

Топология слоений Лиувилля интегрируемых биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве

Белозеров Г. В.
gleb0511beloz@yandex.ru

кафедра дифференциальной геометрии и приложений
механико-математический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова

16 сентября 2024

Гамильтоновы системы

Определение

Пара (M^{2n}, ω) , где M^{2n} — гладкое многообразие, а ω — замкнутая невырожденная 2-форма на нем, называется **симплектическим многообразием**.

Определение

Пусть $H \in C^\infty(M^{2n})$. Тогда векторное поле

$$\text{sgrad } H = (\text{sgrad } H)^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

называется **гамильтоновой системой** (или **гамильтоновым векторным полем**), а функция H — **гамильтонианом** (или **функцией Гамильтона**).

Замечание

Если на симплектическом многообразии задана гамильтонова система, то число, равное половине размерности многообразия, принято называть **степеню свободы** этой гамильтоновой системы.

Гамильтоновы системы

Скобка Пуассона

Симплектическая форма ω определяет на пространстве $C^\infty(M^{2n})$ **скобку Пуассона** $\{\cdot, \cdot\}$ следующей формулой.

$$\{f, g\} = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \quad \forall f, g \in C^\infty(M^{2n})$$

Говорят, что гладкие функции f и g **находятся в инволюции** (или **коммутируют**), если $\{f, g\} = 0$.

Вполне интегрируемые системы

Определение

Гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ называется **вполне интегрируемой по Лиувиллю**, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n , таких, что:

- 1 f_1, \dots, f_n — первые интегралы v ,
- 2 они функционально независимы на M , то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,
- 3 $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j ,
- 4 векторные поля $\text{sgrad } f_j$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Слоение Лиувилля

Первые интегралы f_1, \dots, f_n вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы задают разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты их совместного уровня. Это разбиение порождает слоение, которое называется **слоением Лиувилля**.

Теорема Лиувилля

Теорема (Лиувиль)

Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда

1. T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$.
2. Если подмногообразие T_ξ связно, то оно диффеоморфно $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^k$. В частности, если T_ξ компактно, оно диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля.
3. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .

Отношения эквивалентности ИГС

Отношения эквивалентности ИГС

- 1 Топологическая (гладкая) сопряженность
- 2 Топологическая (гладкая) траекторная эквивалентность
- 3 Лиувиллева эквивалентность
- 4 Грубая лиувиллева эквивалентность

Отношения эквивалентности ИГС

Определение

Две вполне интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на симплектических многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n} , обладающие наборами независимых попарно коммутирующих первых интегралов (f_1, \dots, f_n) и (g_1, \dots, g_n) , называются **лиувиллево эквивалентными**, если существует гомеоморфизм $\varphi : M_1^{2n} \rightarrow M_2^{2n}$ слоений Лиувилля этих систем. При этом, время вдоль траекторий сохраняться не обязательно.

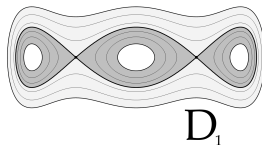
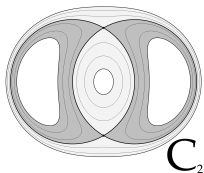
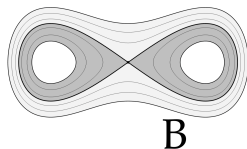
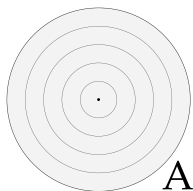
Определение

Две вполне интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на симплектических многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n} , обладающие наборами независимых попарно коммутирующих первых интегралов (f_1, \dots, f_n) и (g_1, \dots, g_n) , называются **грубо лиувиллево эквивалентными**, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля этих систем, который локально (т.е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Метод инвариантов А. Т. Фоменко

Определение

Пусть f — функция Морса на двумерном компактном многообразии M^2 и c — ее критическое значение. Предположим также, что c — единственное критическое значение функции f на отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Тогда связную компоненту P^2 множества $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, расслоенную на линии уровня функции f будем называть **2-атомом (двумерным атомом)** (P^2, f) .



