



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревич, В. А. Кибкало, Главные направления и достижения кафедры дифференциальной геометрии и приложений на современном этапе,

Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2024, номер 6, 27–37

<https://www.mathnet.ru/vmumm4639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 128.204.79.182

11 сентября 2025 г., 03:10:14



УДК 517.938.5

ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ДОСТИЖЕНИЯ КАФЕДРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ

А. Т. Фоменко¹, А. И. Шафаревич², В. А. Кибкало³

Кратко изложены недавние результаты сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений по различным областям геометрии и ее приложений.

Ключевые слова: проблема Плато, алгебра Ли, интегрируемость, топологический инвариант, бильярд, особенность, оператор Нийенхейса, оператор Маслова, метрическая геометрия, геометрическая оптимизация, алгебраическая геометрия, пространства модулей пучков без кручения, зеркальная симметрия, алгебраическая топология, теория узлов и зацеплений, компьютерная геометрия.

Recent results by the staff of the chair of differential geometry and applications in various areas of geometry and its applications are briefly presented.

Key words: Plateau problem, Lie algebra, integrability, topological invariant, billiard, singularity, Nijenhuis operator, Maslov operator, metric geometry, geometric optimization, algebraic geometry, moduli spaces of torsion free sheaves, mirror symmetry, algebraic topology, theory of knots and links, computer geometry.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-6-4

В обзоре освещаются основные исследования сотрудников кафедры, работающих на ней в 2024 году. На сайте кафедры представлены подробный исторический обзор достижений кафедры⁴, перечень написанных сотрудниками книг⁵, посвященная 100-летию научной школы В. Ф. Кагана презентация⁶. История кафедры также изложена в книге “Мехмат МГУ 80” (Изд-во МГУ, 2013, с. 84–91), приуроченной к 80-летию мехмата.

1. Проблема Плато. А. Т. Фоменко решена известная многомерная проблема Плато в классе спектральных поверхностей. В частности, пусть задан “контур” A , т.е. $(k - 1)$ -мерное замкнутое многообразие в объемлющем евклидовом пространстве (или, более общо, задано бордантное нулю подмногообразие в римановом пространстве). Тогда всегда существует k -мерная стратифицированная глобально минимальная “поверхность” W с границей A , параметризованная спектром (последовательностью) k -мерных многообразий W_i с границей A . Также любой нетривиальный элемент группы спектральных бордизмов риманова многообразия реализуется глобально минимальной “спектральной поверхностью” — замкнутым циклом (см. [1]). Аналогичное решение многомерной задачи Плато получено как для бордизмов, так и для произвольной экстраординарной теории спектральных (ко)гомологий, например для K -функтора (K -теории векторных расслоений). Развитие этой темы на кафедре представлено в работах А. О. Иванова и А. А. Тужилина (п. 5).

¹ Фоменко Анатолий Тимофеевич — академик РАН, доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, гл. науч. сотр. Моск. центра фонд. и прикл. матем., email: atfomenko@mail.ru.

Fomenko Anatoly Timofeevich — Academician of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Differential Geometry and Applications.

² Шафаревич Андрей Игоревич — чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, декан мех.-мат. ф-та МГУ, проф. каф. дифференциальной геометрии и приложений, email: shafarev@yahoo.com.

Shafarevich Andrey Igorevich — Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, Dean of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Professor of the Chair of Differential Geometry and Applications.

³ Кибкало Владислав Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; мл. науч. сотр. Моск. центра фонд. и прикл. матем., e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

⁴http://dfgm.math.msu.su/sci_archiev.php.

⁵<http://dfgm.math.msu.su/books.php>.

⁶<http://dfgm.math.msu.su/files/Dfgm90-100-2023.pdf>.

2. Метод сдвига аргумента. Гипотеза Мищенко–Фоменко. А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в 1978 г. ввели на алгебрах Ли общий метод “сдвига аргумента” (см. [2]). Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, элемента $\xi \in \mathfrak{g}^*$ и двух полиномов f, g на $\mathfrak{g}^*$, инвариантных относительно сопряжения, итерированные производные f и g в направлении ξ коммутируют относительно скобки Пуассона: $\{\xi^p(f), \xi^q(g)\} = 0$ для всех $p, q \geq 0$. Порожденную элементами $\xi^p(f)$ для таких f и $p \geq 0$ пуассонову коммутативную подалгебру A_ξ в алгебре полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$ называют *алгеброй сдвига аргумента* или *алгеброй Мищенко–Фоменко*.

А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко открыли многопараметрические полиномиальные семейства вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем (ИГС) на всех редуктивных алгебрах Ли, в частности на всех полупростых. Для произвольной конечномерной алгебры Ли гипотеза о наличии таких полиномиальных ИГС известна как *гипотеза Мищенко–Фоменко*. Последовавшие работы многих математиков укрепляли уверенность в ее справедливости. Окончательно гипотеза в полном объеме была алгебраически доказана С. Т. Садэтовым для алгебр Ли над полем характеристики 0. Это исключительно нетривиальная теорема. Затем доказательство на языке пуассоновой геометрии предъявил А. В. Болсинов.

Эти результаты активно развиваются сегодня многими математиками. Так, для полупростых $\mathfrak{g}$ алгебра A_ξ “поднимается” (Л. Г. Рыбников, 2006) в универсальную обертывающую алгебру как ее коммутативная подалгебра: $\hat{A}_\xi \subseteq U\mathfrak{g}$. Однако известные конструкции построения алгебры $\hat{A}_\xi$ не позволяли найти оператор $\hat{\xi} : [\hat{\xi}^p(f), \hat{\xi}^q(g)] = 0, \forall p, q \geq 0$ и $\forall f, g \in U\mathfrak{g}^G$. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ его удалось построить как линейную комбинацию “квазидифференцирований” $U\mathfrak{gl}_n$ (их ввели Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, 2012).

Теорема (Икеда, Шарыгин) [3, 4]. Для числовой матрицы $\xi = (\xi_i^j)$ из $\mathfrak{gl}_n^*$ и оператора $\hat{\xi} = \sum_{i,j=1}^n \xi_i^j \hat{\partial}_j^i$, где $\hat{\partial}_j^i$ — частные квазипроизводные, верно $[\hat{\xi}^p(f), \hat{\xi}^q(g)] = 0$ для всех $f, g \in U\mathfrak{g}^G$ и $p, q \geq 0$.

3. Вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы задаются гамильтоновым полем $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) и имеют n первых интегралов $f_1, \dots, f_n, \{f_i, f_j\} = 0$, инволютивных и функционально независимых. Нашими коллегами изучаются топология их слоений Лиувилля (разбиение M^{2n} на связные совместные уровни $f_1, \dots, f_n$), возникающие в них особенности, динамика фазовых траекторий, лежащих на слоях, и алгебраические структуры, связанные с интегрируемостью.

3.1. Некоммутативная интегрируемость. А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко обнаружили [5] широкий класс “некоммутативно интегрируемых” гамильтоновых систем (алгебра Ли их интегралов некоммутативна, т.е. $\exists i \neq j : \{f_i, f_j\} \neq 0$) и показали, как можно свести их к инволютивному случаю. Таковы геодезические потоки многих левоинвариантных метрик на группах Ли, симметрических пространствах.

Теорема (Мищенко–Фоменко) [5]. Пусть на симплектическом многообразии задана гамильтонова система, вполне интегрируемая в некоммутативном смысле. Тогда она вполне интегрируема по Лиувиллю и в обычном смысле, причем коммутирующие интегралы новой алгебры интегралов функционально (и алгоритмически) выражаются через прежние некоммутирующие интегралы.

3.2. Топологическая классификация ИГС. А. Т. Фоменко построена теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых невырожденных (боттовских) систем с двумя степенями свободы. Две системы называют лиувиллево эквивалентными, если их слоения Лиувилля послойно гомеоморфны, т.е. гомеоморфизмом совмещаются замыкания их решений общего положения. Инвариант Фоменко–Цишанга классифицирует [6] системы в неособых зонах энергии (на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3). Ребра этого графа отвечают семействам регулярных торов, вершины — особенностям (3-атомам Фоменко), а числовые метки кодируют склейку Q^3 из набора 3-атомов по их граничным торам.

Топологические инварианты вычислены А. Т. Фоменко с соавторами и другими математиками для многих конкретных ИГС из геометрии, механики и физики [7]. А. А. Ошемковым изучены интегрируемые случаи в динамике твердого тела, случай Соколова на алгебре Ли $so(4)$, задача двух центров на сфере, случай Адлера–ван Мербеке, а В. А. Кибкало — многопараметрические аналоги волчка Ковалевской на алгебрах Ли $so(4)$ и $so(3, 1)$, а также псевдоевклидовы аналоги систем механики. Многие из этих систем бигамильтоновы, т.е. интегралы коммутируют относительно двух согласованных скобок Пуассона. Ряд общих результатов об особенностях таких систем получен А. В. Болсиновым и А. А. Ошемковым. Е. А. Кудрявцева совместно с учениками Д. А. Федосевым и О. А. Загрядским описала все суперинтегрируемые механические системы, инвариантные

относительно вращений. Все эти обширные результаты составляют основу создаваемого на кафедре фундаментального Топологического атласа ИГС [7]. Были открыты интересные и неожиданные топологические связи между системами разной природы.

А. Т. Фоменко, С. В. Матвеевым, Х. Цишангом и А. В. Браиловым показано совпадение классов неособых уровней энергии ИГС и граф-многообразий Вальдхаузена (многообразия Зейферта являются их подклассом). В теории гиперболических многообразий известно 3-многообразие Фоменко–Матвеева–Викса, имеющее наименьший объем среди всех гиперболических замкнутых ориентируемых 3-многообразий [8].

3.3. Невырожденные особенности ИГС и функции Морса. Почти все особенности изучавшихся ИГС оказались невырожденными (боттовскими). Для типичной особенности ИГС на M^{2n} ограничение подходящего интеграла на трансверсаль к критическому подмногообразию есть функция Морса. А. Т. Фоменко классифицировал боттовские 3-атомы интегрируемых систем $v = \text{sgrad } H$ на M^4 , т.е. слоения Лиувилля вблизи слоя с критическими окружностями S_i^1 . Атом имеет структуру S^1 -расслоения Зейферта над двумерной базой, возможно, с особыми слоями типа $(2,1)$ (см. монографию [7]).

Критические точки функции Морса H на M^2 имеют тип либо центр (максимумы и минимумы H), либо седло. Особый слой с седловыми точками является конечным графом с вершинами степени 4, вложенным в M^2 . Слоение в его окрестности называют 2-атомом. А. А. Ошемковым построен (1994) комбинаторный инвариант — f -граф, полезный при описании 3-атомов, классификации простых функций Морса, построении инвариантов систем Морса–Смейла на поверхностях M^2 и их дальнейших обобщений (1998). Отметим также связь 2-атомов с виртуальными узлами в утолщенных поверхностях $M^2 \times I$.

Невырожденные особенности ранга $r < n - 1$ ИГС на M^{2n} изучались многими математиками. А. А. Ошемковым выполнена [9] полулокальная классификация седловых особенностей ранга 0 с помощью введенного им f_n -графа — топологического инварианта, обобщающего f -графы седловых 2-атомов V_i . Там же А. А. Ошемковым построен алгоритм нахождения сомножителей (2-атомов $V_1, \dots, V_n$) минимальной модели особенности по ее f_n -графу и оценки сложности 2-атомов V_i . Эффективность подхода продемонстрирована созданием списка особенностей малой сложности [10]. Полулокальная классификация особенностей седло-фокус ИГС на M^6 построена А. А. Ошемковым и И. К. Козловым [11].

Е. А. Кудрявцевой и А. А. Ошемковым (2022) получено комбинаторное достаточное условие для структурной устойчивости невырожденных особых слоев лагранжевых слоений. А. А. Ошемковым (2018) получен критерий устойчивости седловых особенностей ранга 0 при интегрируемых возмущениях.

А. А. Ошемковым изучался комплекс особенностей ИГС на M^{2n} . Циклы, заданные особенностями ранга r ИГС, оказались двойственны по Пуанкаре соответствующим классам Чжэня TM^{2n} . По гомологическим свойствам комплекса составлен список невырожденных ИГС, возможных на “простых” M^{2n} .

3.4. Вырожденные особенности. Е. А. Кудрявцевой получены симплектическая совместно с А. В. Болсиновым и Л. Гульельми [12]) и C^∞ -гладкая (совместно с Н. Н. Мартынчуком) классификации параболических орбит лагранжевых слоений. Такие особенности найдены в системах механики — волчке Ковалевской (В. А. Кибкало, Е. А. Кудрявцева) и осесимметричной системе Жуковского (В. А. Кибкало).

