Александр О. Иванов
Алексей А. Тужилин

Вычисление ℓ_1-размерности через расстояние Хаусдорфа

Изометрические вложения

Задача изометрического вложения: Может ли данное метрическое пространство быть изометрически вложено в данное объемлющее метрическое пространство?

Вложение Куратовского: С его помощью каждое метрическое пространство можно рассматривать как подмножество некоторого банахова пространства. Названо в честь *Казимира Куратовского*.

Теорема. *Если* (X, d) *— метрическое пространство,* x_0 *— точка в* X*, а* $C_b(X)$ *обозначает банахово пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на* X *с* $\sup$*-нормой, то отображение*

$$\Phi\colon X \to C_b(X), \quad \Phi(x)(y) = d(x, y) - d(x_0, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in X$$

является изометрией.

Для компактных метрических пространств мы можем опустить член $d(x_0, y)$.

Универсальное пространство Урысона

Метрическое пространство (U,d) называется *универсальным пространством Урысона*, если оно сепарабельное, полное и обладает следующим свойством: для любого конечного метрического пространства X, любой точки $x \in X$ и любого изометрического вложения $f\colon X\setminus\{x\} \to U$, существует изометрическое вложение $F\colon X \to U$, продолжающее f, т.е. такое, что $F(y) = f(y)$ для всех $y \in X \setminus \{x\}$.

Теорема. (1) *Универсальное пространство Урысона существует, и любые два универсальных пространства Урысона изометричны.*

(2) *Если U — универсальное пространство Урысона и X — любое сепарабельное метрическое пространство, то существует изометрическое вложение $f\colon X \to U$.*

(3) *Любая изометрия между компактными подмножествами универсального пространства Урысона U продолжается до изометрии U на себя.*

(4) *Сепарабельное полное метрическое пространство X, содержащее изометрический образ каждого сепарабельного метрического пространства, является универсальным пространством Урысона тогда и только тогда, когда оно однородно в следующем смысле: любая изометрия между конечными подмножествами X продолжается до изометрия X на себя.*

Изометрические вложения в $\mathbb{R}^n$

Теорема Менгера: Псевдометрическое пространство X изометрически вложимо в $\mathbb{R}^n$, но не в $\mathbb{R}^m$ для любого $0 \leq m < n$ тогда и только тогда, когда

(1) X содержит $(n+1)$-точечное подмножество S, которое изометрично с аффинно независимым $(n+1)$-точечным подмножеством $\mathbb{R}^n$;

(2) любое $(n+3)$-точечное подмножество S', полученное добавлением любых двух дополнительных точек из X к S, конгруэнтно $(n+3)$-точечному подмножеству $\mathbb{R}^n$.

Определители Кэли–Менгера: Пусть $X = \{A_0, \ldots, A_n\}$ — псевдометрическое пространство, d_{ij} — расстояние между A_i и A_j. Положим

$$\mathrm{CM}(A_0, \cdots, A_n) = \begin{vmatrix} 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \cdots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \cdots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если $X \subset \mathbb{R}^n$, то квадрат n-мерного объема выпуклой оболочки $\operatorname{conv} X$ множества X равен

$$\mathrm{Vol}_n(\operatorname{conv} X)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} \mathrm{CM}(A_0, \ldots, A_n).$$

Теорема (Доказано в книге Блюметаля). *Пусть* X *— псевдометрическое пространство. Тогда* X *можно изометрически вложить в* $\mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда существуют* $A_0, \dots, A_n \in X$ *такие, что*

$$(-1)^{k+1}\,\mathrm{CM}(A_0, \dots, A_k) \ge 0$$

для всех $k = 1, \dots, n$, *и для любого* $A_{n+1}, A_{n+2} \in X$ *выполняется*

$$\mathrm{CM}(A_0, \dots, A_n, A_{n+1}) = 0;$$

$$\mathrm{CM}(A_0, \dots, A_n, A_{n+2}) = 0;$$

$$\mathrm{CM}(A_0, \dots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}) = 0.$$

Более того, такое вложение единственно с точностью до изометрии в $\mathbb{R}^n$. *Далее, если* $\mathrm{CM}(A_0, \dots, A_n) \neq 0$, *то* X *не может быть изометрически вложено ни в какое* $\mathbb{R}^m$, $m < n$.

