

Контактизация систем уравнений первого порядка на двумерных многообразиях

А.Г. Кушнер, С.С. Мухина

Кафедральный семинар А.Т. Фоменко

Москва, МГУ
7 апреля 2025 г.

$M = \mathbb{R}^4$, $N = \mathbb{R}^2$ и $\pi : M \rightarrow N$.

Пусть $s : N \rightarrow M$ — сечение и $\omega \in \Omega^2(M)$.

$$\Delta_{\omega}(s) := s^*(\omega)$$

Пара дифференциальных 2-форм $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^2(M)$ определяет систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка на 2-мерном многообразии N :

$$\mathcal{E}(\omega_1, \omega_2) : \quad \{\Delta_{\omega_1}(s) = 0, \quad \Delta_{\omega_2}(s) = 0\}$$

Координаты x_1, x_2 — на базе и v^1, v^2 — на слое.

$$\omega = a dx_1 \wedge dx_2 + b dv^1 \wedge dx_1 + c dv^1 \wedge dx_2 + d dv^2 \wedge dx_1 + e dv^2 \wedge dx_2 + f dv^1 \wedge dv^2$$

$a, \dots, f \in C^{\infty}(M)$.

$$\begin{cases} A_1 - B_1 v_{x_2}^1 + C_1 v_{x_1}^1 - D_1 v_{x_2}^2 + E_1 v_{x_1}^2 + F_1(v_{x_1}^1 v_{x_2}^2 - v_{x_2}^1 v_{x_1}^2) = 0, \\ A_2 - B_2 v_{x_2}^1 + C_2 v_{x_1}^1 - D_2 v_{x_2}^2 + E_2 v_{x_1}^2 + F_2(v_{x_1}^1 v_{x_2}^2 - v_{x_2}^1 v_{x_1}^2) = 0. \end{cases}$$

$s : (x_1, x_2) \mapsto (v^1(x_1, x_2), v^2(x_1, x_2))$ — сечение,

$A_i = s^*(a_i), \dots, F_i = s^*(f_i)$ — функции переменных x_1, x_2, v^1, v^2

Лемма

Если $\|a_j^i\|_{i,j=1,\dots,m}$ — невырожденная матрица, $a_j^i \in C^\infty(M)$, то дифференциальные 2-формы

$$\tilde{\omega}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i \omega_i, \quad j = 1, \dots, m \quad (1)$$

определяют ту же самую систему.

Квадратичная форма q на $\text{Span}(\omega_1, \omega_2)$:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = q(\omega_1, \omega_2)\mu$$

Определение

Пусть форма q невырождена. В точке $a \in M$ система $\mathcal{E}(\omega_1, \omega_2)$ называется

- эллиптической, если форма q знакоопределена;
- гиперболической, если форма q знаконеопределена;
- параболической, если форма q вырождена и ненулевая;

Теорема

Гиперболическую систему можно задать двумя дифференциальными 2-формами ω_1 и ω_2 , такими, что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_1 \wedge \omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_2 \neq 0.$$

Эквивалентность систем

Две системы Якоби $\mathcal{E}(\omega_1, \omega_2)$ и $\mathcal{E}(\varpi_1, \varpi_2)$ называются эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\Phi : M \rightarrow M$, такой, что

$$\Phi^*(\varpi_1) = a_1^1 \omega_1 + a_1^2 \omega_2,$$

$$\Phi^*(\varpi_2) = a_2^1 \omega_1 + a_2^2 \omega_2$$

для некоторой невырожденной матрицы $\|a_j^i\|_{i,j=1,2}$.

$$X \rfloor \omega_2 = A_{\mathcal{E}} X \rfloor \omega_1$$

Структура почти произведения на M для гиперболических систем: $A_{\mathcal{E}}^2 = 1$

Теорема (Fossum)

Гиперболическая система Якоби $\mathcal{E}$ эквивалентна волновой системе

$$v_{x_1}^1 - v_{x_2}^2 = 0, \quad v_{x_2}^1 - v_{x_1}^2 = 0 \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда скобка Нийенхайса оператора $A_{\mathcal{E}}$ равна нулю:

$$[[A_{\mathcal{E}}, A_{\mathcal{E}}]] = 0. \quad (3)$$

Характеристические распределения

Характеристические распределения для гиперболических систем:

$V_{\pm} : M \ni a \mapsto V_{\pm}(a) \subset T_a M$, где

$$V_{\pm}(a) := \{X_a \in T_a M \mid A_{\mathcal{E},a} X_a = \pm X_a\}$$

$$T_a M = V_+(a) \oplus V_-(a)$$

Условие $\llbracket A_{\mathcal{E}}, A_{\mathcal{E}} \rrbracket = 0$ равносильно интегрируемости характеристических распределений.