Метод инвариантов А. Т. Фоменко

Молекулы

Построим теперь по системе $\text{sgrad } H$ на многообразии M^2 топологический инвариант. Для этого рассмотрим базу слоения Лиувилля этой системы. Она представляет собой граф (**граф Рибба**), вершинам которого соответствуют критические слои функции H , а ребрам — однопараметрические семейства регулярных слоев-окружностей. Сопоставим каждой вершине этого графа символ атома, соответствующий окрестности особого слоя в этой вершине. Полученный объект называется **2-молекулой**.

Теорема (А. Т. Фоменко)

Если молекулы W_1 и W_2 двух ИГС $v_1 = \text{sgrad } H_1$ и $v_2 = \text{sgrad } H_2$ на многообразиях M_1^2 и M_2^2 совпадают, то существует диффеоморфизм $\varphi : M_1^2 \rightarrow M_2^2$ переводящий функцию H_1 в функцию H_2 , т.е. $H_2 = \varphi \circ H_1$.

Метод инвариантов А. Т. Фоменко

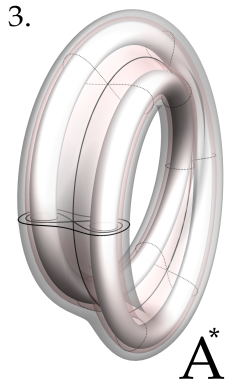
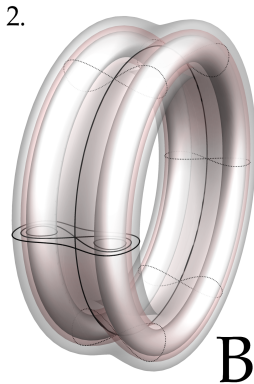
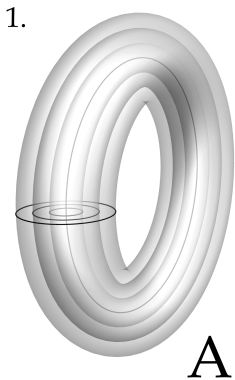
Определение

Гладкая функция f на многообразии N^n называется **функцией Ботта**, если все ее критические точки собраны в невырожденные подмногообразия.

Определение

Пусть L — особый слой слоения функции f на Q^3 , отвечающий критическому значению c . Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы функция f не принимала бы помимо c никаких других критических значений из отрезка $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Обозначим через $U(L)$ связную компоненту множества $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, содержащую слой L . Тогда множество $U(L)$, расслоенное на поверхности уровня функции f будем называть **3-атомом**. Количество критических окружностей в слое L называется **сложностью 3-атома** $U(L)$.

Метод инвариантов А. Т. Фоменко. Примеры 3-атомов



Метод инвариантов А. Т. Фоменко

Молекулы

Итак, рассмотрим граф Кронрода-Риба функции f на неособой компактной изоэнергетической поверхности Q^3 . Оснастим вершины этого графа символами атомов, описывающих соответствующую вершине бифуркацию торов Лиувилля. Получившийся в результате объект называется **грубой молекулой**.

Теорема (А. Т. Фоменко)

Пусть v_1 и v_2 — две интегрируемые системы на изоэнергетических поверхностях Q_1^3 и Q_2^3 , а W_1 и W_2 — отвечающие им грубые молекулы. Тогда системы v_1 и v_2 грубо лиувиллево эквивалентны (с учетом ориентации) тогда и только тогда, когда молекулы W_1 и W_2 совпадают.

Инвариант Фоменко-Цишанга

Пусть e_i — ребро грубой молекулы W . После разреза этого ребра на торе Лиувилля, соответствующем точке разреза, возникают два допустимых базиса с соседних атомов. Пусть $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ — матрица склейки этих базисов.