Римановы многообразия

Пусть M и N — римановы многообразия, $f\colon M \to N$ — некоторое C^1-отображение, $P \in M$ и $df_P\colon T_PM \to T_{f(P)}N$ — дифференциал f в P. Отображение f называется *изометрическим*, если

$$\big\|df_P(v)\big\| = \|v\| \ \text{ для всех } P \in M \text{ и } v \in T_PM.$$

Теорема (Нэш). *Пусть M — m-мерное C^k-гладкое риманово многообразие, где $3 \le k \le \infty$. Тогда существует число n такое, что*

- $n \le m(3m+11)/2$ *для компактного M и*
- $n \le m(m+1)(3m+11)/2$ *для некомпактного M,*

и изометрическое C^k-гладкое вложение $f\colon M \to \mathbb{R}^n$. Другими словами, каждое достаточно гладкое риманово многообразие можно изометрически вложить в некоторое $\mathbb{R}^n$.

C^1-гладкое отображение $f\colon M \to N$ римановых многообразий называется *строго коротким*, если

$$\|df_P(v)\| < \|v\| \text{ для всех } P \in M \text{ и всех ненулевых } v \in T_P M.$$

Теорема (Нэш–Кёйпер). *Пусть M — m-мерное гладкое риманово многообразие и $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ — строго короткое гладкое вложение в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq m+1$. Тогда существует последовательность C^1-гладких изометрических вложений M в $\mathbb{R}^n$, сходящаяся равномерно к f.*

Example. Хорошо известно, что любое изометрическое C^2-гладкое погружение стандартной сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$ конгруэнтно стандартному вложению. Однако, сжимая образ стандартного вложения S^2 в $\mathbb{R}^3$, мы получаем строго короткое гладкое вложение. Из теоремы Нэша–Кёйпера следует, что стандартную сферу S^2 можно C^1-гладко изометрически вложить в шар сколь угодно малого радиуса. Аналогичные изометрические вложения в $\mathbb{R}^3$ существуют для плоского тора и каждого замкнутого ориентированного двумерно многообразия постоянной отрицательной кривизны, хотя гладких изометрическимх вложений в $\mathbb{R}^3$ у таких многообразий не существует.

Изометрическое C^1-вложение стандартной сферы в шар малого радиуса, и плоского тора

Замечание. Применяя теорему Нэша–Кёйпера вместе с теоремой вложения Уитни, получаем, что любое замкнутое m-мерное риманово многообразие допускает C^1 изометрическое вложение в сколь угодно малую окрестность в $\mathbb{R}^{2m}$. Однако вложения некомпактных многообразий нельзя просто масштабировать, чтобы они стали короткими. Нэш доказал, что каждое m-мерное риманово многообразие допускает C^1 изометрическое вложение в $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Пример. Теорема Гильберта–Ефимова утверждает, что гиперболическая плоскость не может быть C^2-гладко изометрически погруженна в $\mathbb{R}^3$. Точнее, не существует C^2-гладкого изометрического погружения полного двумерного риманова многообразия M в $\mathbb{R}^3$, кривизна которого удовлетворяет $K \leq -1$. Однако C^1-гладкое вложение такого типа существует.

Вложение в гильбертово пространство

Теорема (Шёнберг). *Метрическое пространство* (X, d) *допускает изометрическое вложение в гильбертово пространство тогда и только тогда, когда функция* d^2 *отрицательно определена в смысле*

$$\sum d^2(A_i, A_j) c_i c_j \leq 0$$

для всех $A_0, \ldots, A_n \in X$, $n \geq 2$ *и всех вещественных скаляров* $c_0, \ldots, c_n$, *удовлетворяющих* $\sum c_j = 0$.