Определение

Гладкое 2-мерное подмногообразие $\iota : L \hookrightarrow M$ называется многозначным решением системы если $\iota^*(\omega_i) = 0$ ($i = 1, 2$).

Теорема

Пусть L — многозначное решение системы Якоби. Касательное пространство к L в каждой точке $a \in L$ пересекает полоскости характеристических распределений: $T_a L = L_+ \oplus L_-$, где $L_+ = T_a L \cap V_+(a)$ и $L_- = T_a L \cap V_-(a)$.

Определение

Дифференциальная 1-форма θ на M называется законом сохранения системы $\mathcal{E}$ если на любом многозначном решении L этой системы $d\theta|_L = 0$.

Теорема (Лычагин)

Дифференциальная 1-форма θ является законом сохранения гиперболической системы Якоби тогда и только тогда, когда

$$d\theta = \Omega^2(V_+) \oplus \Omega^2(V_-). \quad (4)$$

Если 2-форма $d\theta$ невырождена, то она определяет симплектическую структуру на M .

Теорема

Пусть ω — дифференциальная 2 форма на 4-мерном многообразии с симплектической структурой

$$\Omega = dv^1 \wedge dx_1 + dv^2 \wedge dx_2,$$

для которой выполнены следующие условия:

$$\omega \wedge \Omega = 0, \quad \omega \wedge \omega + \Omega \wedge \Omega = 0.$$

Форма ω симплектически эквивалентна дифференциальной форме

$$\tilde{\omega} = dv^1 \wedge dx_1 - dv^2 \wedge dx_2$$

тогда и только тогда, когда она замкнута, т.е. $d\omega = 0$.

Контактизация

Пусть θ — закон сохранения и $d\theta$ — симплектическая структура.

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M, \quad \pi : \mathcal{M} \rightarrow M$$

Контактная 1-форма на $\mathcal{M}$: $\varkappa := du - \pi^*(\theta)$

Контактное распределение:

$$\mathcal{C} : \mathcal{M} \ni a \longmapsto \mathcal{C}(a) = \ker \varkappa_a \subset T_a \mathcal{M}$$

Обозначим $\Omega = d\varkappa$ Ограничение Ω на контактную плоскость определяет симплектическую структуру на ней.

Определим дифференциальную 2-форму $\omega = \pi^*(\omega_1)$ на $\mathcal{M}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\omega \wedge \Omega = 0, \quad \omega \wedge \omega = -\Omega \wedge \Omega \neq 0.$$

Определение

Пару дифференциальных 2-форм (ω, Ω) на контактном многообразии $\mathcal{M}$ назовём контактизацией системы $\mathcal{E}$.

Линейный оператор на контактном распределении $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{A} : X|_{\omega} = \mathcal{A}X|_{\Omega}$$

Собственные подпространства $\mathcal{C}_+(a)$ и $\mathcal{C}_-(a)$ двумерны и

$$\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}_+(a) \oplus \mathcal{C}_-(a).$$

Распределения $\mathcal{C}_{\pm}$ назовём контактными характеристическими.

Definition

Лежандрово многообразие L будем называть *контактным многозначным решением* системы если

$$T_a L = I_+(a) \oplus I_-(a),$$

где $I_{\pm} = T_a L \cap \mathcal{C}_{\pm}(a)$.