Е. А. Кудрявцевой были изучены скрытые гамильтоновы торические симметрии особых орбит ИГС, получены достаточные условия существования и жесткости таких симметрий и классифицированы гамильтоновы действия тора вблизи своих компактных особых орбит.

В качестве приложения получены C^∞ -гладкие классификации особых орбит лагранжевых слоений на (M^6, ω) (совместно с М. В. Онуфриенко и Л. М. Лерманом для орбит коранга 1 и 2 соответственно). При этом открыты и классифицированы новые типы особенностей коранга 2 — с типами Вильямсона седло-седло (с гиперболическим $m : n$ резонансом и, возможно, скручиванием) и фокус-фокус. Для всех них доказана структурная устойчивость при малых вещественно-аналитических интегрируемых возмущениях.

3.5. Интегрируемые бильярды, квадрики и топологическое моделирование ИГС. Важным классом ИГС являются геодезические потоки на квадраках и бильярды в ограниченных ими областях. Траектория бильярда в такой области имеет каустику — квадрику из того же семейства, которой касаются все ее звенья, что следует из знаменитой теоремы Якоби–Шаля об интегрируемости геодезического потока на эллипсоиде. Недавно класс последних был существенно расширен:

В. В. Ведюшкиной введены [13] бильярдные книжки (склеенные из плоских столов CW-комплексы, оснащенные коммутирующими перестановками), А. Т. Фоменко — бильярды с проскальзыванием (2021) и эволюционные силовые бильярды (2022). Их также можно снабдить магнитным или потенциальным полем. При этом динамика шара на “сложном” двумерном столе наглядно и эффективно моделирует [14] весьма сложные многомерные ИГС из физики, механики, геометрии (описывает эволюцию систем и их особенностей).

Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга плоских интегрируемых бильярдов было начато в 2009 г. В. Драговичем и М. Раднович. В 2015 г. В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) введены топологические бильярды — подкласс гомеоморфных 2-многообразиям столов в классе всех книжек — и выполнена их структурная и топологическая классификация, причем как в случае софокусных эллипсов и гипербол, так и парабол.

Гипотеза (А. Т. Фоменко, 2019). *Подходящим классом интегрируемых бильярдов топологически моделируются невырожденные ИГС на M^4 в неособых зонах энергии (на неособых Q_h^3 : $H = h$). В частности, в классе “бильярдных” слоений Лиувилля содержатся все боттовские 3-атомы, все базы слоения Лиувилля на Q^3 с такими 3-атомами, все возможные в ИГС классы гомеоморфности Q^3 и классы лиувиллевой эквивалентности невырожденных ИГС на Q^3 , задаваемые инвариантами Фоменко–Цишанга.*

Ряд пунктов гипотезы А. Т. Фоменко о бильярдах уже доказан. Для всех боттовских 3-атомов [13] и баз слоения (2021) В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой алгоритмически построены бильярдные книжки с такими слоениями на Q^3 . Для каждой связной суммы линз $L(q_i, p_i)$ и $S^1 \times S^2$ В. В. Ведюшкиной построены книжки с таким классом гомеоморфности Q^3 (2021), т.е. класс Q^3 бильярдов оказался не ограничен многообразиями Зейферта: в последний не входит $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$, где $\mathbb{R}P^3 \cong L(2, 1)$. В. В. Ведюшкиной и В. А. Кибкало доказан ряд положений “локальной” версии гипотезы Фоменко о реализации бильярдами меченых “подграфов” в инварианте, включая все значения числовых меток r , ε , n (см. [15]). Реализация меток и 3-атомов означает реализуемость всех “элементов” инварианта Фоменко–Цишанга бильярдами.

Слоения бильярдных книжек оказались лиувиллево эквивалентны многим классическим интегрируемым системам геометрии и механики. В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко (2019) промоделированы все геодезические потоки на ориентируемых поверхностях с интегралами степени 1 и 2. Волчки Эйлера и Лагранжа полностью реализованы набором топологических бильярдов. Сразу во всех зонах энергии такой волчок реализован силовым бильярдом, откуда получена “бильярдная эквивалентность” двух этих классических волчков (2022). Системы Жуковского, Ковалевской, Горячева–Чаплыгина моделируются бильярдами в некоторых зонах энергии, что дает примеры понижения степени интеграла с 4 и 3 до 2.

Бильярды на многомерных софокусных столах активно исследуются Г. В. Белозеровым [16]. Им изучена топология слоений и их особенностей для многих таких областей в $\mathbb{R}^3$ и определен класс гомеоморфности их изоэнергетических 5-поверхностей: сфера S^5 , произведения сфер $S^1 \times S^4$ и $S^2 \times S^3$. В. А. Кибкало предложено многомерное обобщение софокусных бильярдных книжек и проверена корректность склейки в окрестности клеток коразмерности 2 и больше.

Теорема Якоби–Шаля утверждает, что в евклидовом $\mathbb{R}^n$ все касательные прямые, проведенные к геодезической на n -осном эллипсоиде, одновременно касаются $(n - 2)$ софокусных с ним квадрик. В. А. Кибкало предположил интегрируемость геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик и доказал ее в случае двумерного пересечения $(n - 2)$ квадрик в $\mathbb{R}^n$. Г. В. Белозеровым доказан полный аналог теоремы Якоби–Шаля для любого пересечения k невырожденных квадрик в $\mathbb{R}^n$ (см. [17]), также было получено условие на потенциал, достаточное для интегрируемости системы на таком пересечении.

Последние результаты Г. В. Белозерова и А. Т. Фоменко доказывают обобщенную теорему Якоби–Шаля в пространствах Минковского и постоянной секционной кривизны. Замечательным следствием этой теоремы является интегрируемость софокусных бильярдов на любом пересечении софокусных квадрик. Также показано, что в двумерном случае последнее нельзя распространить на поверхности, локально неизометричные пространства постоянной секционной кривизны.

3.6. ИГС с некомпактными слоями. В работах наших коллег, учеников (Д. В. Новиков, К. Р. Алешкин, Д. А. Федосеев, Т. А. Лепский) изучаются ИГС с некомпактными слоениями Лиувилля и неполными потоками гамильтоновых полей. Подробный обзор сделан А. Т. Фоменко и Д. А. Федосеевым (2016). Некомпактные слоения бильярдов на неограниченных столах описаны В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко (2017).