Следствие. *Метрическое пространство* X *изометрически вложимо в гильбертово пространство тогда и только тогда, когда каждое из его конечных подмножеств можно вложить таким образом.*

Пространства $\mathbb{R}^n_p$ и L_p

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство, где Ω — множество, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, μ — конечная неотрицательная мера и $1 \le p < \infty$. Рассмотрим множество всех μ-измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ с $\int |f|^p \, d\mu < \infty$. Эти функции образуют векторное пространство V, и для $f, g \in V$ положим

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p = \left(\int |f - g|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Функция d_p является псевдометрикой. Пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ является фактором V по эквивалентности нулевых расстояний.

Метрическое пространство называется L_p-*вложимое*, если оно изометрично подпространству некоторого $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Теорема (Бретаньоль, Кастель, Кривин)**.** *Метрическое пространство X является L^p-вложимым тогда и только тогда, когда существует измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ такое, что все конечные подпространства X вложимы в $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

Напомним, что *пространство* $\ell_p^n := \mathbb{R}_p^n$ — это $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\big\|(x_1,\ldots,x_n)\big\|_p = \big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{1/p}$$

для $1 \le p < \infty$ и

$$\big\|(x_1,...,x_n)\big\|_\infty = \max_k |x_k|.$$

Если Ω состоит из n точек, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ и μ — считающая мера, то $L_p^n := L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ естественно изометрично ℓ_p^n.

Метрическое пространство называется ℓ_1-*вложимым*, если оно изометрично подпространству некоторого ℓ_1^n.

Теорема (в книге М.Деза)**.** *Метрическое пространство X является ℓ_1-вложимым тогда и только тогда, когда ℓ_1-вложимы все конечные подпространства X.*

Равносторонняя размерность

Равносторонняя размерность $\dim_e X$ метрического пространства X — это максимальная мощность подмножеств пространства, все точки которых находятся на одинаковом расстоянии друг от друга.

Эквивалентное определение:
Под *метрическим симплексом* или 1-*пространством* мы подразумеваем каждое метрическое пространство, в котором все расстояния между различными его точками равны друг другу.

Равносторонняя размерность метрического пространства X — это максимальная мощность метрических симплексов, которые можно изометрически вложить в X.

Таким образом, *вычисление равносторонней размерности является частным случаем задачи изометрического вложения.*

Примеры равносторонних размерностей

Рассмотрим случай пространств ℓ_p^n.

- При $p = 1$ множество вершин координатного гипероктаэдра дает
$$\dim_e \ell_1^n \ge 2n.$$
Для $n \le 4$ было доказано равенство $\dim_e \ell_1^n = 2n$

(*Бандельт, Чепой, Лоран, Кулен, Шрийвер*).

Гипотеза Куснера:
$$\dim_e \ell_1^n = 2n \text{ для всех } n.$$

- Для $1 < p < 2$ *Сванепол* показал, что
$$\dim_e \ell_p^n \ge (1 + \varepsilon_p)n.$$

- При $p = 2$ выполняется $\dim_e \ell_2^n = n + 1$ и достигается в $n+1$ вершине (регулярного) симплекса (это очевидно, поскольку такое множество аффинно независимо, *Гай*).

- Для $2 < p < \infty$ выполняется $\dim_e \ell_p^n \geq n + 1$ (стандартный базис вместе с вектором вида $(-x, -x, \dots)$, является равносторонним множеством).

  Гипотеза Куснера:

  $$\dim_e \ell_p^n = n + 1 \text{ для всех } n$$

  (для $p = 4$ это было доказано *Сванеполом*).

- Для $p = \infty$ справедливо $\dim_e \ell_\infty^n = 2^n$ (оно достигается в вершинах гиперкуба, стороны которого параллельны осям координат, *Гай*).