Контактная эквивалентность

Проекция 2-формы $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ на контактное распределение:

$$\rho(\omega) := \omega - \varkappa \wedge (X_1 \lrcorner \omega)$$

Определение

Системы $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ будем называть контактно эквивалентными, если существует контактный диффеоморфизм $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$, такой, что

$$\rho(\Phi^*(\tilde{\omega})) = f\omega + \alpha \wedge \varkappa$$

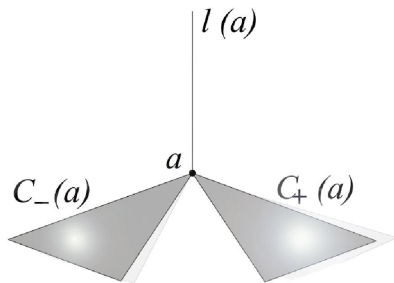
для некоторой функции $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ и некоторой дифференциальной 1-формы $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{C}_\pm^{(1)}$ — первые производные распределений $\mathcal{C}_\pm$

$$\dim \mathcal{C}_\pm^{(1)} = 3$$

Распределение прямых на $\mathcal{M}$, трансверсальное контактному распределению:

$$I : a \longmapsto I(a) = \mathcal{C}_+^{(1)}(a) \cap \mathcal{C}_-^{(1)}(a).$$



$$T_a\mathcal{M} = \mathcal{C}_+(a) \oplus I(a) \oplus \mathcal{C}_-(a).$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{D}(\mathcal{C}_+) \oplus \mathcal{D}(I) \oplus \mathcal{D}(\mathcal{C}_+).$$

Тензоры кривизны и инвариантные 2-формы

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\mathcal{C}_+), \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(I), \quad \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}(\mathcal{C}_-)$$

Проекторы $P_j : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}_j$ и отображения

$$q_{j,k}^s : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \times \mathcal{D}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M})$$

$$q_{j,k}^s(X, Y) = -P_s([P_j(X), P_k(Y)])$$

Отображения $q_{j,k}^s$ являются тензорными полями на $\mathcal{M}$ типа $(1, 2)$. По нижним индексам они кососимметричны.

Косая свёртка:

$$\langle X \otimes \alpha, Y \otimes \beta \rangle = (Y \rfloor \alpha) \wedge (X \rfloor \beta)$$

Две дифференциальные 2-формы на $\mathcal{M}$:

$$\lambda_+ = \langle q_{1,1}^2, q_{2,3}^1 \rangle, \quad \lambda_- = \langle q_{3,3}^2, q_{1,2}^3 \rangle$$

Теорема

Гиперболическая система Якоби $\mathcal{E}(\omega, \Omega)$, обладающая невырожденным законом сохранения, локально контактно эквивалентна волновой системе тогда и только тогда, когда обе её дифференциальные 2-формы $\lambda_{\pm} = 0$.

$$\begin{cases} v_t^1 - v_x^2 = 0, \\ v_x^1 - v_t^2 = 0. \end{cases}$$

$$\omega_1 = dv^1 \wedge dx + dv^2 \wedge dt, \quad \omega_2 = dv^1 \wedge dt + dv^2 \wedge dx,$$

$$\theta_1 = v^1 dx + v^2 dt, \quad \theta_2 = v^1 dt + v^2 dx.$$

$$\varkappa = du - p_1 dq_1 - p_2 dq_2.$$

$$\mathcal{C} : \frac{d}{dq_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{d}{dq_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dq_2} \otimes dq_1 - \frac{d}{dq_1} \otimes dq_2 - \frac{\partial}{\partial p_2} \otimes dp_1 - \frac{\partial}{\partial p_1} \otimes dp_2.$$

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\|$$

$$\mathcal{C}_+ = \left\langle -\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad -\frac{d}{dq_1} + \frac{d}{dq_2} \right\rangle$$

$$\mathcal{C}_- = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad \frac{d}{dq_1} + \frac{d}{dq_2} \right\rangle.$$

$$\mathcal{C}_+^{(1)} = \left\langle -\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad -\frac{d}{dq_1} + \frac{d}{dq_2}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$$

$$\mathcal{C}_-^{(1)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad \frac{d}{dq_1} + \frac{d}{dq_2}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$$

$$I = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$$

$$H_1^+ = q_1 + q_2, \quad H_2^+ = p_1 + p_2$$

$$H_1^- = q_2 - q_1, \quad H_2^- = p_2 - p_1$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dq_1} - \frac{d}{dq_2} \right) \otimes dq_1 + \left(\frac{d}{dq_2} - \frac{d}{dq_1} \right) \otimes dq_2 + \left(\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \otimes dp_1 + \left(\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \otimes dp_2 \right],$$