Е. А. Кудрявцевой доказан аналог теоремы Лиувилля для подкласса ИГС на M^4 с неполными

потоками, включающего системы на $(\mathbb{C}^2, \text{Re}(dz \wedge dw))$ с интегралами $(\text{Re } f(z, w), \text{Im } f(z, w))$ для голоморфной функции f .

В. А. Кибкало изучаются псевдоевклидовы аналоги систем механики, введенные А. В. Борисовым и И. С. Мамаевым (Russ. J. Math. Phys. 2016). Для таких аналогов волчка Ковалевской доказан [18] критерий компактности совместного уровня энергии, интеграла и функций Казимира в $\mathbb{R}^6$. Для аналогов системы Эйлера [19] и осесимметричной системы Жуковского (2024) построены бифуркационные диаграммы, описаны бифуркации (аналоги 3-атомов Фоменко, в том числе некритические) и базы слоения Лиувилля на неособых Q^3 .

3.7. Траекторные инварианты ИГС. А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко открыли инварианты непрерывной траекторной эквивалентности ИГС и вычислили их, например, для волчка Эйлера из динамики тяжелого твердого тела в $\mathbb{R}^3$ и для системы Якоби — геодезического потока на эллипсоиде. Эти известные системы оказались не только лиувиллево, но и непрерывно траекторно эквивалентными, хотя гладкой траекторной эквивалентности и топологической сопряженности нет [7]. Недавно А. Т. Фоменко и Г. В. Белозеров вычислили реберные траекторные инварианты многих интегрируемых бильярдов (2024).

Е. А. Кудрявцевой построены бесконечные серии бициклических и трициклических седловых 2-атомов (3-атомов), на которых существуют инварианты топологической сопряженности (траекторные инварианты), устойчивые относительно “гамильтоновых” (интегрируемых) возмущений распада сложного атома в молекулу с простыми атомами. Показано отсутствие таких инвариантов для плоских атомов.

3.8. Геометрия Нийенхейса и интегрируемые системы (ИС). Многообразия, снабженные операторным полем с нулевым кручением Нийенхейса, возникают в разных задачах алгебры и геометрии. Их систематическое изучение начато в конце 2010-х гг. А. Ю. Коняевым совместно с А. В. Болсиновым и В. С. Матвеевым, что оказалось крайне плодотворным [20]. Удалось построить локальную теорию нийенхейсовых операторов. В известных ранее случаях алгебраический тип оператора не менялся и/или был гиперболическим. Оказалось, что для более широкого класса операторов — gl-регулярных операторов Нийенхейса — существует теория нормальных форм. Их полный список получен в [21] в размерности 2.

Удалось установить связь операторов Нийенхейса, их особых точек (точек скалярного типа) с левосимметрическими алгебрами и поставить задачу линеаризации для этих особенностей. В двумерном случае получена полная классификация невырожденных левосимметрических алгебр [22].

Основными приложениями геометрии Нийенхейса оказались ИС. При этом операторы возникают в системах, интегрируемых в квадратурах. Использование операторов Нийенхейса позволяет переформулировать в геометрических терминах разделение переменных, при этом заметно расширяется класс интегрируемых уравнений типа Гамильтона–Якоби. Из классических результатов Болсинова–Матвеева–Пукаччо следует, что все двумерные ИС в окрестности точки общего положения получаются именно этим методом.

Удалось установить взаимосвязь операторов Нийенхейса и квазилинейных ИС. Многие классы таких систем строятся с использованием операторов Нийенхейса. В частности, такой подход позволил получить недиагонализуемые аналоги слабонелинейных систем Ферапонтова и проинтегрировать их в квадратурах.

Специальный класс слабонелинейных систем, связанных с тензорами Киллинга систем Бененти, оказался связан с задачей построения конечнозонных потенциалов уравнения Хилла. Более того, их решения в точности являются конечнозонными решениями уравнений типа КдВ, Камасса–Холма и других.

4. Геометрия и математическая физика. Исследования в области математической физики ведутся на кафедре А. И. Шафаревичем и его учениками. А. И. Шафаревич — известный специалист в области асимптотической и геометрической теории линейных и нелинейных уравнений в частных производных, квантовой механики и гидродинамики. Им решена поставленная В. П. Масловым и многократно обсуждавшаяся в научной литературе задача о многофазовых асимптотиках для уравнений гидродинамики. При этом им глубоко развиты методы исследования асимптотических решений нелинейных уравнений в частных производных; для уравнений гидродинамики установлена связь асимптотик с топологическими инвариантами векторных полей и слоений Лиувилля [23]; получены интересные приложения к гидродинамике (включая асимптотическое описание эволюции локализованных структур в несжимаемой жидкости).

А. И. Шафаревич также занимался теорией квазиклассического квантования инвариантных изотропных многообразий гамильтоновых систем. Им описаны спектральные серии, соответствую-

ющие траекториям и инвариантным торам в резонансных системах, а также одномерным сингулярным инвариантным множествам в частично интегрируемых системах. А. И. Шафаревичем получен ряд результатов о квантовании комплексных многообразий, описаны спектральные серии квантовых систем Калоджеро–Строкки и несамосопряженных периодических операторов Шрёдингера с комплексным потенциалом [24].

А. И. Шафаревич также занимался спектральной теорией и теорией эволюционных уравнений на некоторых классах CW -комплексных: геометрических графах и гибридных пространствах — декорированных графах, полученных из графов заменой вершин на поверхности [25]. Недавно им получен ряд результатов о квазиклассическом спектре операторов Шрёдингера на таких пространствах и о временной эволюции решений нестационарных задач. В частности, описана статистика распространения локализованных решений нестационарного уравнения Шрёдингера на геометрическом графе при больших временах; установлена связь такой статистики с известными проблемами и результатами аналитической теории чисел.

Еще одно направление работы А. И. Шафаревича — обобщение квазиклассической теории В. П. Маслова на случай наличия особенностей в коэффициентах уравнений или на многообразиях, на которых эти уравнения заданы. Им описаны спектральные серии операторов Лапласа и Шрёдингера с дельта-потенциалами и на поверхностях с коническими точками [26]; описаны перестройки лагранжевых многообразий, соответствующих квазиклассическим решениям уравнений типа Шрёдингера и коротковолновым решениям общих строго гиперболических систем [27]. Показано, что эти перестройки определяются структурой пересечения кривой в проективном пространстве с гиперповерхностью Петровского.

