) - 3\alpha\sigma - 4\alpha\lambda - \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} = 0, \\ \hat{\sigma}^3 - \hat{\sigma}^2 + \lambda(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) + 2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 - 2\alpha}}\right) = 0, \end{cases}$$

которая не имеет решений при $\sigma > 0, \hat{\sigma} > 0$, что означает, что верхняя ветвь $\{(1.11), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$ не может иметь особенностей типа "точек возврата" и, следовательно, монотонна. Аналогичным образом анализируя условия самопересечения

кривой (1.12), приходим к выводу о монотонности ветви $\{(1.12), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$. Дальнейший анализ поведения графиков функций $h(\sigma)$, $k(\sigma)$ показывает, что обе ветви

$$\{(1.12), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}, \quad \{(1.11), \sigma > \sqrt{2\alpha}\} \quad (1.14)$$

всегда пересекаются в одной точке, а оба клюва $\{(1.12), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$, $\{(1.11), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$ не могут пересекаться друг с другом.

Таким образом, всего существует три различных типа бифуркационных диаграмм, которые качественно изображены на рис. 1.2. В множество значений отображения момента входят точки, лежащие правее пересекающихся кривых (1.14). На рисунке они даны сплошной линией. Внутренние ветви клювов $\{(1.12), \sigma > 0\}$, $\{(1.11), \sigma < 0\}$ имеют асимптоты $\sigma = \sqrt{2\alpha}$ и $\sigma = -\sqrt{2\alpha}$ соответственно. При $\sigma \rightarrow \pm\infty$ бифуркационные кривые (1.11), (1.12) будут асимптотически приближаться к кривым, задаваемым параметрическими уравнениями

$$\left(\frac{3}{2}\sigma^2 + 2\lambda\sigma + \frac{\lambda^2}{2} \pm 1, \sigma^3 + \lambda\sigma^2 \right).$$

Утверждение 1.3.2 Для различных значений α, λ на плоскости параметров первых интегралов (h, k) существует три различных типа бифуркационных диаграмм, которые качественно изображены на рис. 1.2. Прообраз не пуст в точках, лежащих правее пересекающихся кривых (1.14).

Позднее будет показано, что интегральные многообразия в прообразах точек из областей на рисунке, обозначенных римскими цифрами I, диффеоморфны тору, а в областях, обозначенных цифрами II – двум торам. Далее будем обозначать через h_1 координаты вершины клюва кривой $\{(1.11), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$, через h_2 – координаты точки возврата, лежащей на кривой $\{(1.12), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$.

Дополнительный анализ показывает, что при $\alpha \rightarrow 0$ полученные диаграммы и формулы переходят в диаграммы и формулы, полученные в [34], для классического гиростата Сретенского. В работе [34] была предложена замена координат, обобщающая результат В. В. Козлова [15], которая позволяет привести классический гиростат к каноническому виду. В случае $\alpha \neq 0$ эта замена также позволяет переписать систему в терминах четырех переменных. Аналогично [34] введем новые переменные x, y, ϕ, ψ , полагая

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{-xy}\sin\frac{\phi+\psi}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{x\cos\phi - y\cos\psi}{x-y},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-xy}\cos\frac{\phi+\psi}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{-x\sin\phi + y\sin\psi}{x-y},$$

$$\omega_3 = x + y - \lambda, \quad \gamma_3 = \frac{2\sqrt{-xy}}{x-y}\sin\frac{\phi-\psi}{2},$$

однако в качестве области изменения переменных выберем

$$x > 0, \quad y < 0, \quad 0 < \frac{\phi-\psi}{2} < 2\pi, \quad 0 < \frac{\phi+\psi}{2} < 2\pi.$$

1.4 Построение кинематического гироскопа

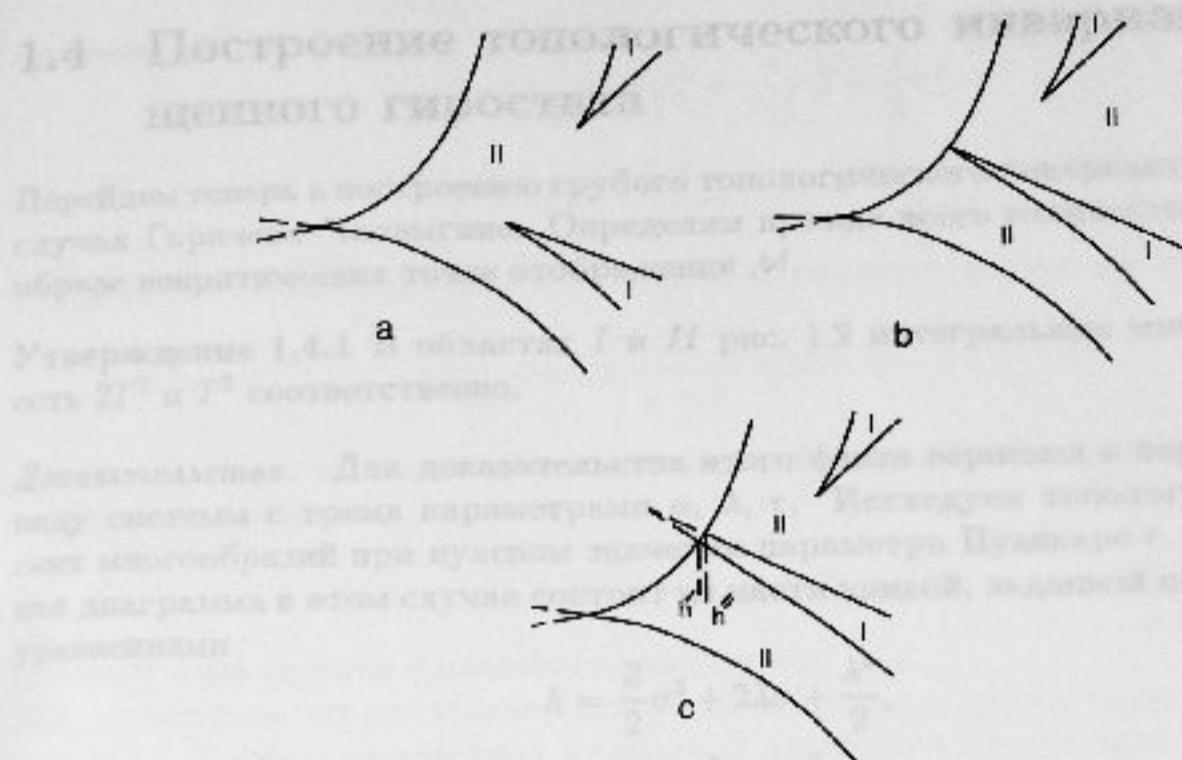


Рис. 1.2:

В этих переменных уравнения $\Gamma = 1$ и $G = 0$ удовлетворяются тождественно. Гамильтониан и дополнительный интеграл в новых переменных запишутся следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2) - \frac{x \cos \phi - y \cos \psi}{x - y} - \frac{\alpha(x - y)^2}{4xy} (\sin \frac{\phi - \psi}{2})^{-2},$$

$$K = -\frac{1}{2}xy(x + y) + xy \frac{\cos \phi - \cos \psi}{x - y} - \frac{\alpha(x - y)^2}{4xy} (x + y - \lambda) (\sin \frac{\phi - \psi}{2})^{-2}.$$

Запишем уравнения Эйлера-Пуассона в новых переменных:

$$\dot{x} = -\frac{x}{x - y} \sin \phi - 2\alpha \frac{(x - y)^2}{xy} \cos \frac{\phi - \psi}{2},$$

$$\dot{y} = \frac{y}{x - y} \sin \psi + 2\alpha \frac{(x - y)^2}{xy} \cos \frac{\phi - \psi}{2},$$

$$\dot{\phi} = x + \frac{y}{2} - \lambda - \frac{y}{(x - y)^2} (\cos \phi - \cos \psi),$$

$$\dot{\psi} = \frac{x}{2} + y - \lambda - \frac{x}{(x - y)^2} (\cos \phi - \cos \psi),$$

Однако для гиростата с обобщенным потенциалом (1.3) эти переменные уже не образуют канонической системы с гамильтонианом H . Нахождение канонических координат для ОГГЧ остается открытой проблемой.

1.4 Построение топологического инварианта обобщенного гиростата

Перейдем теперь к построению грубого топологического инварианта обобщенного случая Горячева–Чаплыгина. Определим прежде всего количество торов в прообразе некритических точек отображения M .

Утверждение 1.4.1 В областях I и II рис. 1.2 интегральные многообразия J_{hk} есть $2T^2$ и T^2 соответственно.

Доказательство. Для доказательства этого факта вернемся к первоначальному виду системы с тремя параметрами α, λ, r . Исследуем топологию некритических многообразий при нулевом значении параметра Пуанкаре r . Бифуркационная диаграмма в этом случае состоит из части кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$h = \frac{3}{2}\sigma^2 + 2\lambda\sigma + \frac{\lambda^2}{2}, \quad (1.15)$$

$$k = \sigma^3 + \lambda\sigma^2 \quad (1.16)$$

и двух лучей

$$k = \sqrt{2\alpha}h - \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}(\lambda + \sqrt{(2\alpha)^2}),$$

$$k = -\sqrt{2\alpha}h + \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}(\lambda - \sqrt{2\alpha})^2.$$

Кривая касается обеих прямых в точках

$$(3\alpha + 2\lambda\sqrt{2\alpha} + \frac{\lambda^2}{2}, 2\alpha(\lambda + \sqrt{2\alpha})), \quad (3\alpha - 2\lambda\sqrt{2\alpha} + \frac{\lambda^2}{2}, 2\alpha(\lambda - \sqrt{2\alpha})).$$

В бифуркационную диаграмму войдут только точки кривой (1.15) – (1.16), лежащие правее точек касания и соответствующие значениям $\sigma > \sqrt{2\alpha}$, $\sigma < -\sqrt{2\alpha}$. Возможные типы бифуркационных диаграмм показаны на рис. 1.3, где римскими цифрами обозначены области с различным типом интегральных многообразий. Исследуем число связных компонент прообраза в точках (h, k) , не принадлежащих

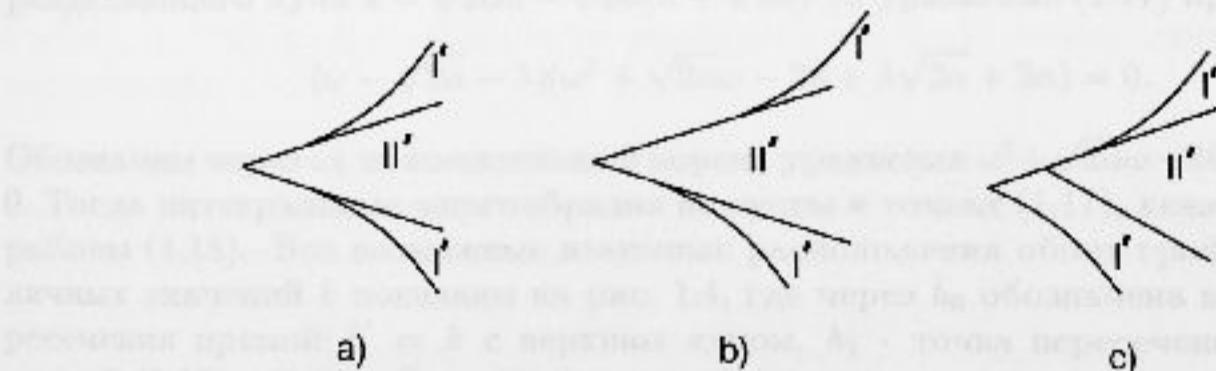


Рис. 1.3:

бифуркационной диаграмме. Рассмотрим сначала положительные значения k . Из

системы

$$h = 2 \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2} \right) + \frac{1}{2} \omega_3^2,$$

$$k = 2(\omega_3 - \lambda) \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2} \right);$$

следует, что каждое значение переменной ω_3 является корнем уравнения

$$\omega^2 + \frac{2k}{\omega - \lambda} - 2h = 0 \quad (1.17)$$

Обозначим через ω_0 какой-либо корень уравнения (1.17). Тогда каждому решению ω_0 , удовлетворяющему условию

$$\omega_0^2 + \sqrt{2\alpha}(\omega_0 + \lambda) + 2\alpha \leq 2h, \quad (1.18)$$

отвечает одна связная компонента поверхности $J_{k,k}$.

Для доказательства последнего утверждения воспользуемся заменой переменных (x, y, ϕ, ψ) . В новых переменных функция H записывается следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}x(x - \omega_0 - \lambda) + \frac{\alpha}{4} \frac{(2x - \omega_0 - \lambda)^2}{x(x - \omega_0 - \lambda)} \left(\sin \frac{\phi - \psi}{2} \right)^{-2} + \frac{1}{2}\omega_0^2 \quad (1.19)$$

Так как она непрерывна по x в области изменения переменных, то для разрешения уравнения (1.19) достаточно выполнения условия

$$2t + \alpha(\omega_0 + \lambda)^2/t + 2\omega_0^2 + 4\alpha \leq 4h, \quad t = x(x - \omega_0 - \lambda)$$

при каком-либо t . Минимальное значение левой части равно $2\omega_0^2 + 2\sqrt{2\alpha}(\omega_0 + \lambda) + 4\alpha$ и, следовательно, при условии (1.18) уравнение (1.19) разрешимо. Легко убедиться, что если уравнение (1.19) разрешимо, то в переменных ψ, ϕ оно задает линейчатую поверхность, что и доказывает требуемое.

Покажем теперь, что для любой точки (h, k) из области I' оба решения уравнения (1.17) удовлетворяют условию (1.18), а для точек из области II' оно выполняется только для меньшего из корней. Точки бифуркационной кривой (1.15) – (1.16) соответствуют точке минимума функции (1.17), где ω – кратный корень. В точках разделяющего луча $k = \sqrt{2\alpha}h - \sqrt{2\alpha}(\lambda + \sqrt{2\alpha})^2/2$ уравнение (1.17) принимает вид

$$(\omega - \sqrt{2\alpha} - \lambda)(\omega^2 + \sqrt{2\alpha}\omega - 2h + \lambda\sqrt{2\alpha} + 2\alpha) = 0.$$

Обозначим через ω_k положительный корень уравнения $\omega^2 + \sqrt{2\alpha}\omega - 2h + \lambda\sqrt{2\alpha} + 2\alpha = 0$. Тогда интегральные многообразия не пусты в точках (1.17), лежащих выше параболы (1.18). Все возможные взаимные расположения обоих графиков для различных значений k показаны на рис. 1.4, где через h_0 обозначена координата пересечения прямой $K = k$ с верхним лучом, h_1 – точка пересечения уровня k с кривой (1.15) – (1.16). Случай а) соответствует значениям параметра k , лежащим выше точки касания. Как легко видеть из графика, при $h_1 < h < h_0$ оба решения уравнения (1.17) удовлетворяют условию (1.18), при $h > h_0$ оно верно только для меньшего из корней. Случай б) отвечает уровню касания и условию (1.18) всегда выполнено лишь для одного корня. Для остальных значений $k < 2\alpha(\lambda + \sqrt{2\alpha})$, при

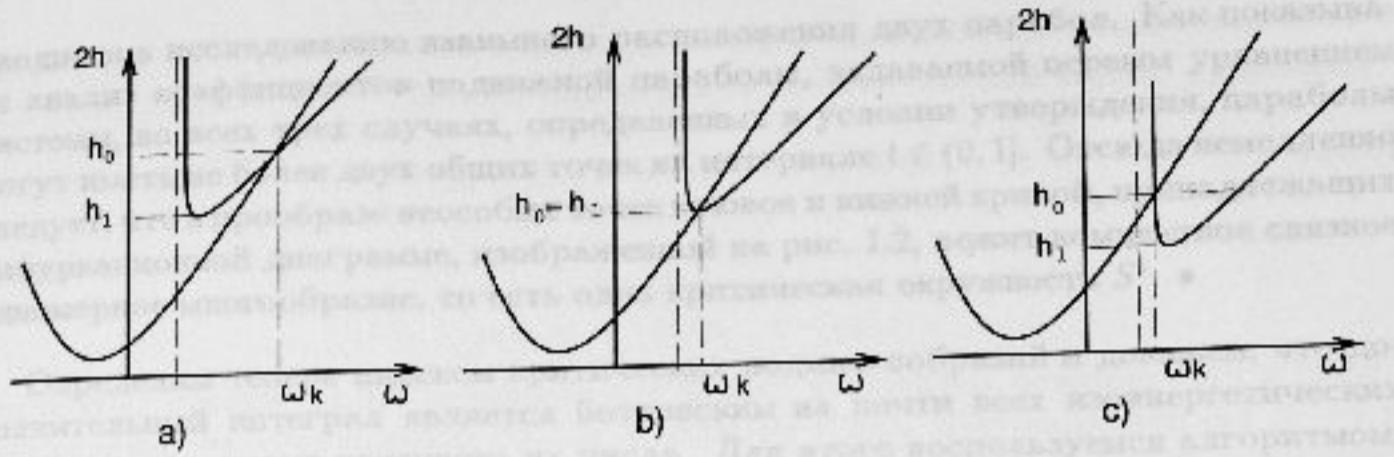


Рис. 1.4:

$h_1 < h < h_0$ условие (1.18) не выполнено ни для одного из корней (1.17), а при $h \geq h_0$ оно верно для меньшего корня. Следовательно, в прообразе точек из области между лучом и кривой (1.15)–(1.16), лежит две связных компоненты, а во внутренней области между лучами – одна. Проводя аналогичные рассуждения для $k < 0$, получаем, что в оставшейся неисследованной области интегральные многообразия будут диффеоморфны двум торам. Таким образом, в случае $r = 0$ в прообразе каждой точки области II' лежит две связные компоненты, области I' – одна компонента. Проследим деформацию бифуркационных кривых общего вида при $r \rightarrow 0$. Ветвь $\sqrt{2\alpha} \leq \sigma$ серии (1.11) переходит в луч

$$k = \sqrt{2\alpha}h - \sqrt{2\alpha}(\lambda + \sqrt{2\alpha})^2, \quad 3\alpha + 2\lambda\sqrt{2\alpha} + \frac{\lambda^2}{2} \leq h$$

и верхнюю часть кривой (1.15), (1.16), точка возврата попадает в точку касания. Ветвь $\sigma < -\sqrt{2\alpha}$ серии (1.11) симметрично "склеивается" с кривой и вторым лучом. Следовательно, области I и II переходят в области I' и II' соответственно. Так как уровень $r = 0$ не является критическим, по теореме Морса [18] совместные уровни $J_{h,k}$ будут диффеоморфны соответствующим уровням при $r = 0$ и, следовательно, интегральные многообразия будут диффеоморфны тору в области II и двум торам в областях I . •

Утверждение 1.4.2 В прообразе неособых точек кривых $\{(1.12), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$, $\{(1.12), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$, $\{(1.11), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$, если последний не пуст, лежит одна критическая окружность.

Доказательство. Как следует из формул, задающих критические точки отображения момента, число связных компонент в прообразе точек бифуркационной диаграммы определяется системой

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_3^4}{\sigma^2 - 2\alpha} \mp \frac{\gamma_3^2(2\lambda + 3\sigma)}{2\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \\ \gamma_1^2 + \gamma_3^2 \leq 1, \end{array} \right.$$

взятой с верхним и нижним знаками для кривых (1.11) и (1.12) соответственно. После замены $\gamma_3^2 = t$, однозначной на рассматриваемом интервале $(0, 1]$, задача

сводится к исследованию взаимного расположения двух парабол. Как показывает анализ коэффициентов подвижной параболы, задаваемой первым уравнением системы, во всех трех случаях, определенных в условии утверждения, параболы могут иметь не более двух общих точек на интервале $t \in (0, 1]$. Отсюда немедленно следует, что в прообразе несобных точек клюзов и пикней кривой, принадлежащих бифуркационной диаграмме, изображенной на рис. 1.2, лежит компактное связное одномерное многообразие, то есть одна критическая окружность S^1 .

Определим теперь индексы критических подмногообразий и докажем, что дополнительный интеграл является боттовским на почти всех изоэнергетических поверхностях, кроме конечного их числа. Для этого воспользуемся алгоритмом, предложенным А. Л. Ошемковым в [20]. Обозначим через G_K, G_H, G_G и G_Γ гессианы функций K, H, G и Γ соответственно. Найдем матрицу $G = G_K - \sigma G_H - \sigma_1 G_G - \sigma_2 G_\Gamma$, где $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ — коэффициенты зависимости первых интегралов:

$$\sigma_1 = \frac{-\sigma}{2\gamma_3}(\omega_3 - \sigma - \lambda), \quad \sigma_2 = \frac{-\sigma^2}{2\gamma_3^2}(\omega_3 - \sigma - \lambda).$$

Рассмотрим ограничение формы, определяемой этой матрицей, на пространство, ортогональное векторам $\text{grad } H, \text{grad } G, \text{grad } \Gamma$. Поскольку достаточно проверить невырожденность только в одной точке траектории, будем рассматривать точки кривых (1.11), (1.12), заданные системой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{2\gamma_3^2}(-\sigma\gamma_1 \pm \sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}), \\ \omega_2 = \gamma_2 = 0, \\ \omega_3 = \mp \frac{\gamma_3^2}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} + \lambda + \sigma, \\ \gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_3^4}{\sigma^2 - 2\alpha} \mp \frac{\gamma_3^2(2\lambda + 3\sigma)}{2\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \\ \gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{array} \right.$$

Положим $u = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1$ и $v = \gamma_3^2 - 2\alpha\gamma_1/\gamma_3^2$. Касательное пространство в точках системы зададим векторами

$$e_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0);$$

$$e_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0);$$

$$e_3 = (-4\omega_1\omega_3/\gamma_3 - v, 0, 4\omega_1^2/\gamma_3 + v\gamma_1/\gamma_3, 0, -4u\gamma_3, 4u\gamma_1),$$

которые ортогональны векторам $\text{grad } H, \text{grad } \Gamma, \text{grad } G$. Далее вычисляем последовательно матрицу G и ее ограничение M формы, пределяемой этой матрицей на пространство векторов (e_1, e_2, e_3) . После соответствующих преобразований получаем, что для точек кривой (1.12)

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = (\omega_3 - \lambda - \sigma)(2\alpha - (3\sigma + 2\lambda)(\sigma^2 - 2\alpha)^{3/2})W,$$

где μ_1 и μ_2 — собственные значения вырожденной матрицы M , W — некоторое всегда положительное при неотрицательных значениях α выражение. Для точек этой

кривой $(\omega_3 - \lambda - \sigma) > 0$ и знак произведения $\mu_1 \mu_2$ определяется знаком выражения $2\alpha - (3\sigma + 2\lambda)(\sigma^2 - 2\alpha)^{3/2}$. Обозначим через σ_0 положительный корень уравнения

$$(3\sigma + 2\lambda)(\sigma^2 - 2\alpha)^{3/2} - 2\alpha = 0 \quad (1.20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &> 0, \text{ если } \sigma > \sigma_0, \\ \mu_1 \mu_2 &< 0, \text{ если } \sigma < \sigma_0. \end{aligned}$$

Поскольку условие (1.20) одновременно задает экстремум функции $h(\sigma)$ и ввиду справедливости соотношения $\partial K / \partial \sigma = \sigma \partial H / \partial \sigma$ ([20]), получаем, что $\text{ind} = -1$ в точках кривой $\{(1.12), \sigma > \sigma_0\}$. В остальных точках кривой (1.12) произведение $\mu_1 \mu_2 > 0$. Аналогично, с точностью до знака, получаем выражение для точек кривых (1.11):

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = -(\omega_3 - \lambda - \sigma)(2\alpha + (3\sigma + 2\lambda)(\sigma^2 - 2\alpha)^{3/2})W,$$

которое обращается в ноль в точках, заданных условием

$$(3\sigma + 2\lambda)(\sigma^2 - 2\alpha)^{3/2} + 2\alpha = 0. \quad (1.21)$$

Обозначим через $\hat{\sigma}_0$ корень уравнения (1.21). Для точек кривых (1.11) выражение $-(\omega_3 - \lambda - \sigma) > 0$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &> 0, \text{ если } \sigma > -\hat{\sigma}_0, \\ \mu_1 \mu_2 &< 0, \text{ если } \sigma < -\hat{\sigma}_0. \end{aligned}$$

Таким образом, седловые критические окружности лежат в прообразе точек кривой $\{(1.11), \sigma < -\hat{\sigma}_0\}$ и минимаксные в остальных точках. Боттовость дополнительного интеграла нарушается в точках, заданных условиями (1.20), (1.21), которым на бифуркационной диаграмме соответствуют вершины клювов.

Перейдем непосредственно к построению инварианта Фоменко.

Обозначим через $N1$ множество пар параметров (α, λ) , при которых многочлен $P(\omega_3)$, заданный выражением (1.5), имеет один простой действительный отрицательный корень, $N2$ - множество пар, где $P(\omega_3)$ имеет один кратный и один простой действительный отрицательный корень, $N3$ - три различных действительных отрицательных корня.

Теорема 1.4.1 Рассмотрим интегрируемые гамильтоновы системы, описывающие движение обобщенного гиростата Горячева-Чаплыгина. Тогда для всех значений энергии h из одного из следующих интервалов изменения h

- a) $h_{\min} < h < h_1$, $(\alpha, \lambda) \in N1, N2$; $h_{\min} < h < h'$, $(\alpha, \lambda) \in N3$;
- б) $h_1 < h < h_2$, $(\alpha, \lambda) \in N1, N2$; $h' < h < h_2$, $(\alpha, \lambda) \in N3$;
- в) $h > h_2$, $(\alpha, \lambda) \in N1, N2, N3$

системы грубо топологически эквивалентны на Q_h .

Доказательство. Рассмотрим случаи (а), (б) на рис. 1.2. Проследим методом последовательных перестроек изменение интегральных многообразий при пересечении диаграммы прямой $h = \text{const}$. Пусть $h < h_1$. Тогда на нижней кривой

$\{(1.12), \sigma < \sqrt{2\alpha}\}$, как следует из утверждения 1.4.2, лежит минимаксная критическая окружность из которой происходит рождение тора. Этот тор проходит без изменений до уровня $\{(1.11), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$ и исчезает. Эта перестройка $\emptyset \rightarrow T^2$ в соответствие с принятыми обозначениями кодируется буквой A (см.[8]). Рассмотрим теперь значения $h_1 < h < h_2$. При пересечении внешней ветви клюва происходит перестройка $T^2 \rightarrow 2T^2$ по одной седловой окружности. Окрестности седловых критических окружностей будем обозначать буквой B . Таким образом, $J_{hk} \approx 2T^2$ во внутренней области нижнего клюва. Далее, на границе клюва $\{(1.11), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}$ критическое многообразие есть одна минимаксная окружность. Следовательно, при прохождении через внутреннюю границу клюва один тор остается без изменений, а второй стягивается на осевую окружность и исчезает. Для остальных значений $h > h_2$ при пересечении верхнего клюва происходят аналогичные события (с точностью до симметрии). Слона-молекулы, соответствующие описанным ситуациям, приведены на рис. 1.5. Для последнего типа бифуркационной диаграммы, показанной на рис. 1.2 (c), рассмотрим оставшиеся точки кривой $\{(1.11), \sigma > \sqrt{2\alpha}\}$. Анализируя изменение взаимного расположения парабол с увеличением значения σ при условии наличия трех точек касания, получаем, что в фазовом пространстве при этом последовательно происходят перестройки $\emptyset \rightarrow S^1 \rightarrow 2S^1 \rightarrow S^1$. Таким образом, при прохождении через участок $\{(1.11), \sigma > \sqrt{2\alpha}, h' < h < h''\}$ происходит исчезновение (рождение) двух торов по минимаксным критическим окружностям, кодирующиеся двумя буквами A . При пересечении остальных бифуркационных кривых перестройки такие же, как и в предыдущих случаях. Новых типов молекул при этом не возникает. Анализируя все возможные ситуации, находим, что интегральные многообразия есть $2T^2$ во внутренних областях клювов, тор T^2 в остальной области диаграммы, окружность S^1 во всех неособых точках бифуркационных кривых, кроме интервала (h', h'') для кривой $\{(1.11)\}$, где J_{hk} есть две окружности.

Топологический инвариант интегрируемой гамильтоновой системы, описывающей движение обобщенного гиростата Горячева–Чаплыгина, состоит из молекул трех типов, показанных на рис. 1.5.

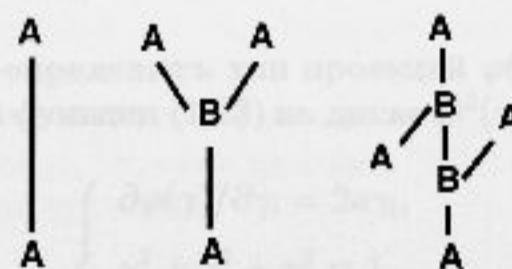


Рис. 1.5:

Построенный инвариант дает грубую топологическую классификацию системы. Отсюда следует, что две системы имеют одинаковый топологический портрет, если они принадлежат одному и тому же классу 1), 2) или 3) из условия теоремы 1.4.1. •

1.5 Топология изоэнергетических поверхностей

Определим теперь топологию поверхностей постоянной энергии

$$Q_h = \{G = 0, \Gamma = 1, H = h\}.$$

Тип поверхности Q_h определяется значением H и параметрами α и λ . Общий метод исследования типа многообразий Q_h с использованием проекций на сферу Пуассона, был предложен Смейлом [23] для натуральных механических систем и в [34] был обобщен на системы с гироскопическими силами.

Изучим проекции поверхностей постоянной энергии на многообразие Пуассона при отображении

$$\pi : M^4 \rightarrow D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

где

$$M^4 = D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \times \mathbf{R}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \gamma_3 > 0\}.$$

При этой проекции поверхность Q_h отображается в некоторую область на диске $D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, которая определяется условием $\varphi(\gamma) \leq h$, где

$$\varphi(\gamma) = \frac{(\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \lambda_3 \gamma_3)^2}{2(A_1 \gamma_1^2 + A_2 \gamma_2^2 + A_3 \gamma_3^2)} + \Pi(\gamma). \quad (1.22)$$

Для гамильтониана нашей задачи функция (1.22) имеет вид

$$\varphi(\gamma) = \frac{2\lambda^2 \gamma_3^2}{4 - 3\gamma_3^2} - \gamma_1 + \frac{\alpha}{\gamma_3^2}. \quad (1.23)$$

Теорема 1.5.1 Изоэнергетические поверхности задачи о движении обобщенного гироската Горячева-Чаплыгина гомеоморфны либо трехмерной сфере S^3 , либо прямому произведению двумерной сферы на окружность $S^2 \times S^1$. Случай $S^2 \times S^1$ реализуется при $(\alpha, \lambda) \in N3$, $h \in (h', h'')$.