$$P_2 = -p_1 \frac{\partial}{\partial u} \otimes dq_1 - p_2 \frac{\partial}{\partial u} \otimes dq_2 + \frac{\partial}{\partial u} \otimes du,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dq_1} + \frac{d}{dq_2} \right) \otimes dq_1 + \left(\frac{d}{dq_1} + \frac{d}{dq_2} \right) \otimes dq_2 + \left(\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \otimes dp_1 + \left(\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \otimes dp_2 \right]$$

$$q_{11}^2 = \frac{1}{2} (-dp_1 + dp_2) \wedge (-dq_1 + dq_2) \otimes \frac{\partial}{\partial u}$$

$$q_{33}^2 = \frac{1}{2} (dp_1 + dp_2) \wedge (dq_1 + dq_2) \otimes \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\lambda_+ = 0, \quad \lambda_- = 0.$$

Контактизация уравнений фильтрации суспензии

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = h(v)u, \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_1 h(p_2) & -1 & 0 \\ -2p_1 h(p_2) & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

$$C_-^{(1)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial q_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + p_1 h(p_2) \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad h(p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$$

$$C_+^{(1)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u} + p_1 h(p_2) \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad p_1 h'(p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle.$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial u} + p_1 h'(p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} + h(p_2) \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

$$\lambda_- = 0$$

$$\lambda_+ = -h''(p_2)[p_1 p_2 h(p_2) dq_1 \wedge dq_2 - p_1 h(p_2) dq_1 \wedge du + p_1 dq_1 \wedge dp_2]$$

Теорема

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha v + \beta)u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (\alpha v + \beta)u \end{cases}$$

имеет общее решение

$$\begin{aligned} u &= -\frac{A'(t-x)}{\alpha(A(t-x) + B(-\alpha^{-1}x))}, \\ v &= -\frac{\alpha\beta(A(t-x) + B(-\alpha^{-1}x)) + B'(-\alpha^{-1}x)}{\alpha^2(A(t-x) + B(-\alpha^{-1}x))}. \end{aligned}$$

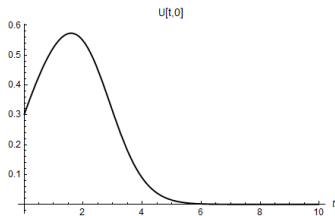


Рис.: Эволюция взвешенных частиц в точке $x = 0$.

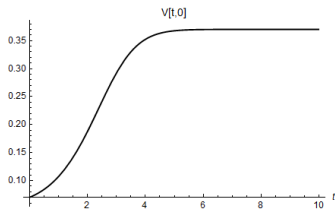


Рис.: Эволюция осажденных частиц в точке $x = 0$.

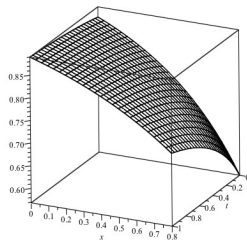
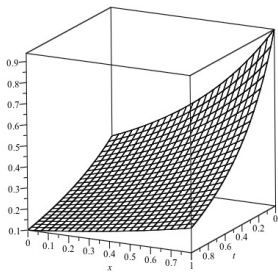


Рис.: График решения $u(t, x), v(t, x)$

Уравнения фронтального вытеснения нефти ПАВ

Модель Баренблатта:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(cs + \phi(1-s) + a) + \frac{\partial}{\partial x}(cH + (1-H)\phi) = 0, \end{cases}$$

где $s = s(t, x)$ – объёмная концентрация воды (водонасыщенность),
 $c = c(t, x)$ – концентрация активного реагента в воде, $H = H(s, c)$ –
функция Бакли–Лeverетта, $a = a(c)$, $\phi = \phi(c)$.