Определение

Числовой рациональной меткой r_i на ребре e_i молекулы W называется число

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \pmod{1} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0 \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0 \end{cases}$$

Определение

Числовой целочисленной меткой ε_i на ребре e_i молекулы W называется число

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0 \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0 \end{cases}$$

Инвариант Фоменко-Цишанга

Ребро молекулы назовем **бесконечным**, если метка $r_i = \infty$. Остальные ребра будем называть **конечными**. Разрежем молекулу по всем конечным ребрам. В результате молекула распадется на некоторое число связных кусков.

Определение

Семьей называется кусок молекулы, который не содержит атомов A после разреза молекулы по всем конечным ребрам.

В каждой семье все ребра можно разделить на три класса: **входящие**, **выходящие** и **внутренние**.

Инвариант Фоменко-Цишанга

Определение

Сопоставим каждому из этих ребер e_i целое число Θ_i по следующему правилу:

$$\Theta_i = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} \alpha_i \\ \beta_i \end{array} \right], & \text{если } e_i \text{ – выходящее ребро,} \\ \left[\begin{array}{c} -\delta_i \\ -\beta_i \end{array} \right], & \text{если } e_i \text{ – входящее ребро,} \\ \left[\begin{array}{c} -\gamma_i \\ \alpha_i \end{array} \right], & \text{если } e_i \text{ – внутреннее ребро,} \end{cases}$$

Тогда для каждой семьи определяется **целочисленная метка n** по следующему правилу:

$$n = \sum \Theta_i$$

где сумма берется по всем ребрам данной семьи.

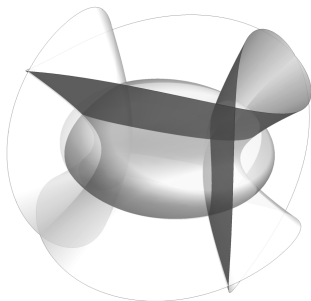
Семейство софкусных квадрик в \mathbb{R}^3

Определение

Семейством софкусных квадрик в \mathbb{R}^3 называется множество квадрик, заданных уравнением

$$(b-\lambda)(c-\lambda)x^2 + (a-\lambda)(c-\lambda)y^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)z^2 = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda), \quad (1)$$

*где $a > b > c$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр. Если параметр квадрики этого семейства равен a , b или c , то она называется **вырожденной**, в противном случае квадратика называется **невыврожденной**.*



Семейство софокусных квадрик в \mathbb{R}^3 . Свойства

Предложение

Касательные плоскости в точках пересечения двух софокусных квадрик ортогональны.

Предложение

Через каждую точку $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, такую, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, проходит в точности три невырожденные софокусные квадрики: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперboloиды.

Предложение

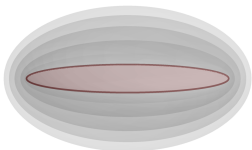
Через каждую точку \mathbb{R}^3 проходит три софокусные квадрики с учетом кратности. Если упорядочить по возрастанию параметры этих квадрик и обозначить их через $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, то $\lambda_1 \in (-\infty, c]$, $\lambda_2 \in [c, b]$, $\lambda_3 \in [b, a]$.

Определение

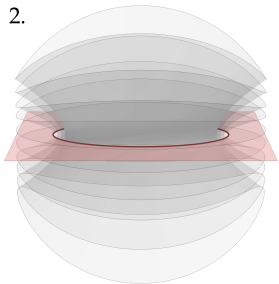
*Функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются **эллиптическими координатами** в \mathbb{R}^3 .*

Семейство софокусных квадрик в \mathbb{R}^3 . Вырожденные квадрики

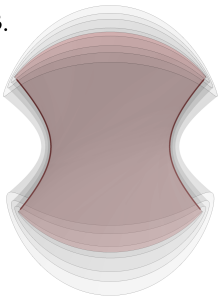
1.



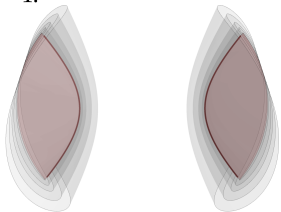
2.



3.



4.