Доказательство. Чтобы определить тип проекций $\varphi(\gamma) \leq h$ на диск $D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ найдем критические точки функции (1.23) на диске $D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Они определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} \partial \varphi(\gamma)/\partial \gamma_i = 2a\gamma_i, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ \gamma_3 > 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Положим $\gamma_1 = 1/x$. Тогда множество критических точек функции $\varphi(\gamma)$ имеет вид:

$$\gamma_1 = 1/x, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \sqrt{1 - 1/x^2},$$

$$a = \frac{x}{2}, \quad \lambda^2 = \frac{(x^2 + 3)^2}{16} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2\alpha}{(x^2 - 1)^2} \right) \quad (1.24)$$

при $x \in [x_0, -1) \cup (1, +\infty)$,

где x_0 – корень уравнения

$$\frac{1}{x^3} + \frac{2\alpha}{(x^2 - 1)^2} = 0.$$

Функция $\varphi(\gamma)$ в этих точках принимает значение

$$\frac{x^4 + 10x^2 - 3}{8x^3} + 2\alpha \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 1}.$$

Таким образом система определяет на плоскости (h, λ) семейство разделяющих кривых, зависящих от параметра α :

$$h = \frac{x^4 + 10x^2 - 3}{8x^3} + 2\alpha \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 1}, \quad (1.25)$$

$$\lambda^2 = \frac{(x^2 + 3)^2}{16} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2\alpha}{(x^2 - 1)^2} \right), \quad (1.26)$$

где $x \in [x_0, -1] \cup (1, +\infty)$. Покажем, что качественный вид бифуркационных кривых не зависит от значений параметра α . Из формул (1.25), (1.26) находим

$$h'_x = \frac{1}{8} \frac{1}{x^4(x^2 - 1)^2} P(x), \quad (\lambda^2)'_x = \frac{1}{8} \frac{x^2 + 3}{x^4(x^2 - 1)^3} P(x),$$

где

$$P(x) = 9 - 28x^2 + 30x^4 - 12x^6 + x^8 - 32\alpha x^5 \quad (1.27)$$

Многочлен (1.27) поддается качественному исследованию. Обозначим через x_1 наибольший положительный корень $P(x)$. Тогда

$$P(x) < 0, \quad x \in (1, x_1);$$

$$P(x) > 0, \quad x \in (x_1, +\infty);$$

$$P(x) > 0, \quad x \in [x_0, -1], \quad 1/x^3 + 2\alpha/(x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Качественный вид бифуркационной диаграммы показан на рис. 1.6. Кривые симметричны относительно прямой $\lambda = 0$. Каждой точке на кривой соответствует одна критическая точка функции $\varphi(\gamma)$.

Чтобы определить тип изоэнергетических поверхностей, вычислим индексы критических точек функции φ . Гессиан функции (1.23) в точках (1.25), (1.26) имеет два ненулевых собственных значения:

$$\mu_1 = -x, \quad \mu_2 = -x P(x),$$

где $P(x)$ определяется выражением (1.27). Таким образом индекс равен 0 в точках нижней кривой, единице в точках, соответствующих нижним ветвям клюев и двум на оставшейся части кривых. Зная индексы критических точек, определим тип проекций $\varphi(\gamma) \leq h$ на диск $D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Возникает три различных типа поверхностей: \emptyset , кольцо $S^1 \times \mathbf{R}^1$ (диск с одной дыркой) и диск D^2 . Соответствующие изоэнергетические поверхности показаны на рис. 1.6 и гомеоморфны $S^1 \times S^2$ во внутренних областях клюев и трехмерной сфере S^3 в остальной области диаграммы.

Естественно, полученная выше диаграмма не дает зависимости между значениями параметров системы и типом поверхностей постоянной энергии. Однако, зная

Глава 2

Обобщенный волнок Горячева-Чаплыгина в компактном случае

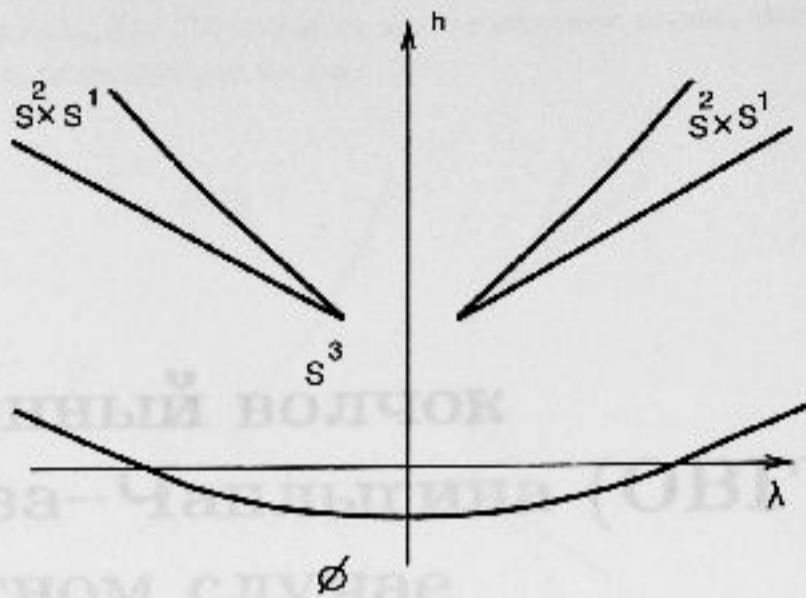


Рис. 1.6:

критические точки отображения момента и типы изоэнергетических поверхностей, можно определить, при каких значениях параметров (h, k) какие поверхности реализуются. Рассмотрим сначала диаграмму случая (а) рисунка 1.2. Гамильтониан H имеет единственную критическую точку, в которой достигается невырожденный минимум. Следовательно, все поверхности Q_h гомеоморфны S^3 . Ситуация, изображенная на рис. 1.2 (б), является разделяющей и все поверхности постоянной энергии по-прежнему гомеоморфны сфере. В последнем случае, как видно из бифуркационной диаграммы, изоэнергетические поверхности гомеоморфны сфере S^3 при достаточно малых значениях h , а также при $h \rightarrow \infty$, где система устроена так же, как и две предыдущие. Обозначим через h' минимальную координату пересечения ветви $\{(1.11), \sigma > 0\}$ с клювом $\{(1.11), \sigma < 0\}$, через h'' – максимальную (см. рис. 1.2). Тогда отличные от сферы изоэнергетические поверхности возникают только при $h' < h < h''$. Таким образом, в случае, соответствующем последнему типу бифуркационной диаграммы (рис. 1.2 (с)), $Q_h \approx S^1 \times S^2$ при $h' < h < h''$, и сфере S^3 при остальных значениях $h > h_{\min}$. •

186. $\lambda = \text{корень уравнения } \phi_1(\lambda) + \phi_2 = 1$. Последнее уравнение всегда имеет одно положительное решение λ , определяющее единственную критическую точку H . В этой точке собственные значения линейной функции H положительны, следовательно, H имеет невырожденный невырожденный минимум.

Описание траектории бифуркационной диаграммы. Поскольку уравнение (2.1) и (2.2) симметричны относительно прямой $k = 0$, достаточно исследовать одну из них. Рассмотрим кривую, заданную уравнением (2.1). Учитывая соотношение $\partial \phi_1 / \partial \sigma = -e^{\lambda \phi_1} / \phi_1 \neq 0$, справедливо для всех точек исследуемой кривой, получим, что ветвь имеет бесконечную ветвь ϕ_1 и одну точку возврата (минимум) при некотором σ . При $\sigma \rightarrow +\infty$ обе координаты h , k стремятся к $+\infty$ так, что точка $(h(\sigma), k(\sigma))$ астартически приближается к кривой $k = (2(h+1))^{1/2}$, при $\sigma \rightarrow -\infty$ кривой $k = -(2(h+1))^{1/2}$ симметрично. Серии (2.1) и (2.2) имеют единственную

точку пересечения ($b_0, 0$). Объединяют все складинки выпуклоположительной бифуркационной диаграммы, показанную на рис. 3.1.

Глава 2

Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина (ОВГЧ) в компактном случае

2.1 Топологическая классификация компактного ОВГЧ

Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина (ОВГЧ), получающийся при нулевом значении гиростатического параметра λ , допускает более детальное исследование и, в частности, позволяет дать грубую топологическую классификацию системы и провести геометрический анализ задачи.

Условия функциональной зависимости первых интегралов (1.11), (1.12) при $\lambda = 0$ примут вид:

$$h = \frac{3}{2}\sigma^2 + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \quad k = \sigma^3 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}; \quad (2.1)$$

$$h = \frac{3}{2}\sigma^2 - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \quad k = \sigma^3 - \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}; \quad (2.2)$$

Функция H имеет критические точки при следующих условиях:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \gamma_2 = 0, \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{\gamma_3^4}{2\alpha},$$

где $\hat{\gamma}_3$ – корень уравнения $\gamma_3^8/(4\alpha^2) + \gamma_3^2 = 1$. Последнее уравнение всегда имеет одно положительное решение $\hat{\gamma}_3$, определяющее единственную критическую точку P . В этой точке собственные значения гессиана функции H положительны, следовательно, H имеет изолированный невырожденный минимум.

Опишем построение бифуркационной диаграммы. Поскольку кривые (2.1) и (2.2) симметричны относительно прямой $k = 0$, достаточно исследовать одну из них. Рассмотрим кривую, задаваемую уравнениями (2.1). Учитывая соотношение $\partial k / \partial \sigma = \sigma \partial h / \partial \sigma$ [20], справедливое для всех точек исследуемой кривой, получаем, что кривая имеет асимптоту $\sigma = \sqrt{2\alpha}$ и одну точку возврата (клюв) при некотором σ_0 . При $\sigma \rightarrow +\infty$ обе координаты h, k стремятся к $+\infty$ так, что точка $(h(\sigma), k(\sigma))$ асимптотически приближается к кривой $k = (\frac{2}{3}(h-1))^{2/3}$, при $\sigma \rightarrow -\infty$ к кривой $k = -(\frac{2}{3}(h+1))^{2/3}$ соответственно. Серии (2.1) и (2.2) имеют единственную

точку пересечения $(h_0, 0)$. Объединяя все сказанное выше, получаем бифуркационную диаграмму, показанную на рис. 2.1.

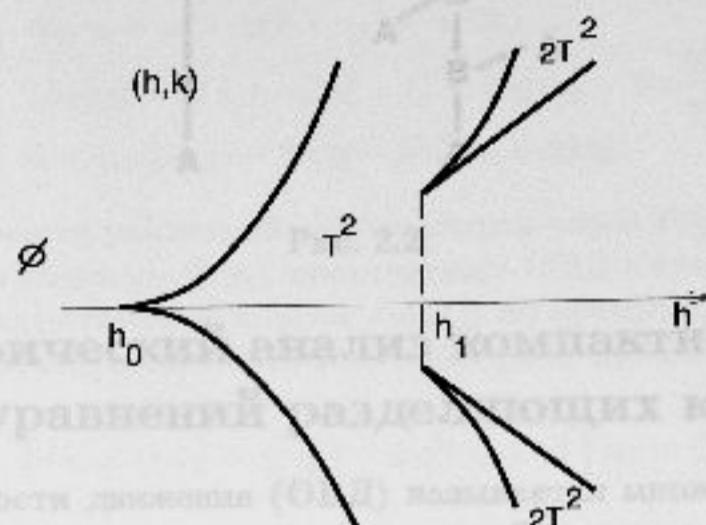


Рис. 2.1:

Теорема 2.1.1 Интегрируемые замкнутые системы, описывающие движение обобщенного волчка Горячева-Чаплыгина, состоят из двух классов грубо эквивалентных систем: $\{h_0 < h < h_1\}$ и $\{h > h_1\}$. Изоэнергетические поверхности гомеоморфны сфере для всех уровней энергии. Интегральные многообразия диффеоморфизмы T^2 или $2T^2$, как показано на рис. 2.1.

Доказательство. Принимая во внимание утверждение 1.4.2, легко видеть, что все неособые критические многообразия есть окружности S^1 . Учитывая вычисленные в параграфе 1.4 индексы критических точек, получаем, что в прообразе точек на внешних ветвях клюев $\{(3.1), \sigma > \sigma_0\}, \{(3.2), \sigma < -\sigma_0\}$ лежат седловые критические окружности, в прообразах точек остальных кривых – минимаксные. Следовательно, на граниче $\{(3.1), \sigma < -\sqrt{2\alpha}\}, \{(3.2), \sigma > 0\}$ происходит рождение тора из минимаксной критической окружности

$$\emptyset \leftrightarrow T^2.$$

Далее, при прохождении через внешние ветви клюев происходит перестройка

$$T^2 \leftrightarrow 2T^2$$

по одной седловой окружности. Следовательно, не особые интегральные многообразия системы есть тор T^2 и два тора $2T^2$, как показано на рис. 2.1. В результате получаем, что топологический инвариант системы состоит из молекул двух типов, указанных на рис. 2.2.

Левая молекула реализуется при значениях $h_0 < h < h_1$, правая – при $h > h_1$. Таким образом, грубая топологическая классификация гамильтоновой системы, описывающей движение обобщенного волчка Горячева-Чаплыгина, дается топологическим инвариантом, показанным на рис. 2.2. Поскольку гамильтониан имеет единственную критическую точку на M^4 , то все поверхности постоянной энергии Q^3 будут гомеоморфны трехмерной сфере S^3 . •

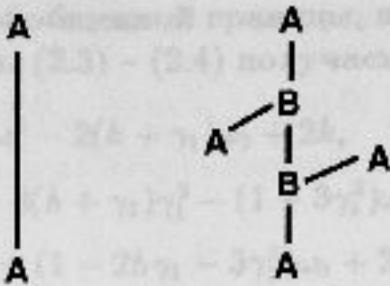


Рис. 2.2:

2.2 Геометрический анализ компактного ОВГЧ. Вывод уравнений разделяющих кривых

Областью возможности движения (ОВД) называется множество $U_{hk} = \pi(J_{hk}) \in D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, то есть образ интегрального многообразия на многообразии Пуассона при отображении

$$\pi : D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \times \mathbf{R}^3(\omega) \rightarrow D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

проектирования на первый сомножитель. Обобщенной границей области возможности движения будем называть множество критических значений отображения

$$\tilde{\pi} = \pi|_{J_{hk}} : J_{hk} \rightarrow U_{hk}.$$

Вектор ω , такой, что $(\omega, \gamma) \in J_{hk}$, называется допустимой скоростью для области U_{hk} в точке $\gamma \in D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Изучим проекции интегральных многообразий на многообразие Пуассона $D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в случае обобщенного волчка Горячева-Чаплыгина. Найдем прежде всего уравнения разделяющих кривых в плоскости параметров (h, k) . Первые интегралы системы при условии $\lambda = 0$ запишутся в виде

$$4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + \omega_3^2 - 2\gamma_1 = 2h; \quad (2.3)$$

$$2\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) + 2\omega_1\gamma_3 = k; \quad (2.4)$$

$$4(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + \omega_3\gamma_3 = 0. \quad (2.5)$$

Обобщенную границу ОВД ищем из условия

$$\det \frac{\partial(H, K, G)}{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} = 0,$$

которое в случае нашей задачи имеет вид

$$2 \left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) - \omega_3^2 \right) (\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1) + (\gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2)\gamma_3 = 0. \quad (2.6)$$

Поскольку уравнения движения и первые интегралы допускают одновременную замену знаков у переменных ω_2 и γ_2 , то ОВД симметрична относительно сечения

$\gamma_2 = 0$. Изучим перестройки обобщенной границы, возникающие на этом сечении. При условии $\gamma_2 = 0$ из системы (2.3) – (2.4) получаем:

$$\begin{cases} 4\omega_1\gamma_3 - \omega_3^3 - 2(h + \gamma_1)\omega_3 + 2k, \\ 16\omega_2^2\gamma_1^2 - 8(h + \gamma_1)\gamma_1^2 - (1 + 3\gamma_1^2)\omega_3^2 - 8\alpha\frac{\gamma_1^2}{\gamma_3^2}, \\ 0 = \gamma_1\omega_3^3 + (1 - 2h\gamma_1 - 3\gamma_1^2)\omega_3 + 2k\gamma_1. \end{cases}$$

Обозначим правые части уравнений этой системы через $P_1(\omega_3)$, $P_2(\omega_3)$ и $P_3(\omega_3)$ соответственно. Тогда точка $(\gamma_1, 0, \omega_3)$ принадлежит ОВД в том и только том случае, когда существует вещественный корень $P_3(\omega_3)$, на котором $P_2(\omega_3)$ положительно. Уравнение обобщенной границы (2.6) в точках $\gamma_2 = 0$ примет вид:

$$\left((4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) - 2\omega_3^2)\gamma_1 - \gamma_3^2 \right) \omega_2 = 0. \quad (2.10)$$

Прямые вычисления показывают, что это уравнение может быть переписано как

$$P'(\omega_3)\omega_2 = 0.$$

Таким образом получаем, что пересечение обобщенной границы ОВД с диаметром $\gamma_2 = 0$ состоит из точек, удовлетворяющих одной из систем:

$$P_3(\omega_3) = 0, \quad P_2(\omega_3) = 0; \quad (2.7)$$

либо

$$P_3(\omega_3) = 0, \quad P'_3(\omega_3) = 0. \quad (2.8)$$

Условие совместности системы (2.8) имеет вид

$$\gamma_1(2h - 3k^{2/3}) = 1 - 3\gamma_1^2. \quad (2.9)$$

Отметим сразу, что уравнение (2.9) не может иметь кратных корней ни при каких значениях параметров (h, k) . Систему (2.7) можно переписать как

$$\begin{cases} \gamma_1\omega_3^3 + (1 - 2h\gamma_1 - 3\gamma_1^2)\omega_3 + 2k\gamma_1 = 0, \\ 8(h + \gamma_1)\gamma_1^2 - (1 + 3\gamma_1^2)\omega_3^2 - 8\alpha\frac{\gamma_1^2}{\gamma_3^2} = 0. \end{cases}$$

Разделяющие случаи (значения параметров, при которых меняется тип ОВД) возможны, если кратный корень имеет эта система, или когда система и уравнение (2.9) имеют общий корень γ_1 . В первом случае, обозначив

$$h + \gamma_1 - \alpha/\gamma_3^2 = p,$$

перепишем систему как

$$\begin{cases} \omega_3^2 = \frac{8\gamma_1^2}{1 + 3\gamma_1^2} p, \\ 2\gamma_1^2 p \left(\frac{8\gamma_1^3}{1 + 3\gamma_1^2} p + 1 - 2h\gamma_1 - 3\gamma_1^2 \right)^2 - k^2(1 + 3\gamma_1^2)\gamma_1^2 = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Откуда видно, что $\gamma_1 = 0$ всегда кратный корень системы и мы получаем следующие точки

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = 0,$$

которые задают на плоскости параметров первых интегралов параболу

$$h = \frac{1}{2}k^2 + \alpha.$$

В этих точках одна из главных осей инерции принимает вертикальное положение и в этом смысле кривая является разделяющей. Однако, поскольку перестроек областей возможности движения на кривой не происходит, то в дальнейшем включать ее в множество разделяющих кривых не будем.

В случае $\gamma_1 \neq 0$ система сводится к уравнению

$$2p(8\gamma_1^3 p + (1 - 2h\gamma_1 - 3\gamma_1^2)(1 + 3\gamma_1^2))^2 - k^2(1 + 3\gamma_1^2)^3 = 0. \quad (2.10)$$

В бифуркационную диаграмму войдут значения (h, k) , при которых уравнение (2.10) имеет кратный корень γ_1 , по абсолютной величине меньший единицы.

Во втором случае, записав условия наличия общего корня у уравнения и системы, приходим к системе на γ_1 :

$$\begin{cases} \omega_3^2 = 8 \frac{\gamma_1^2((h + \gamma_1)\gamma_3^2 - \alpha)}{\gamma_3^2(1 + \gamma_1^2)}, \\ \gamma_1\omega_3^3 + (1 - 2h\gamma_1 - 3\gamma_1^2)\omega_3 + 2k\gamma_1 = 0, \\ 1 - 2h\gamma_1 - 3\gamma_1^2 = -3k^{2/3}\gamma_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

После подстановки третьего уравнения во второе получаем уравнение на ω_3 :

$$\omega_3^3 - 3k^{2/3}\omega_3 + 2k = 0.$$

Подставляя найденное значение ω_3 и полученное из последнего уравнения выражение h , находим необходимое выражение для k . Окончательно получаем следующие уравнения разделяющих кривых:

$$h = \frac{1}{2\gamma_1} \frac{(1 - \gamma_1^2)(1 + 15\gamma_1^4) - 24\alpha\gamma_1^3}{(1 - \gamma_1^2)(1 - 9\gamma_1^2)}, \quad (2.11)$$

$$k = \left(4\gamma_1 \frac{(1 - \gamma_1^2)^2 - 2\alpha\gamma_1}{(1 - \gamma_1^2)(1 - 9\gamma_1^2)} \right)^{3/2}, \quad (2.12)$$

где

$$\gamma_1 \in (-1, -1/3) \cup (0, \min\{\hat{\gamma}_1, 1/3\}) \cup (\max\{\hat{\gamma}_1, 1/3\}, 1), \quad \text{если } \alpha > 0,$$

$$\gamma_1 \in (0, 1/3), \quad \text{если } \alpha \leq -32/27,$$

$$\gamma_1 \in [\hat{\gamma}_1, -1/3) \cup (0, 1/3), \quad \text{если } -32/27 < \alpha < 0;$$

$$h = \frac{(1 - \gamma_1^2)(1 - 3\gamma_1^4) - 6\alpha\gamma_1^3}{2\gamma_1(1 - \gamma_1^2)}, \quad (2.13)$$

$$k = \left(\frac{\gamma_1}{(1 - \gamma_1^2)} ((1 - \gamma_1^2)^2 - 2\alpha\gamma_1) \right)^{3/2}, \quad (2.14)$$

где

$$\gamma_1 \in (0, \hat{\gamma}_1], \text{ если } \alpha > 0,$$

$$\gamma_1 \in (-1, \hat{\gamma}_1] \cup (0, 1), \text{ если } \alpha < 0.$$

Здесь через $(\hat{\gamma}_1, 0, \hat{\gamma}_3)$ обозначены координаты проекции критической точки гамильтониана, приведенные в начале параграфа 2.1.

Для значений $\omega_3 = 0, k = 0$ получаем точки, заданные условием

$$h = -\gamma_1 + \frac{\alpha}{1 - \gamma_1^2},$$

где γ_1 – корень уравнения

$$\gamma_1^4 - 2\gamma_1^2 - 2\alpha\gamma_1 + 1 = 0.$$

Изучим теперь возможные перестройки, происходящие в области $\gamma_2 \neq 0$. В предположении $\gamma_2 \neq 0$ систему $H = h, K = k, G = 0$ можно свести к одному уравнению. Из уравнения (2.4) находим

$$4(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}) = 2(h + \gamma_1) - \omega_3^2. \quad (2.15)$$

Из оставшихся двух уравнений системы (2.3) – (2.5) получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{4\gamma_3}(\omega_3^3 - 2(h + \gamma_1)\omega_3 + 2k), \quad (2.16)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{4\gamma_2\gamma_3}(\gamma_1\omega_3^3 - (2(h + \gamma_1)\gamma_1 - \gamma_3^2)\omega_3 + 2k\gamma_1). \quad (2.17)$$

Подставляя значения (2.16), (2.17) в выражение (2.15), получаем уравнение, определяющее ω_3 :

$$\begin{aligned} Q(\omega_3) = & (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\omega_3^6 + 2(\gamma_1\gamma_3^2 - 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(h + \gamma_1))\omega_3^4 \\ & + 4k(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\omega_3^3 + (\gamma_3^4 + 4\gamma_2^2\gamma_3^2 - 4\gamma_1\gamma_3^2(h + \gamma_1)) + \\ & 4(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(h + \gamma_1)^2\omega_3^2 + 4k(\gamma_1\gamma_3^2 - 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(h + \gamma_1))\omega_3 \\ & + 4(k^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2\gamma_2^2\gamma_3^2(h + \gamma_1) + 2\alpha\gamma_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Обобщенную границу ОВД можно получить приравняв нулю дискриминант уравнения (2.18) по переменной ω_3 , что соответствует наличию кратного корня. Корни кратности три соответствуют возникновению точек возврата на границе области возможности движения в точках общего положения (что отвечает особенности типа "сборка" по отношению к проекции π), либо нарушению гладкости многообразий в прообразе. Наличие четырехкратного корня у уравнения $Q(\omega_3)$ (2.18) соответствует изменению числа особых точек границы проекции. Найдем эти точки перестроек. Введем следующие обозначения:

$$A = \gamma_1\gamma_3^2 - 2(1 - \gamma_3^2)(h + \gamma_1),$$

$$B = \gamma_3^4 + 4(1 - \gamma_1^2 - \gamma_3^2)\gamma_3^2 - 4\gamma_1\gamma_3^2(h + \gamma_1) + 4(1 - \gamma_3^2)(h + \gamma_1)^2,$$

$$C = 4k^2(1 - \gamma_3^2) - 8\gamma_3^2(1 - \gamma_1^2 - \gamma_3^2)(h + \gamma_1) + 8\alpha(1 - \gamma_1^2 - \gamma_3^2)$$

и перепишем условия на точки обобщенной границы

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \gamma_3^2)\omega_3^6 + 2A\omega_3^4 + 4k(1 - \gamma_3^2)\omega_3^3 + B\omega_3^2 + 4kA\omega_3 + C = 0, \\ 3(1 - \gamma_3^2)\omega_3^5 + 4A\omega_3^3 + 6k(1 - \gamma_3^2)\omega_3^2 + B\omega_3 + 2kA = 0, \\ 15(1 - \gamma_3^2)\omega_3^4 + 12A\omega_3^2 + 12k(1 - \gamma_3^2)\omega_3 + B = 0, \\ 5(1 - \gamma_3^2)\omega_3^3 + 2A\omega_3 + k(1 - \gamma_3^2) = 0. \end{array} \right.$$

В случае $\omega_3 \neq 0$, выразив B и A из третьего и четвертого уравнений системы и подставив эти значения в первые два уравнения, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 11(1 - \gamma_3^2)\omega_3^6 - 13k(1 - \gamma_3^2)\omega_3^3 + C - 2k^2(1 - \gamma_3^2) = 0, \\ 8\omega_3^6 - 7k\omega_3^3 - k^2 = 0. \end{array} \right.$$

Откуда находим значения ω_3 :

$$\omega_3 = k^{1/3}, \quad \text{либо } \omega_3 = (-k/8)^{1/3}.$$

В первом случае в области $\gamma_2 \neq 0$ решений не существует, во втором случае, полагая

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \gamma_3^8(108\gamma_3^4 - 228\gamma_3^2 + 121) - 243\alpha^2(1 - \gamma_3^2)^3, \\ \Phi_2 &= 4(11 - 9\gamma_3^2)\sqrt{t(4 - 3\gamma_3^2)\Phi_1}, \\ \Psi &= 121 - 228\gamma_3^2 + 108\gamma_3^4, \quad t = 1 - \gamma_3^2, \end{aligned}$$

приходим к следующим уравнениям разделяющих кривых:

$$h = \frac{3\alpha t^2 \gamma_3 \Psi - (12\gamma_3^4 - 24\gamma_3^2 + 11)(243\alpha t^3 + \Phi_2)}{\gamma_3(11 - 9\gamma_3^2)\Psi}, \quad (2.19)$$

$$k = \frac{3}{\gamma_3^3} \left(\frac{2\gamma_3(243\alpha\gamma_3 t^3 + \Phi_2 - 2\alpha\gamma_3^2\Psi)}{(11 - 9\gamma_3^2)\Psi} \right)^{3/2}, \quad (2.20)$$

где

$$\gamma_3 \in (\bar{\gamma}_3, 1), \quad \text{если } \alpha < 0,$$

$$\gamma_3 \in (\hat{\gamma}_3, 1), \quad \text{если } \alpha > 0.$$

При этом берутся только значения γ_3 , удовлетворяющие неравенству $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 < 1$, где γ_1 задается формулой

$$\gamma_1 = \frac{243\alpha\gamma_3(1 - \gamma_3^2)^3 + \Phi_2}{\gamma_3^3\Psi}.$$

Остальные решения даются формулами

$$h = \frac{3\alpha t^2 \gamma_3 \Psi - (12\gamma_3^4 - 24\gamma_3^2 + 11)(243\alpha t^3 + \Phi_2)}{\gamma_3(11 - 9\gamma_3^2)\Psi}, \quad (2.21)$$

$$k = \frac{3}{\gamma_3^3} \left(-\frac{2\gamma_3 (243\alpha\gamma_3 l^3 - \Phi_2 - 2\alpha\gamma_3^2 \Psi)}{(11 - 9\gamma_3^2)\Psi} \right)^{3/2}, \quad (2.22)$$

при

$$\gamma_3 \in (\bar{\gamma}_3, \hat{\gamma}_3), \text{ если } \alpha < 0.$$

и на γ_3 накладывается аналогичное ограничение, где

$$\gamma_1 = \frac{243\alpha\gamma_3(1 - \gamma_3^2)^3 - \Phi_2}{\gamma_3^2\Psi}.$$

Уравнение $\Phi_1 = 0$ при любых значениях α всегда имеет один положительный корень, который обозначен через $\bar{\gamma}_3$. Как показывает детальный анализ,

$$\bar{\gamma}_3 < \hat{\gamma}_3,$$

а для $\hat{\gamma}_1$ справедливы следующие неравенства:

$$|\hat{\gamma}_1| < 1/3 \text{ если } |\alpha| > 32/27,$$

$$|\hat{\gamma}_1| \geq 1/3 \text{ если } |\alpha| \leq 32/27.$$

В случае $\omega_3 = 0$ приходим к системе

$$h = -\gamma_1 + \frac{\alpha}{\gamma_3^2}, \quad k = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,$$

где γ_1 удовлетворяет уравнению

$$4\gamma_3^6\gamma_1^2 + 4\alpha\gamma_3^4\gamma_1 + 3\gamma_3^8 - 4\gamma_3^6 + 4\gamma_3^2\alpha - 4\alpha^2 = 0 \quad (2.18)$$

при условии $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 < 1$. Эта система, как нетрудно проверить, решений не имеет. Таким образом, пришли к следующему результату.

Теорема 2.2.1 Кривые, на которых происходят перестройки областей возможностей движений в компактном случае задачи о движении обобщенного волчка Горячева Чаплыгина (при $\alpha > 0$), задаются на плоскости параметров первых интегралов (h, k) формулами (2.10), (2.11)–(2.12), (2.13)–(2.14), (2.19)–(2.20), (2.21)–(2.22).

Дальнейшее исследование и построение разделяющих кривых будут проведены для значения параметра $\alpha = 1$.

2.3 Геометрический анализ компактного ОВГЧ для случая $\alpha = 1$

Проведем геометрический анализ обобщенного волчка Горячева Чаплыгина для случая $\alpha = 1$. В этом случае уравнения разделяющих кривых будут задаваться формулами (2.10), (2.11) – (2.12), (2.13) – (2.14), (2.19) – (2.20). Точки, определяемые условием (2.10) дают критические точки отображения момента. Их совместное

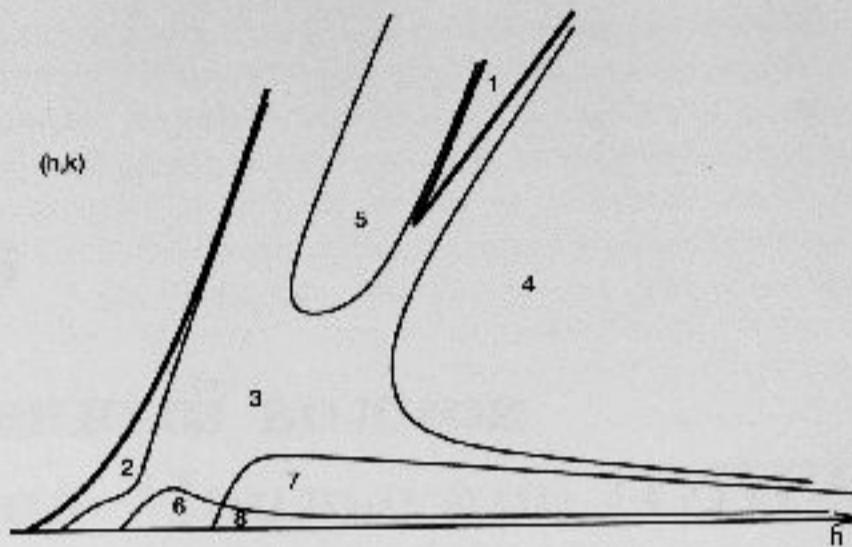


Рис. 2.3:

расположение с остальными разделяющимим кривыми показано на рис. 2.3. Бифуркационные кривые изображены линиями двойной толщины, остальные разделяющие кривые – одинарными линиями.