Общие нормированные пространства и многообразия

Для общего нормированного векторного пространства V размерности n справедливо $\dim_e V \leq 2^n$ (*Петти*).

Кроме того, *Петти* сформулировал следующую задачу: верно ли, что $\dim_e V \geq n+1$? Ответ неизвестен. *Сванепол, Вилла*: если V "достаточно близоко" относительно расстояния Банаха–Мазура к ℓ_p^n, то $\dim_e V \geq n+1$.

Равносторонняя размерность нормированных пространств может принимать сколь угодно большие значения, а именно, для любого целого k все нормированные векторные пространства достаточно высокой размерности имеют равностороннюю размерность не менее k (*Брасс; Сванепол, Вилла*).

Для любого n-мерного риманова многообразия равносторонняя размерность не меньше $n+1$ (*Гай*). Кроме того, $\dim_e S^n = n+2$ (*Гай*). *Вопрос Куснера*: возможно ли на многообразиях ограниченной размерности задать римановы метрики со сколь угодно большой равносторонней размерностью? (Неизвестно.)

Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — метрическое пространство, $x, y \in X$, $|xy|$ — расстояние между x и y, $A \subset X$ непусто, $r > 0$. Тогда

- $U_r(x) = \{z \in X : |xz| < r\}$ называется *открытым шаром*,
- $U_r(A) = \bigcup_{a \in A} U_r(a)$ называется *открытой r-окрестностью A*.

Для непустого $A, B \subset X$ величина

$$d_H(A, B) = \inf\{r : A \subset U_r(B) \ \text{ and } \ B \subset U_r(A)\}$$

называется *расстоянием Хаусдорфа* между A и B.

Замечание. Расстояние Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника, но оно может быть нулевым между различными подмножествами, скажем, между $[0, 1]$ и $(0, 1)$, и бесконечным, скажем, между $\{0\} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$.

Предложение. *Пусть $\mathcal{H}(X)$ — множество всех непустых замкнутых ограниченных $A \subset X$. Тогда d_H — метрика на $\mathcal{H}(X)$. Пространство $\mathcal{H}(X)$ является полным (вполне ограниченным, компактным, собственным) тогда и только тогда, когда X таково.*

Расстояние Громова–Хаусдорфа

Пусть X и Y — метрические пространства, тогда положим

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{r : d_H(X',Y') \le r;\ X',Y' \subset Z;\ X \approx X';\ Y \approx Y'\bigr\},$$

где Z пробегает все метрические пространства, а $U \approx V$ означает, что U изометрично V.

Ясно, что

$$d_{GH}(X,X) = 0 \ \text{ и } \ d_{GH}(X,Y) = d_{GH}(Y,X),$$

следовательно, d_{GH} — расстояние.

Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа* между метрическими пространствами X и Y.

Теорема. *Расстояние d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника, поэтому d_{GH} является обобщенной псевдометрикой, т.е. может быть бесконечным и может обращаться в нуль между неравными пространствами.*

Теорема. *Если* $X \approx Y$, *то* $d_{GH}(X,Y)=0$, *таким образом,* d_{GH} *порождает обобщенную псевдометрику на классе всех пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.*

В дальнейшем через $\mathcal{GH}$ будем обозначать семейство всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Обратите внимание, что $\mathcal{GH}$ является собственным классом в терминах теории множеств фон Неймана–Бернейса–Гёделя.

Обозначим через $\mathcal{M}$ важный подкласс $\mathcal{GH}$, состоящий из всех компактных метрических пространств. Можно показать, что мощность $\mathcal{M}$ континуальна.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{M}$ — *множество классов изометрии компактных метрических пространств. Тогда*

(1) d_{GH} — *метрика на* $\mathcal{M}$;

(2) *пространство* $\mathcal{M}$ *стягиваемое, линейно связное, полное, сепарабельное, не локально компактное и геодезическое.*

Множество $\mathcal{M}$ с метрикой d_{GH} называется *пространством Громова–Хаусдорфа*.