А. А. Толченников изучал решения линейных уравнений волн на воде с локализованным начальным условием, описывающих распространение длинных волн (волн цунами) в открытом океане. Получены [28] совместно с С. Ю. Доброхотовым, В. Е. Назайкинским, А. И. Шафаревичем, С. Я. Секерж-Зеньковичем эффективные асимптотические формулы, описывающее влияние на амплитуду волны различных факторов: сферичности Земли, силы Кориолиса, возникающих из-за неровностей дна и дисперсии фокальных точек.

Также А. А. Толченников совместно с В. Л. Чернышевым [29] исследовали вопросы, связанные с распространением гауссовых волновых пакетов на графах и декорированных графах. Ими получены асимптотические формулы, выражающие число гауссовых пакетов при больших временах.

5. Метрическая геометрия и геометрическая оптимизация изучаются в работах А. О. Иванова, А. А. Тужилина и их учеников. Кандидатские диссертации А. О. Иванова и А. А. Тужилина посвящены общей проблеме Плато, а позднее их интересы сосредоточились на одномерной версии этой задачи — *обобщенной проблеме Штейнера*. Здесь граница — конечное подмножество M метрического пространства (далее — МП) X , а “поверхность” — связный граф в X , множество вершин которого содержит M .

А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным создана *теория локально минимальных и экстремальных сетей* (см. [30]) и получены следующие результаты: классификация плоских локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей; описание локальной структуры локально минимальных сетей на римановых многообразиях и в нормированных пространствах; классификация замкнутых локально минимальных сетей на замкнутых поверхностях неотрицательной кривизны (совместно с И. В. Птицыной // Матем. сб. 1992); ограничения на возможную топологию плоского локально минимального бинарного дерева в терминах количества уровней выпуклости граничного множества; оценка на отношение Штейнера произвольного риманова многообразия; связь между отношением Штейнера базы и накрывающего пространства и как следствие найдены отношения Штейнера плоских торов и бутылок Клейна, а также поверхностей равногранных тетраэдров; интегральная формула длины минимального остоного дерева, затягивающего не более чем счетное множество точек; единственность кратчайшего дерева на евклидовой плоскости для границ общего положения; формула длины экстремальной сети фиксированной топологии на данном граничном множестве, обобщающая известную формулу Максвелла.

Большой интерес представляют так называемые *гиперпространства* — МП, точками которых являются подмножества фиксированного пространства, или все МП, обладающие теми или иными свойствами. К активно изучаемым гиперпространствам относятся *пространства Хаусдорфа*, точки которых суть ограниченные замкнутые подмножества фиксированного МП, а в качестве функции расстояния берется расстояние Хаусдорфа, а также *пространство Громова–Хаусдорфа* $\mathcal{M}$, точки которого — компактные МП, а расстояние — расстояние Громова–Хаусдорфа. Последнее определяется как инфимум расстояний Хаусдорфа между образами пары МП при их всевозможных изометрич-

ных вложениях во всевозможные объемлющие МП. Предложенная А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным техника неприводимых оптимальных соответствий позволила получить ряд существенных продвижений, а именно доказано, что пространство $\mathcal{M}$ геодезическое [31] и что в нем проблема Штейнера разрешима для границ, состоящих из конечных пространств (для произвольных компактов вопрос открыт); получено полное доказательство тривиальности группы изометрий пространства $\mathcal{M}$; в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа решена обобщенная проблема Борсука, вычислены хроматическое число и минимальный размер кликового покрытия произвольного графа [32], а также наименьшая размерность конечномерного МП с манхаттанской метрикой, в которое изометрично вкладывается данное конечное МП.

Далее, в рамках аксиоматики фон Неймана–Бернаиса–Гёделя описано построение собственного класса $\mathcal{GH}_0$ всех МП с расстоянием Громова–Хаусдорфа, рассматриваемых с точностью нулевого расстояния, показано, что расстояние Громова–Хаусдорфа на $\mathcal{GH}_0$ является полной внутренней метрикой (совместно с С. И. Борзовым // Матем. сб. 2022); обнаружено, что умножение всех расстояний МП X на данное конечное число может привести к МП, находящемуся на бесконечном расстоянии Громова–Хаусдорфа от X (множители, оставляющие расстояние конечным, образуют группу — стационарную группу пространства X); показано, что каждое облако, т.е. максимальный подкласс в $\mathcal{GH}_0$, в котором все пространства находятся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга, содержит единственное МП, инвариантное относительно умножения всех его расстояний на элементы стационарной группы.

На стыке теории геометрических оптимизационных задач и метрической геометрии А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным построена *теория минимальных заполнений* (в смысле Громова) конечных МП [33]. В качестве “заполнения” конечного МП M берется соединяющий M связный граф G с весовой функцией ω на ребрах. Метрика на вершинах G , порожденная ω , мажорирует исходную метрику на M , а минимальность понимается как минимальность $\omega(G)$. Вес минимального заполнения $M \subset X$, рассматриваемого как МП с индуцированной из X метрикой, оценивает снизу длину кратчайшего дерева в X с границей M .

Фиксировав дерево G и минимизировав его вес по всем весовым функциям, превращающим G в заполнение M , получим задачу линейного программирования. Множество допустимых значений переменных двойственной задачи — выпуклый многогранник Λ_G , зависящий лишь от дерева G . Геометрия многогранников Λ_G тесно связана с формулой веса минимального заполнения (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, 2021).

6. Алгебро-геометрический подход к квантовым ИС. Основные исследования А. Б. Жеглова посвящены разработке теории многомерного соответствия Кричевера, основная задача которой — обобщение известной алгебраической теории уравнения Кадомцева–Петвиашвили в размерности один. Основные задачи в этой теории — классификация коммутативных колец операторов, встречающихся в теории ИС (коммутирующие дифференциальные, разностные, интегродифференциальные операторы), исследование связанных с ними нелинейных уравнений в частных производных и их точных решений.