Кривые разбивают плоскость параметров (h, k) на области с неизменным типом областей возможности движений и количеством допустимых скоростей (числом прообразов при отображении проектирования интегральных многообразий на полусферу). Уравнение обобщенных границ получено как условие равенства нулю дискриминанта уравнения $Q(\omega_3)$ по ω_3 . Это условие позволяет получить уравнение границ непосредственно в координатах $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, на основе которого проведено построение областей возможности движения. Это же уравнение (2.18) позволяет определить число допустимых скоростей. Полученные области возможности движения представлены на рис. 2.4.

На всех рисунках изображены проекции на полусферу $\{\gamma_3 > 0\}$. Цифрами обозначено число допустимых скоростей в областях. Соответствие между областями диаграммы на рис. 2.4 и видами ОВД следующее:

$$1 \leftrightarrow (a); \quad 2, 4 \leftrightarrow (c); \quad 3 \leftrightarrow (b); \quad 5 \leftrightarrow (d); \quad 6, 7 \leftrightarrow (e); \quad 8 \leftrightarrow (f).$$

На рисунке 2.4а показана ОВД для области 1. Это образ двух торов Лиувилля. Оба тора проектируются в кольцо и образ один целиком лежит внутри образа другого. Области возможности движения в оставшихся областях 2 – 8 есть образы одного интегрального тора. В областях 2 и 4 ОВД диффеоморфна кольцу, в области 3 на границе проекции возникает треугольник, внутри которого число допустимых скоростей становится равным четырем. В области 5 на проекции тора два треугольника, в областях 6, 7 тор проектируется уже с тремя "ласточками хвостами". При переходе в область 8 компоненты проекций продолжают перекрываться, образуя в центре треугольник с шестью допустимыми скоростями. На разделяющих кривых реализуются неустойчивые (в смысле устойчивости гладкого отображения) случаи, отражающие моменты рождения или исчезновения ласточкиных хвостов.

Глава 3

Обобщенный метод Горячева-Чаплыгина (ОМГЧ) в некомпактном

3.1 Развитие

Рассмотрим задачу о

Найдем, что

убудет будущее

затем

в частности в

абсолютной

силе не по

А. Г. Федо

записано в

записях из

старших пись

мата. Вспоми

мы можем быть

конфигурации

Бифуркационные

множества конфигу

ации и т. д.

С этого

съезда у

так вот

оах кими

таким

то опоры

школьной

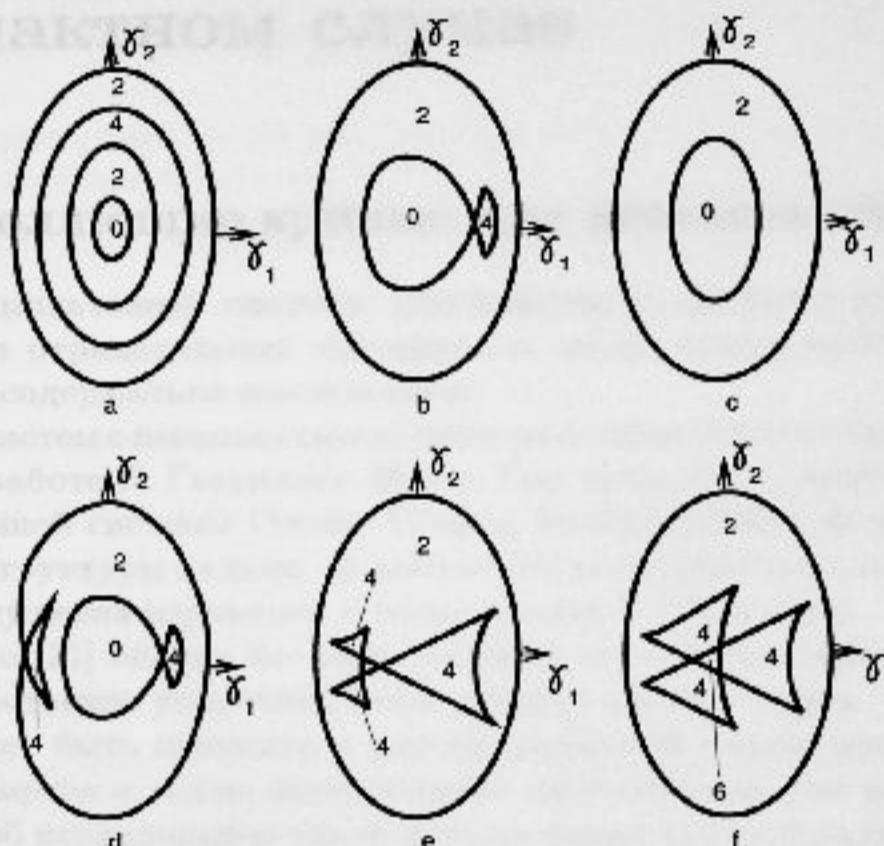


Рис. 2.4:

Бифуркационные множества конфигураций в себе содержат множество конфигураций, которые в определенных обстоятельствах могут привести к различным конфигурациям. В частности, если в начальном состоянии конфигурации в конфигурационном пространстве найдены в точках δ_1 и δ_2 , то в дальнейшем они могут привести к различным конфигурациям с равной вероятностью.

Возьмем, что конфигурации, соответствующие интегралам H , K , присвоенные в начальном состоянии, неизменны.

$$(3.1)$$

$$(3.2)$$

Кривые (3.1), (3.2), точки определяемые уравнениями (2.10), кривые (2.11) – (2.13), (2.13) – (2.14), (2.14) – (2.16), (2.21) – (2.22) также будут разделительными и в некомпактном случае. Трехмерные точки отображаются моментами (3.1), (3.2), как и в компактном случае. Кривые, которые соответствуют перестройкам интегральных многообразий, не будут кривыми – либо отмечены за конечные особенности на границе областей, чтобы отличаться от конечных особенностей на границе, либо соответствовать некоторым преобразованиям ОВД для выделения некомпактных областей.

Глава 3

Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина (ОВГЧ) в некомпактном случае

3.1 Разделяющие кривые для некомпактного ОВГЧ

Рассмотрим гамильтонову систему, описывающую движение волчка Горячева–Чаплыгина при отрицательных значениях α , когда среди интегральных многообразий будут содержаться некомпактные.

Топология систем с некомпактными интегральными многообразиями изучалась в частности в работе Л. Гаврилова [9], где был проведен полный топологический анализ обобщенной системы Генона–Гельца, базирующийся на исследовании алгебраической структуры задачи. В работе [17] релятивистская модель задачи Кеплера и ее возмущения изучались с точки зрения КАМ теории.

А. Т. Фоменко [31] описал все пять базовых перестроек торов Лиувилля, что позволяет существенно упростить исследование многих задач. Однако этот результат не может быть применен к рассматриваемой задаче при отрицательных значениях параметра α , когда интегральные многообразия уже не будут компактными. Вопрос об исследовании типов интегральных многообразий J_{hk} в этом случае может быть решен с помощью классификации их проекций на пространство конфигурационных переменных $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Бифуркационное множество Σ в некомпактном случае будет включать в себя множество критических точек отображения момента Σ' , но уже не обязано с ним совпадать. В рассматриваемом некомпактном случае в множество разделяющих кривых войдут разделяющие кривые для компактного случая, а также множество значений h и k , при которых происходят перестройки ОВД за счет их пересечения с границей полусферы.

Напомним, что кривые функциональной зависимости первых интегралов H, K , приведенные в начале параграфа 2.1, имеют вид

$$h = \frac{3}{2}\sigma^2 + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \quad k = \sigma^3 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}; \quad (3.1)$$

$$h = \frac{3}{2}\sigma^2 - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}, \quad k = \sigma^3 - \frac{2\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - 2\alpha}}. \quad (3.2)$$

Кривые (3.1), (3.2), точки, определяемые уравнением (2.10), кривые (2.11) – (2.12), (2.13) – (2.14), (2.19) – (2.20), (2.21) – (2.22) также будут разделяющимися и в некомпактном случае. Критические точки отображения момента (3.1), (3.2), как и раньше, будут заведомо соответствовать перестройкам интегральных многообразий, остальные кривые – либо отвечать за появление особенностей на границе областей возможности движения, либо соответствовать перестройкам прообразов. Кроме этих кривых в некомпактном случае в множество разделяющих кривых войдут еще точки, определяющие "уход на бесконечность", или, другими словами, выход на уровень $\{\gamma_3 = 0\}$. В терминах изменения ОВД это выглядит как выход части границы проекции за пределы единичного круга, что соответствует "вырезанию" куска интегрального многообразия в фазовом пространстве. Указанные кривые могут соответствовать как перестройкам самих интегральных многообразий, так и просто перестройкам областей возможности движения. Разделяющие кривые, на которых реализуются описанные перестройки, определяются одним из двух условий:

1. условием попадания точки возврата (ключевая) границы области возможности движения на границу круга;
2. условием касания границы ОВД и круга $\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1\}$.

Ключам границы ОВД соответствует наличие трехкратного корня в уравнении $Q(\omega_3) = 0$ (2.18), определяющего количество прообразов при проектировании интегральных многообразий на полусферу. Приравнивая нуль две первые производные уравнения и учитывая само уравнение, приходим к системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_3^6 - 4(h + \gamma_1)\omega_3^4 + 4k\omega_3^3 + 4(h + \gamma_1)^2\omega_3^2 - 8k(h + \gamma_1)\omega_3 \\ \quad + 4k^2 + 8\alpha(1 - \gamma_1^2) = 0, \\ 6\omega_3^5 - 16(h + \gamma_1)\omega_3^3 + 12k\omega_3^2 + 8(h + \gamma_1)\omega_3 - 8k(h + \gamma_1) = 0, \\ 30\omega_3^4 - 48(h + \gamma_1)\omega_3^3 + 24k\omega_3 + 8(h + \gamma_1)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Эта система разрешима только при отрицательных значениях α . Решениями системы будут точки

$$\omega_3 = 0, \quad h = -\gamma_1, \quad k = \pm\sqrt{-2\alpha(1 - \gamma_1^2)},$$

которые определяют на плоскости (h, k) эллипс, задаваемый уравнением

$$-\frac{k^2}{2\alpha} + h^2 = 1. \quad (3.3)$$

Эллипс (3.3) касается кривой (3.1) в точке $(0, \sqrt{-2\alpha})$ и имеет с ней одну точку пересечения.

Точек других типов в настоящей задаче не возникает. Таким образом к множеству разделяющих кривых добавляется эллипс (3.3), и мы приходим к следующему результату:

Теорема 3.1.1 В случае некомпактного ОВГЧ при отрицательных значениях параметра α значения параметров первых интегралов, на которых происходят перестройки областей возможности движения, задаются уравнениями (3.1), (3.2), (2.10), (2.11)-(2.12), (2.13)-(2.14), (2.19)-(2.20), (2.21)-(2.22) и (3.3).

Замечание. В множество разделяющих кривых мы не включаем линии, на которых происходит попадание на границу круга точек, в которые проектируется два различных кратных корня. Подобные переходы не представляют интерес, поскольку заведомо не могут повлиять на изменение типа многообразий в прообразе.

3.2 Геометрический анализ некомпактного ОВГЧ

В этом параграфе проводится геометрический анализ некомпактного ОВГЧ для случая $\alpha = -1$, т. е. описаны все области возможности движения и их перестройки. ОВД строятся на основе компьютерных вычислений, а затем дается качественный анализ их и их перестроек.

Обобщенная граница ОВД делит полусферу $\{\gamma_3 > 0\}$ на области, внутри которых неизменно число допустимых скоростей, т. е. число решений $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ системы (2.3) – (2.5). Очевидно, каждая из этих областей имеет точки $\gamma_2 \neq 0$, где система сводится к уравнению (2.18). Поскольку ω_1 и ω_2 при фиксированном γ однозначно выражены через ω_3 , то число допустимых скоростей в точке γ равно числу различных действительных корней многочлена $Q(\omega_3)$.

Области возможности движения для каждой из областей бифуркационной диаграммы строились как подмножество множества кратных корней многочлена $Q(\omega_3)$ (2.18) с использованием пакета Maple. Для этого сначала находились все решения уравнения

$$\text{discrim}(Q(\omega_3), \omega_3) = 0$$

без учета неравенства $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 < 1$. Далее, с помощью компьютера строились проекции полученного множества на плоскость (γ_1, γ_2) , и на основе полученных рисунков устанавливалось число прообразов в каждой связной компоненте области. После этого многообразия, лежащие в прообразе точки (h, k) , восстанавливаются однозначно. Однако, проекции интегральных многообразий нашей задачи будут подмножеством множества кратных корней многочлена (2.18). А именно, нас интересует только часть, удовлетворяющая условию $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 < 1$, т. е. попадающая в единичный круг. Соответственно, интегральные многообразия J_{hk} мы получаем находя ограничение построенных многообразий (а их проекции на пространство конфигурационных переменных – как ограничение исходных проекций). Заметим, что при таком подходе интегральные многообразия системы восстанавливаются однозначно, в то время как в случае реставрации прообразов из их проекций в некоторых случаях возникает неоднозначность.

Начиная с этого момента мы ограничим рассмотрением случая $\alpha = -1$, хотя аналогичный анализ может быть проведен для любого отрицательного значения α .

Численные результаты приведены в приложении А. На всех рисунках изображены проекции интегральных многообразий на часть верхней полусферы $\{\gamma_3 > 0, \gamma_2 > 0\}$. Области возможности движения приведены в координатах (γ_1, γ_2) , которые обозначены через $v1$ и $v2$ соответственно. На всех рисунках изображен также круг $\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1\}$. По ходу текста ссылки на эти рисунки имеют вид А.(номер рисунка).

На рисунках 3.1 и 3.2 изображены разделяющие кривые, определяемые по формулам теоремы 3.1.1 (для удобства восприятия общая картина разбита на два рисунка). Все разделяющие кривые симметричны относительно уровня $k = 0$, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только положительные значения k .

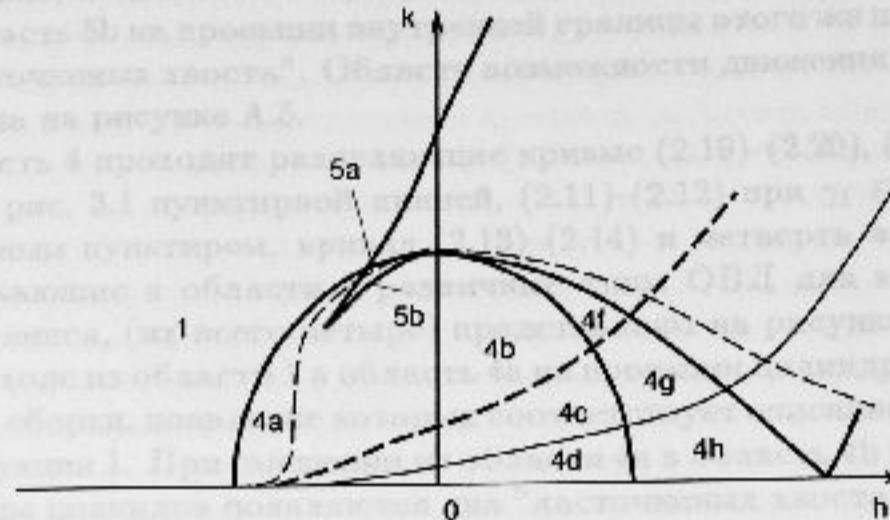


Рис. 3.1:

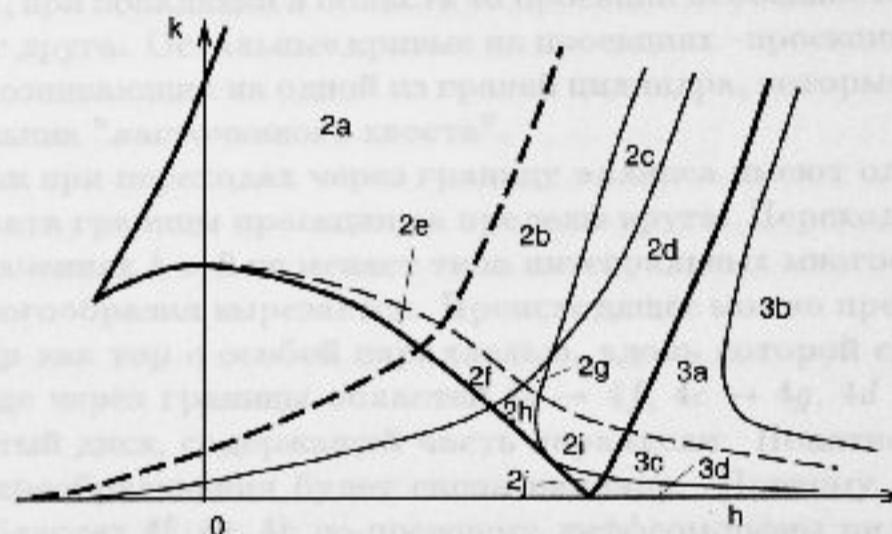


Рис. 3.2:

Кривые (3.1), (3.2) и эллипс (3.3) изображены линией двойной толщины. Их взаимное расположение по отношению друг к другу легко исследуется аналитически. Остальные разделяющие кривые построены на основе компьютерного анализа. Двойной пунктирной линией на рис. 3.1 изображена кривая (2.11) - (2.12) при значениях $\gamma_1 \in (-\hat{\gamma}_1, -1/3)$. Простым пунктиром нанесены кривые (2.19)-(2.20), (2.21)-(2.22), которые имеют одну общую точку при $\gamma_3 = \hat{\gamma}_3$ и поэтому сливаются на рисунке в одну линию. Сплошной тонкой линией изображена кривая (2.13)-(2.14).

Рассмотрим сначала области рисунка 3.1. Область 1 - одна из наиболее простых областей. Она не содержит разделяющих кривых и проекция лежащего в прообразе цилиндра выглядит как полуоткрытое кольцо, внешняя граница которого совпадает с границей единичного круга. Полученная численными методами проекция для этой области приведена на рис. А.1.

Через область 5 проходит разделяющая кривая (2.21)–(2.22). Интегральные многообразия в обеих областях 5a и 5b есть два цилиндра 2C. На рис. A.3, A.4 показана область возможности движения для области 5a. При переходе через точки эллипса (3.3), $h < 0$ в область ба на границе цилиндра, проектирующегося в полуоткрытое кольцо, появляется сборка, сместившаяся извне в пределы круга. При переходе в область 5b на проекции внутренней границы этого же цилиндра появляются два "ласточкиных хвоста". Область возможности движения для компоненты 5b представлена на рисунке A.5.

Через область 4 проходят разделяющие кривые (2.19)–(2.20), (2.21)–(2.22), изображенные на рис. 3.1 пунктирной линией, (2.11)–(2.12) при $\gamma_1 \in (-\hat{\gamma}_1, -1/3)$, выделенная двойным пунктиром, кривая (2.13)–(2.14) и четверть эллипса (3.3) для $h > 0$. Возникающие в области 4 различные типы ОВД для компонент, лежащих внутри эллипса, (их всего четыре) представлены на рисунках A.34, A.8, A.2, A.10. При переходе из области 1 в область 4a на проекции цилиндра возникают две симметричные сборки, появление которых соответствует описанной в предыдущем параграфе ситуации 1. При смещении из области 4a в область 4b на проекции внутренней границы цилиндра появляются два "ласточкиных хвоста". Многообразие в прообразе диффеоморфно цилиндру. Области возможности движения для компонент 4c и 4d отличаются между собой (как и от области 4b) внутренней границей проекций. При переходе в область 4c на ней возникает третья особенность типа "ласточкин хвост", при попадании в область 4d проекции особенностей смещаются относительно друг друга. Остальные кривые на проекциях – проекции двух симметричных сборок, возникающих на одной из граней цилиндра, которые, встречаясь, образуют треугольник "ласточкиного хвоста".

Все перестройки при переходах через границу эллипса имеют одну природу – выход точек возврата границы проекции за пределы круга. Переход через границу эллипса при значениях $h > 0$ не меняет типа интегральных многообразий, хотя при этом часть многообразия вырезается. Происходящее можно представить так: реализуем цилиндр как тор с особой параллелью, вдоль которой сделан разрез. Тогда при переходе через границы областей 4b \rightarrow 4f, 4c \rightarrow 4g, 4d \rightarrow 4h из тора вырезается открытый диск, содержащий часть параллели. Понятно, что результатом подобного преобразования будет снова цилиндр. Поэтому интегральные многообразия в областях 4f, 4g, 4h по-прежнему диффеоморфны цилиндру C, так же как и в пограничных им областях. На рис. A.11, A.6, A.7 показаны полученные с помощью компьютера проекции интегральных многообразий. Как ясно видно на всех рисунках, один (с точностью до симметрии относительно уровня $\gamma_2 = 0$) клюв границы проекции цилиндра выходит за пределы единичного круга, что соответствует описанному выше удалению диска из цилиндра. В областях 4f, 4g, 4h проекции различаются между собой проекциями "дырки" цилиндра, а также смещением "ласточкиного хвоста" относительно круга.

Рассмотрим теперь области рис. 3.2. Два цилиндра на проекциях в области 3 есть просто части торов, внешние границы которых вышли за пределы единичного круга и последний цилиндр, проектирующийся в полуоткрытое кольцо, проходит через области диаграммы 2 и 3 без изменений. Проекции интегральных многообразий во всех областях, кроме области 3d, различаются только наличием или отсутствием особенности типа "ласточкин хвост" на границе проекции одного из цилиндров. Соответственно, на всех разделяющих кривых, попавших в

эту область, кроме кривой (2.13)–(2.14), проекции имеют особенность типа "точки возврата". В области 3d на проекции внутренней границы одного из цилиндров возникает три сборки. Проекции последних частично перекрываются, образуя области, внутри которых четыре и шесть допустимых скоростей.

На рисунках A.18, A.19, A.12, A.16, A.14, A.15 приведены полученные с помощью компьютера области возможности движения для области 3. Рисунки A.12, A.16 хотя и одинаковы, но просчитаны для разных подобластей области 3 рисунка 3.2.

Область 2 разбивается разделяющими кривыми на девять подобластей, в которых всего двенадцать различных типов ОВД. Полученные с помощью компьютера проекции показаны на рисунках A.22, A.23, A.28, A.29, A.17, A.26, A.27, A.30, A.31, A.24, A.25, A.20, A.21, A.32, A.33. Перестройки ОВД в области 2 связаны как с изменением типов проекций, так и с изменением их расположения относительно друг друга и относительно единичного круга. Во всех ситуациях один цилиндр всегда проектируется в полуоткрытое кольцо и его проекция не изменяется при переходе через разделяющие кривые. Второй цилиндр есть реально часть тора, проектирующегося в кольцо с особенностями типа "ласточкин хвост" на внешней и внутренней границах окружностях. Именно смещение положения сборки относительно диска определяет фактически все разнообразие проекций интегральных многообразий. Показанные на рис. A.20, A.21 две области возможности движения для области 2а соответствуют ситуации, описанной в замечании к утверждению 3.1.1.

Схематично все описанные выше области возможности движения вместе с числом допустимых скоростей в прообразе показаны на рис. 3.3, 3.4. На всех рисунках изображены проекции ОВД на полусферу $\{\gamma_3 > 0\}$ в координатах (γ_1, γ_2) . Пунктирной линией нарисована граничная окружность $\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1\}$. Цифры внутри каждой области указывают число допустимых скоростей для компоненты.

Соответствие между областями рис. 3.1, 3.2, проекциями интегральных многообразий, изображенных на рис. 3.3, 3.4 и типом многообразий в прообразе приведено в таблице 3.1.

На основе проведенного компьютерного анализа убеждаемся в справедливости следующего результата:

Утверждение 3.2.1 Пусть $\alpha = -1$. Соответствие между областями с одинаковым типом ОВД рис. 3.1, 3.2, самими ОВД (рис. 3.3, 3.4) и интегральными многообразиями в прообразе приведены в таблице 3.1.

3.3 Топология некомпактного ОВГЧ

Анализируя результаты утверждения 3.2.1 получаем следующий результат.

Утверждение 3.3.1 При $\alpha = -1$ перестройки интегральных многообразий некомпактного ОВГЧ происходят при переходе через критические точки отображения момента (3.1), (3.2).

Соответствующая бифуркационная диаграмма вместе с типами интегральных многообразий в областях приведена на рисунке 3.5, где через C обозначен цилиндр.

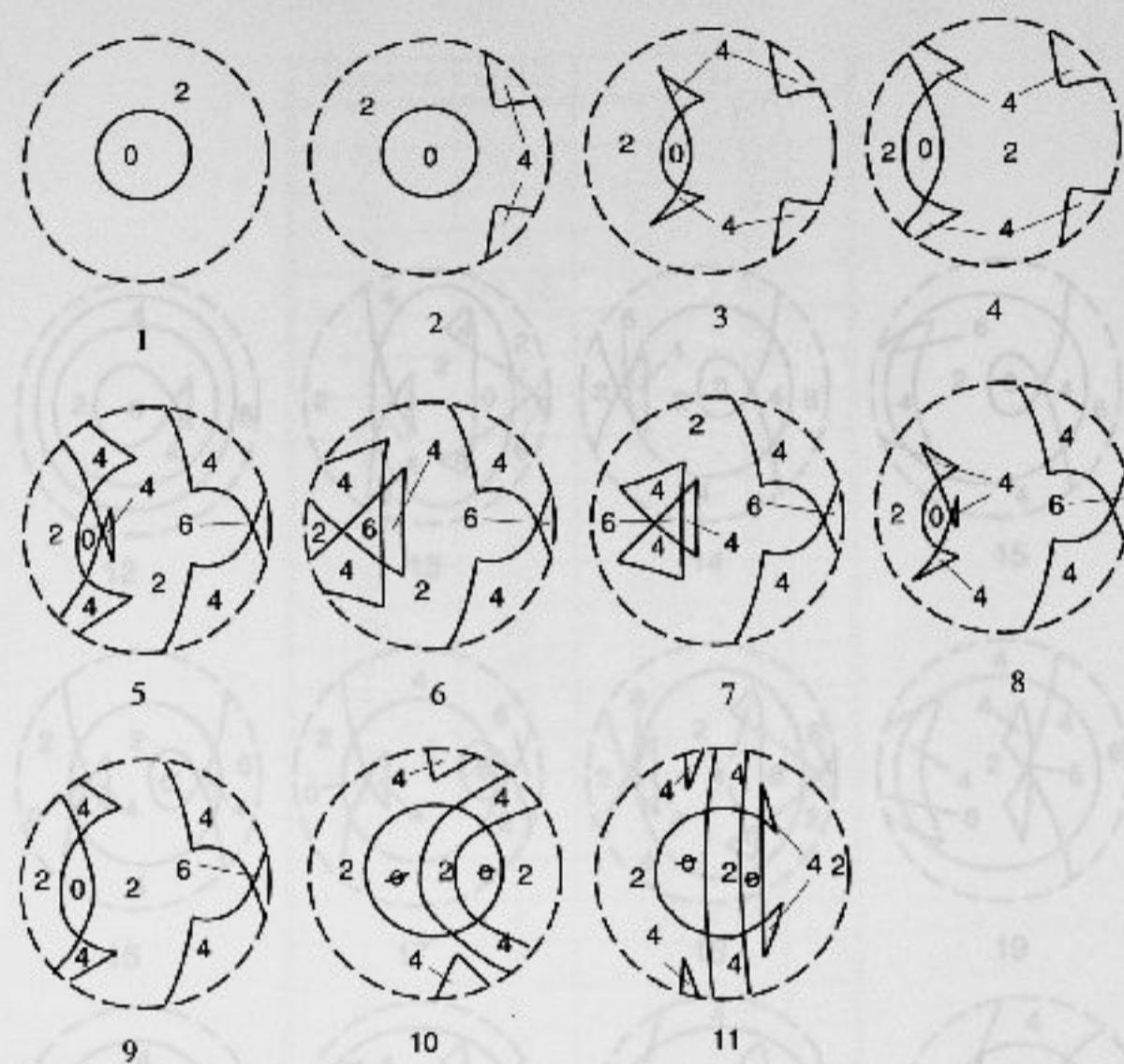


Рис. 3.3:

Типы интегральных многообразий определялись на основе изучения их проекций на многообразие Пуассона, описанных в параграфе 3.2. Исследование изменения областей возможности движения при пересечении бифуркационных кривых позволило описать соответствующие перестройки интегральных многообразий.

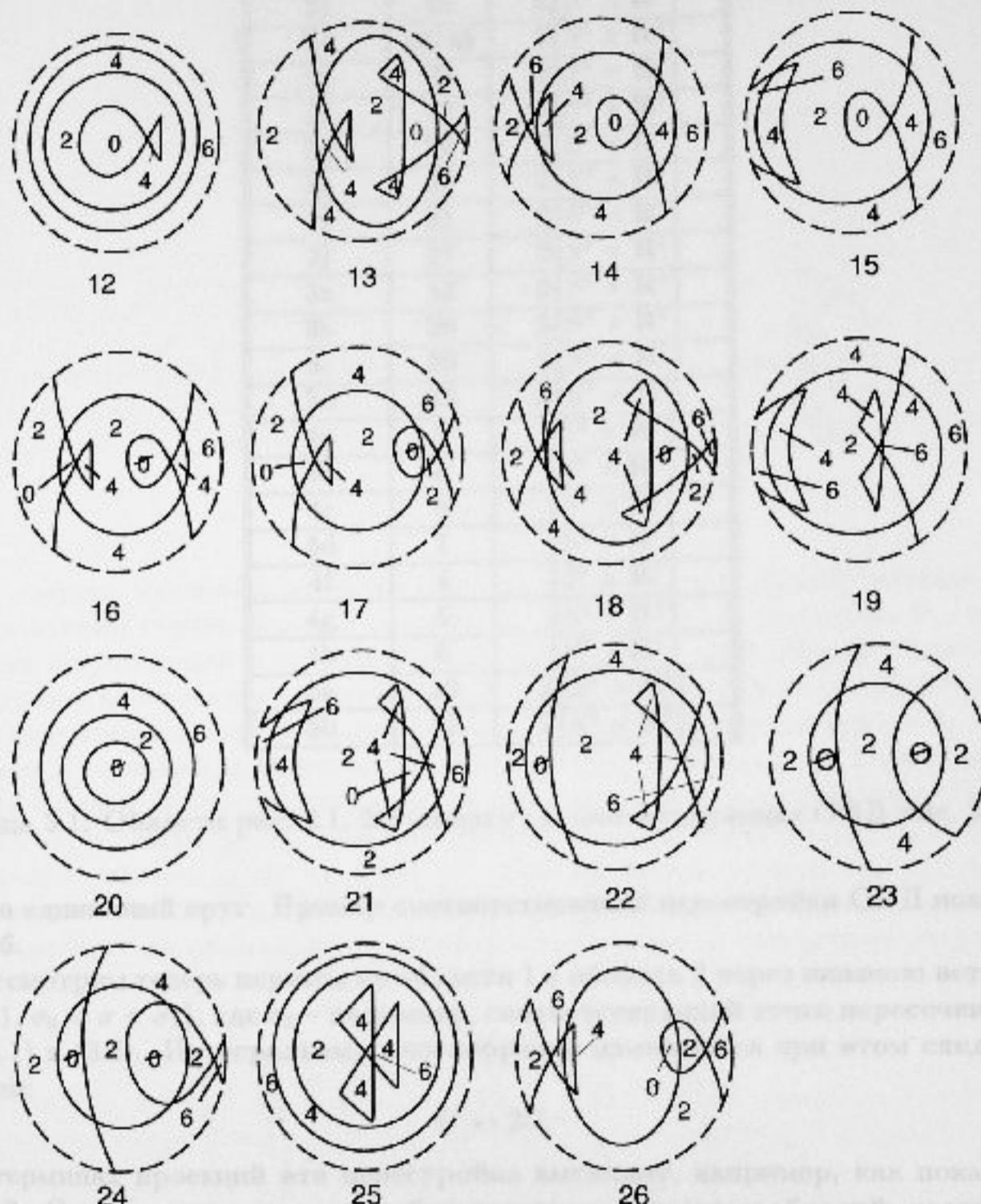
Опишем, основываясь на численных результатах предыдущего параграфа, перестройки интегральных многообразий.