Вложения в пространство Громова–Хаусдорфа

Теорема (А.О.Иванов, С.Илиадис, А.Т.). *Каждое конечное метрическое пространство изометрически вкладывается в пространство Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$.*

В общем случае существуют неизометричные метрические пространства на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа, например, $[0,1]$ и $(0,1)$. Более того, существуют полные пространства, которые не изометричны, но находятся на нулевом расстоянии друг от друга. Ганат построил пример пары неограниченных таких пространств; Вихров предложил пример ограниченных пространств. Пусть $\mathcal{GH}_0$ — семейство всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до нулевого расстояния. Тогда $\mathcal{GH}_0$ — собственный класс и расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной метрикой на $\mathcal{GH}_0$.

Теорема (А.О.Иванов, А.Т.). *Каждое ограниченное метрическое пространство изометрически вкладывается в класс Громова–Хаусдорфа $\mathcal{GH}_0$.*

Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов

Пусть X — произвольное метрическое пространство, а n — кардинальное число. Через Δ_n обозначим n-точечное пространство, все ненулевые расстояния которого равны 1. Для $\lambda \ge 0$ мы называем $\lambda\Delta_n$ *симплексом* (поскольку это одно из простейших метрических пространств) или 1-*пространством*.

Для метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ и кардинального числа $0 < m \le \#X$ через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим множество всех m-элементных разбиений X.

Для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i;$$

$$\alpha(D) = \inf\bigl\{|X_iX_j| : i \ne j\bigr\},$$

где $|X_iX_j| = \inf\bigl\{|x_ix_j| : x_i \in X_i,\, x_j \in X_j\bigr\}$;

$$\alpha_m(X) = \sup\bigl\{\alpha(D) : D \in \mathcal{D}_m(X)\bigr\}.$$

Теорема (Д.С.Григорьев, А.О.Иванов, А.Т.). *Для произвольного* $X \in \mathcal{GH}$, *кардинального числа* $0 < m \le \#X$ *и положительного действительного числа* λ *имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \\ = \inf\Big\{\max\big(\operatorname{diam} D, \lambda - \alpha(D), \operatorname{diam} X - \lambda\big) : D \in \mathcal{D}_m(X)\Big\}.$$

Следствие. *Для произвольного ограниченного метрического пространства* X *и кардинального числа* $0 < m \le \#X$

- *если* $\lambda \ge 2\operatorname{diam} X$, *то*

  $$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf\big\{\lambda - \alpha(D) : D \in \mathcal{D}_m(X)\big\} = \lambda - \alpha_m(X);$$

- *если* $0 < \lambda < \operatorname{diam} X$, *то*

  $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{diam} X$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X \text{ для всех } D \in \mathcal{D}_m(X).$$

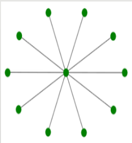
Хроматическое число

Хроматическое число простого графа G — это наименьшее количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Такая раскраска называется *правильной*. Хроматическое число графа G иногда обозначается $\gamma(G)$.

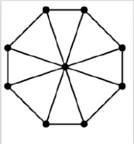
Пример.

(1) Пустой граф (без ребер) с n вершинами: $\gamma = 1$.

(2) Полный граф K_n с n вершинами: $\gamma = n$.



(3) Звездный граф с $n \geq 2$ вершинами: $\gamma = 2$.



(4) Колёсный граф с $n \geq 4$ вершинами: $\gamma = 3$ для четных n и $\gamma = 4$ для нечетных n.

(5) Граф-цикл C_n с $n \geq 3$ вершинами: $\gamma = 2$ для четных n и $\gamma = 3$ для нечетных n.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный конечный граф. Зафиксируем два действительных числа $0 < a < b \le 2a$.

