Проблема Ферма–Торричелли в нормированных пространствах

Доклад на кафедральном семинаре А.Т.Фоменко

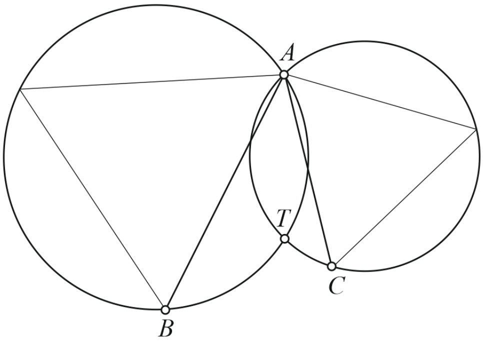
Илюхин Даниил Александрович

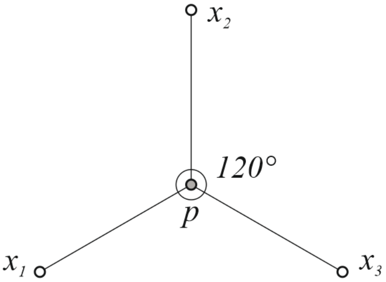
МГУ имени М.В.Ломоносова

24 марта 2025 г.

Определение

Точка x_0 называется *точкой Ферма–Торричелли* для точек $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^{n} |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $\mathrm{ft}(A)$.





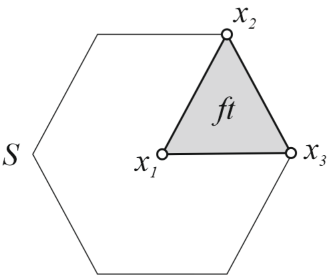


Рис.: Примеры решений задачи Ферма–Торричелли на евклидовой и шестиугольной плоскостях

Источники

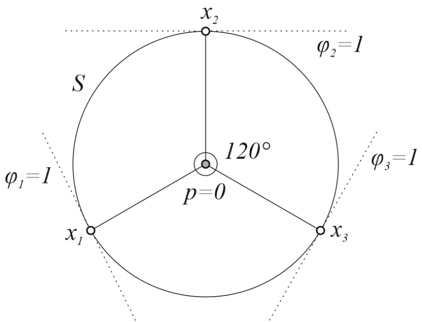
- Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces.“, Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.
- Durier R., Michelot C. 1985, “Geometrical properties of the Fermat-Weber problem.“, Europ. J. Oper. Res. 20, 332–343.
- Рубинштейн Г. Ш. “Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве.“, Сибирский математический журнал, Т. 6(3). 1965.

Метод решения

Определение. Функционал $\varphi \in X^*$ называется *нормирующим для вектора* $x \in X$, если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Теорема (Ostresh, Durier, Michelot, Рубинштейн)

Пусть x_0, x_1, ..., x_n — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда x_0 — точка Ферма–Торричелли для $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$.

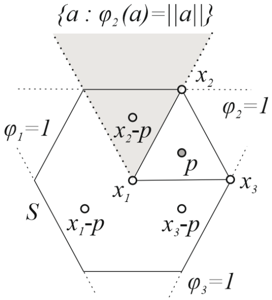


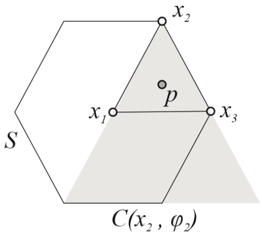
Метод решения

Определение. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим *конус* $C(x,\ \varphi) = x - \{a :\ \varphi(a) = \|a\|\}$.

Теорема (Durier, Michelot, 1985)

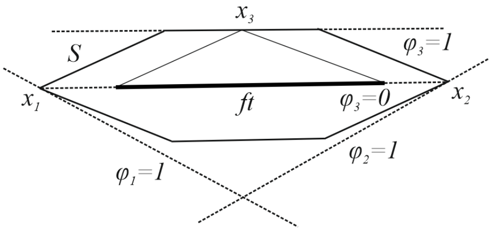
Пусть $A = \{x_1,\ \dots,\ x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \mathrm{ft}(A) \setminus A$. По теореме 1 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$. Тогда $\mathrm{ft}(A) = \bigcap_{i=1}^n C(x_i,\ \varphi_i)$.





Определение

Возьмём конечное множество граней единичной сферы S нормированного пространства. Для каждой из них выберем опорную гиперплоскость π_i, пересекающуюся с S только по этой грани. Пусть гиперплоскость π_i задаёт поверхность уровня $\varphi_i = 1$ некоторого линейного функционала φ_i. Если найдётся набор опорных гиперплоскостей такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такое множество граней будем называть *согласованным*.



Теорема

В пространстве X найдутся n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда в X существует согласованное множество из n граней единичной сферы S такое, что пересечение линейных оболочек всех граней, входящих в это согласованное множество, имеет ненулевую размерность.

Следствие

Если n чётно, то условие Теоремы эквивалентно нестрогой выпуклости единичной сферы.

Теорема для размерности 2

В нормированной плоскости X найдутся n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда в X существует согласованное множество из n граней единичной сферы S такое, что пересечение линейных оболочек граней-точек, входящих в это согласованное множество, имеет размерность не больше 1.