Рассмотрим сначала переход через бифуркационную кривую $\{(3.1), \sigma > \sigma_0\}$, где через σ_0 , как и раньше, обозначен параметр, соответствующий точке возврата бифуркационной кривой (3.1).

Как показывает анализ перестроек ОВД, при переходе из области 1 в область 2 через указанную кривую происходит рождение цилиндра из прямой:

$$\emptyset \leftrightarrow \mathbf{R}^1 \leftrightarrow C. \quad (3.4)$$

Интегральные многообразия в прообразе точек границы областей есть несвязное объединение цилиндра и прямой: $J_{h\ell} \approx C \cup \mathbf{R}^1$. Эта перестройка полностью аналогична рождению интегрального тора из критической окружности (перестройка типа А в классификации Фоменко). Более того, реально возникающие в данном случае прямая и цилиндр есть часть окружности и тора соответственно, попада-



Второе место в ряду, например, как показано на рис. 3.7. Следующий порядок расположения чисел соответствует перестройке приведенной на рисунке 3.6. Для удобства можно временно разбить изображение на квадраты, которые обозначим I_1 , I_2 . Нижние цифры "и" и "и" применяются для усиленного обозначения верхних и нижних (широких, тонких, дальних и близких) граней куба. Для обозначения конгруэнтных признаков применяется буква С с индексом,

область	ОВД	J_{hk}
1	1	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2a	23, 24	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2b	17	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2c	16	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2d	14, 15	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2e	22	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2f	13	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2g	26	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2h	18	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2i	21	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
2j	19	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
3a	12	$3\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
3b	20	$3\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
3c	20	$3\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
3d	25	$3\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
4a	2	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
4b	3	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
4c	8	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
4d	7	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
4f	4	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
4g	5	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
4h	6	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
5a	10	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$
5b	11	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$

Таблица 3.1: Области рис. 2.1, 2.2 (вверху) и соответствующие ОВД рис. 3.3 и 3.4

ющие в единичный круг. Пример соответствующей перестройки ОВД показан на рис. 3.6.

Рассмотрим теперь переход из области 1 в область 2 через нижнюю ветвь клюва $\{(3.1, \sigma_0 < \sigma < \sigma_1)\}$, где σ_1 – параметр, соответствующий точке пересечения кривых (3.1) и (3.2). Интегральные многообразия изменяются при этом следующим образом:

$$C \leftrightarrow 2C. \quad (3.5)$$

В терминах проекций эта перестройка выглядит, например, как показано на рис. 3.7. Опишем теперь перестройку интегральных многообразий, соответствующую перестройке проекций на рис. 3.7. На рис. 3.8 показана верхняя половина критической интегральной поверхности. Вторая часть выглядит симметрично относительно горизонтального уровня. Двойными линиями на рисунке изображены места "склеек". Для удобства описания кривые склесек разбиты на интервалы, которые обозначены I_1 , I_2 . Нижние индексы "в" и "н" применяются для условного обозначения верхних и нижних (или, иначе говоря, дальних и ближних) граней цилиндра. Для обозначения компонент цилиндра применяется буква C с индексами,

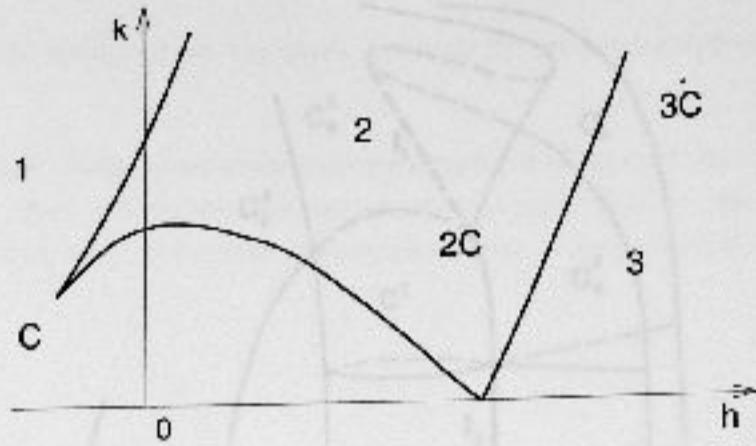


Рис. 3.5:

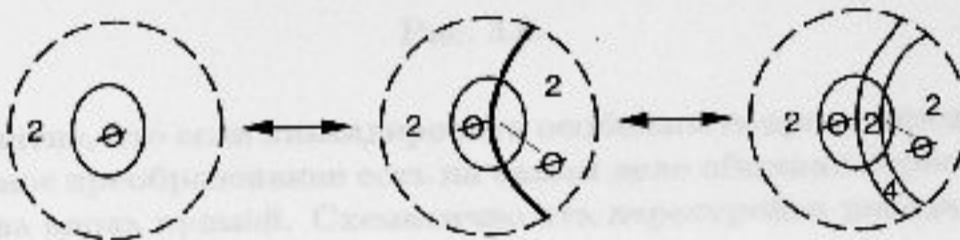


Рис. 3.6:

будем считать, что компонента обрывается при встрече с линией склейки.

Рассмотрим теперь переход из области 1, где $J_{hk} \approx C$, в область 2, где $J_{hk} \approx 2C$. При приближении к границе сборка внутренняя часть сборки сближается с цилиндром и касается его по интервалу I_1 , как показано на рис. 3.8. Одновременно с этим верхняя и нижняя грани цилиндра склеиваются вдоль интервала I_2 . В итоге получаем указанную критическую интегральную поверхность. При переходе в область 2 линии склеек расщепляются в дополнительных направлениях. При этом верхняя часть цилиндра C_b^3 замыкается сама на себя через сборку, а с грани C_b^4 происходит переход сразу на грань C_b^2 . При смещении в область 2 критическая поверхность распадается на два цилиндра. Первый склеен из компонент C^1 , C_b^3 и расположенных им симметрично. Второй с точностью до симметрии составлен из частей C_b^4 , C_b^2 и C_b^1 .

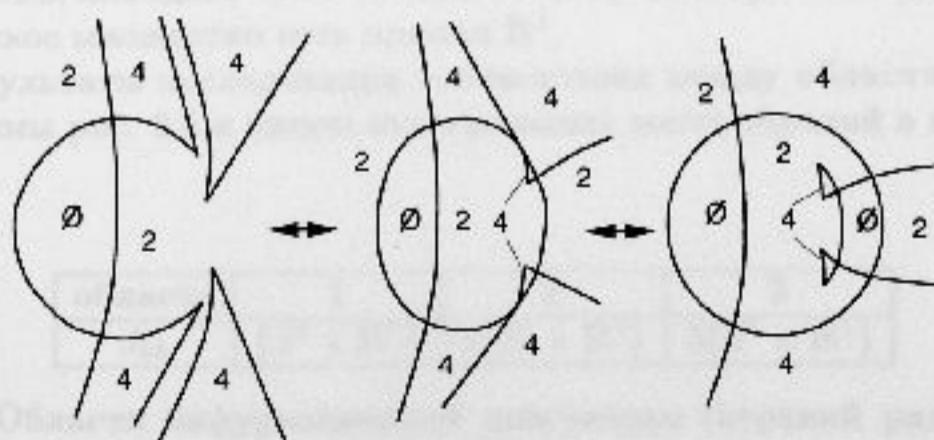


Рис. 3.7:

Также отметим, что получены различные типы интегральных многообразий ОВ РЧ.

Утверждение 3.3.2: Бифуркационный переход включает в себя поверхность интегральных многообразий (3.1) из форм обобщенного цилиндра, разделяющую различные типы интегральных многообразий, которые можно видеть на рисунке 3.8.

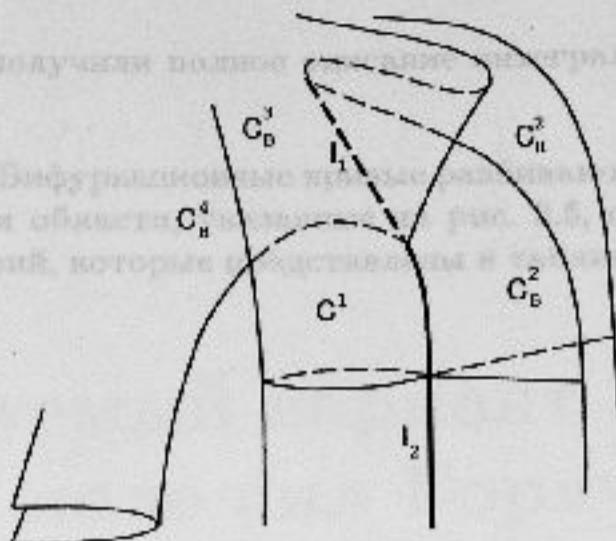


Рис. 3.8:

Теперь понятно, что если ликвидировать особенности проектирования, то только что описанное преобразование есть на самом деле обычная перестройка одного цилиндра в два вдоль прямой. Схематично эта перестройка показана на рис. 3.9.

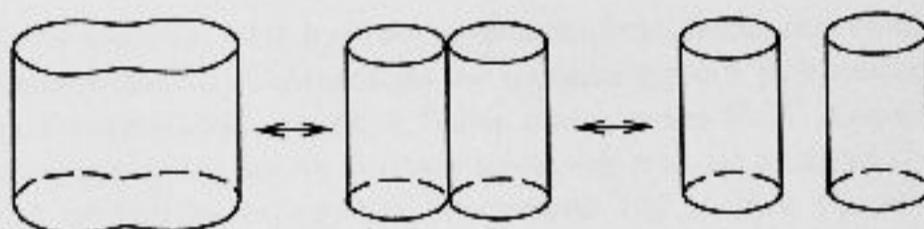


Рис. 3.9:

Осталось рассмотреть теперь переход из области 2 в область 3, где два цилиндра перестраиваются в три $2C \rightarrow 3C$. Как показывает анализ проекций, при этом один из цилиндров проходит через бифуркационную кривую, не подвергаясь никаким изменениям. Таким образом, на границе областей 2 и 3 происходит перестройка одного цилиндра в два $C \leftrightarrow 2C$. Проанализируем теперь формулы множества критических точек отображения момента, полученные в третьем параграфе первой главы. Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве утверждения 1.4.2, находим, что в точках исследуемой границы $\{(3.2), \sigma > \sigma_1\}$ при $\alpha < 0$ критическое множество есть прямая \mathbf{R}^1 .

Сведем результаты исследования соответствия между областями бифуркационной диаграммы рис. 3.5 и типом интегральных многообразий в прообразе в таблицу.

область	1	2	3
J_{kk}	$\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$	$2\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$	$3\{S^1 \times \mathbf{R}^1\}$

Таблица 3.2: Области бифуркационной диаграммы (верхний ряд) и типы интегральных многообразий в прообразах (нижний ряд)

Таким образом, мы получили полное описание интегральных многообразий ОВГЧ.

Утверждение 3.3.2 Бифуркационные кривые разбивают плоскость интегральных констант (h, k) на три области, указанные на рис. 3.5, с различным типом интегральных многообразий, которые представлены в таблице 3.3.

Интегрируемый момент задачи Суслова в задаче Горячева

В настоящей главе мы будем рассматривать задачу о движении материальной точки в однородном поле гравитации, введенную Сусловым в 1904 году [26].

Первые надобности в решении задачи о движении материальной точки в однородном поле гравитации были предприняты в 1904 году Сусловым и Григорьевым [26], где было показано, что в случае отсутствия квадратичной формы в начальном условии задачи можно воспользоваться методом интегрирования через полиномы Ференца.

Оказывается, что для этого необходимо и достаточно выполнить условие

Комплексный метод

Фундаментально важность этого условия объясняется тем, что в противном случае задача не имеет решения. Без ограничения общности можно считать, что

Симметрическое значение коэффициента A_1 в линейном преобразовании $W(r, \theta) \times D^2(n, n-1)$ не равно нулю, т. е. $A_1 \neq 0$, где r и θ есть радиус и угол полярных координат вектора R из $D^2(n, n-1)$.

При этом бифуркационные кривые разбивают плоскость интегральных констант на три области. Запись уравнения бифуркационных кривых в координатах (h, k) имеет вид

$$\begin{cases} h \rho_0(A_1 - A_2) + \sqrt{\Delta} \rho_0 = 0, \\ \frac{h \rho_0}{\sqrt{\Delta}}(A_1 - A_2) + \frac{k \rho_0}{\sqrt{\Delta}}(A_1 + A_2) - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(A_1 A_2) = 0, \end{cases}$$

Глава 4

Интегрируемый вариант задачи Суслова в поле сил Горячева

В настоящей главе рассматривается интегрируемый вариант задачи Суслова о движении твердого тела с неголономной связью $\omega_3 = 0$ в поле сил Горячева

$$\Pi = \frac{\alpha}{2\gamma_3^2}.$$

Впервые подобная задача, но с другим потенциалом, была поставлена Г. К. Сусловым [26], где была также представлена ее механическая реализация. Приведение задачи Суслова к гамильтонову виду было выполнено Е. И. Харламовой в работе [11], где было показано, что после замены времени $\tau = \gamma_3 t$ задача Суслова сводится к гамильтоновой форме на каждой из полусфер $\{\gamma_3 > 0\}$ и $\{\gamma_3 < 0\}$. Тогда, если обозначить через $p_1 = -A_2\omega_2$, $p_2 = A_1\omega_1$, то гамильтониан будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{A_2} + \frac{p_2^2}{A_1} \right) + \Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Оказывается, что эта задача интегрируема в поле сил Π [4]. Дополнительный интеграл

$$K = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \alpha \frac{A_2\gamma_1^2 + A_1\gamma_2^2}{2\gamma_3^2} + \frac{1}{2A_1A_2}(A_1p_1\gamma_2 - A_2p_2\gamma_1)^2$$

функционально независим с гамильтонианом и находится с ним в инволюции. Без ограничения общности в дальнейшем будем предполагать $A_1 > A_2$.

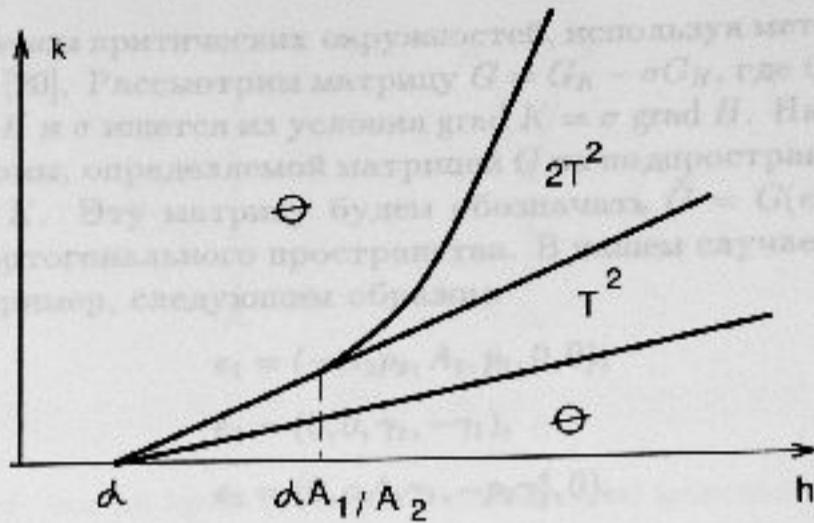
Симплектическое многообразие, на котором задана система, диффеоморфно $\mathbb{R}^2(p_1, p_2) \times D^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Вектор $\text{grad } H$ равен нулю в точке $p_1 = p_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, где гамильтониан H имеет изолированный невырожденный минимум.

Построим бифуркационную диаграмму и топологический инвариант системы. Записав условия равенства нулю всех миноров второго порядка, составленных из координат векторов $\text{grad } H$, $\text{grad } F$, и удалив все линейно зависимые выражения, приходим к двум различным системам.

В первом случае при условии $\gamma_1\gamma_2p_1p_2 \neq 0$ получаем систему

$$\begin{cases} p_1p_2(A_1 - A_2) + (A_1p_1\gamma_2 - A_2p_2\gamma_1)(p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2) = 0, \\ \frac{\alpha\gamma_1\gamma_2}{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}(A_1 - A_2) + \frac{1}{A_1A_2}(A_1p_1\gamma_2 - A_2p_2\gamma_1)(A_1p_1\gamma_1 + A_2p_2\gamma_2) = 0. \end{cases}$$

Благодаря малым критическим окружностям получаем метод, предложенный А. А. Ореховым [1]. Рассмотрим матрицу $G_k G_h - \alpha G_h$, где G_k, G_h есть гессианы функций K и L и останется из условия дифференциальной банды H . Находят ограничение квадратичной формы, определяемой матрицей G_h при дифференциальном ортогональном векторе из \mathbb{R}^n . Это выражение будет иметь вид $(G_h v, v)$, где v_1, v_2, v_3 – обратные базисы ортогонального пространства \mathbb{R}^n . В данном случае этот базис может быть выбран, например, следующим:



Рассмотрим сначала точку из условия дифференциальной окружности уравнения $p = 0$.
Уравнение G в этой точке имеет вид

Рис. 4.1:

Эта система дает следующие значения отображения момента:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_1^2}{A_2 h - \sqrt{\alpha A_1 A_2 h}} + \frac{p_2^2}{A_1 h - \sqrt{\alpha A_1 A_2}} = 1; \\ \frac{\gamma_1^2}{1 - \sqrt{\alpha A_1 / A_2 h}} + \frac{\gamma_2^2}{1 - \sqrt{\alpha A_2 / A_1 h}} = 1; \\ p_2^2 = \frac{\alpha A_1 (\sqrt{\alpha A_1 A_2 h} - A_1) \gamma_1^2}{\gamma_1^2 (A_1 - A_2) + A_2 - \sqrt{\alpha A_1 A_2 / h}}. \end{array} \right.$$

Отсюда следует, что для каждого $h > \alpha A_1 / A_2$ имеется две пары значений p_1, p_2 . Каждая пара определяет соответствующую окружность $k = \gamma_1^2 / h$ и сопровождаемую ею кривую $k = \gamma_2^2 / h$.

Соответствующие значения первых интегралов h и k лежат на кривой

$$k = h(A_1 + A_2) - 2\sqrt{\alpha A_1 A_2 h}, \quad h > \alpha A_1 / A_2. \quad (4.1)$$

В прообразе каждой точки кривой лежит две критические окружности $2S^1$.

В случае когда произведение $p_1 p_2 \gamma_1 \gamma_2$ обращается в ноль, получаем два семейства критических точек M :

$$p_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \frac{p_2^2}{A_1} + \frac{\alpha}{1 - \gamma_2^2} = h, \quad h \geq \alpha$$

и

$$p_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \frac{p_1^2}{A_2} + \frac{\alpha}{1 - \gamma_1^2} = h, \quad h \geq \alpha.$$

Соответствующие значения первых интегралов принадлежат двум лучам

$$k = A_1(h - \alpha), \quad k = A_2(h - \alpha)$$

на плоскости (h, k) . В прообразе каждой точки этих линий лежит одна критическая окружность.

Бифуркационная диаграмма показана на рис. 4.1. В точке пересечения лучей гамильтониан H достигает минимума. Часть параболы, задаваемая уравнением (4.1) касается верхней прямой в точке $h = \alpha A_1 / A_2$.

Вычислим индексы критических окружностей, используя метод, предложенный А. А. Ошемковым [20]. Рассмотрим матрицу $G = G_K - \sigma G_H$, где G_K, G_H есть гессианы функций K и H и σ ищется из условия $\operatorname{grad} K = \sigma \operatorname{grad} H$. Находя ограничение квадратичной формы, определяемой матрицей G на подпространство, ортогональное вектору $\operatorname{grad} K$. Эту матрицу будем обозначать $\tilde{G} = G(e_i, e_j)$, где e_1, e_2, e_3 образуют базис ортогонального пространства. В нашем случае этот базис может быть выбран, например, следующим образом:

$$e_1 = (-A_2 p_2, A_1, p_1, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 0, \gamma_2, -\gamma_1),$$

$$e_3 = (0, \alpha A_1 \gamma_1, -p_2 \gamma_3^4, 0).$$

Рассмотрим сначала точки на верхней полупрямой, заданные уравнениями $p_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$. Ограничение \tilde{G} в этих точках имеет вид

$$\tilde{G} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{A_1}{A_2}(1 - \gamma_2^2) & -p_2 \gamma_2 & 0 \\ -p_2 \gamma_2 & \alpha \frac{A_2 - A_1}{1 - \gamma_2^2} + \frac{A_2}{A_1} p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вычисляя произведение собственных значений этой матрицы, получаем:

$$\lambda_1 \lambda_2 = -(A_1 - A_2)(h - \alpha A_1 / A_2).$$

Откуда следует, что критическая окружность, соответствующая точке $h = \alpha A_1 / A_2$ вырождена. Критические окружности максимальны, когда $h > \alpha A_1 / A_2$ и седловые при $h < \alpha A_1 / A_2$. Аналогичные вычисления дают

$$\lambda_1 \lambda_2 = (A_1 - A_2)(h - \alpha A_2 / A_1) > 0$$

для точек на нижнем луче.

Соответствующие критические окружности минимальны. Рассмотрим теперь точки кривой (4.1). Поскольку критические окружности есть траектории системы, то достаточно доказать невырожденность в какой-либо точке каждой окружности. Для простоты выберем точки, определяемые условиями:

$$p_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad p_1^2 = \frac{\alpha}{1 - \gamma_2^2} \frac{A_2}{A_1} (A_2 - A_1 \gamma_3^2).$$

Учитывая равенство $\sigma = A_1 + A_2 + \sqrt{\alpha A_1 A_2 / h}$ получаем следующую матрицу:

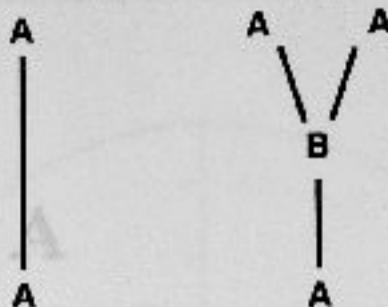
$$\tilde{G} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\sigma}{A_1} & -p_1 \gamma_2 & 0 \\ -p_1 \gamma_2 & -\alpha A_2 \frac{\gamma_2^2}{\gamma_3^4} & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha \gamma_2^2 p_1^2 (A_1 \gamma_2^2 - \sigma)(1 - \gamma_2^2) \end{vmatrix}$$

которая имеет два ненулевых собственных значения:

$$\lambda_1 = (1 - \gamma_2^2)(\sqrt{\alpha A_1 A_2 / h} - A_2) - A_1(1 - \gamma_2^2) < 0,$$

$$\lambda_2 = -(A_2 + \sqrt{\alpha A_1 A_2 / h})/A_1 - A_2 \gamma_2^2 / (1 - \gamma_2^2) < 0,$$

Приложение



Компьютерные эксперименты

Рис. 4.2:

Таким образом, точкам на кривой (4.1) соответствуют максимальные критические окружности. Все критические окружности невырождены, кроме окружности, лежащей в прообразе точки касания параболы и луча.

В прообразе точек внутри угла лежит тор T^2 и интегральные многообразия диффеоморфны двум торам в области между лучем $k = A_1(h - \alpha)$ и кривой $k = h(A_1 + A_2) - 2\sqrt{\alpha A_1 A_2 h}$.

При переходе из области I в область II тор перестраивается в два тора. Соответствующие молекулы показаны на рис. 4.2

Теорема 4.1.1 Существует два класса грубо эквивалентных гамильтоновых систем в интегрируемом варианте задачи Суслова в поле сил Горячева: один из них реализуется при значениях энергии $\alpha < h < \alpha A_1/A_2$, второй - при $h > \alpha A_1/A_2$. Интегральные многообразия диффеоморфны тору или двум торам в областях, указанных на рис. 4.1. Все поверхности постоянной энергии гомеоморфны трехмерной сфере S^3 .

Приложение А

Компьютерные эксперименты

В этом приложении приводятся графические результаты компьютерных экспериментов по исследованию областей возможности движения для некомпактного волчка Горячева Чаплыгина, получающегося при $\alpha = -1$. На рисунках изображены проекции проекции интегральных поверхностей на полусферу $\{\gamma_3 > 0\}$ в координатах γ_1, γ_2 .