С 2002 г. А. Б. Жегловым вместе с коллегами из Математического института РАН имени В. А. Стеклова, а также с коллегами из Германии (Берлинский университет имени Гумбольдта, Кёльнский университет) Д. В. Осиповым, Г. Курке, И. Бурбаном разработан подход к решению задачи классификации коммутирующих колец дифференциальных или дифференциально-разностных операторов, а также подход к изучению их изоспектральных деформаций, основанный на исследовании спектральных пучков на проективных алгебраических многообразиях (результаты, полученные по этой теме в 2002–2016 гг., легли в основу докторской диссертации А. Б. Жеглова “Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы”⁷). В рамках этого подхода используются принципиально новые алгебро-геометрические и теоретико-числовые идеи и конструкции, разработанные школой А. Н. Паршина. В частности, исследованы геометрические спектральные данные широкого класса известных примеров алгебраически интегрируемых систем; классифицированы коммутативные подалгебры операторов двух переменных в терминах геометрических спектральных данных; предложены многомерные аналоги иерархии Кадомцева–Петвиашвили, найдены явные изоспектральные деформации известных примеров алгебраически ИС Калоджеро–Мозера с рациональным потенциалом.

Дальнейшие исследования в этом направлении представляют особый интерес, так как могут привести к решению ряда задач из разных областей математики, включая известные открытые

⁷<http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/zheglov/dis.pdf>.

проблемы (такие, как гипотеза о якобиане или гипотеза Диксмье). При этом используются знания и методы из алгебраической геометрии, дифференциальных уравнений, дифференциальной алгебры, теории представлений, К-теории и других. Самые последние значительные результаты А. Б. Жеглова по этой теме представлены в [34, 35].

7. Алгебраическая геометрия и зеркальная симметрия. Научные интересы В. В. Пржиялковского лежат в области алгебраической геометрии и смежных областях, таких, как теория зеркальной симметрии. В рамках классической геометрии им изучались вопросы геометрии многообразий Фано, по большей части трехмерных. Так, он совместно с И. А. Чельцовым и К. А. Шрамовым в середине 2000-х гг. классифицировал гиперэллиптические и тригональные канонические горенштейновы трехмерные многообразия Фано. Совместно с А. Илиевым и Л. Кацарковым, следуя подходу Артина–Мамфорда, они построили пример гладкого трехмерного многообразия Фано с кручением в третьих когомологиях, а значит, не являющегося стабильно рациональным. Еще одним полученным В. В. Пржиялковским с соавторами результатом является критерий рациональности нодального двойного пространства с ветвлением в квартике. Это усиливает результат, полученный К. Вуазен с помощью ее прорывного подхода к доказательству стабильной нерациональности многообразий. Другим направлением, разрабатываемым В. В. Пржиялковским по большей части в соавторстве с И. Чельцовым и К. Шрамовым, является изучение групп автоморфизмов алгебраических многообразий. Классификация бесконечных групп автоморфизмов гладких трехмерных многообразий Фано [36] за несколько лет стала одним из самых цитируемых результатов В. В. Пржиялковского.

Важнейшее научное направление В. В. Пржиялковского — теория зеркальной симметрии. Пришедшая в математику из физики, зеркальная симметрия является одним из главных математических открытий последних нескольких десятилетий. Она утверждает удивительную двойственность алгебраической и симплектической геометрий, связывает их с арифметикой, анализом, дифференциальной геометрией и многими другими областями математики. В. В. Пржиялковским разработана теория торических моделей Ландау–Гинзбурга (см. обзор [37]), позволяющая эффективно строить зеркально двойственные объекты к многообразиям Фано. В рамках этого подхода им, а также совместно с соавторами получены многочисленные результаты в этом направлении, сформулирован и частично доказан ряд гипотез.

Последнее направление, инициированное применением классической алгебраической геометрии к теории зеркальной симметрии, — изучение взвешенных полных пересечений. Взвешенные полные пересечения обобщают обычные полные пересечения (грубо говоря, “общие” алгебраические многообразия). Они являются одним из главных “серийных” примеров многообразий Фано. Совместно со К. А. Шрамовым В. В. Пржиялковским получен ряд результатов в этом направлении; так, им установлена эффективная оценка на семейства гладких взвешенных полных пересечений. Также им получены многочисленные применения взвешенных полных пересечений в зеркальной симметрии. В. В. Пржиялковский стал одним из главных мировых специалистов в данном направлении. Полная, строгая и наиболее общая теория взвешенных полных пересечений будет изложена в книге В. В. Пржиялковского и К. А. Шрамова.

8. Геометрическая топология. Е. А. Кудрявцева с соавторами доказала [38] аналог теоремы Магнуса для фундаментальных групп поверхностей. Е. А. Кудрявцевой, С. А. Богатым, Д. Л. Гонсалвесом, Х. Цишангом решена проблема Нильсена о минимуме числа корней отображений поверхностей в гомотопическом классе.

Е. А. Кудрявцевой доказан критерий реализуемости гладких функций на поверхностях функции высоты при погружении в трехмерное евклидово пространство. Получено комбинаторное описание топологии пространств гладких функций с заданными локальными особенностями на поверхностях.

9. Алгебраическая топология и смежные разделы. Ф. Ю. Попеленским совместно с А. Ю. Онищенко доказано совпадение спектральных последовательностей (СП) для расслоения Серра над компактным односвязным многообразием, не укладывающихся в общую технологию, предложенную Д. Барнсом для доказательства совпадения СП, а именно рассмотрены СП для минимальной модели расслоения $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$ и СП, построенные по фильтрации Чеха комплексов $\check{C}^*(V, A_{PL}^*)$ и $\check{C}^*(V, S^*(V))$. Построен явный естественный изоморфизм этих последовательностей во всех членах E_r , начиная со второго. Показано, что для гладкого локально тривиального расслоения указанные СП изоморфны спектральным последовательностям комплекса гладких форм $\Omega^*(E)$ и комплекса Чеха–де Рама. С использованием этих результатов вычислены рациональные гомологии пространства свободных петель любого замкнутого 4-многообразия.

Совместно с Д. Ю. Емельяновым Ф. Ю. Попеленским построены новые серии аддитивных ба-

зисов в алгебрах Стиррода $\text{mod } p$, $p > 2$. Вместе с базисом допустимых мономов, базисом Милнора и P_s^t -базисами они дают гибкий набор инструментов для работы с элементами алгебр Стиррода $\text{mod } p$, $p > 2$; найдены приложения этих новых базисов [39]. Доказана тривиальность аннигиляторного идеала действия алгебры Стиррода в когомологиях пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, 2)$. Опровергнута обобщенная гипотеза Тоды для $p > 2$. Доказан критерий треугольности матриц замен в зависимости от пары базисов.