$$\begin{cases} \omega_1 = H_s dt \wedge ds + H_c dt \wedge dc - dx \wedge ds, \\ \omega_2 = (c - \phi)H_s dt \wedge ds + ((c - \phi)H_c - (\phi' - 1)H + \phi')dt \wedge dc - \\ -(c - \phi)dx \wedge ds + ((s - 1)\phi' - a' - s)dx \wedge dc. \end{cases}$$

$$\det Q = -(((s - 1)\phi' - s - a')H_s + (-\phi' + 1)H + \phi')^2 < 0$$

$$\begin{cases} \omega = dq_2 \wedge dp_2 - dq_1 \wedge dp_1 - 2H_{p_2}\sigma(\sigma H_{p_1} + \chi)^{-1} dq_1 \wedge dp_2 \\ - 2q_2(\sigma(H_{p_1 p_2} H_{p_1} - H_{p_1 p_1} H_{p_2}) + \chi H_{p_1 p_2})H_{p_2}^{-1}(\sigma H_{p_1} + \chi)^{-1} dp_1 \wedge dp_2, \\ \Omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2. \end{cases}$$

где $\chi = (-\phi' + 1)H + \phi'$, $\sigma = ((p_1 - 1)\phi' - p_1 - a')H_{p_1}$.

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \mu_1 & 1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (5)$$

$$\mu_1 = -2H_{p_2}\sigma(\sigma H_{p_1} + \chi)^{-1},$$

$$\mu_2 = 2q_2(\sigma H_{p_1 p_2} H_{p_1} - H_{p_2} \sigma H_{p_1 p_1} + \chi H_{p_1 p_2}) H_{p_2}^{-1} (\sigma H_{p_1} + \chi)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} X_+ = & -q_2(-H_{p_1 p_2}(\sigma H_{p_1} + \chi) + H_{p_1 p_1} \sigma H_{p_2}) H_{p_2}^{-1} (\sigma H_{p_1} + \chi)^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ & - p_1 q_2(-H_{p_1 p_2}(\sigma H_{p_1} + \chi) + H_{p_1 p_1} \sigma H_{p_2}) H_{p_2}^{-1} (\sigma H_{p_1} + \chi)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \\ & - H_{p_2} \sigma(\sigma H_{p_1} + \chi)^{-1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}, \end{aligned}$$

$$Y_+ = \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\begin{aligned} X_- = & q_2(\sigma H_{p_1 p_1} H_{p_2} - (\sigma H_{p_1} + \chi))(\sigma H_{p_2}^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ & + p_1 q_2(\sigma H_{p_1 p_1} H_{p_2} - (\sigma H_{p_1} + \chi))(\sigma H_{p_2}^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial p_1}, \end{aligned}$$

$$Y_- = (\sigma H_{p_1} + \chi)(H_{p_2} \sigma)^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} + (p_2 + p_1(\sigma H_{p_1} + \chi)(H_{p_2} \sigma)^{-1}) \frac{\partial}{\partial u}.$$

$$\begin{aligned}
Z = & (-H_{p_1 p_2}(\sigma H_{p_1} + \chi) + H_{p_1 p_1} \sigma H_{p_2})(H_{p_2}^2 \sigma)^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} \\
& + (((\phi' - 1)(\sigma H_{p_1} + \chi) + \sigma^2 H_{p_1 p_1})H_{p_2} - \sigma H_{p_1 p_2}(\sigma H_{p_1} + \chi))(\sigma H_{p_2}(\sigma H_{p_1} + \chi))^{-1} \frac{\partial}{\partial q_2} \\
& + (H_{p_1} \sigma(p_2(\phi' - 1)H_{p_2}^2 + (\sigma p_1 H_{p_1 p_1} - p_2 \sigma H_{p_1 p_2} + 2\chi)H_{p_2} - 2H_{p_1 p_2} \chi) \\
& + H_{p_2}^2 p_2(\sigma^2 H_{p_1 p_1} + (\phi' - 1)\chi) + H_{p_2}(\sigma \chi p_1 H_{p_1 p_1} - \sigma p_2 \chi H_{p_1 p_2} + \chi^2) - H_{p_1 p_2} \chi^2 p_1) \\
& (\sigma H_{p_2}^2(\sigma H_{p_1} + \chi))^{-1} \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

$$\lambda_- = 0$$

$$\begin{aligned}
\lambda_+ = & (H_{p_2}(\sigma H_{p_1} + \chi)^3 H_{p_1 p_2 p_2} - 2H_{p_2}^2(\sigma H_{p_1} + \chi)^2 \sigma H_{p_1 p_1 p_2} + H_{p_2}^3(\sigma H_{p_1} + \chi) \sigma H_{p_1 p_1 p_1} \\
& + (3H_{p_2}^2 \sigma^2 H_{p_1 p_1} - H_{p_2 p_2}(\sigma H_{p_1} + \chi)^2)(\sigma H_{p_1} + \chi)H_{p_1 p_2} \\
& - 2H_{p_2}^2(H_{p_2} \sigma^3 H_{p_1 p_1} + \frac{1}{2}(((1 - H)a' + p_1 - H)\phi'' - \sigma a''))(\sigma H_{p_1} + \chi))H_{p_1 p_1})dp_1 \wedge dp_2.
\end{aligned}$$