Рис. A.2. Области возможност

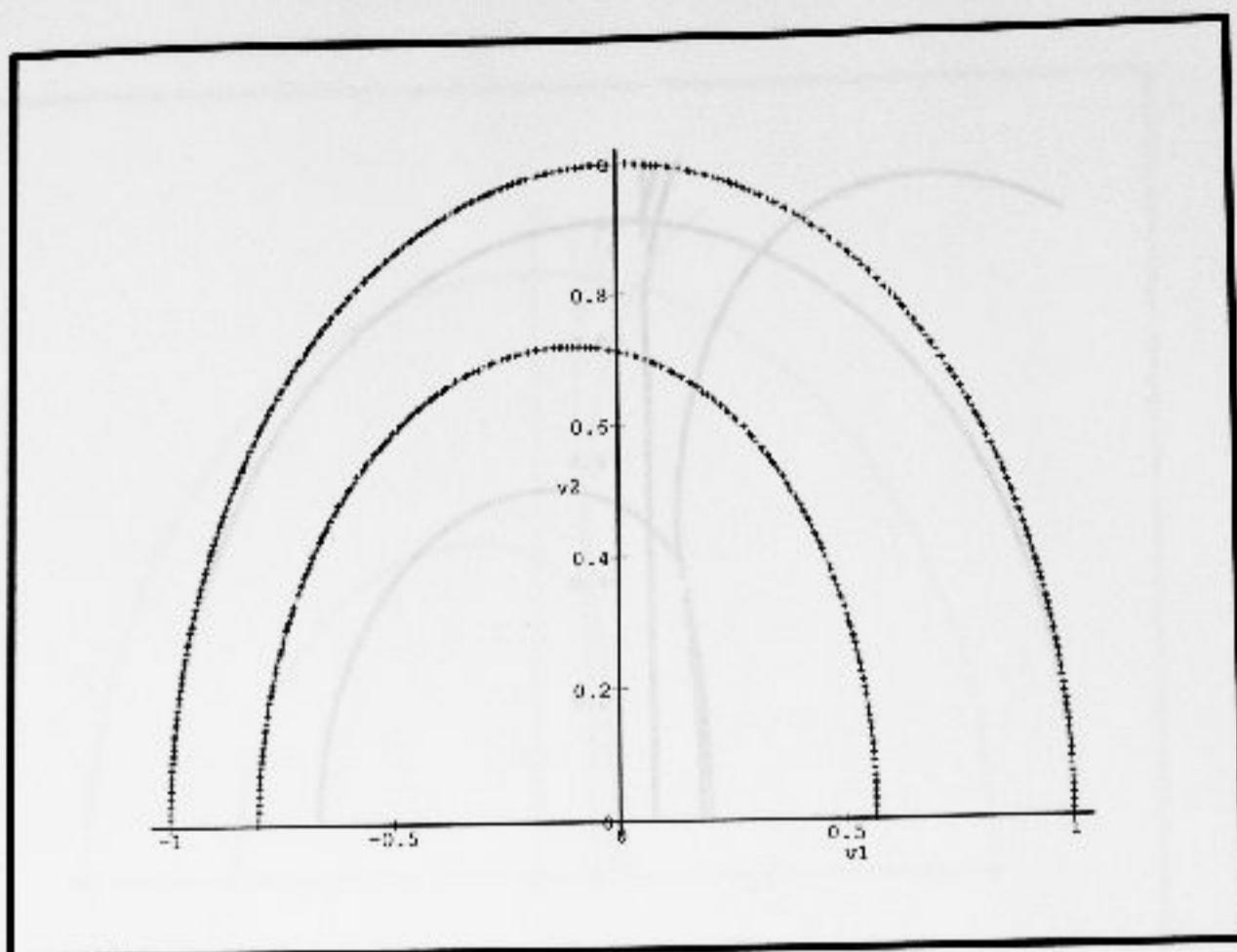


Рис. А.1: ОВД для области 1

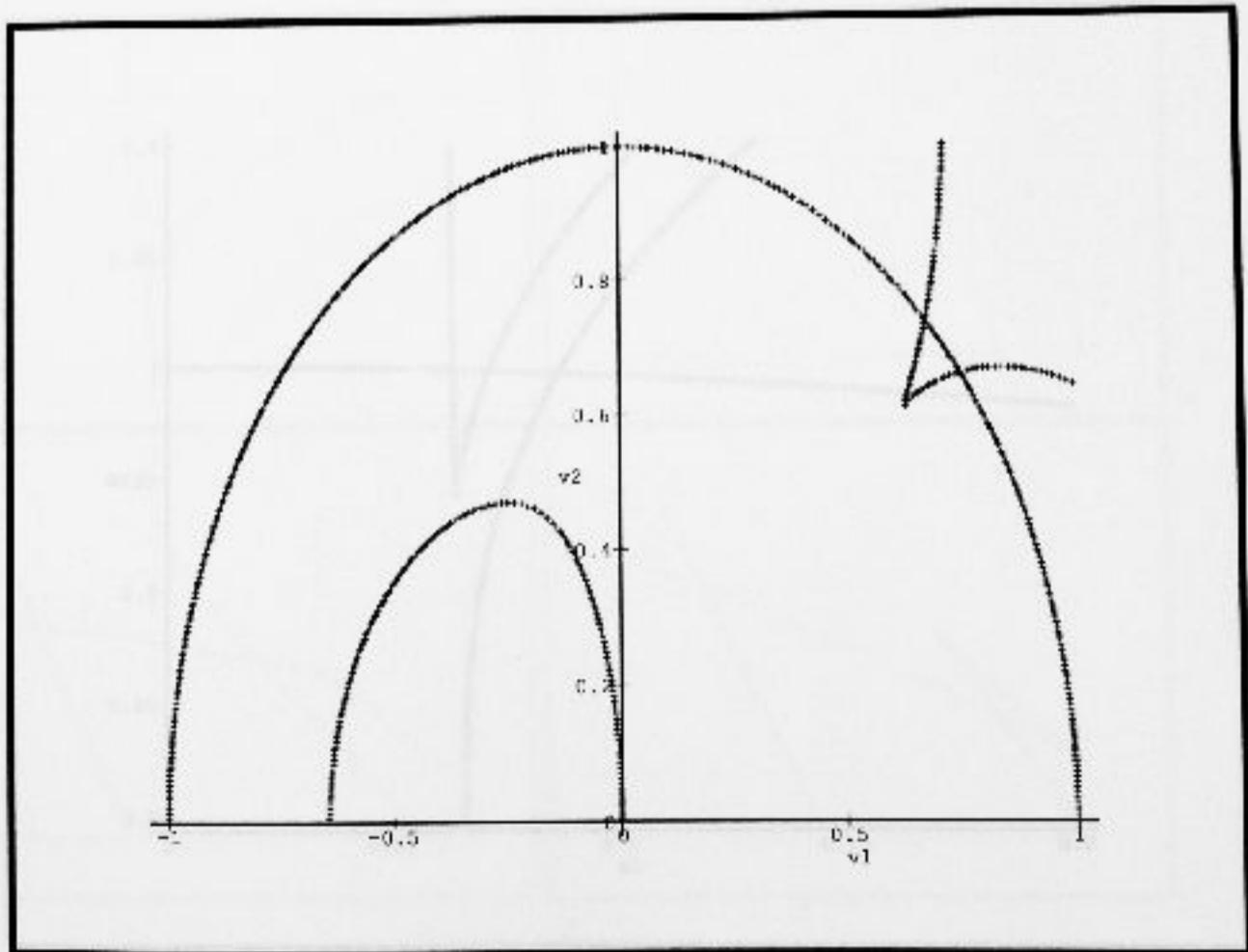


Рис. А.2: ОВД для области 4а

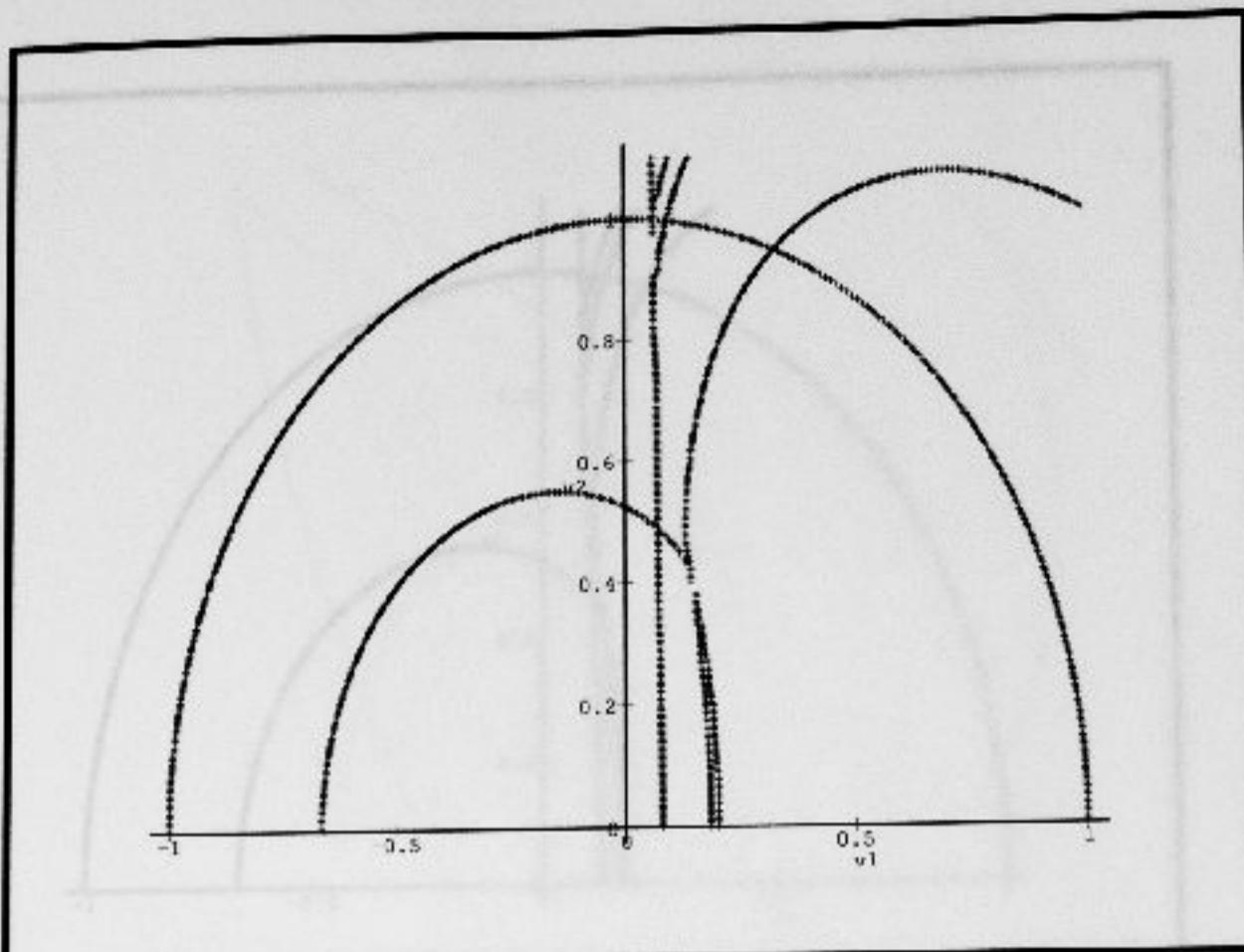


Рис. А.3: ОВД для области 5а

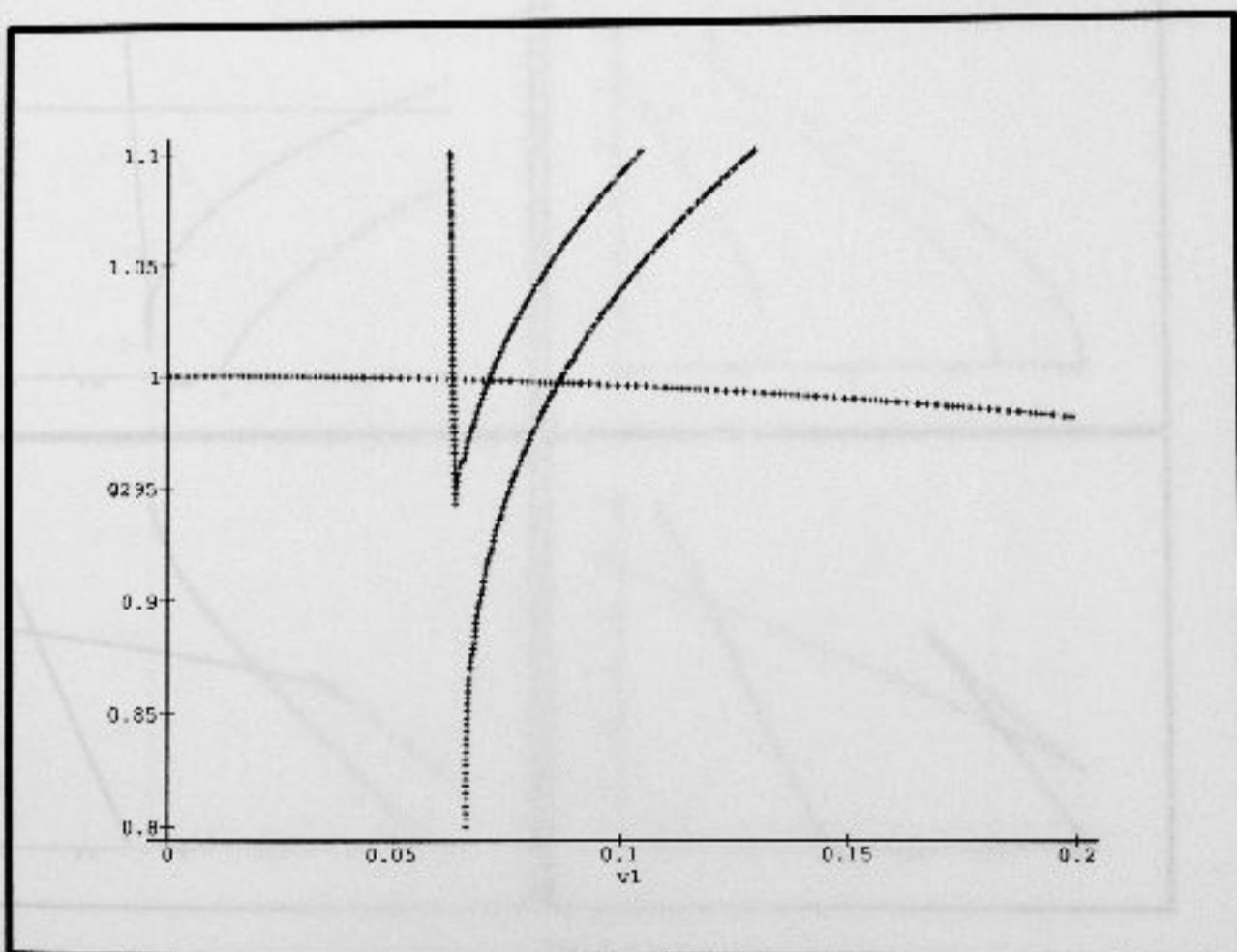


Рис. А.4: Фрагмент ОВД для области 5а

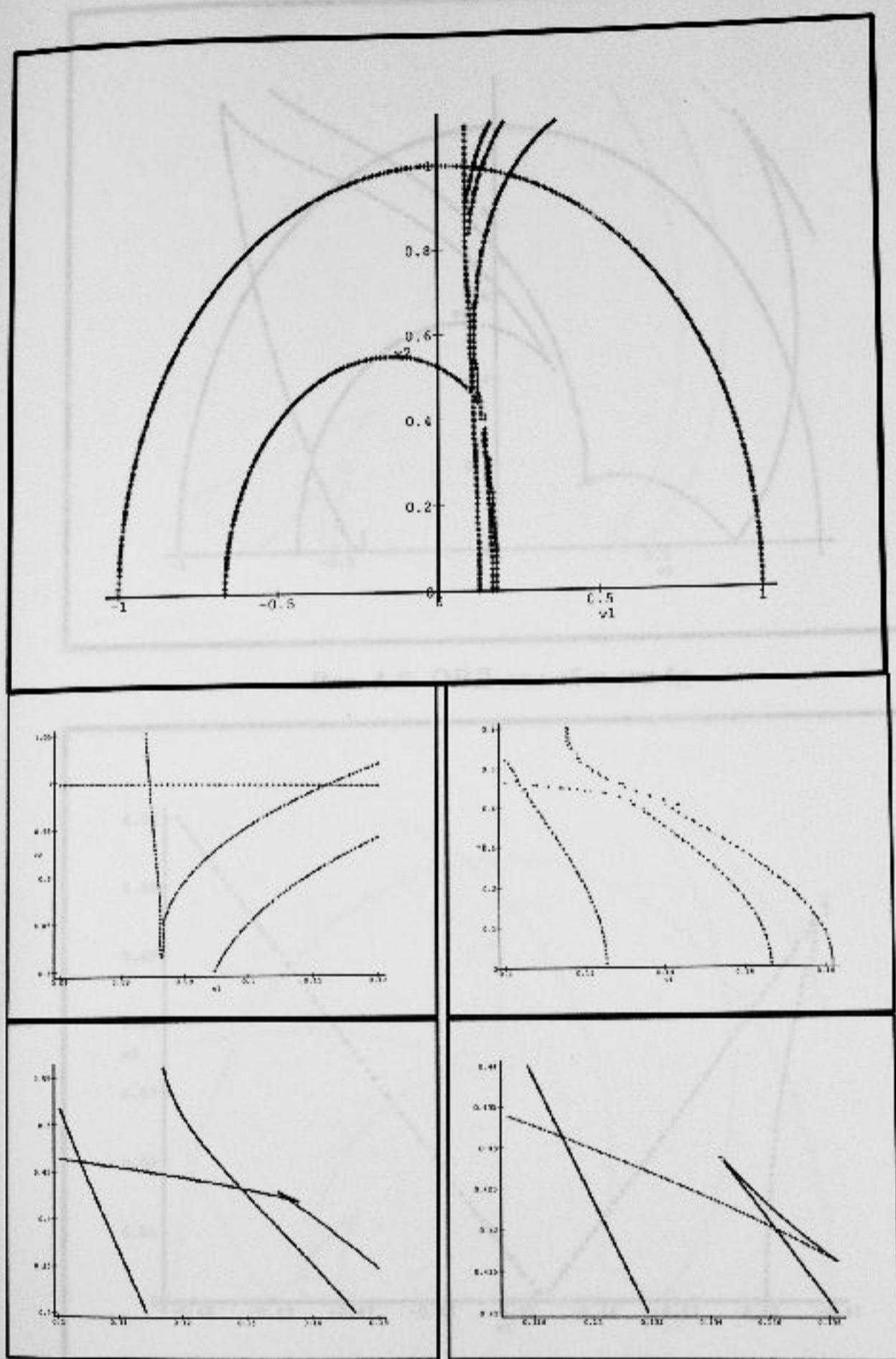


Рис. А.5: ОВД для области 5б

Рис. А.6: Функции ценности для области 4б

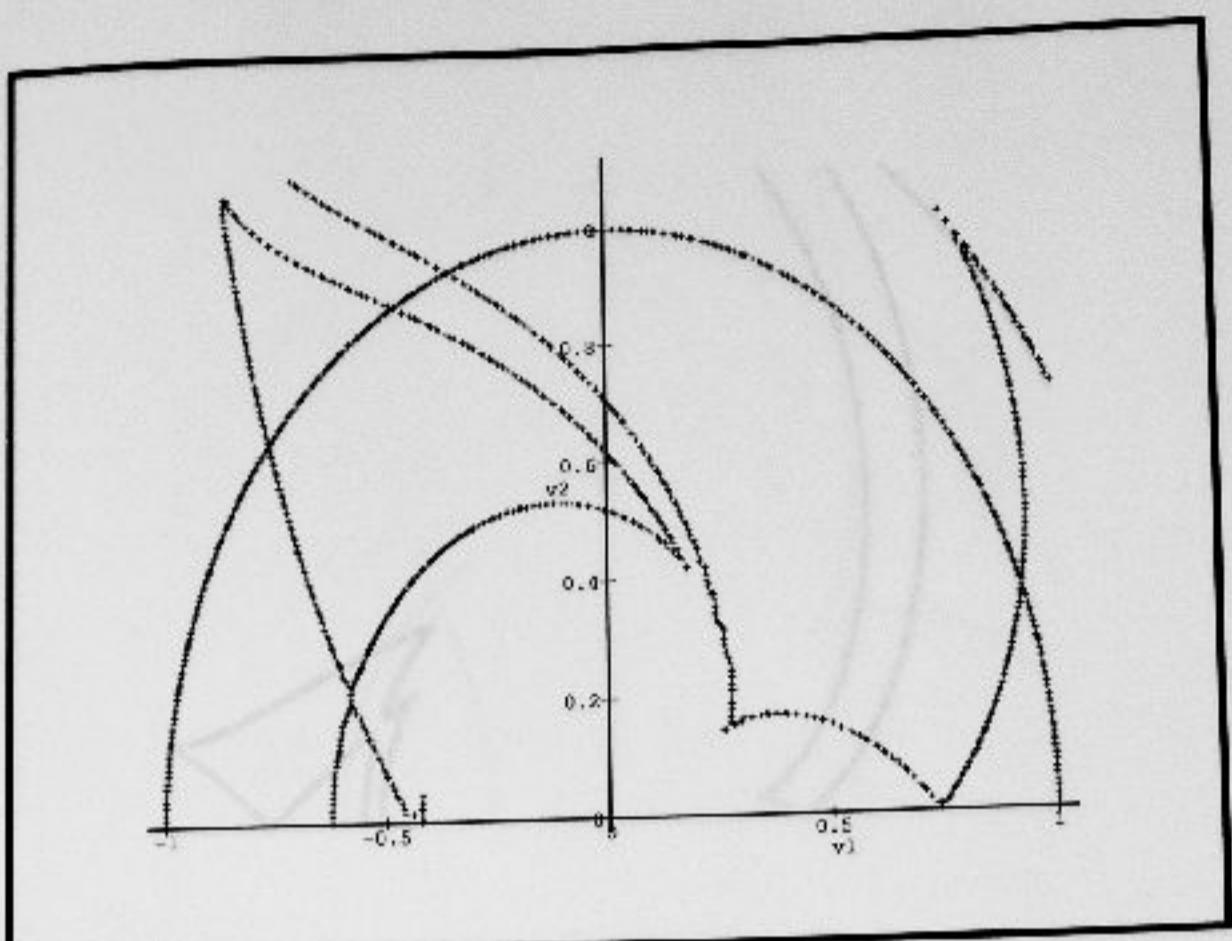


Рис. А.6: ОВД для области 4г

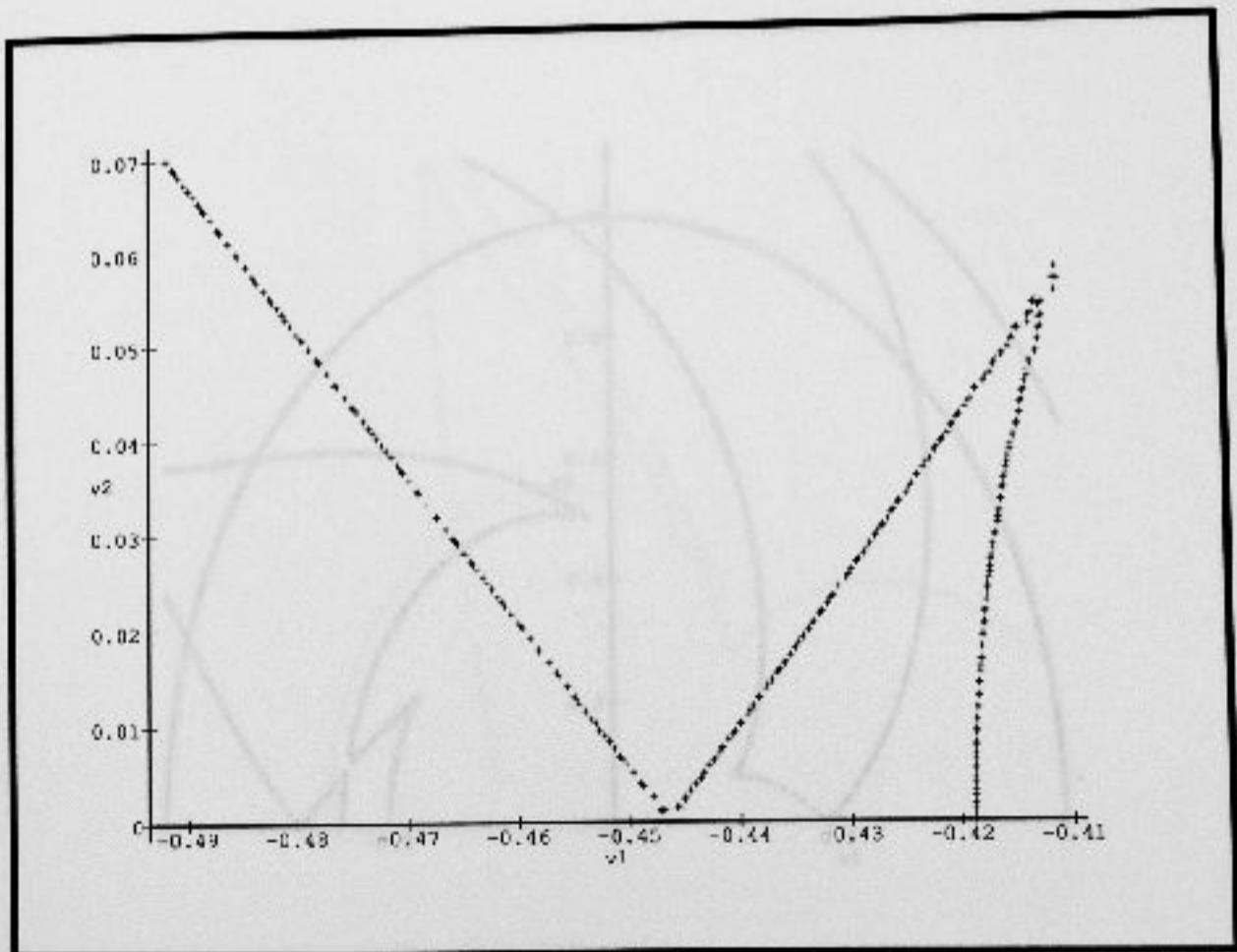


Рис. А.7: Фрагмент ОВД для области 4г

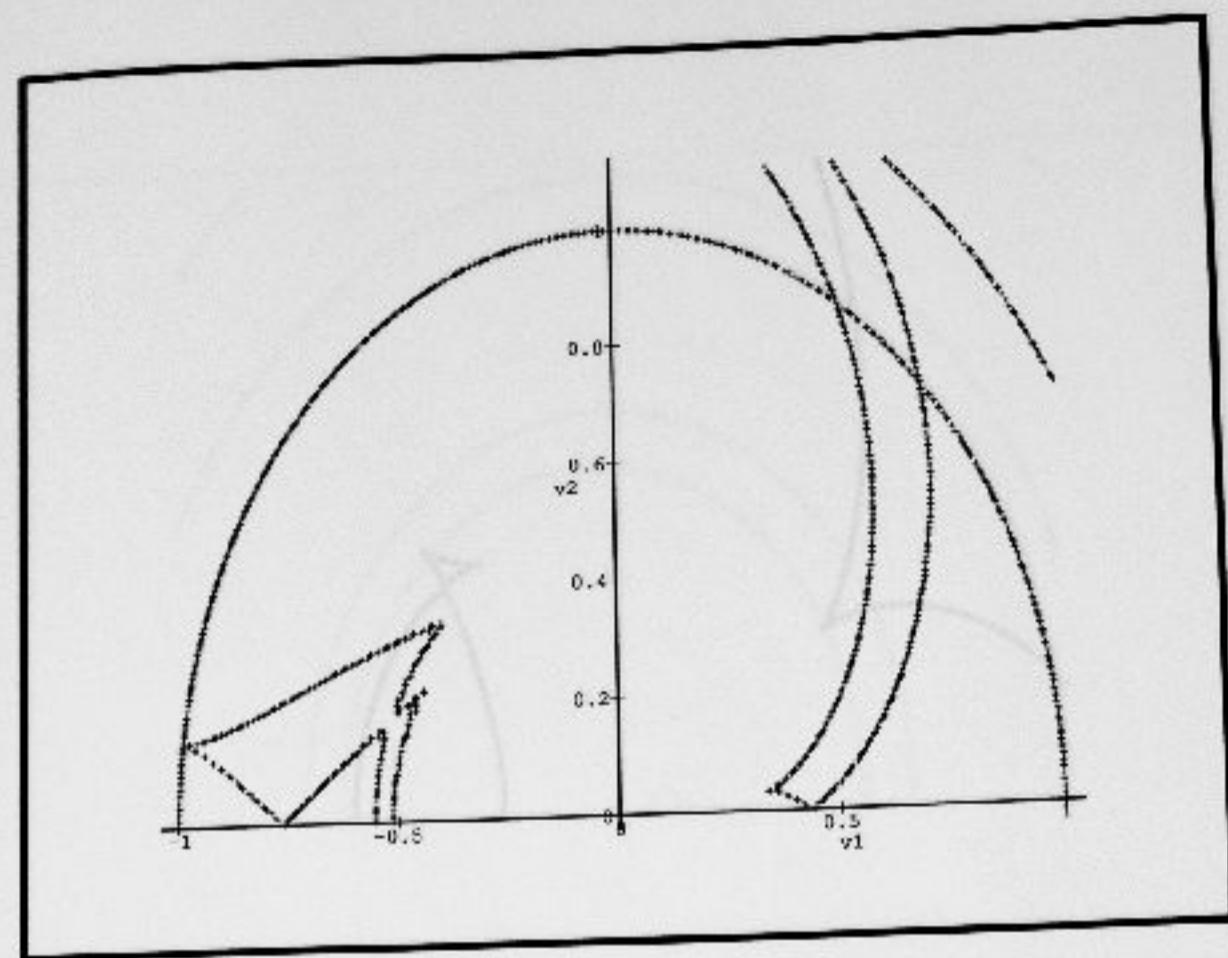


Рис. А.8: ОВД для области 4д

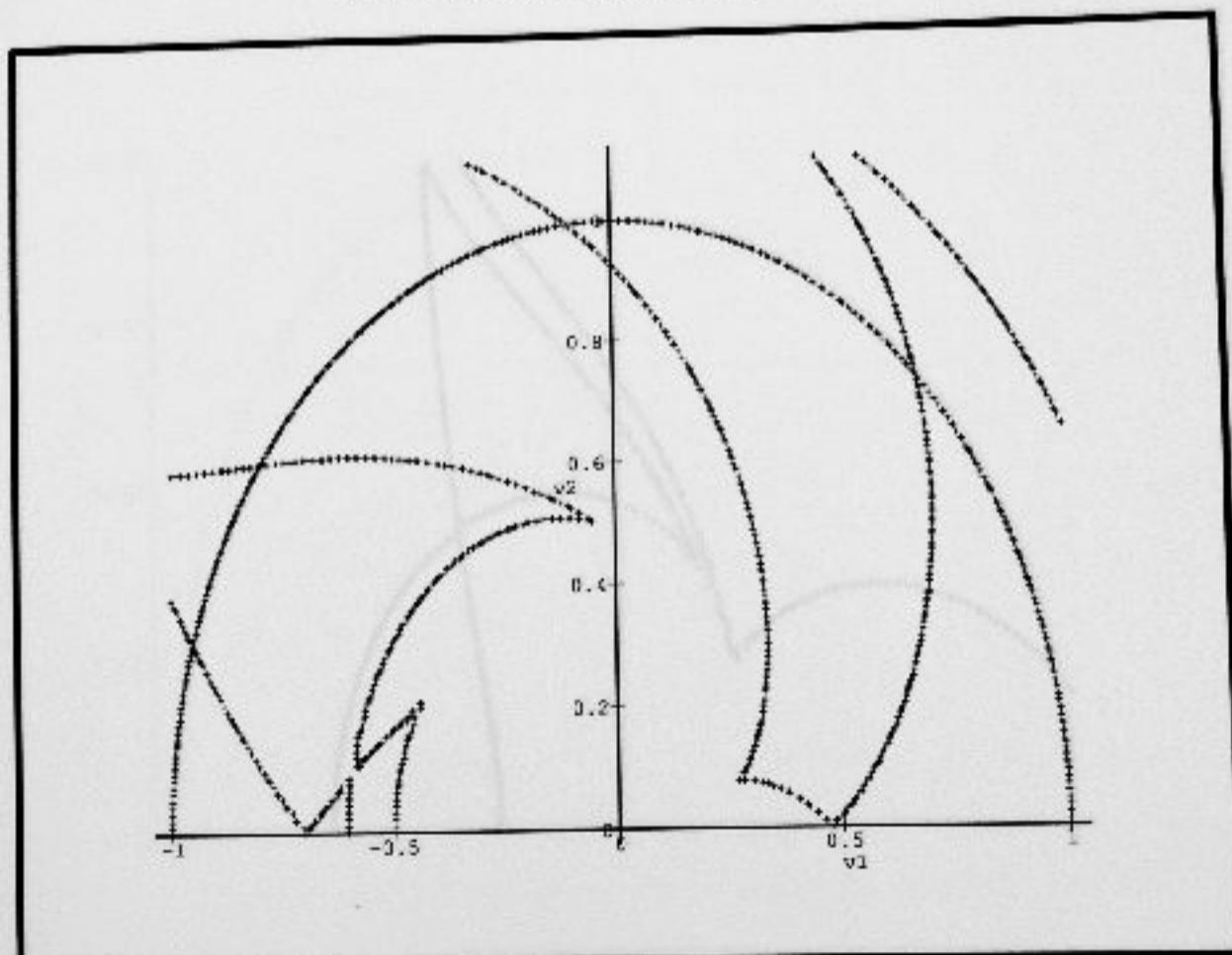


Рис. А.9: ОВД для области 4h

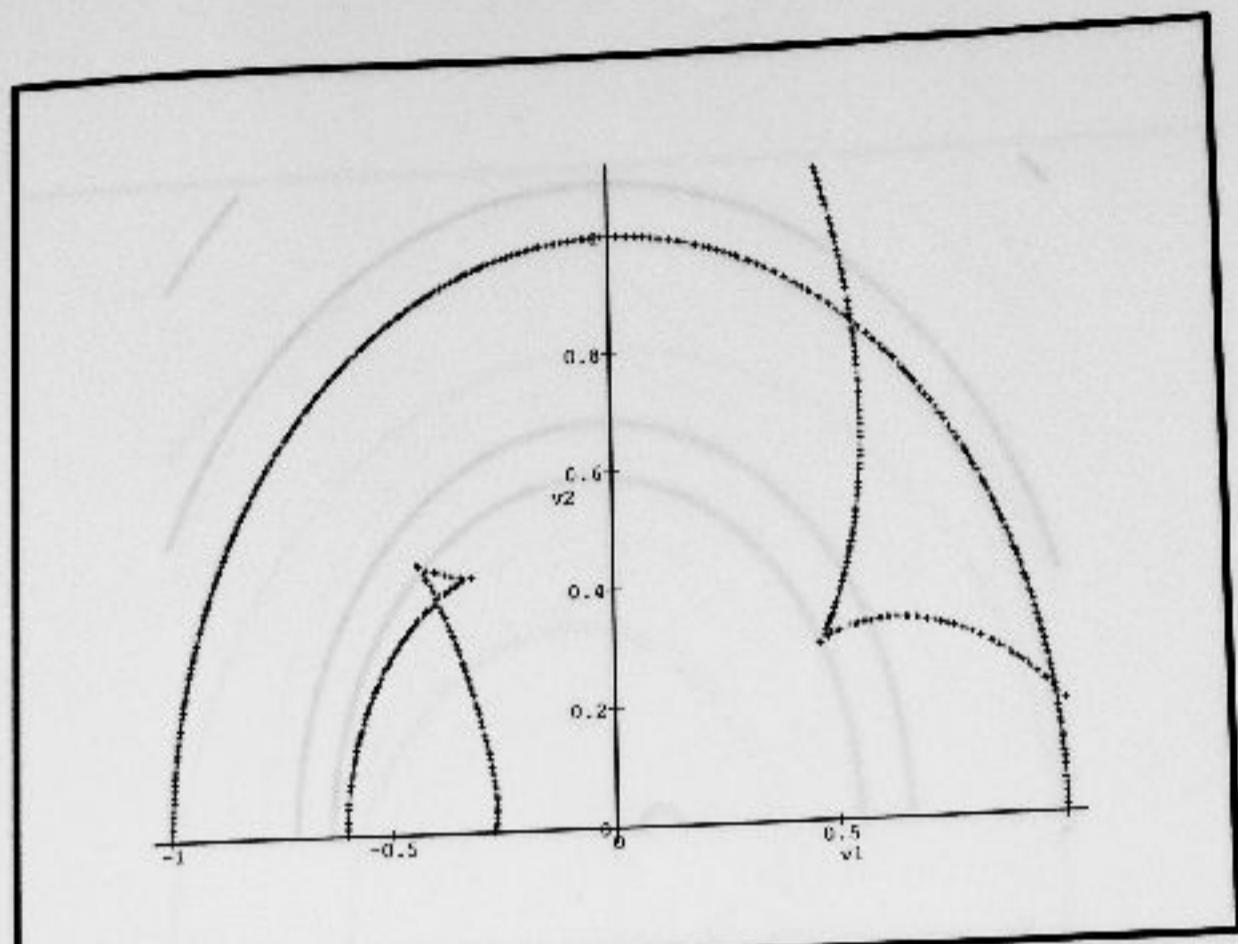


Рис. А.10: ОВД для области 4б

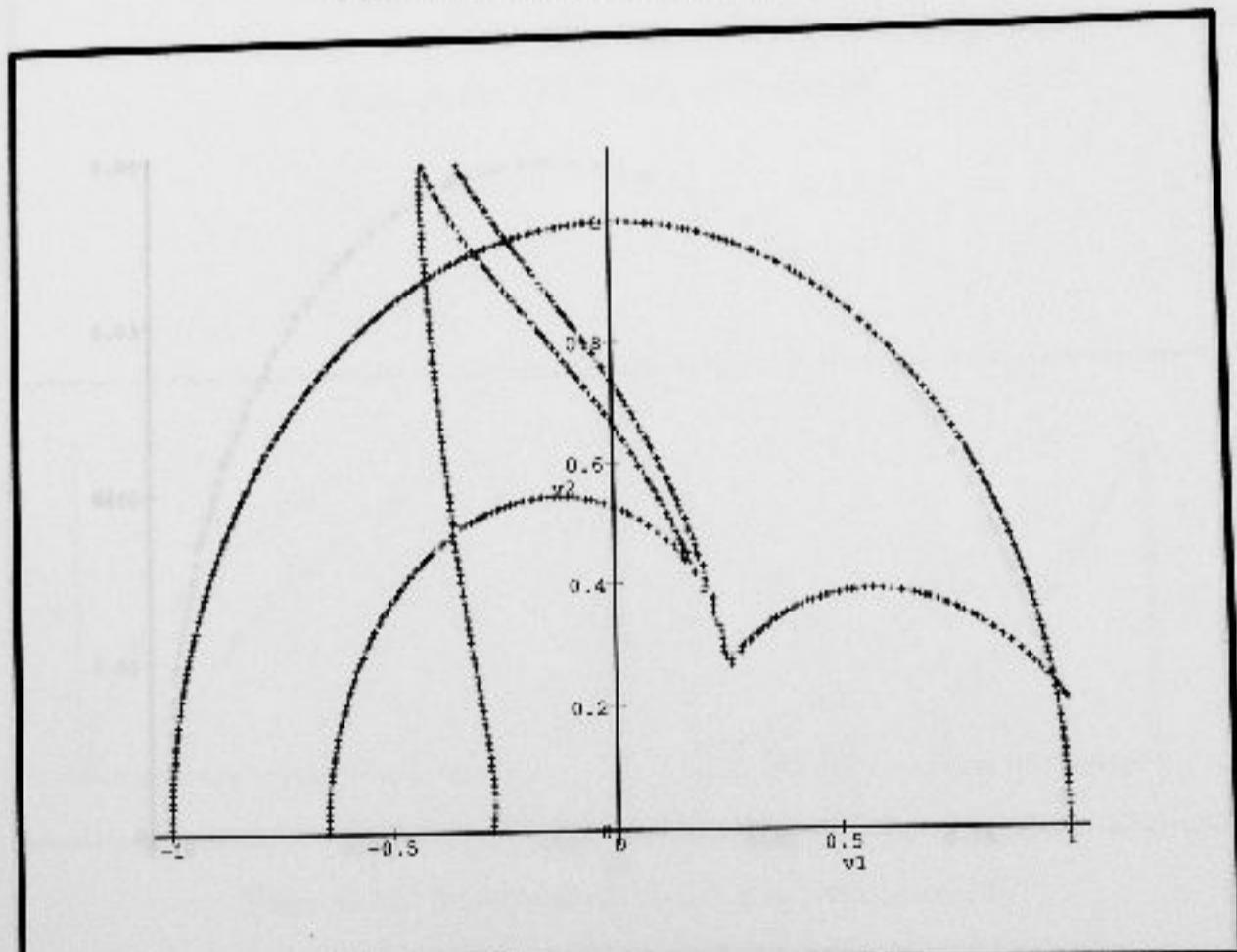


Рис. А.11: ОВД для области 4f

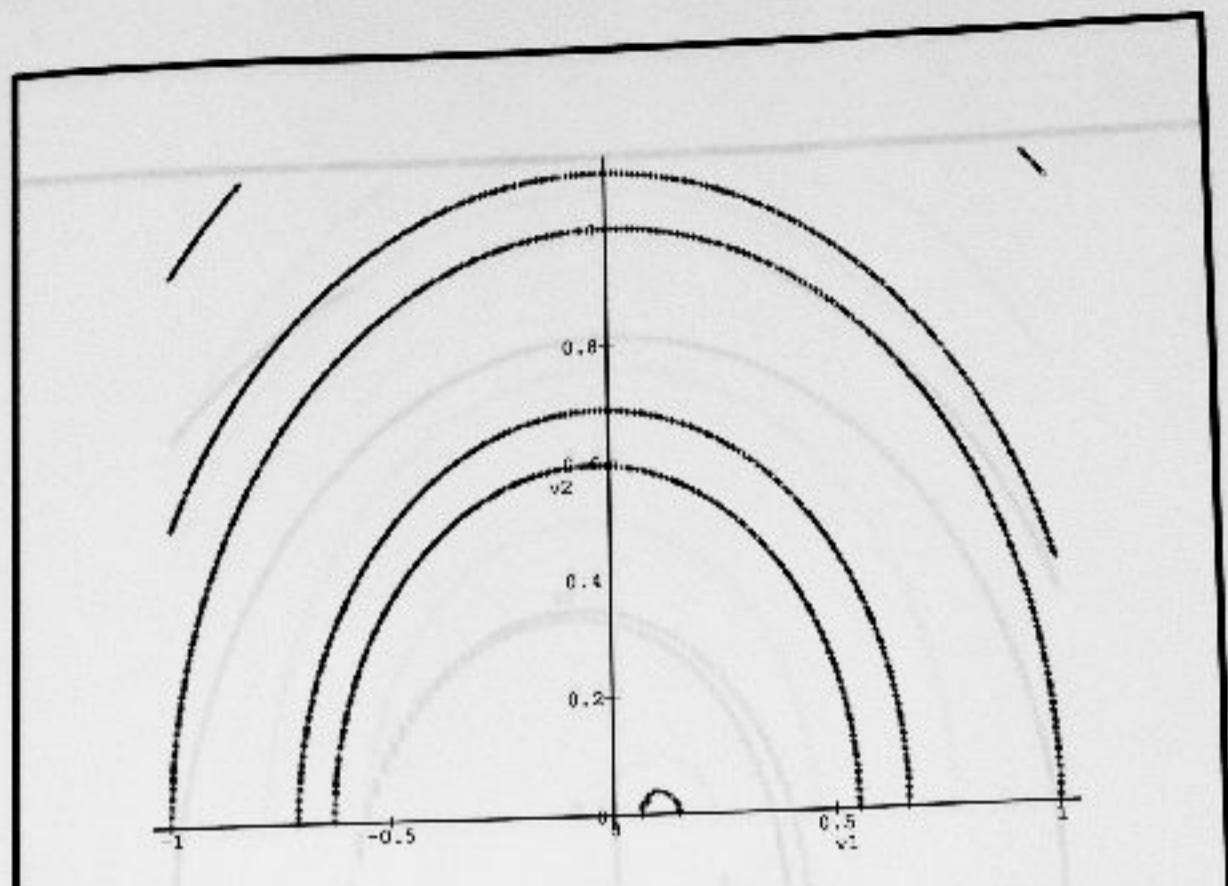


Рис. А.12: ОВД для области Зс

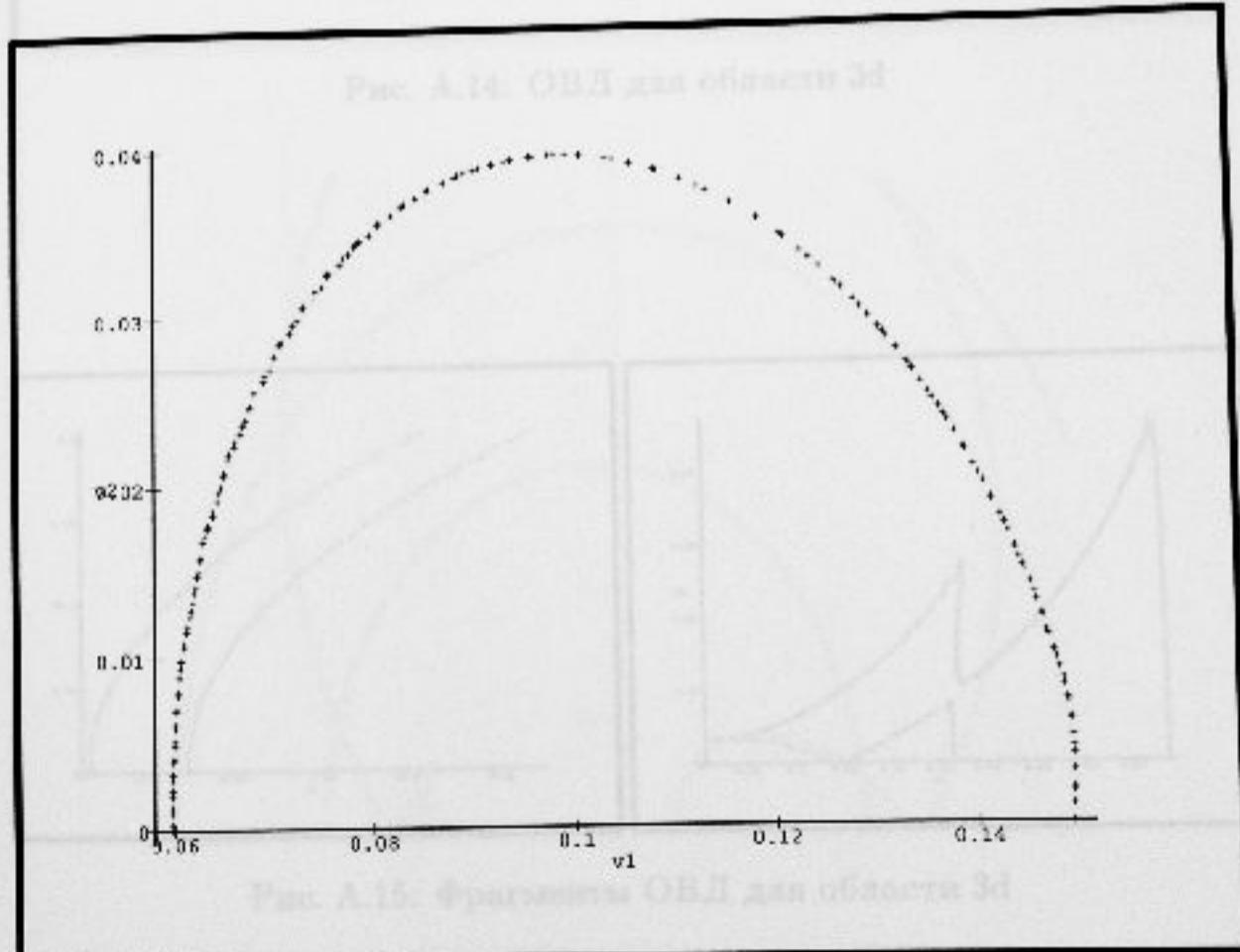


Рис. А.13: Фрагмент ОВД для области Зс

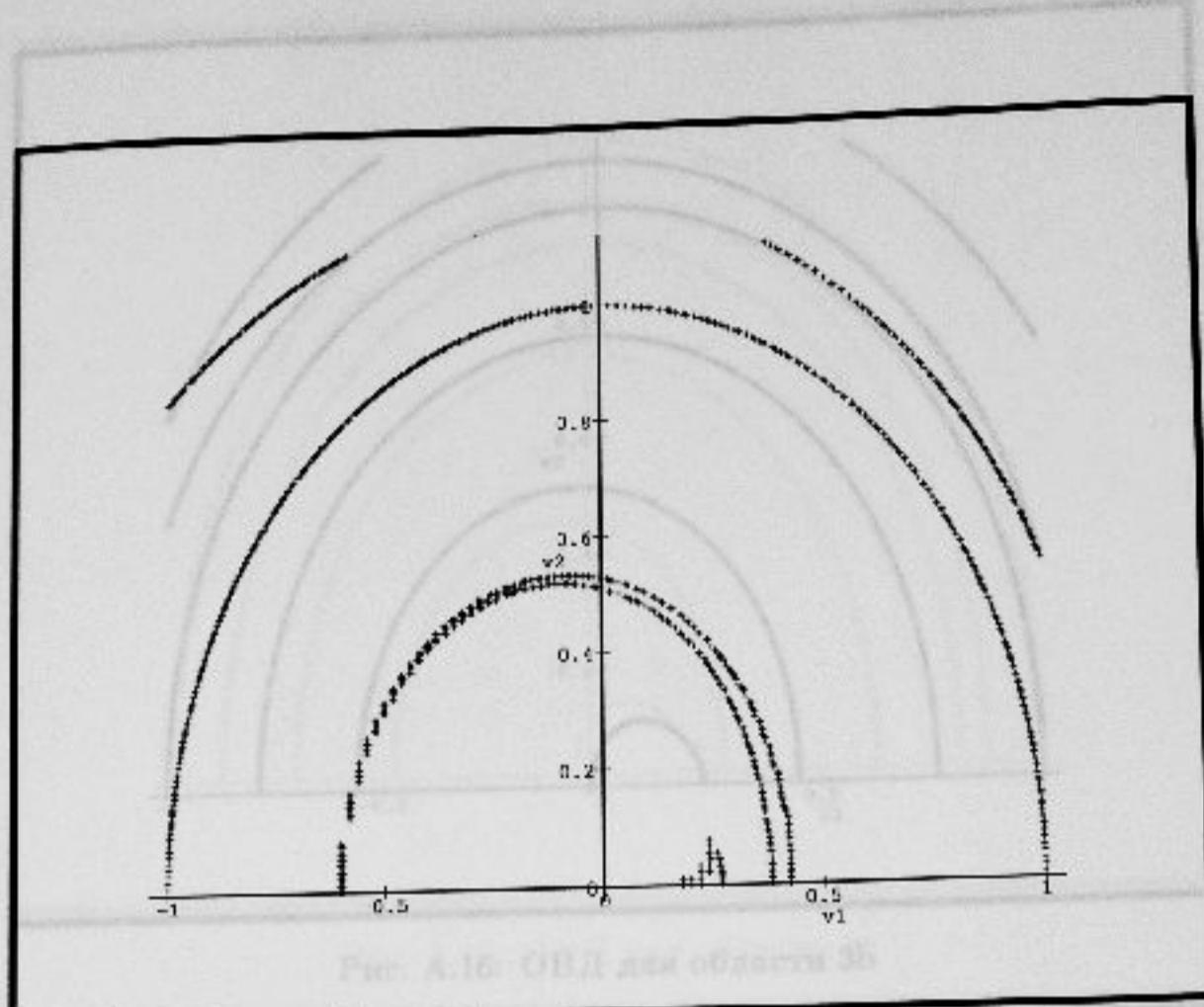


Рис. А.14: ОВД для области 3d

Рис. А.14: ОВД для области 3d

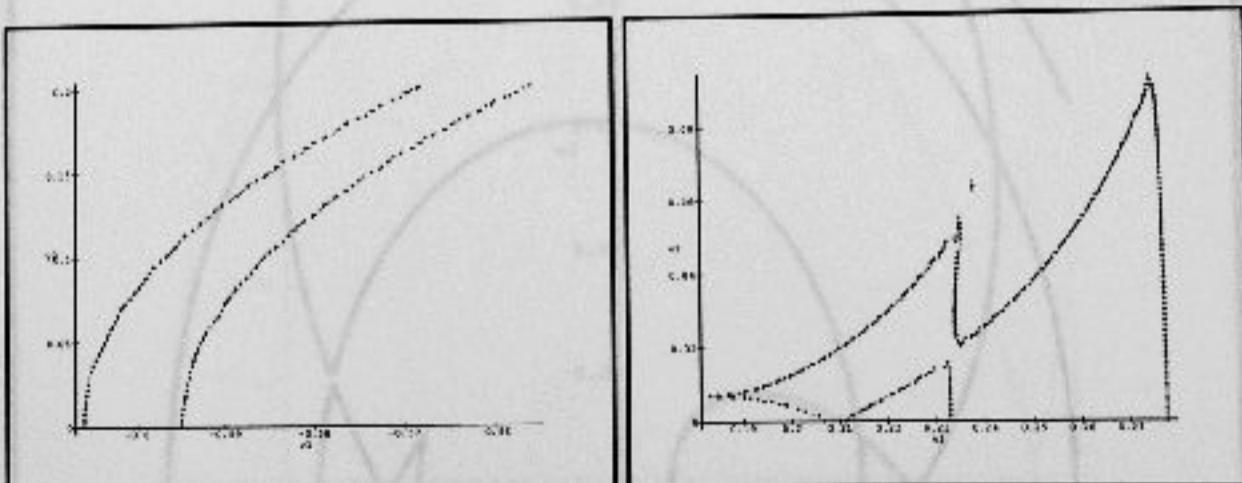


Рис. А.15: Фрагменты ОВД для области 3d

Рис. А.17: ОВД для области 3d

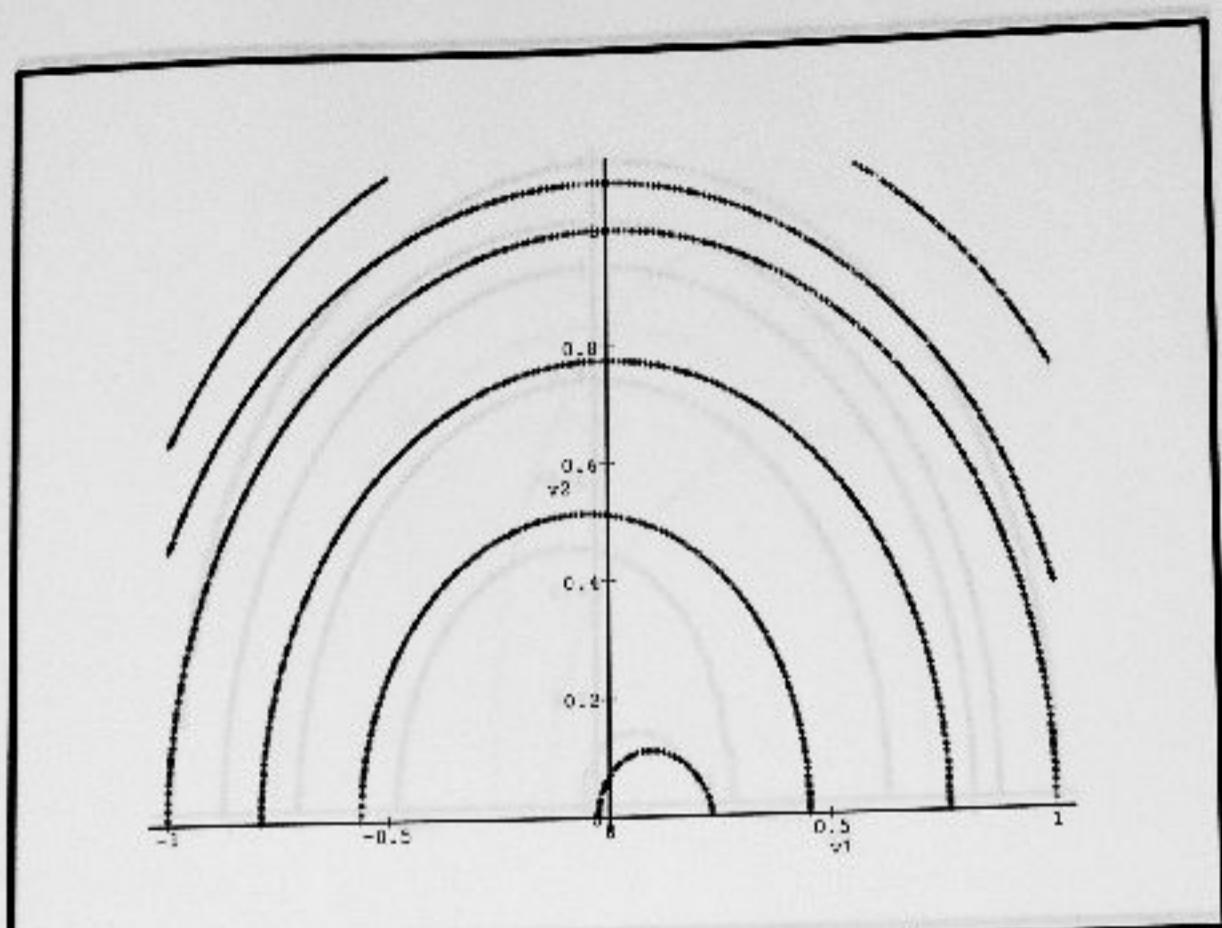


Рис. А.16: ОВД для области 3б

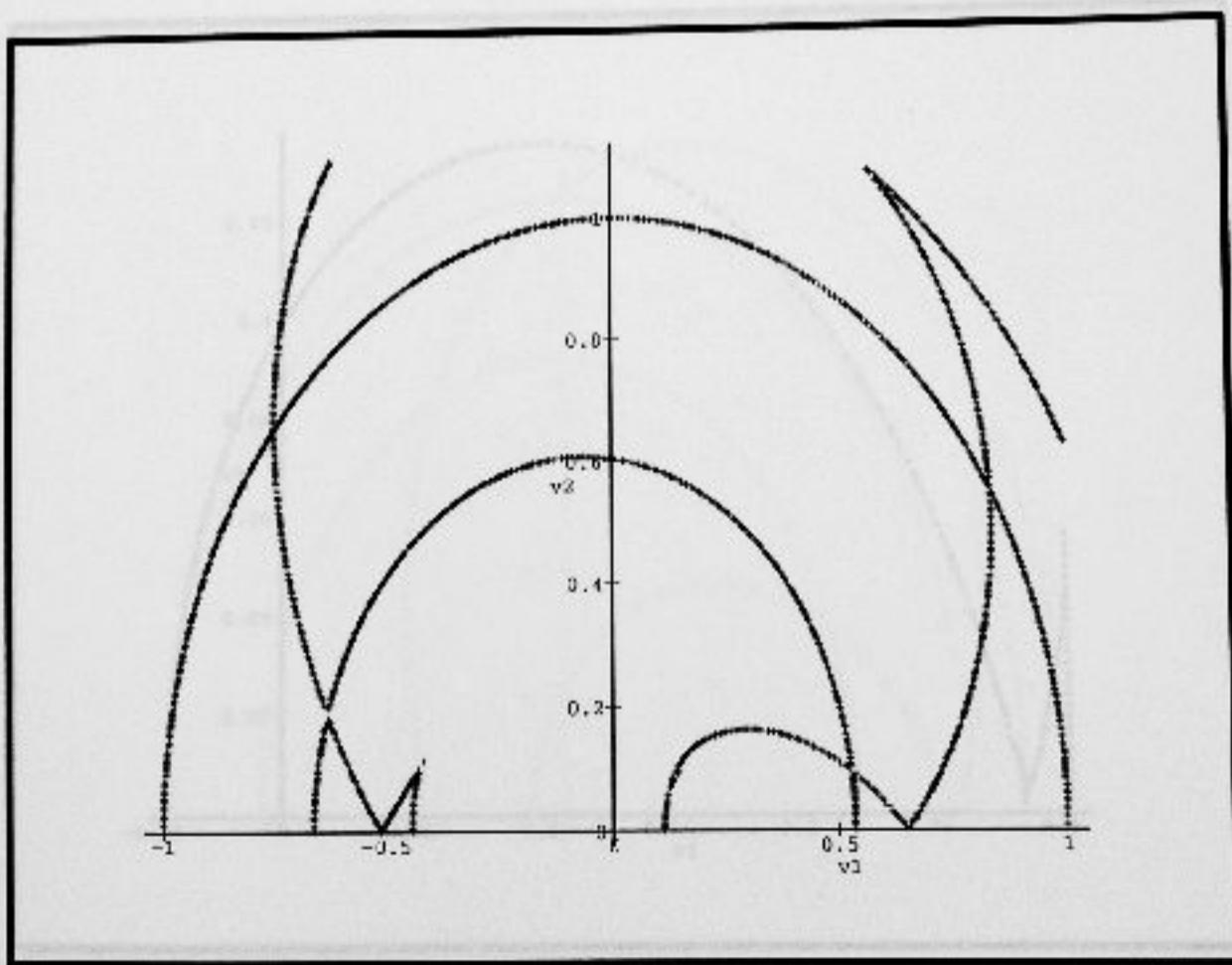


Рис. А.17: ОВД для области 2б

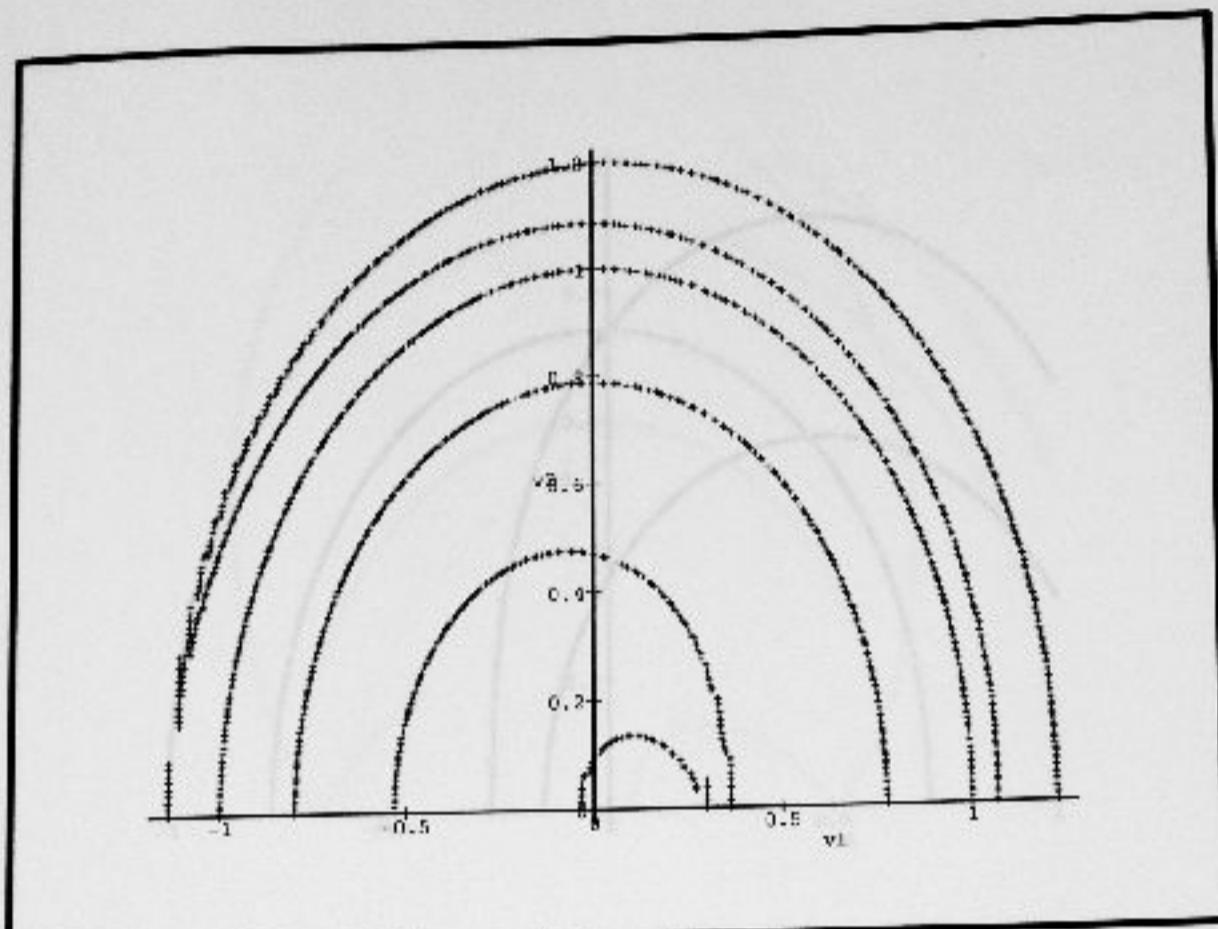


Рис. А.18: ОВД для области За

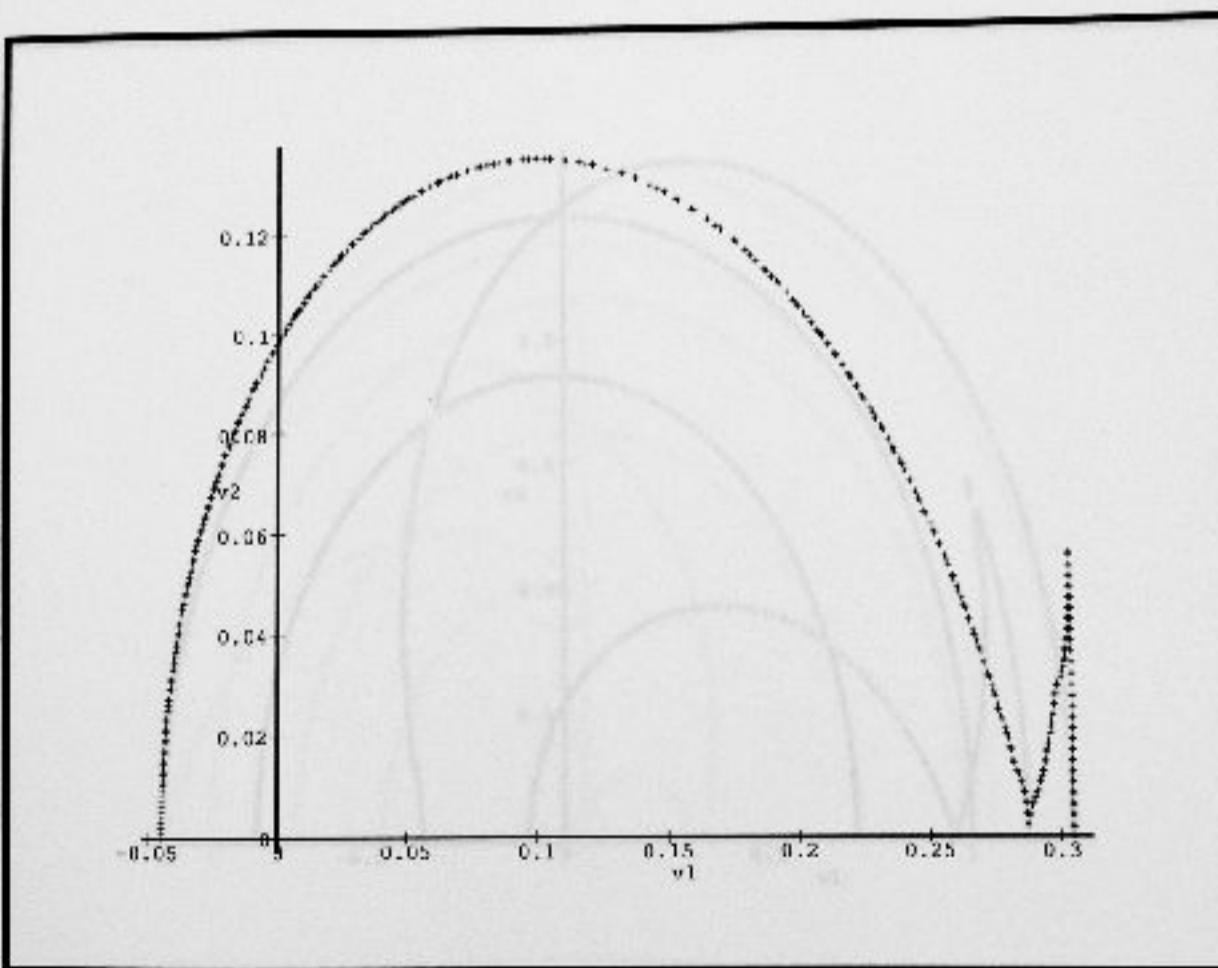


Рис. А.19: Фрагмент ОВД для области За

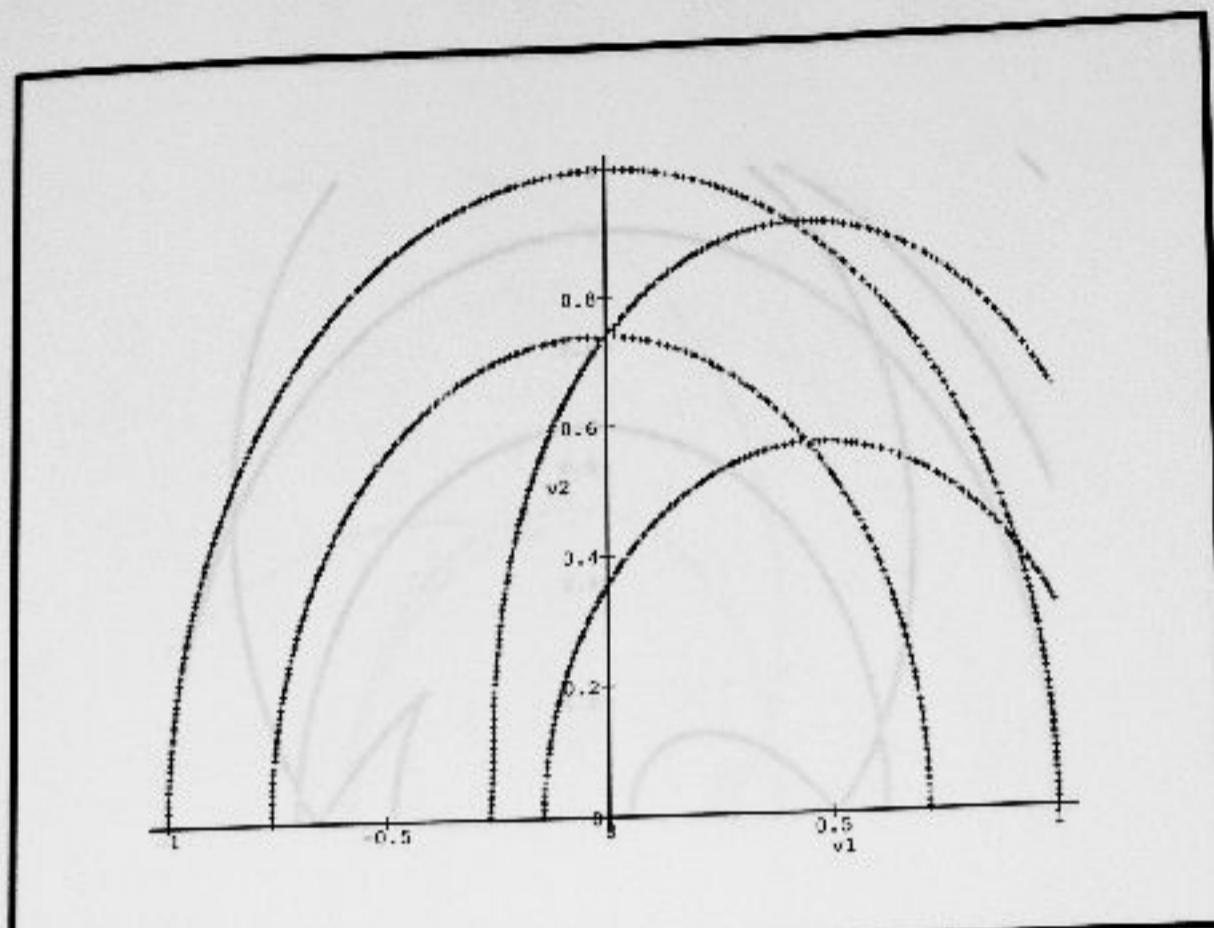


Рис. А.20: ОВД для области 2а

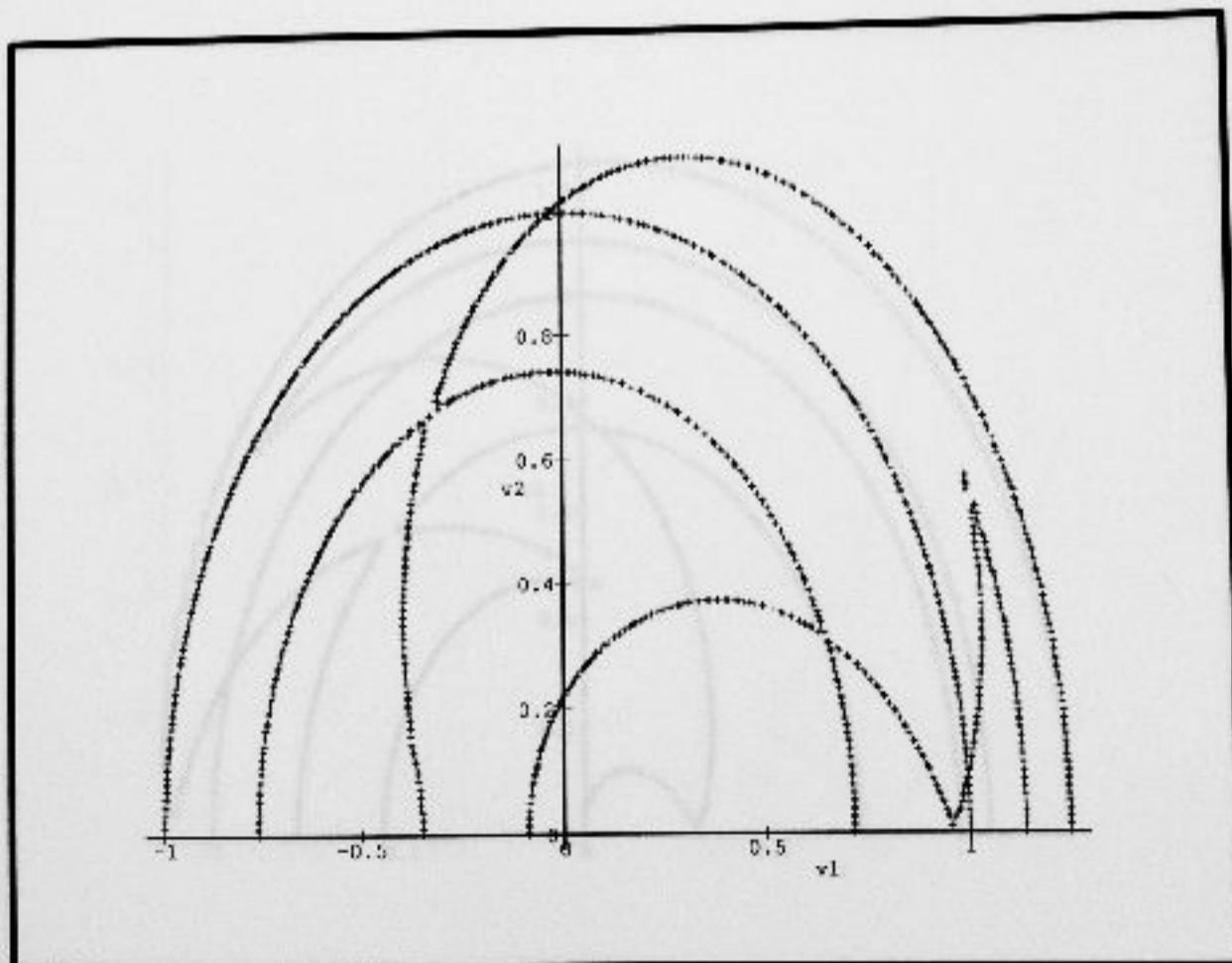


Рис. А.21: ОВД для области 2а

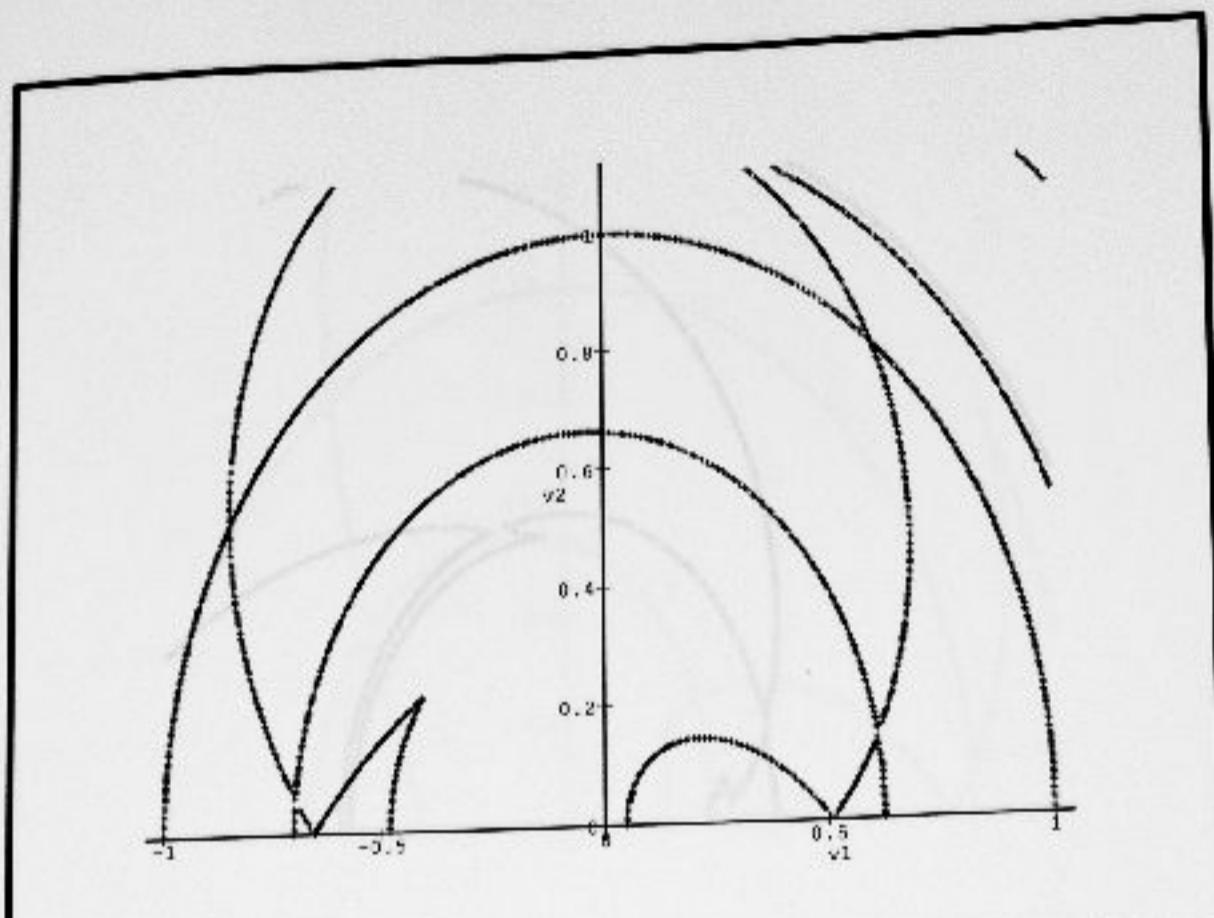


Рис. А.22: ОВД для области 2с

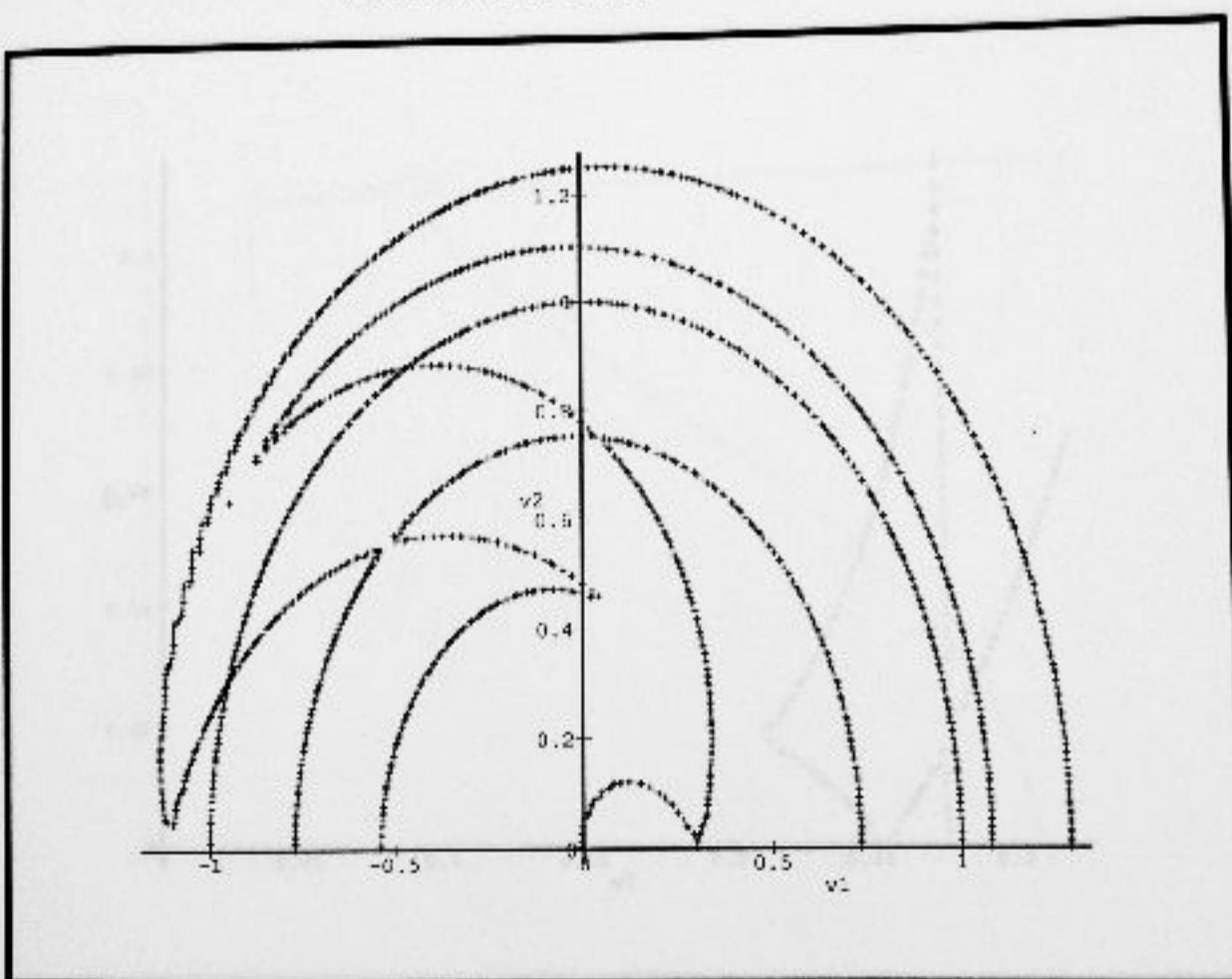


Рис. А.23: ОВД для области 2д