Определим метрику на V следующим образом: расстояние между

- смежных вершин G равна b, а
- несмежные вершины G равны a.

Теорема (А.О.Иванов, А.Т.). *Имеем*

$$\gamma(G) = \min\bigl\{m \in \mathbb{Z} : m > 0,\ 2d_{GH}(a\Delta_m, V) < b\bigr\}.$$

Пример.

(1) Для пустого n-графа имеем $V = a\Delta_n$ и $2d_{GH}(a\Delta_m, a\Delta_n) < b$ для всех положительных m, тогда $\gamma = 1$.

(2) Пусть $G = K_n$, тогда $V = b\Delta_n$ и $2d_{GH}(a\Delta_m, b\Delta_n) = b$ до $m = n - 1$, но $2d_{GH}(a\Delta_n, b\Delta_n) = b - a < b$, следовательно, $\gamma = n$.

(3–5) Для соответствующих метрических пространств V мы получили точные значения $d_{GH}(a\Delta_m, V)$.

Вложения в прямоугольные пространства

Псевдометрическое пространство (X, d) называется *m-вложимым в прямоугольное пространство*, если существует изометрическое вложение $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^m$ наделено нормой $\|(v_1, \ldots, v_m)\| = \sum_{i=1}^m |v_i|$. Последнее означает, что $d(a, b) = \big\|f(a) - f(b)\big\|_1$ для всех $a, b \in X$.

Напомним понятия псевдометрики разреза и конусов разреза. Пусть X — конечное множество, состоящее из n элементов. Для удобства положим $X = \{1, \ldots, n\}$. Для собственного подмножества $S \subset X$ пара $\{S, S' := X \setminus S\}$ называется *разрезом* X. Для разреза $c = \{S, S'\}$ определим псевдометрику δ_c на X следующим образом:

$$\delta_c(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \#\big(S \cap \{i, j\}\big) = 1, \text{ и} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

δ_c называется *псевдометрикой разреза, соответствующей разрезу* $c = \{S, S'\}$.

Напомним, что каждая псевдометрика d на X порождает вектор

$$\big(d(1,2), d(1,3), \dots, d(n-1,n)\big) \in \mathbb{R}^N,$$

где $N = n(n-1)/2$. Множество всех таких векторов представляет собой выпуклый конус в $\mathbb{R}^N$, который называется *псевдометрическим конусом*.

Пусть $\mathcal{C}$ — семейство разрезов X и $\lambda\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ — отображение такое, что $\lambda_c := \lambda(c) > 0$ для всех $c \in \mathcal{C}$. Псевдометрика

$$d(\mathcal{C}, \lambda) = \sum_{c\in\mathcal{C}} \lambda_c \delta_c$$

называется *псевдометрикой разрезов, соответствующей семейству разрезов* $\mathcal{C}$.

Рассмотрим все такие псевдометрики $d(\mathcal{C}, \lambda)$ над всеми семействами разрезов $\mathcal{C}$ и всеми отображениями λ. Они образуют еще один конус в $\mathbb{R}^N$, который называется *конусом разрезов* и обозначается CUT_n.

Предложение (Ассуад, Деза). *Конечное метрическое пространство* (X, d) *изометрически вложимо в прямоугольное пространство тогда и только тогда, когда* $d \in \mathrm{CUT}_{\#X}$.

Если метрическое пространство (X, d) оказывается вложимым в прямоугольное пространство, то естественным образом возникает вопрос о минимальной допустимой размерности прямоугольного пространства. Эта минимальная размерность называется ℓ_1*-размерностью* пространства (X, d).

Бандельт, Чепой и Лоран свели проблему существования изометрического вложения в прямоугольное пространство к задаче о раскраске некоторого гиперграфа. Напомним понятие гиперграфа.