Семейство софокусных квадрик в \mathbb{R}^3 . Вырожденные квадрики

Определение

Кривые $\mathfrak{F}_1 = \left\{ (x, y, 0) \mid \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1 \right\}$ и $\mathfrak{F}_2 = \left\{ (x, 0, z) \mid \frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1 \right\}$ называются **фокальным эллипсом** и **фокальной гиперболой** соответственно.

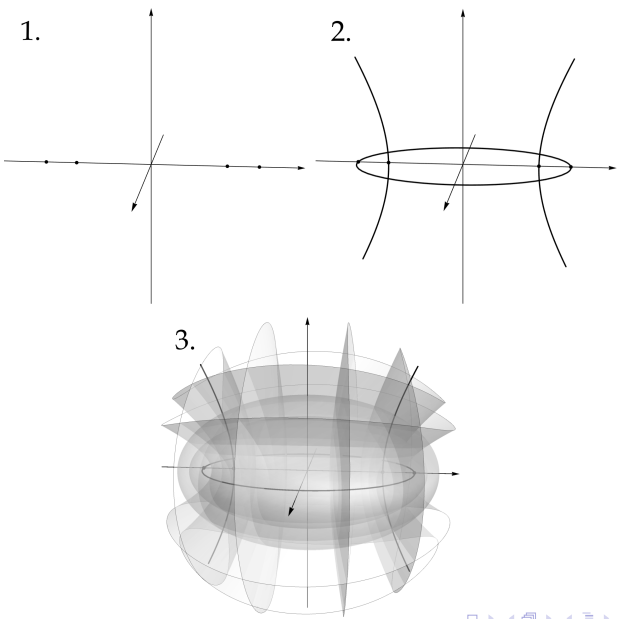
Предложение

Эллипс \mathfrak{F}_1 состоит из омбилических точек двуполостных гиперболоидов данного семейства софокусных квадрик, а гипербола \mathfrak{F}_2 — из омбилических точек эллипсоидов того же семейства.

Предложение

Эллипс \mathfrak{F}_1 проходит через фокусы гиперболы \mathfrak{F}_2 , а гипербола \mathfrak{F}_2 проходит через фокусы эллипса \mathfrak{F}_1 .

Семейство софокусных квадрик в \mathbb{R}^3 . Вырожденные квадрики



Описание системы

Система геодезического биллиарда

Пусть Z^2 — биллиардный стол на невырожденной квадрике из софокусного семейства. Рассмотрим следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри Z^2 вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы стола абсолютно упруго. Такую динамическую систему будем называть **софокусным геодезическим биллиардом**.

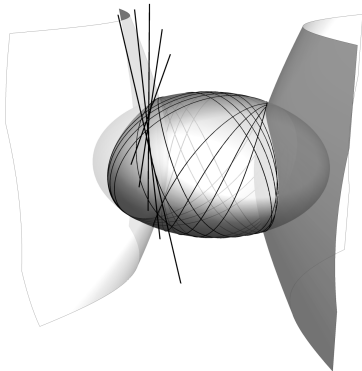
Фазовое пространство

Фазовое пространство софокусного геодезического биллиарда есть топологическое пространство $M^4 = \{(x, v) | x \in Z^2, v \in T_x E - 0\} / \sim$, где отношение эквивалентности \sim на границе стола Z^2 задается так. Пары (x_1, v_1) и (x_2, v_2) , где x_1, x_2 лежат на границе Z^2 , **эквивалентны** в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$, а v_2 может быть получен из v_1 путем нескольких отражений относительно стенок Z^2 , смыкающихся в этой точке.

Интегрируемость

Теорема

Софокусные биллиарды на квадриках являются интегрируемыми в кусочно-гладком смысле. Более того, касательные прямые, проведенные к траектории софокусного биллиарда на некоторой квадрике (во всех точках гладкости траектории), касаются, помимо этой квадрики еще одной, софокусной с данной. Эта квадрика является общей для всех точек гладкости траектории.



Комбинаторная эквивалентность столов

Определение

Будем говорить, что софокусные биллиардные столы Z_1 и Z_2 на квадрике E **комбинаторно эквивалентны**, если и только если Z_2 можно получить из Z_1 применением нескольких преобразований следующего вида:

- последовательным изменением сегментов границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, так, чтобы параметр λ изменяемого сегмента границы не принимал значения b , если E — эллипсоид, значения c , если E — двуполостный гиперболоид, и значений b, c , если E — однополостный гиперболоид;
- симметрией относительно координатных плоскостей.