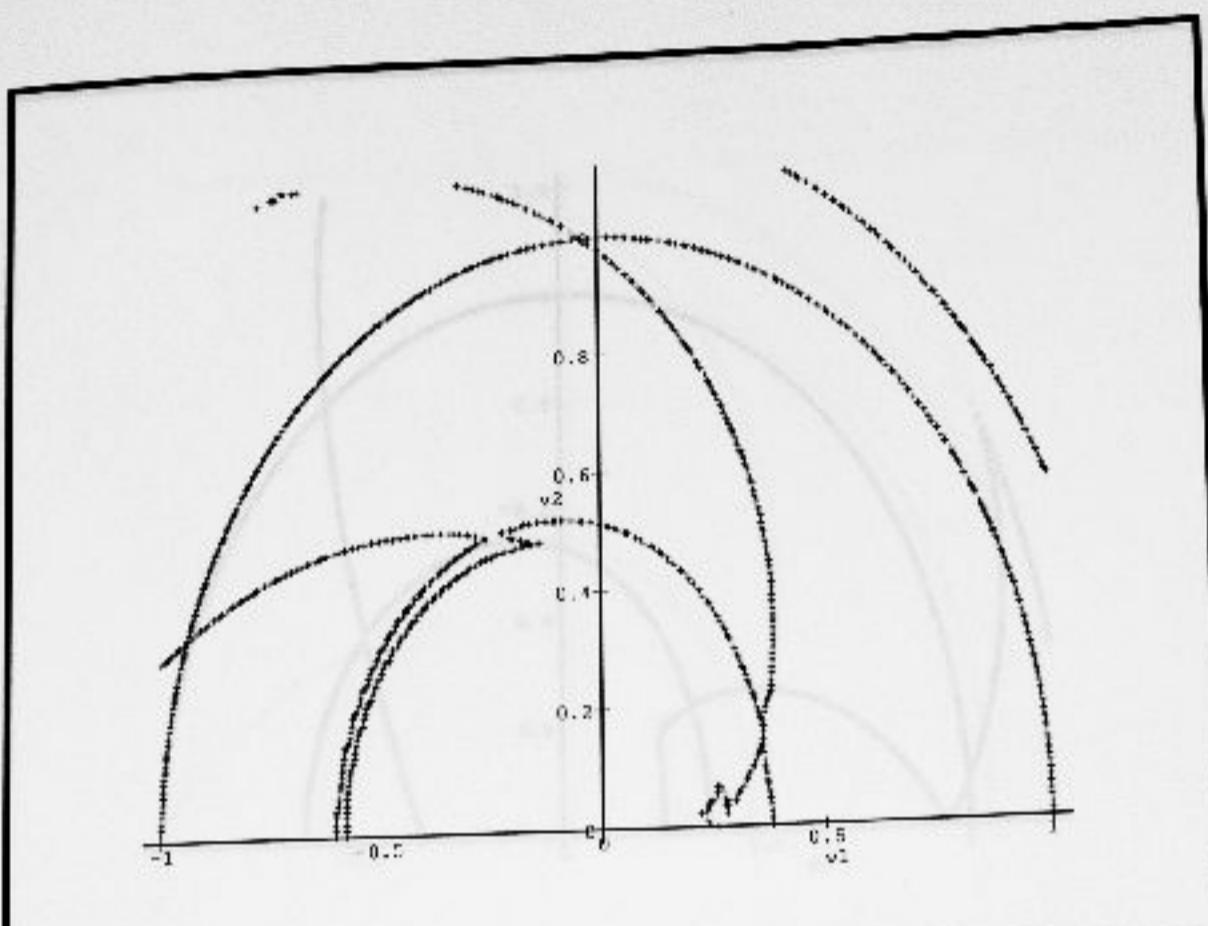


Рис. А.24: ОВД для области 2j

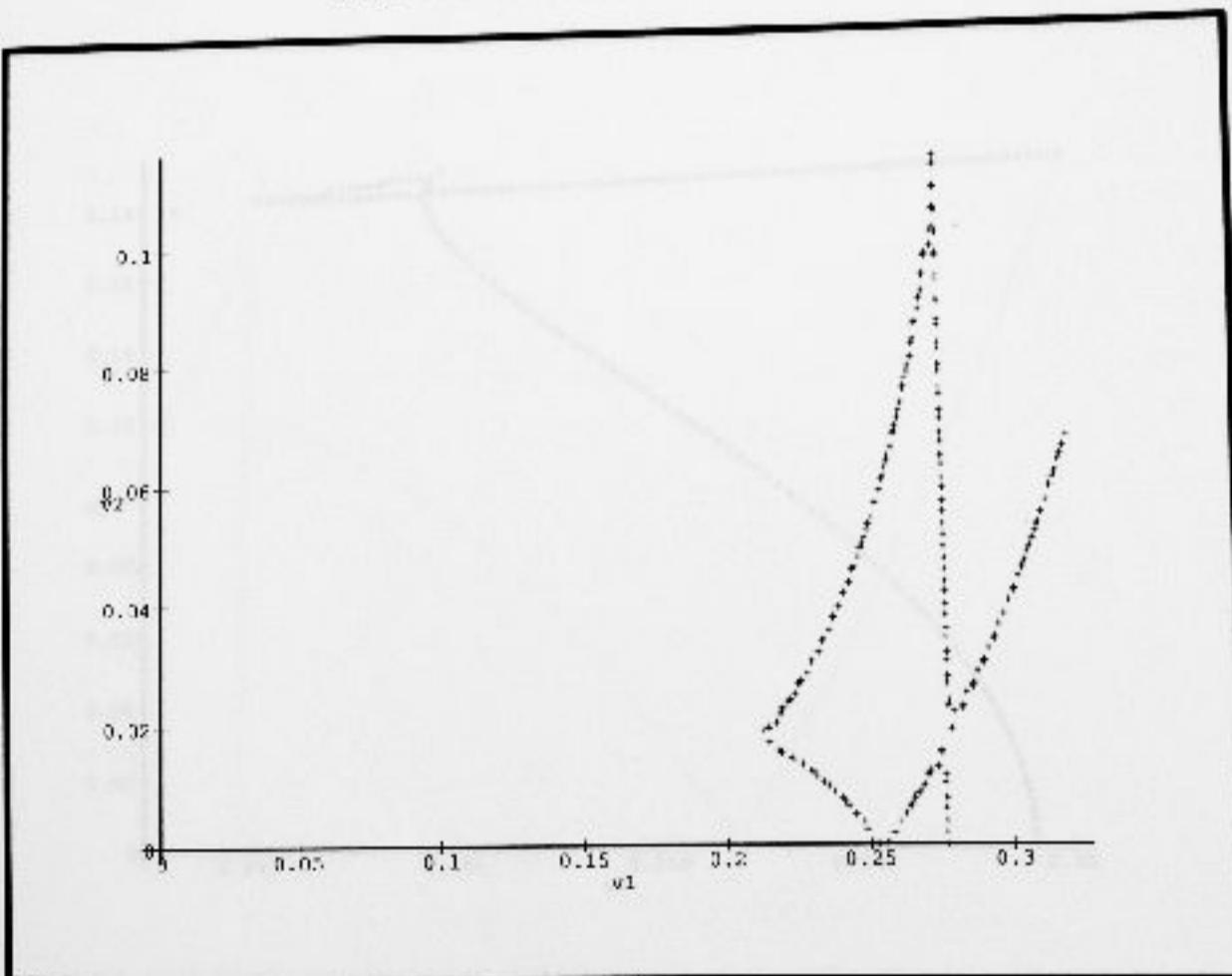


Рис. А.25: Фрагмент ОВД для области 2j

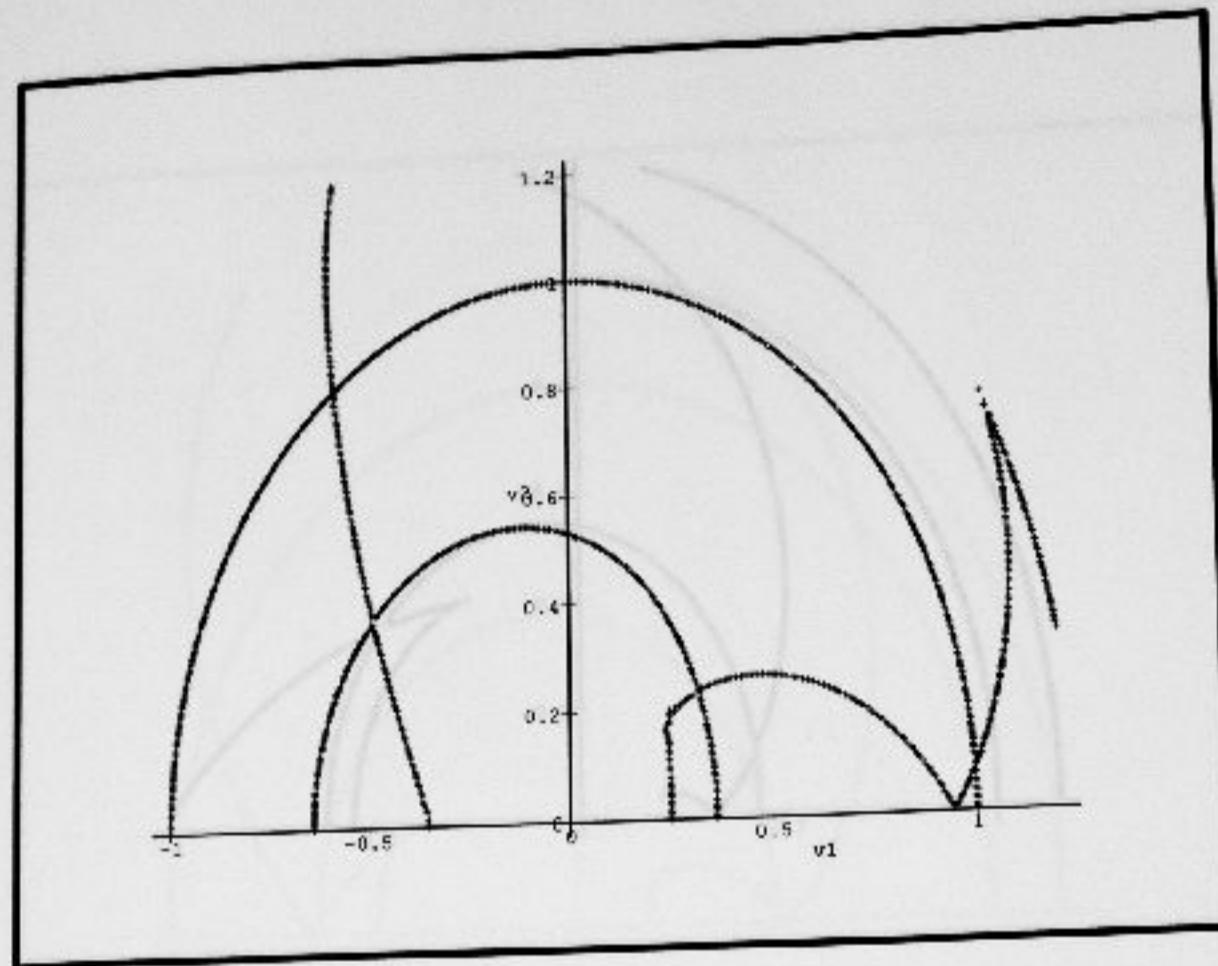


Рис. А.26: ОВД для области 2е

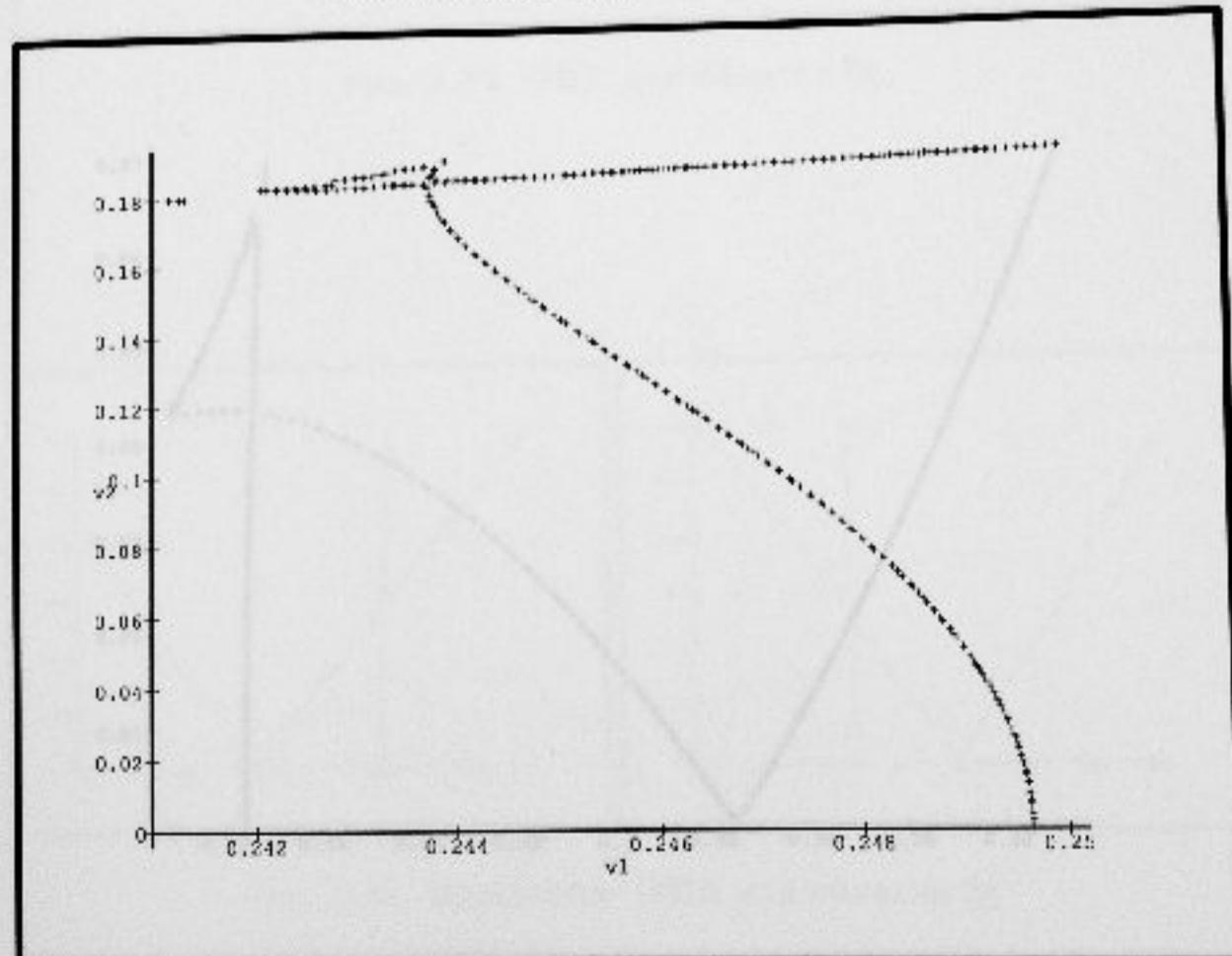


Рис. А.27: Фрагмент ОВД для области 2е

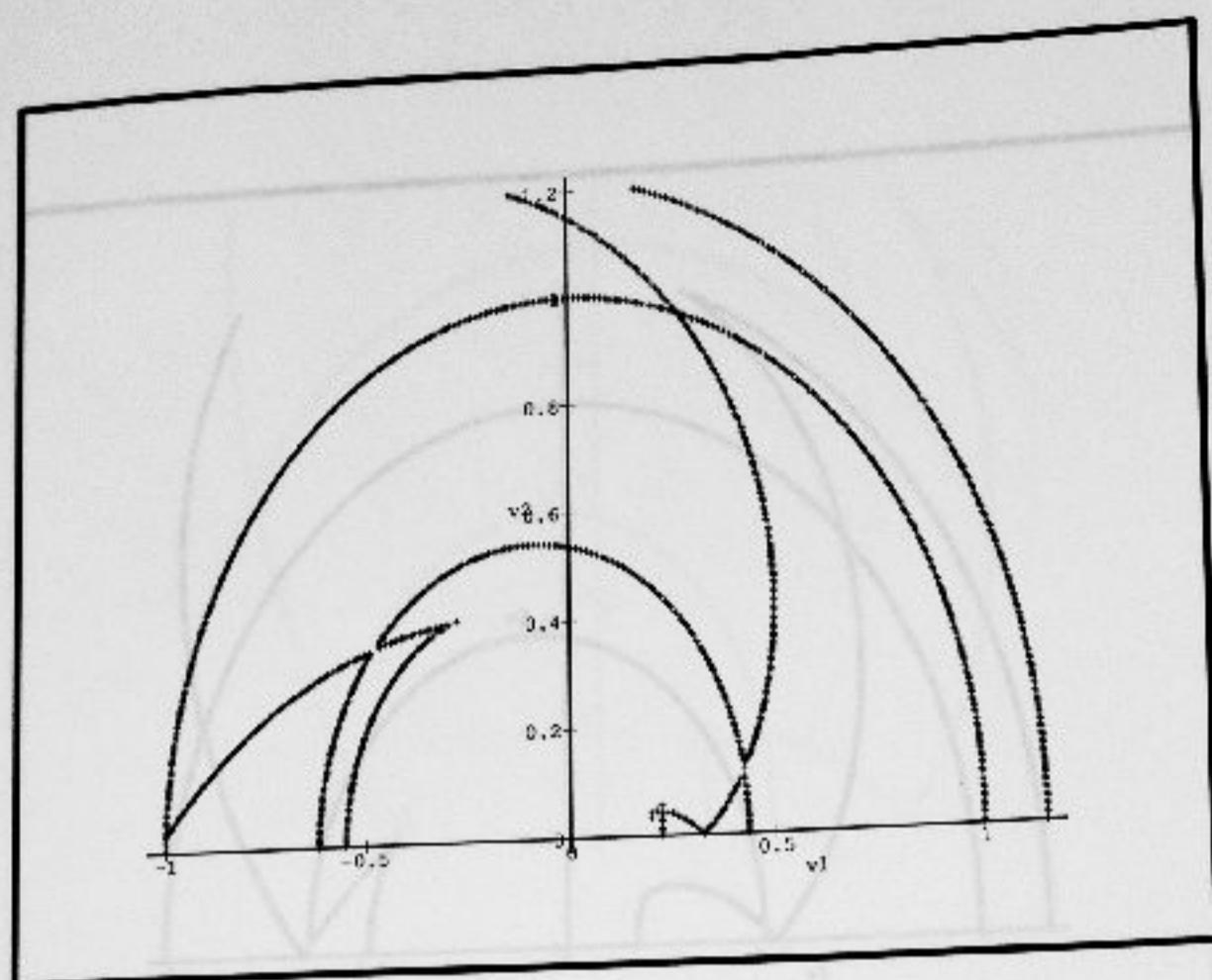


Рис. А.28: ОВД для области $2i$

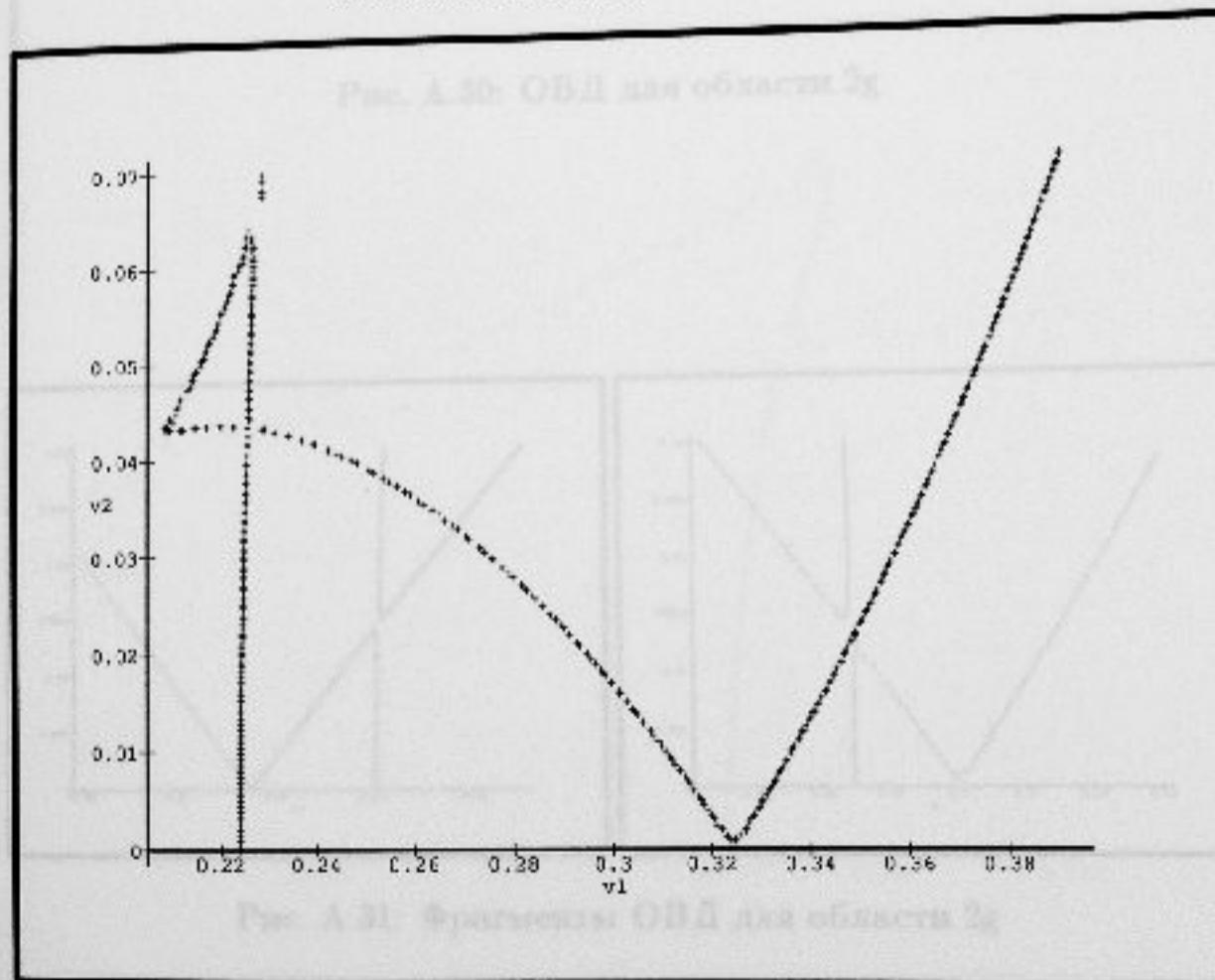


Рис. А.29: Фрагмент ОВД для области $2i$

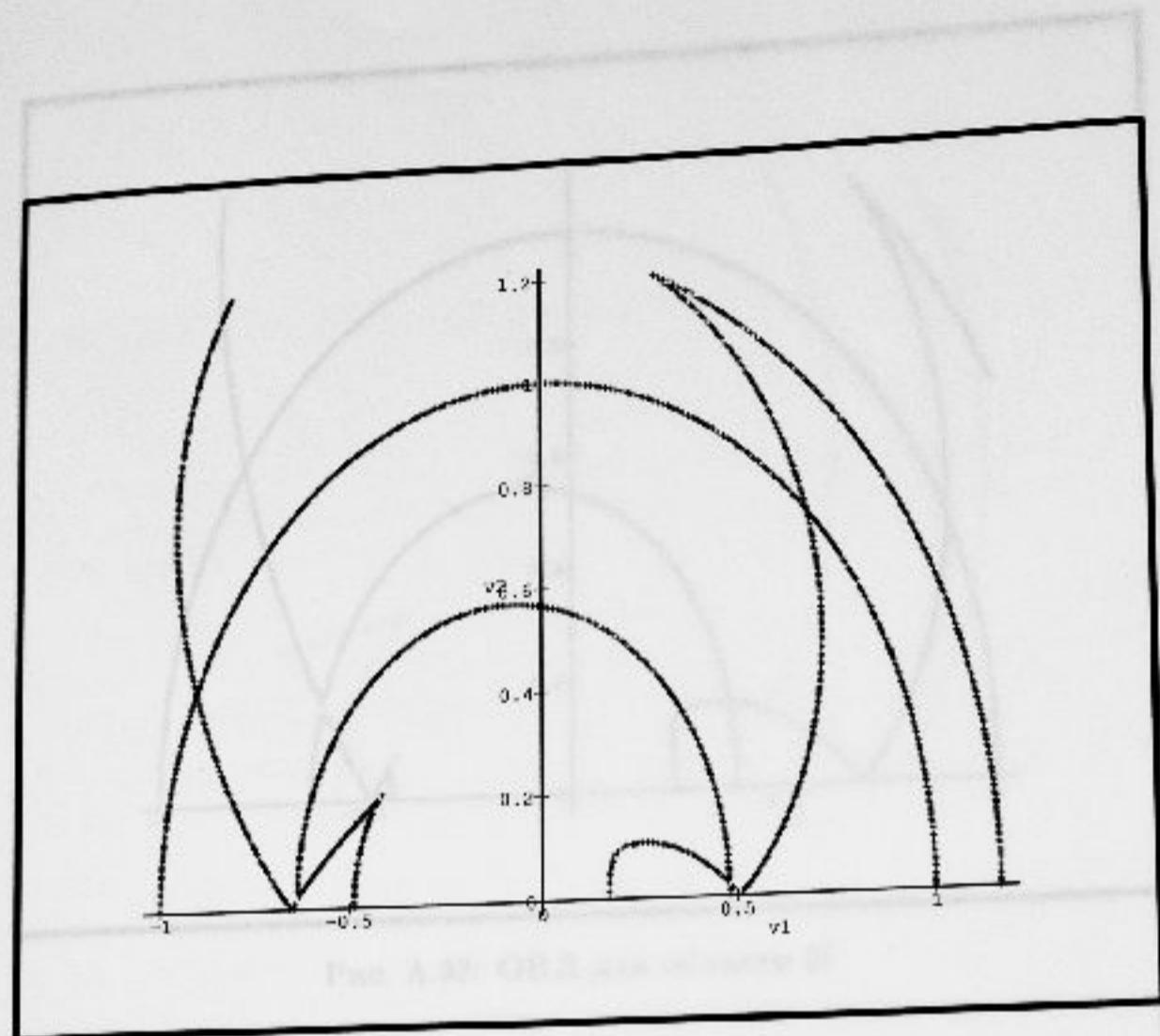


Рис. А.30: ОВД для области 2г

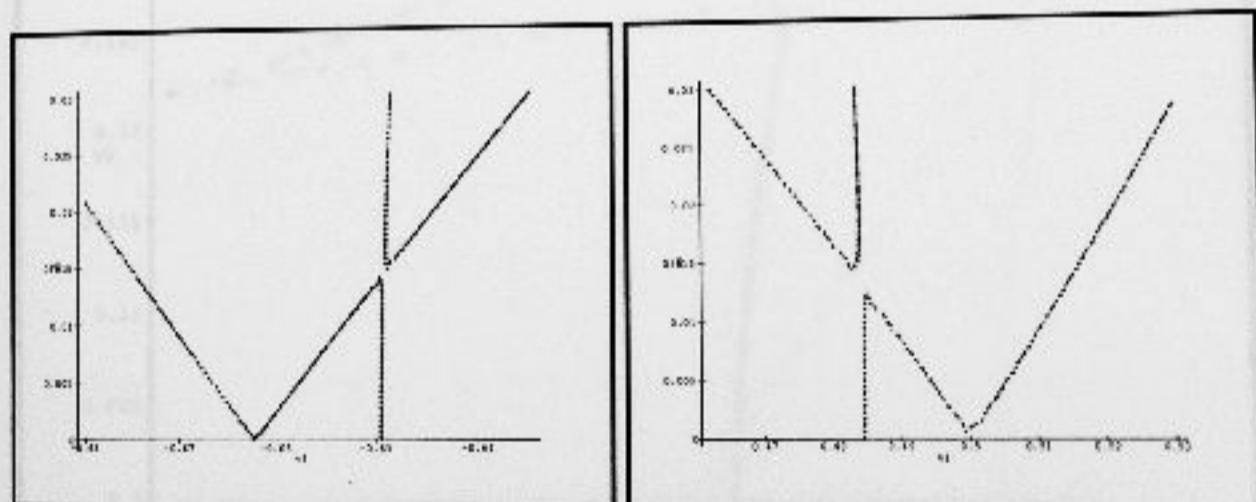


Рис. А.31: Фрагменты ОВД для области 2г

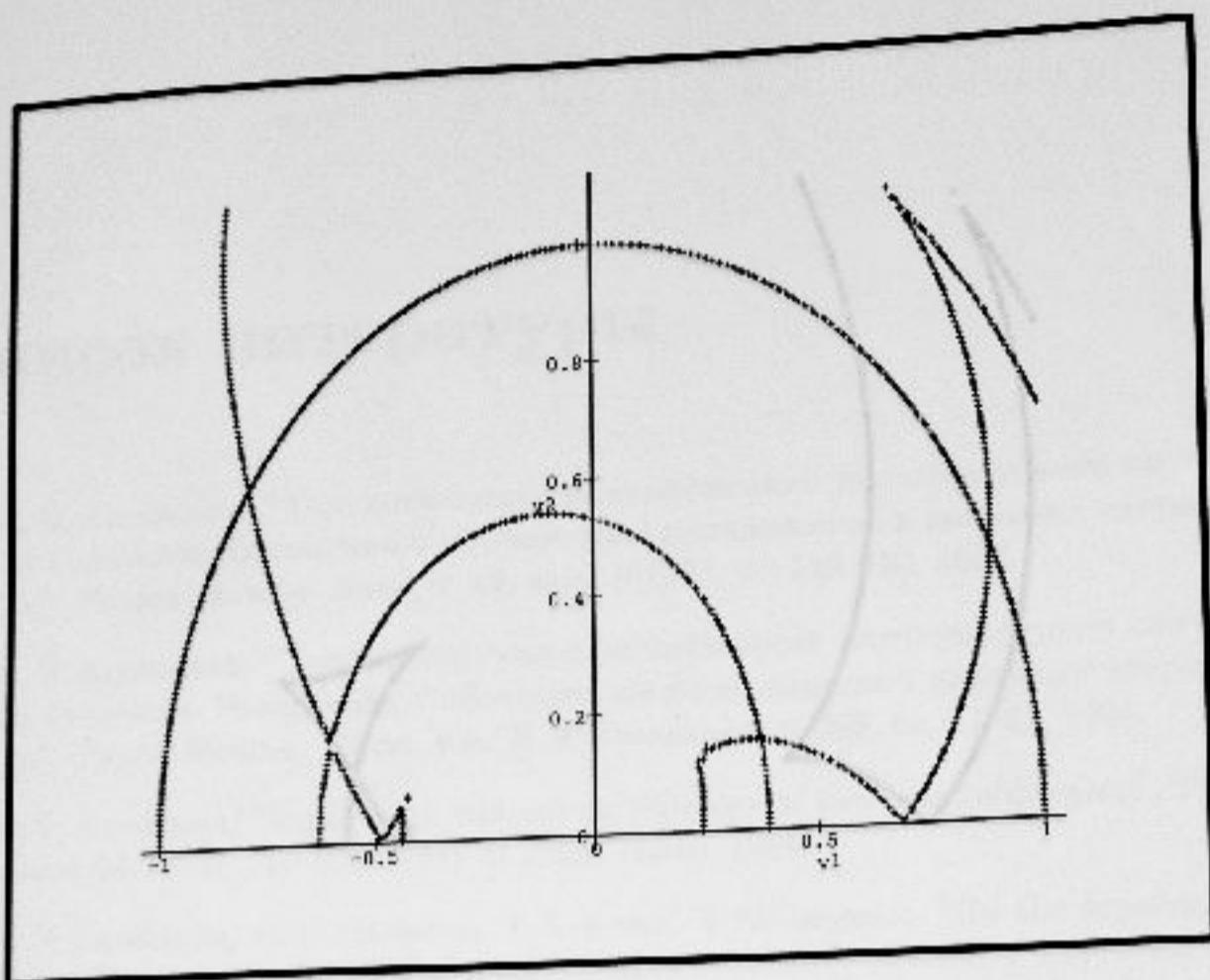


Рис. А.32: ОВД для области 2f

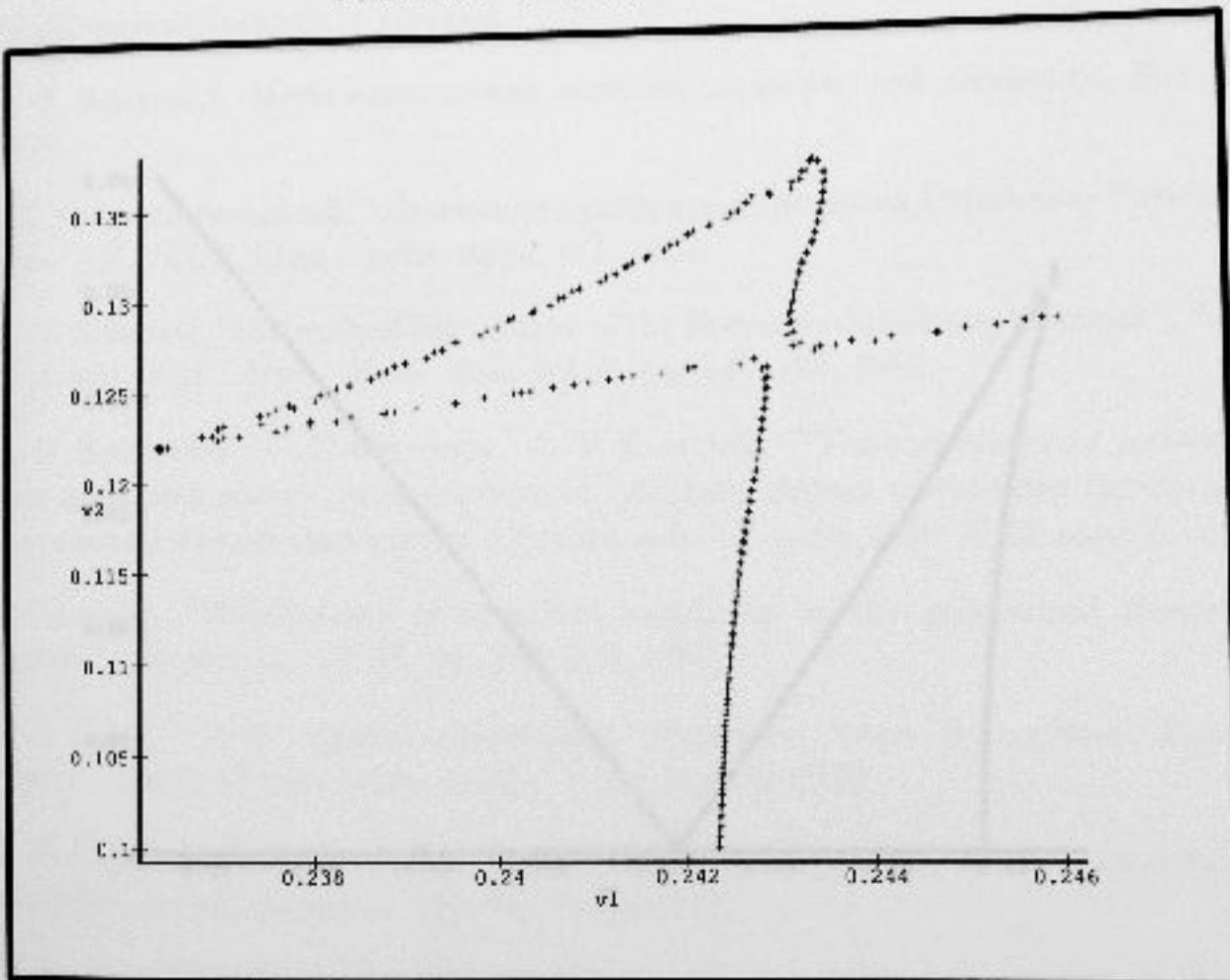


Рис. А.33: Фрагмент ОВД для области 2f

Список литературы

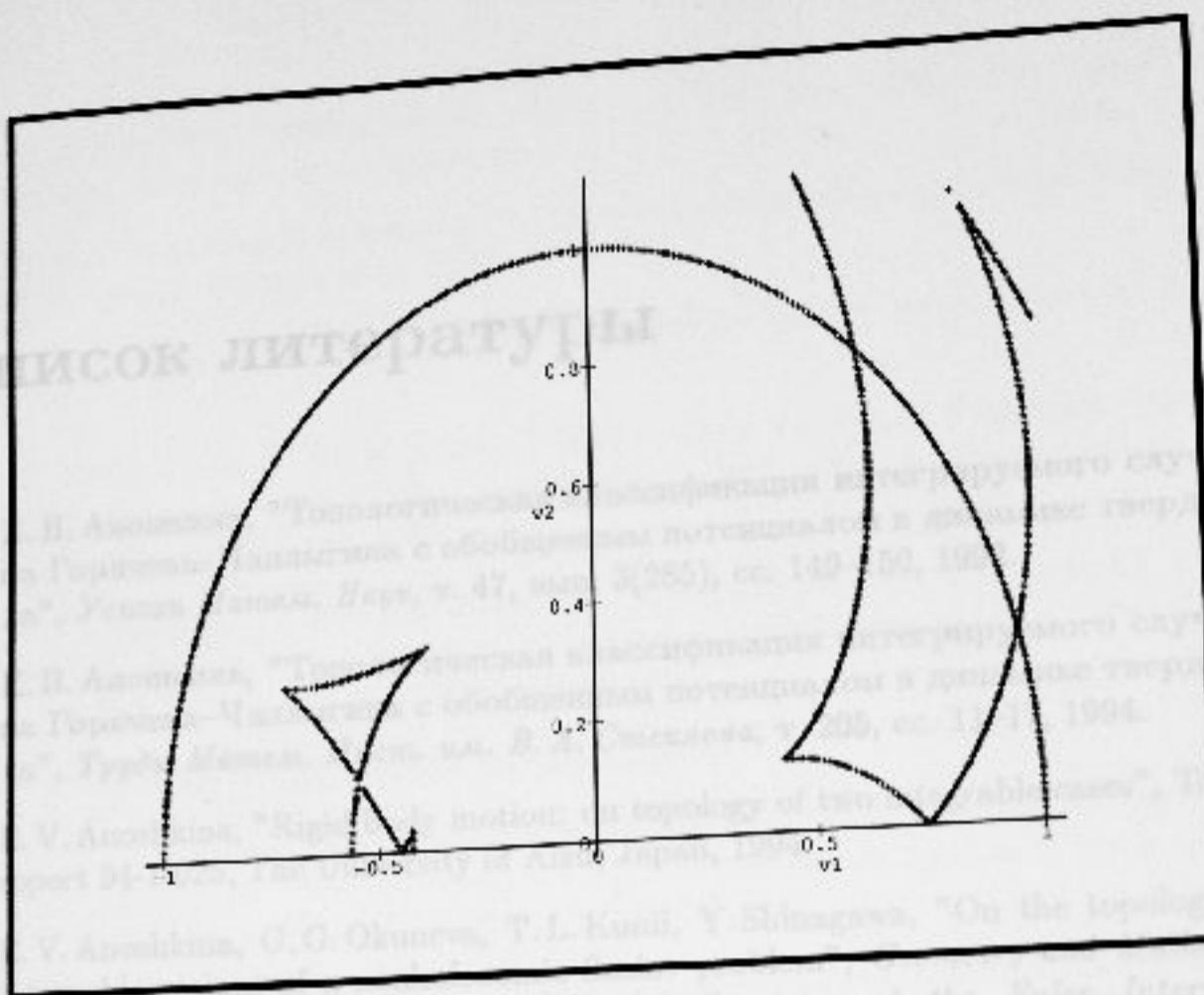


Рис. А.34: ОВД для области 4с

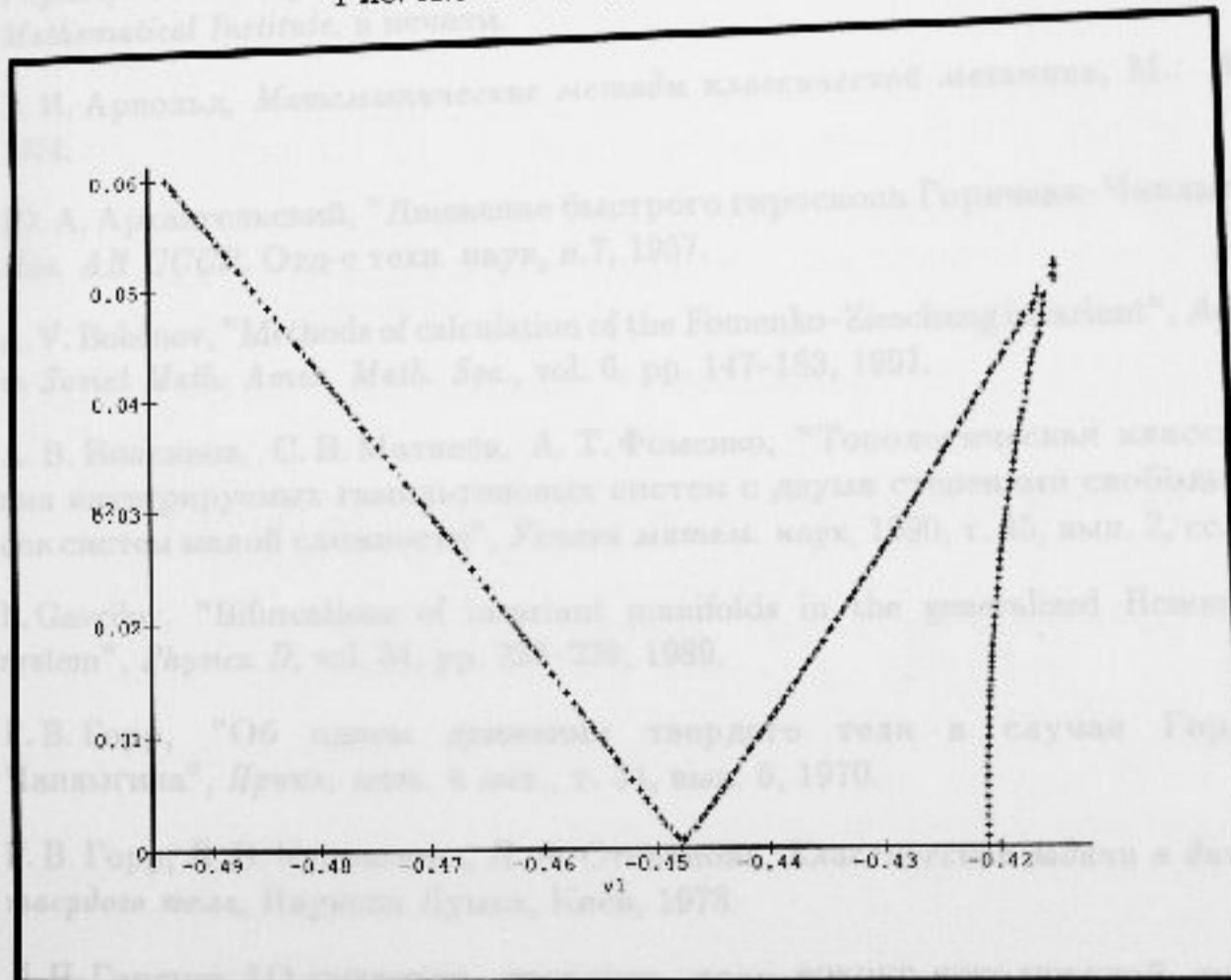


Рис. А.35: Фрагмент ОВД для области 4с

Список литературы

- [1] Е. В. Аношкина, "Топологическая классификация интегрируемого случая типа Горячева–Чаплыгина с обобщенным потенциалом в динамике твердого тела", *Успехи Матем. Наук*, т. 47, вып. 3(285), сс. 149–150, 1992.
- [2] Е. В. Аношкина, "Топологическая классификация интегрируемого случая типа Горячева–Чаплыгина с обобщенным потенциалом в динамике твердого тела", *Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова*, т. 205, сс. 11–17, 1994.
- [3] E. V. Anoshkina, "Rigid body motion: on topology of two integrable cases", Technical report 94-1-025, The University of Aizu, Japan, 1994.
- [4] E. V. Anoshkina, G. G. Okuneva, T. I. Kunii, Y. Shinagawa, "On the topology of an integrable variant of a nonholonomic Suslov problem", *Geometry and Mathematical Physics, Proceeding of the Lobachevskij Semester at the Euler International Mathematical Institute*, в печати.