Простой граф — это пара $G = (V, E)$, состоящая из двух множеств: *множества вершин* V и *множества ребер* E, где E определяется как совокупность некоторых двухэлементных подмножеств V. Понятие гиперграфа естественным образом обобщает понятие простого графа. А именно, *гиперграф* $H = (V, E)$ — это пара, состоящая из *множества вершин* V и *множества ребер* E, где E — это некоторое семейство непустых подмножеств V, не обязательно двухэлементных.

Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{C}$ — некоторая его система разрезов. Построим специальный гиперграф, ассоциированный с $\mathcal{C}$.

Два разреза $\{A, A'\}$ и $\{B, B'\}$ называются *несовместимыми*, если все четыре пересечения $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$ и $A' \cap B'$ непусты.

Говорят, что три разреза $\{A, A'\}$, $\{B, B'\}$ и $\{C, C'\}$ образуют *звездную тройку*, если можно выбрать по одному элементу $\tilde{A} \in \{A, A'\}$, $\tilde{B} \in \{B, B'\}$ и $\tilde{C} \in \{C, C'\}$ из каждого из этих разрезов так, чтобы три получившихся множества $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ попарно не пересекались.

Гиперграф с множеством вершин $\mathcal{C}$ и множеством ребер, состоящим из всех несовместимых пар и всех звездных троек, называется *гиперграфом вложимости* $\mathcal{C}$ и обозначается $\Gamma(\mathcal{C})$.

Гиперграф $G = (V, E)$ называется *m-раскрашиваемым*, если существует раскраска в m цветов без одноцветных ребер.

Теорема (Бандельт, Чепой, Лоран). *Пусть* (X, d) *— конечное метрическое пространство,* $\mathcal{C}$ *— семейство разрезов на* X *и*

$$d = \sum_{c \in \mathcal{C}} \lambda_c \delta_c, \qquad \lambda_c > 0.$$

Тогда (X, d) *вложимо в* m*-мерное прямоугольное пространство, если и только если соответствующий вложенный гиперграф* $\Gamma(\mathcal{C})$ *является* m*-раскрашиваемым. В частности, хроматическое число* $\Gamma(\mathcal{C})$ *равно* ℓ_1*-размерности* (X, d).

Вложения и расстояние Громова–Хаусдорфа

Для начала сведем задачу раскраски вложенных гиперграфов к задаче для простых графов. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольное семейство разрезов на конечном множестве X и $\Gamma(\mathcal{C})$ — соответствующий гиперграф вложимости. Семейство простых графов с множеством вершин $\mathcal{C}$ построим следующим образом: для каждой звездной тройки $\{a,b,c\}$ выберем одну из пар $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, добавим ее в множество ребер и удалим тройку (такая пара может принадлежать нескольким звездным тройкам, и если она выбрана несколько раз, то добавляем ее только один раз). В результате мы получим не более 3^k простых графов $\{G_i\}$, где k — количество звездных троек в гиперграфе вложимости. Положим $\mathcal{G}(\mathcal{C}) = \{G_i\}$.

Лемма (А.О.Иванов, А.Т.). *Пусть* $\mathcal{C}$ *— произвольное семейство разрезов конечного множества* X *и* $\Gamma(\mathcal{C})$ *— соответствующий гиперграф вложимости. Пусть* $\mathcal{G}(\mathcal{C}) = \{G_i\}$ *— построенное выше семейство простых графов. Тогда* $\Gamma(\mathcal{C})$ *является* m*-раскрашиваем, если и только если семейство* $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ *содержит* m*-раскрашиваемый простой граф.*

Следствие. *Пусть* (X,d) *— конечное метрическое пространство,* $\mathcal{C}$ *— семейство разрезов на* X *и*

$$d = \sum_{c\in\mathcal{C}} \lambda_c \delta_c, \qquad \lambda_c > 0.$$

Тогда (X,d) *вложимо в* m*-мерное прямоугольное пространство, если и только если соответствующее семейство простых графов* $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ *содержит* m*-раскрашиваемый граф.* ℓ_1*-размерность* (X,d) *равна* $\min_G \gamma(G)$*, где минимум берется по всем* $G \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$*.*

Зафиксируем два положительных действительных числа $0 < a < b \leq 2a$ и для каждого графа G из $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ построим следующую метрику d_G на $\mathcal{C}$:

$$d_G(s,t) = \begin{cases} b, & \text{если } s \text{ и } t \text{ соседние,} \\ a, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Через $\mathcal{C}_G$ обозначим полученное метрическое пространство $(\mathcal{C}, d_G)$.