Ф. Ю. Попеленским вычислены кольца когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ частично проективных кватернионных многообразий Штифеля [40]. Определено действие любой группы, допускающей свободное ортогональное действие на сфере S^3 , на многообразии Штифеля ортогональных k -реперов в n -мерном пространстве: элемент группы применяется к каждому вектору репера. Соответствующий фактор и есть частично проективное многообразие Штифеля.

В области динамических систем Ф. Ю. Попеленский и Р. Ю. Пепа исследовали дискретные потоки Риччи для метрик упаковок кругов на триангулированных поверхностях, снабженных дополнительными данными (весами) на ребрах и в вершинах. Такой поток предложили Чоу и Луо (2003). Значительно обобщены условия на веса, при которых метрика постоянной кривизны существует и единственна, а сходимость решения уравнения потока Риччи к этой метрике имеет место для любых начальных условий.

10. Теория узлов и зацеплений. Основной объект, изучаемый Д. П. Ильютко и И. М. Никоновым, — это диаграммы узлов и их приложения в теории графов и матроидов. Основной задачей теории узлов является классификация узлов — вложений замкнутой кривой в трехмерную сферу — с точностью до изотопии. Узел рассматривается как класс эквивалентности *диаграмм узла* (плоских 4-валентных графов с крестовой структурой и структурой прохода-перехода) по движениям Райдемейстера [41, 42].

Существуют другие представления узла, одно из них построено Д. П. Ильютко и А. Д. Трофимовой. Оказывается, любой узел имеет диаграмму с двухцветной раскраской, т.е. найдутся две точки диаграммы, разбивающие ее на две кривые, такие, что в каждом перекрестке диаграммы пересекаются обе кривые.

Важной идеей оказалось представление узла с помощью гауссовых диаграмм и движений на них. При этом не любая хордовая диаграмма является гауссовой диаграммой какого-то (классического) узла. Теория виртуальных узлов возникает, если мы рассматриваем все хордовые диаграммы как гауссовы диаграммы каких-то необязательно вложенных 4-валентных графов. Далее сопоставим гауссовой диаграмме узла ее граф пересечений. Переписывая движения на гауссовых диаграммах на язык графов пересечений и рассматривая все простые графы, получим новый объект, введенный Д. П. Ильютко и В. О. Мантуровым, — граф-зацепление. Он может пониматься как комбинаторный аналог узлов в теории графов. Д. П. Ильютко показал эквивалентность двух подходов к построению теории граф-зацеплений: с помощью гауссовых диаграмм и поворачивающих обходов. Не любой простой граф является графом пересечений хордовой диаграммы, т.е. возникает задача (решенная затем В. П. Ильютко и Д. П. Ильютко) описания минимальных запрещенных миноров (делающих граф не реализуемым хордовой диаграммой) с точностью до преобразований.

Д. П. Ильютко и В. О. Мантуров обобщили ряд классических инвариантов узлов на граф-зацепления, построили новые инварианты со значениями в графах и провели почти классификацию для подкласса в свободных граф-зацеплениях. Ими изучен вопрос реализуемости граф-зацепления, причем Д. П. Ильютко найдено первое нереализуемое граф-зацепление со многими компонентами. Определение ориентируемых граф-зацеплений Д. П. Ильютко и В. С. Сафиной дало обобщение полинома Джонса на граф-зацепления с несколькими компонентами. И. М. Никонов определил гомологии Хованова граф-зацеплений.

Оснащенные хордовые диаграммы возникают в теории J -инвариантов конечного порядка плоских кривых. Д. П. Ильютко показана некорректность операции связной суммы хордовых диаграмм по модулю оснащенных 4-членных соотношений. Д. П. Ильютко и И. М. Никонов обобщили для оснащенных хордовых диаграмм конструкцию Бар-Натана весовых систем, индуцированных представлениями алгебр Ли.

11. Прикладные исследования. Прикладные исследования по компьютерной геометрии были начаты на кафедре в 1990-х гг. (см. монографию А. Фоменко и Л. Кунии [43]).

В 2007 г. Г. В. Носовским в соавторстве с О. Суриной и Д. Лю разработан [44] локально-адаптивный алгоритм ADACCLUS, позволяющий эффективно кластеризовать облака точек в евклидовом пространстве в сложных ситуациях, когда локальная плотность облака сильно меняется, что

затрудняет применение стандартных методов кластеризации. Результат опубликован в престижном журнале Pattern Recognition.

В 2018 г. Г. В. Носовским был предложен [45] новый дифференциально-геометрический подход к кодированию и обработке цветных изображений и видеорядов, основанный на кодировке матрицы цифрового цветного изображения с помощью специальной поверхности $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, дифференциально-геометрические характеристики которой позволяют, в частности, быстро и эффективно (не уступая, а иногда превосходя широко применяемый алгоритм Санны) выделить контуры объектов с учетом перехода цветов, что важно для задач сегментации и кластеризации. А. Ю. Чекунов, аспирант Г. В. Носовского, реализовал метод выделения контуров, применяя архитектуру параллельных вычислений CUDA. Впоследствии к этой реализации добавили процедуру постобработки, уточняющую контуры до ширины в один пиксель (2022).