Теорема классификации столов

Теорема (Классификация биллиардных областей на квадриках)

Пусть E — невырожденная квадрика из софокусного семейства, тогда (с точностью до комбинаторной эквивалентности):

1. Если E — эллипсоид, то на нем существует ровно 21 тип неэквивалентных биллиардных столов;
2. Если E — однополостный гиперболоид, то на нем существует ровно 21 тип неэквивалентных биллиардных столов;
3. Если E — двуполостный гиперболоид, то на нем существует ровно 13 типов неэквивалентных биллиардных столов.

Предложение

Софокусные биллиарды на комбинаторно эквивалентных столах лиувиллево эквивалентны.

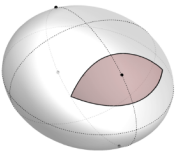
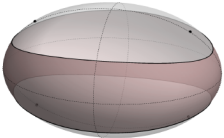
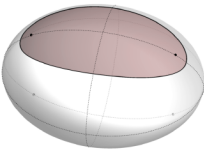
Лиувиллева классификация биллиардов на квадриках

Теорема (Классификация геодезических биллиардов)

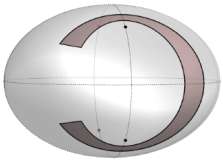

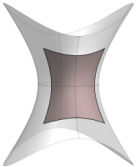
Пусть E — невырожденная квадрика из софокусного семейства, тогда (с точностью до лиувиллевой эквивалентности):

1. Если E — эллипсоид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных биллиардов;
2. Если E — однополостный гиперboloид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных биллиардов;
3. Если E — двуполостный гиперboloид, то на нем существуют ровно 6 неэквивалентных биллиардов.
4. Оказывается, что некоторые геодезические биллиарды, живущие на разных софокусных квадриках, являются лиувиллево эквивалентными. В итоге, на всех софокусных квадриках имеется ровно 10 лиувиллево не эквивалентных геодезических биллиардов.

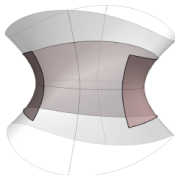
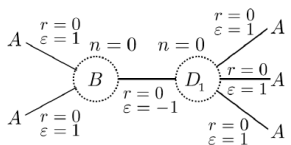
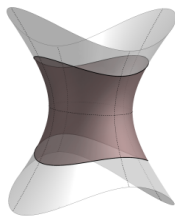
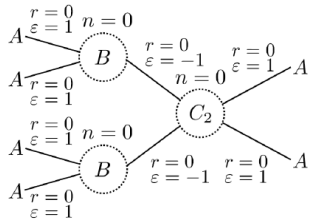
Лиувиллева классификация биллиардов на квадриках

4		$ \begin{array}{c} n = 0 \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \textcircled{A^*} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{array} $	<p>Горячев - Чашлыгин - Срегенский</p>
5		$ \begin{array}{c} A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{array} $	<p>Эйлер, Клебш</p>
6		$ \begin{array}{c} n = 1 \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \textcircled{B} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \textcircled{B} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{array} $	<p>Эйлер, Клебш, Соколов</p>

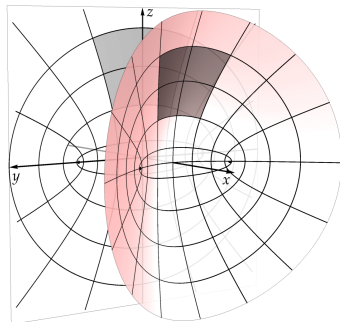
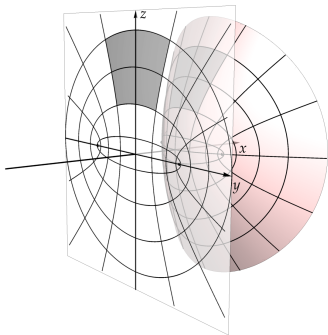
Лиувиллева классификация биллиардов на квадриках