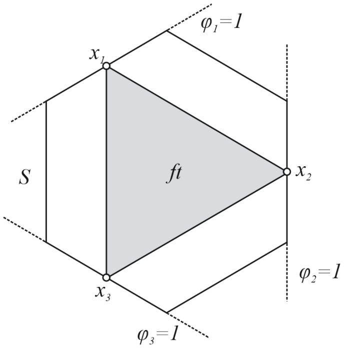
Теорема для размерности 3

В трёхмерном нормированном пространстве X найдутся n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда в X существует согласованное множество из n граней единичной сферы S, для которого выполняются условия:

- Пересечение линейных оболочек граней-точек, входящих в это согласованное множество, имеет ненулевую размерность,
- Для любой пары грани-точки и грани-отрезка, входящих в это согласованное множество, размерность их линейной оболочки равна 2,
- Пересечение линейных оболочек граней-отрезков, входящих в это согласованное множество, имеет ненулевую размерность.

Теорема

На λ-нормированной плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трех точек, если и только если $\lambda \not\equiv 0 \mod 3$.



Некоторые трёхмерные пространства

Теорема

- В нормированном пространстве, заданном правильным кубом, существуют три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Более того, если решение неединственно, то оно является отрезком.
- В нормированном пространстве, заданном правильным октаэдром, решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трёх точек.
- В нормированном пространстве, заданном правильным додекаэдром, существуют три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Более того, если решение неединственно, то оно является отрезком.
- Если единичная сфера трёхмерного нормированного пространства является призмой, то для любого $n \geq 2$ существуют n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно.

Конфигурационные пространства

Определение

Конфигурационным пространством $C_{X,n}$ называется евклидово пространство $\mathbb{R}^{nd}(x_{11}, \ldots, x_{1d}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nd})$, точкам которого соответствуют наборы точек пространства X.

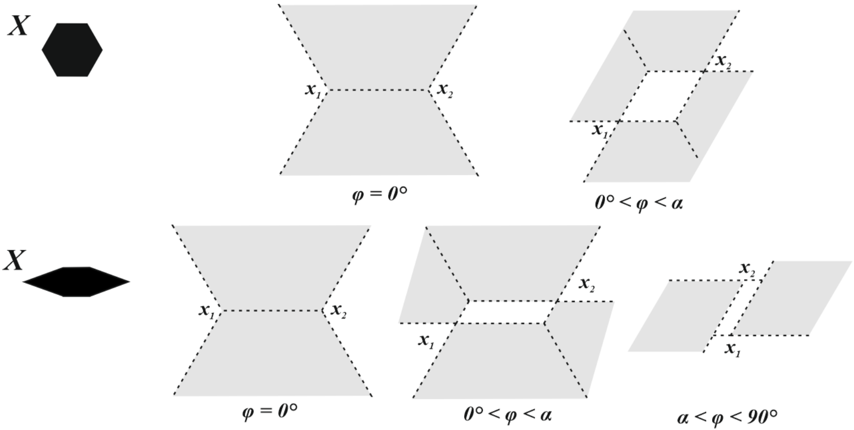
Определение

Пусть решение задачи Ферма–Торричелли для набора точек $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ единственно (неединствено). Будем говорить, что решение *устойчиво*, если существует окрестность набора x в конфигурационном пространстве $C_{X,n}$ такая, что для любого набора из этой окрестности решение задачи Ферма–Торричелли тоже единственно (неединственно).
Назовём X *пространством с устойчивой n-единственностью (n-неединственностью)*, если любое единственное (неединственное) решение для n точек является устойчивым.

Лемма

Для каждой шестиугольной нормированной плоскости её набор согласованных множеств граней относится к одному из трёх типов:

1. Существуют только согласованные множества из трёх граней-отрезков и из трёх граней-точек $\iff$ Неединственными решениями являются только многоугольники.
2. Существуют все виды согласованных множеств кроме трёх граней-отрезков $\iff$ Неединственными решениями являются только отрезки.
3. Существуют только согласованные множества из трёх граней-точек $\iff$ Неединственных решений не существует.

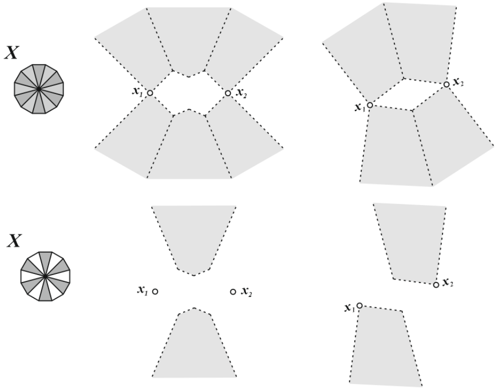

X
x1
x2
φ = 0°
0° < φ < α
X
φ = 0°
0° < φ < α
α < φ < 90°

Определение

Согласованное множество граней $F_0 = \{f_1^0, \ldots, f_n^0\}$ называется максимальным, если не существует другого согласованного множества $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, полностью покрывающего его, то есть такого, что $f_i^0 \subset f_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Теорема

В нормированной плоскости существует набор из трёх точек с неустойчивым неединственным решением, если и только если у её единичной окружности найдётся максимальное согласованное множество граней из двух точек и уплощения.



Утверждение

Пусть для нормированной плоскости известно множество всех максимальных наборов из трёх согласованных граней. Тогда для любой бифуркационной диаграммы подмножество неединственных решений разбивается на непересекающиеся области такие, что каждому набору соответствует одна область.

Бифуркационные диаграммы решений