- [5] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1974.
- [6] Ю. А. Архангельский, "Движение быстрого гиростата Горячева–Чаплыгина", *Изв. АН СССР, Отд. е техн. наук*, п.7, 1957.
- [7] A. V. Bolsinov, "Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant", *Advances in Soviet Math. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, pp. 147–183, 1991.
- [8] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, "Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности", *Успехи матем. наук*, 1990, т. 45, вып. 2, сс. 49–77.
- [9] L. Gavrilov, "Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Henon–Heiles system", *Physica D*, vol. 34, pp. 223–239, 1989.
- [10] Г. В. Горр, "Об одном движении твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина", *Прикл. мат. и мех.*, т. 34, вып. 6, 1970.
- [11] Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова, *Классические задачи в динамике твердого тела*, Наукова Думка, Київ, 1978.
- [12] Д. Н. Горячев, "О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ ", *Матем. сб.* т. 21, 1900.

- [13] Д. И. Горячев, "Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки", *Варшавские университетские известия*, кн. 3, сс. 1–11, 1915.
- [14] А. И. Докшевич, "Качественное исследование решения Горячева–Чаплыгина", *Мех. тверд. тела*, вып. 4, 1972.
- [15] В. В. Козлов, *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, М., 1980.
- [16] И. В. Комаров, В. Б. Кузнецов, "Обобщенный гиростат Горячева–Чаплыгина в квантовой механике", *Зап. Научн. Сем. Отд. Матем. Инст. Стеклова (ЛОМИ)*, 164, сс. 133–141, 1987.
- [17] E. A. Lacombe, J. Llibre and A. Nunes, "Invariant Tori and Cylinders for a Class of Perturbed Hamiltonian Systems", *Geometry of hamiltonian systems: proceedings of a workshop held June 5–16, 1989*, Springer, 1991.
- [18] Дж. Милнор, *Теория Морса*, М.: Мир, 1965.