- ① $H(p_1, p_2) = (h_1 p_1 + h_2) r(p_2), \quad a(p_2), \phi(p_2) —$
произвольные;
- ② $H(p_1, p_2) = (h_1 p_1 + h_2) + r(p_2), \quad a(p_2), \phi(p_2) —$
произвольные;
- ③ $H(p_1, p_2) = H_1(p_1) + H_2(p_2), \quad \phi(p_2) = n_1 p_2 + n_2, \quad a(p_2) =$
 $(p_1(n_1 - 1) - n_1)p_2 + m_2;$
- ④ $H(p_1, p_2) = (\phi'(p_1 - 1) - a' - p_1)r(p_2) + \frac{\phi'}{\phi' - 1}, \quad a(p_2), \phi(p_2)$
— произвольные;
- ⑤ $H(p_1, p_2) = p_1 r \left(\frac{p_2(p_1 + 1)}{p_1} \right), \quad a(p_2) = m_2, \quad \phi(p_2) = n_2;$
- ⑥ $H(p_1, p_2) = p_1 r \left(p_2 \exp \frac{1}{p_1} \right), \quad a(p_2) = m_2, \quad \phi(p_2) = n_2;$
- ⑦ $H(p_1, p_2) = p_1 r(p_2) \pm \sqrt{(r(p_2)p_1 - 1)^2 + 4p_1 - 1}, \quad a(p_2) =$
 $m_2, \quad \phi(p_2) = n_2.$

где $h_1, h_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ — произвольные постоянные,
 $r(p_2), H_1(p_1), H_2(p_2)$ — произвольные функции.

$$H(p_1, p_2) = (h_1 p_1 + h_2) r(p_2),$$

$$a(p_2) = m_1 p_2 + m_2,$$

$$\phi(p_2) = n_1 p_2 + n_2.$$

Лежандрово многообразие:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{((-p_2 q_2 - q_1 + u)n_1 - q_1 m_1 + p_2 q_2 - u)p_2(h_1 p_1 + h_2)((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r'(p_2)}{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)^2(h_1 p_1 + h_2)} \\ & + \left(\frac{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)^2(h_1 p_1 + h_2)}{h_2((u - q_1)n_1 - q_1 m_1 - u)} \right) \\ & + \frac{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)^2(h_1 p_1 + h_2)}{h_2((u - q_1)n_1 - q_1 m_1 - u)} \left(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1 \right) \\ & - A(h_2 q_1 + (-p_2 q_2 + u)h_1) \\ & - B \left(\frac{((-p_2 q_2 - q_1 + u)n_1 - q_1 m_1 + p_2 q_2 - u)(h_1 p_1 + h_2)((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r'(p_2)}{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)^2(h_1 p_1 + h_2)} \right. \\ & \left. + \frac{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)q_2((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))}{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)^2(h_1 p_1 + h_2)} \right) = 0, \\ & - A'(h_2 q_1 + (-p_2 q_2 + u)h_1) + \frac{(h_1 p_1 + h_2)((h_1 + h_2)n_1 + h_1 m_1 - h_2)r(p_2) - n_1}{(p_1 - 1)n_1 - p_1 - m_1} = 0, \\ & - B' \left(\frac{((-p_2 q_2 - q_1 + u)n_1 - q_1 m_1 + p_2 q_2 - u)(h_1 p_1 + h_2)((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r'(p_2)}{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)^2(h_1 p_1 + h_2)} \right. \\ & \left. + \frac{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)q_2((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))}{(((m_1 + n_1)h_1 + h_2(n_1 - 1))r(p_2) - n_1)^2(h_1 p_1 + h_2)} \right) + p_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Спасибо за внимание!