7		$A \xrightarrow[r = \infty, \varepsilon = 1]{} D_1 \begin{cases} \nearrow_{r=0, \varepsilon=1} A \\ \searrow_{r=0, \varepsilon=1} A \end{cases}$	<p>Плоский софокусный биллиард на столе:</p> 
8		$A \begin{cases} \nearrow_{r=0, \varepsilon=1} \\ \searrow_{r=0, \varepsilon=1} \end{cases} B \xrightarrow[r = 0, \varepsilon = -1]{} B \begin{cases} \nearrow_{r=0, \varepsilon=1} \\ \searrow_{r=0, \varepsilon=1} \end{cases} A$ <p style="text-align: center;">$n = 0$ $n = 0$</p>	<p>Биллиард на эллипсоиде в пространстве Минковского</p>

Лиувиллева классификация биллиардов на квадриках

<p>9</p>			<p>Топологический биллиард с невыпуклыми склейками границ 1</p>
<p>10</p>			<p>Топологический биллиард с невыпуклыми склейками границ</p>

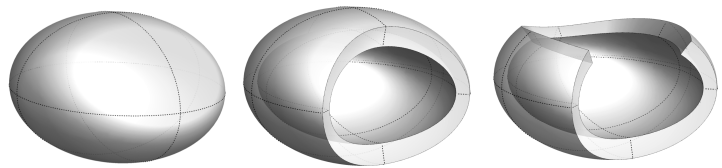
Биллиарды на двуполостном гиперболоиде и плоские биллиарды



Трехмерные биллиардные столы

Определение

Трехмерным биллиардным столом Z^3 будем называть замыкание связной ограниченной области в \mathbb{R}^3 , граница которой состоит из конечного числа гладких граней, лежащих на квадриках софкусного семейства. При этом, мы будем предполагать, что двугранные углы излома на границе Z^3 равны $\pi/2$.



Описание системы

Система геодезического биллиарда

Пусть Z^3 — трехмерный биллиардный стол. Рассмотрим следующую динамическую систему: материальная точка единичной массы движется внутри трехмерного биллиардного стола Z^3 по прямым с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы Z^3 абсолютно упруго. Такую динамическую систему мы будем называть **трехмерным софокусным биллиардом**.

Фазовое пространство

Фазовое пространство трехмерного софокусного биллиарда — это топологическое пространство $M^6 = \{(x, v) | x \in Z^3, v \in T_x\mathbb{R}^3 - 0\} / \sim$, где \sim есть следующее отношение эквивалентности на границе стола Z^3 . Пары (x_1, v_1) и (x_2, v_2) , где $x_1, x_2 \in \partial Z^3$, **эквивалентны** в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$, а вектор v_2 может быть получен из v_1 путем нескольких последовательных отражений относительно стенок Z^3 , смыкающихся в этой точке.

Интегрируемость

Теорема

Трехмерные биллиарды, ограниченные софокусными квадриками, являются интегрируемыми в кусочно-гладком смысле. Более того, все прямолинейные участки (или их продолжения) произвольной траектории-ломаной материальной точки трехмерного софокусного биллиарда касаются двух софокусных квадрик (с учетом кратности), общих для всех звеньев траектории.

Первые интегралы

Обозначим параметры каустик через Λ_1 и Λ_2 . Мы всегда будем считать, что $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$.

Комбинаторная эквивалентность столов. Классификация

Определение

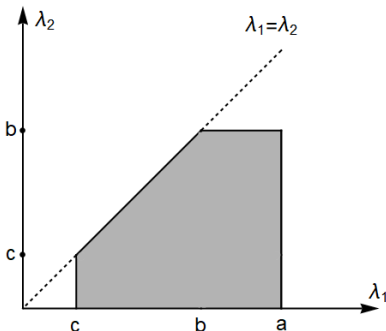
Будем говорить, что трехмерные бильярдные столы Z_1, Z_2 , **комбинаторно эквивалентны**, если один из них может быть получен из другого последовательностью следующих преобразований:

- изменением сегмента границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, при этом значение изменяемого параметра λ при каждой деформации может принимать значения b или c только либо в начале деформации, если объем стола уменьшается, либо в конце, если — увеличивается;
- симметрией относительно координатных плоскостей.