- [19] А. А. Ошемков, "Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $so(4)$ ", *Успехи Матем. Наук*, т. 42, н. 6, сс. 199–200, 1087.
- [20] А. А. Ошемков, "Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations", *Advances in Soviet Math.* Amer. Math. Soc., vol. 6, pp. 67–146, 1991.
- [21] Т. И. Погосян, "Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела", *Механика твердого тела*, вып. 12, сс. 9–16, 1980.
- [22] Т. И. Погосян, М. П. Харламов, "Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил", *ПММ*, т. 43, н. 3, сс. 419–428, 1979.
- [23] С. Смейл, "Топология и механика", *Успехи Матем. Наук*, т. 15, вып. 2, сс. 77–123, 1972.
- [24] Л. Н. Сретенский, "О некоторых случаях интегрирования движения гиростата", *ДАН СССР*, т. 149, н. 2, 1963.
- [25] Л. Н. Сретенский, "О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом", *Вест. Моск. Унив.*, н. 3, 1963.
- [26] Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, 1946.
- [27] Я. В. Татаринов, "Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки", *Вест. Моск. Унив.*, Сер. матем., мех., н. 6, сс. 99–105, 1974.
- [28] А. Т. Фоменко, "Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем", *ДАН СССР*, т. 287, н. 5, сс. 1071–1075, 1986.

- [29] А. Т. Фоменко, "Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, т. 50, н. 6, сс. 1276–1307, 1986.
- [30] А. Т. Фоменко, "Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю", *Функциональный анализ и его приложения*, т. 22, н. 4, сс. 38–51, 1988.
- [31] А. Т. Фоменко, *Симплектическая Геометрия*, М.: Московский университет, 1988.
- [32] A. T. Fomenko, *Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [33] М. П. Харламов, "Метод интегральных отображений в задачах динамики твердого тела". *Методы Исследования Стационарных Движений Механических Систем*, МГУ, сс. 17–18, 1980.
- [34] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Ленинградский университет, 1988.