А. О. Ивановым, Г. В. Носовским, Ф. Ю. Попеленским, В. А. Кибкало, Д. А. Федосеевым, их учениками, а также индустриальными партнерами кафедры получены важные результаты по известной в анализе данных “гипотезе о многообразии”. Два предложенных ими независимых метода оценки размерности подмногообразия, заданного облаком близких к нему точек в евклидовом $\mathbb{R}^N$ для большого N , применены к выходному множеству нейросети (облака точек в $\mathbb{R}^{512}$) в задаче распознавания лиц (ArXiv 2107.03903). Предложены новые подходы к поиску аномалий на изображениях различных предметов и текстур [46].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фоменко А.Т.* Вариационные методы в топологии // Труды выдающихся ученых МГУ. 2-е изд., испр. М.: Изд-во МГУ, 2023.
2. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. 2-е изд. М : URSS, ЛЕНАНД, 2022.
3. *Ikeda Y., Sharygin G.* The argument shift method in universal enveloping algebra $U\mathfrak{gl}_d$ // J. Geom. Phys. 2024. **195**. 105030.
4. *Шарыгин Г.И.* Квазидифференцирования алгебры $U\mathfrak{gl}_n$ и квантовые алгебры Мищенко–Фоменко // Функц. анализ и прил. 2024. **58**, № 3. 121–139.
5. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями // Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу. Т. 20. М.: Изд-во МГУ, 1981. 5–54.
6. *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44**, № 1 (265). 145–173.
7. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. Ижевск : Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
8. *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // Успехи матем. наук. 1988. **43**, № 1 (259). 5–22.
9. *Ошемков А.А.* Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2010. **21**, № 8. 63–102.
10. *Oshemkov A.A.* Saddle singularities of complexity 1 of integrable Hamiltonian systems // Moscow Univ. Math. Bull. 2011. **66**, N 2. 60–69.
11. *Козлов И.К., Ошемков А.А.* Классификация особенностей типа седло-фокус // Чебышев. сб. 2020. **21**, № 2. 228–243.
12. *Bolsinov A. V., Guglielmi L., Kudryavtseva E.A.* Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems // Phil. Trans. Roy. Soc. A. 2018. **376**. 20170424.
13. *Ведюшкина В.В., Харчева И.С.* Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, № 12. 17–56.
14. *Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В.* Биллиарды и интегрируемые системы // Успехи матем. наук. 2023. **78**, № 5. 93–176.
15. *Ведюшкина В.В., Кибкало В.А.* Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 4. 22–28.
16. *Белозеров Г.В.* Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадрами // Матем. сб. 2022. **213**, № 2. 3–36.
17. *Belozarov G.V.* Geodesic flow on an intersection of several confocal quadrics in $\mathbb{R}^n$ // Sb. Math. 2023. **214**, N 7. 897–918.
18. *Алтуев М.К., Кибкало В.А.* Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров // Матем. сб. 2023. **214**, № 3. 54–70.

19. Кибкало В.А. Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 6. 56–59.
20. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Nijenhuis geometry // Adv. Math. 2022. **394**. 108001.
21. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Nijenhuis geometry III: gl-regular Nijenhuis operators // Rev. Mat. Iberoam. 2024. **40**, N 1. 155–188.
22. Konyaev A. Yu. Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators // Diff. Geom. Appl. 2021. **74**. 101706.
23. Shafarevich A. I. Asymptotical and topological constructions in hydrodynamics // Operator Theory: Adv. Appl. Basel: Birkhauser, 2002. Vol. 137. 347–359.
24. Esina A. I., Shafarevich A. I. Analogs of Bohr–Sommerfeld–Maslov quantization conditions on Riemann surfaces and spectral series of nonself-adjoint operators // Russ. J. Math. Phys. 2013. **20**, N 2. 172–181.
25. Chernyshev V. L., Shafarevich A. I. Statistics of Gaussian packets on metric and decorated graphs // Phil. Trans. Roy. Soc. A. 2014. **372**. 20130145.
26. Allilueva A. I., Shafarevich A. I. Delta-type solutions for the non-Hermitian system of induction equations // Int. J. Theor. Phys. 2015. **54**, N 11. 3932–3944.
27. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И. Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2031. **76**, № 5. 3–80.
28. Dobrokhotov S. Y., Nazaikinskii V. E., Tolchennikov A. A. Uniform formulas for the asymptotic solution of a linear pseudodifferential equation describing water waves generated by a localized source // Russ. J. Math. Phys. 2020. **27**. 185–191.
29. Chernyshev V. L., Tolchennikov A. A. The second term in the asymptotics for the number of points moving along a metric graph // Reg. Chaot. Dyn. 2017. **22**, N 8. 940–951.
30. Иванов А.О., Тужилин А.А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // Успехи матем. наук. 1992. **47**, № 2. 53–115.
31. Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А. Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутреннего // Матем. заметки. 2016. **100**, № 6. 947–950.
32. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Gromov–Hausdorff distances to simplexes and some applications to discrete optimisation // Чебышёв. сб. 2020. **21**, № 2. 169–189.
33. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. One-dimensional Gromov minimal filling problem // Sb. Math. 2012. **203**, N 5. 677–726.
34. Zheglov A. B. Schur–Sato theory for quasi-elliptic rings // Proc. Steklov Inst. Math. 2023. **320**. 115–160
35. Burban I., Zheglov A. Cohen–Macaulay modules over the algebra of planar quasi-invariants and Calogero–Moser systems // Proc. London Math. Soc. 2020. **121**, N 4. 1033–1082.
36. Пржиялковский В.В., Чельцов И.А., Шрамов К.А. Трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, № 4. 226–280.
37. Пржиялковский В.В. Торические модели Ландау–Гинзбурга // Успехи матем. наук. 2018. **73**, № 6. 95–190.
38. Bogopolski O., Kudryavtseva E., Zieschang H. Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups // Math. Z. 2004. **247**, N 3. 595–609.
39. Emelyanov D. Yu., Popelensky Th. Yu. Bases in the mod p Steenrod algebra // J. Pure and Appl. Alg. 2019. **223**, N 8. 3386–3401.
40. Жубанов Г.Е., Попеленский Ф.Ю. О кольцах когомологий частично проективных кватернионных многообразий Штифеля // Матем. сб. 2022. **213**, № 3. 21–41.
41. Manturov V. O., Plyutko D. P. Virtual Knots. The State of the Art. Singapore: World Scientific Publ. Co., 2013.
42. Plyutko D. P., Manturov V. O., Nikonov I. M. Parity and Patterns in Low-Dimensional Topology. Cambridge Sci. Publ., 2015.
43. Fomenko A., Kunii L. Topological modeling for visualization. Tokyo: Springer Tokyo, 1995.
44. Nosovskiy G. V., Liu D., Sourina O. Automatic clustering and boundary detection algorithm based on adaptive influence function // Pattern Recogn. 2008. **41**, N 9. 2757–2776.
45. Nosovskii G. V. Geometrical coding of colored images // Moscow Univ. Math. Bull. 2018. **73**, N 1. 1–8.
46. Иванов А.О., Носовский Г.В., Кибкало В.А., Никулин М.А., Попеленский Ф.Ю., Федосеев Д.А., Грибушин И.В., Злобин В.В., Кузин С.С., Мазуренко И.Л. Распознавание аномалий неизвестного заранее типа // Чебышёв. сб. 2022. **23**, № 5. 227–240.

Поступила в редакцию
19.06.2024