Теорема

Существует в точности 35 классов комбинаторно неэквивалентных бильярдных столов.

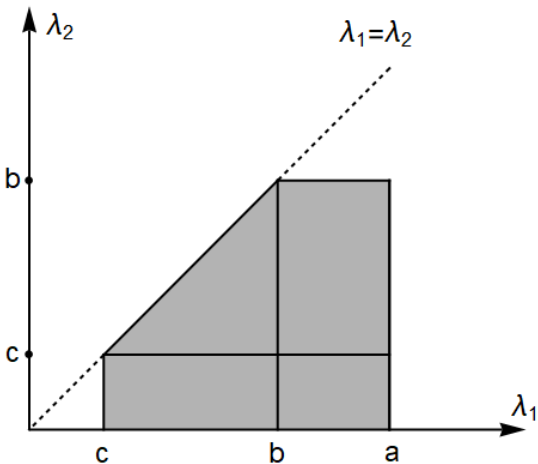
Образ отображения момента и бифуркационная диаграмма



Бифуркационная диаграмма

Добавим к рисунку вертикальный отрезок через точку (b, c) , если биллиардный стол целиком не лежит в одном из полупространств $y \geq 0$ ($y \leq 0$). Аналогично, добавим к рисунку горизонтальный отрезок через точку (b, c) , если биллиардный стол целиком не лежит в одном из полупространств $z \geq 0$ ($z \leq 0$). Эти отрезки вместе с границей образа отображения момента объявим **бифуркационной диаграммой**.

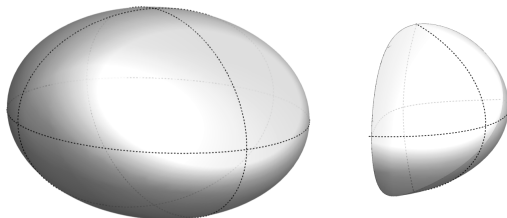
Прообразы точек страт диаграммы



Точка креста. Два типа столов

Два вида биллиардных столов

1. Столы, на которых хотя бы одна эллиптическая координата отделена от значений b или c .
2. Столы, на которых все эллиптические координаты могут принимать критические значения.



Точка креста. Связь с потенциалом Гаука

Уравнение движения материальной точки в \mathbb{R}^3

На совместном уровне h, f_1, f_2 первых интегралов H, F_1, F_2 уравнения движения материальной можно переписать в следующем виде.

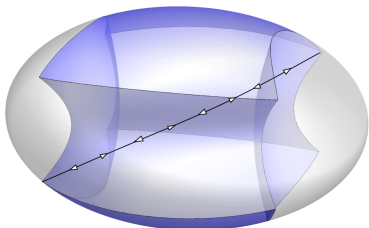
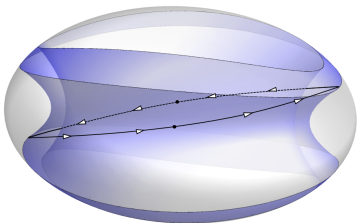
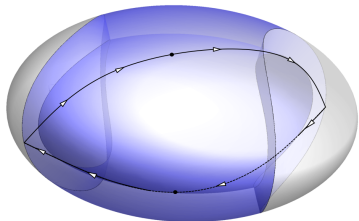
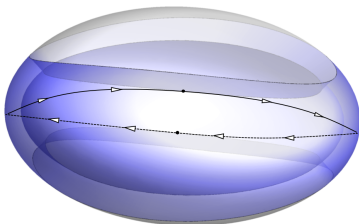
$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)(h\lambda_i^2 - f_1\lambda_i + f_2)}$$

Уравнение движения материальной точки в \mathbb{R}^2 в поле силы Гаука

На совместном уровне h, f первых интегралов H, F уравнения движения материальной можно переписать в следующем виде.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_i - \lambda_j} \sqrt{(b - \lambda_i)(c - \lambda_i) \left(-\frac{k}{2}\lambda_i^2 - h\lambda_i + f \right)}$$

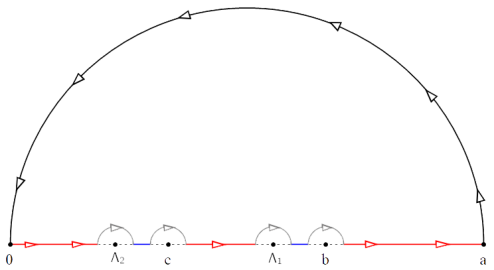
Точка креста. Биллиард внутри эллипсоида



Точка креста. Биллиард внутри эллипсоида

$$s(H, \Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Lambda_2 \wedge c} \sqrt{h \frac{(t - \Lambda_1)(t - \Lambda_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{c \vee \Lambda_2}^{\Lambda_1 \wedge b} \sqrt{h \frac{(t - \Lambda_1)(t - \Lambda_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{b \vee \Lambda_1}^a \sqrt{h \frac{(t - \Lambda_1)(t - \Lambda_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt$$



Классификация поверхностей постоянной энергии трехмерных биллиардов

Теорема

Пусть биллиардный стол Z^3 гомеоморфен диску \bar{D}^3 , сферическому слою $\bar{D}^1 \times S^2$ или полноторию $\bar{D}^2 \times S^1$. Тогда изоэнергетическая поверхность Q^5 этого биллиарда гомеоморфна сфере S^5 , произведению $S^2 \times S^3$ или произведению $S^1 \times S^4$ соответственно.

Замечание

При доказательстве этой теоремы не используется интегрируемость биллиарда, т.е. результат верен и для неинтегрируемых биллиардов.

Топология Q^5 -поверхностей биллиарда с потенциалом Гауа внутри эллипсоида

Рассмотрим биллиард внутри эллипсоида $E : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$. С потенциалом Гауа $V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Считаем, что $a > b > c$.

Определение

Непустое множество $Q_h = \{(x, v) \in M^6 \mid H(x, v) = h\}$ назовем **изоэнергетической поверхностью**, а соответствующее ему значение h допустимым значением энергии. Заметим, что при $k > 0$ множество допустимых значений энергии — это промежуток $[0; +\infty)$, а при $k < 0$ — промежуток $[ka/2; +\infty)$.

Топология Q^5 -поверхностей биллиарда с потенциалом Гауа внутри эллипсоида

Определение

Область возможного движения, соответствующей значению h , назовем образ Q_h под действием π , т.е. проекцию изоэнергетической поверхности на биллиардный стол.

При $k > 0$ область возможного движения есть шар радиуса $\sqrt{2h/k}$, пересеченный с биллиардным столом. При $k < 0$ область возможного движения — либо внешность шара радиуса $\sqrt{2h/k}$, пересеченного с биллиардным столом (при $h \leq 0$), либо весь биллиардный стол (при $h > 0$). При $hk > 0$ сферу радиуса $\sqrt{2h/k}$ будем называть **граничной сферой**.

Определение

*Значение (уровень) энергии h будем называть **бифуркационным**, если либо $h = 0$, либо соответствующая граничная сфера касается эллипсоида E . Иначе уровень энергии назовем **небифуркационным**.*

Топология Q^5 -поверхностей биллиарда с потенциалом Гауа внутри эллипсоида

Теорема

Пусть h — небифуркационное значение энергии H , тогда:

- ① если $k > 0$, то изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна сфере S^5 ,
- ② если $k < 0$, то изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна
 - несвязному объединению двух пятимерных сфер S^5 при $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$;
 - прямому произведению окружности и четырехмерной сферы $S^1 \times S^4$ при $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$;
 - прямому произведению двумерной и трехмерной сфер $S^2 \times S^3$ при $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$;
 - пятимерной сфере S^5 при $h \in (0, +\infty)$.

Спасибо за внимание!