Теорема. *Пусть (X,d) — конечное метрическое пространство, $\mathcal{C}$ — семейство разрезов на X и*

$$d = \sum_{c \in \mathcal{C}} \lambda_c \delta_c, \qquad \lambda_c > 0.$$

Тогда ℓ_1-размерность (X,d) равна

$$\min\Big\{ m \in \mathbb{Z} : m > 0,\ \min_{G \in \mathcal{G}(\mathcal{C})} 2d_{GH}(a\Delta_m, \mathcal{C}_G) < b \Big\}.$$

Дополнение

Минимальные остовные деревья

Пусть X — конечное метрическое пространство, а $G = (X, E)$ — дерево. Для каждого ребра $e = vw \in E$, соединяющего вершины v и w, его *длина* $|e|$ равна расстоянию $|vw|$. *Длина* $|G|$ *дерева* G равна сумме длин всех ребер $e \in E$.

Длина минимального остовного дерева на X равна

$$\mathrm{mst}(X) = \inf\bigl\{|G| : G = (X, E) \text{ является деревом}\bigr\}.$$

Минимальным остовным деревом на X называется дерево G такое, что $|G| = \mathrm{mst}(X)$.

Положим

$$\mathrm{MST}(X) = \bigl\{G : G \text{ — минимальное остовное дерево на } X\bigr\}.$$

Если $\#X = n$ и $G \in \mathrm{MST}(X)$, мы определяем

$$\sigma(G) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$$

как вектор из длин ребер дерева G, упорядоченных по убыванию. Хорошо известно, что для любых $G_1, G_2 \in \mathrm{MST}(X)$ выполнено $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$. Этот вектор мы называем mst-*спектром* X и обозначаем $\sigma(X)$.

Теорема (А.Т.). *Для конечного метрического пространства* X *с* $\#X = n$ *и любого* $\lambda \ge 2\,\mathrm{diam}\,X$ *справедливо*

$$\sigma_m = \lambda - 2d_{GH}(\lambda\Delta_{m+1}, X), \quad m = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, мы выразили длины ребер минимального остовного дерева на конечном метрическом пространстве X через расстояния Громова–Хаусдорфа от X до соответствующих симплексов.

Задача. Обобщить этот результат на бесконечные минимальные остовные деревья.

Проблема Борсука

1932, Кароль Борсук: стандартный n-мерный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ можно разбить на $n+1$ подмножество, каждое из которых имеет меньший диаметр, чем шар.

Проблема Борсука:

верно ли то же самое для любого ограниченного подмножества $\mathbb{R}^n$?

1993, Кан и Калаи:

в общем, НЕВЕРНО (для $n = 1325$ и $n > 2014$)

2013, Бондаренко:

неверно для $n \geq 65$, Дженрих — для $n = 64$ (самый лучший результат)

А.О.Иванов, А.Т. (Обобщенная проблема Борсука): Пусть X — ограниченное метрическое пространство диаметра d, а $1 \leq m \leq \#X$ — кардинальное число. Мы говорим, что X *можно разбить на* m *подмножеств* X_i *строго меньшего диаметра*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\operatorname{diam} X_i \leq d - \varepsilon$ для всех i.

Теорема (А.О.Иванов, А.Т.). *Для произвольного ограниченного метрического пространства* X, *любого кардинального числа* $m \le \#X$ *и любого* $0 < \lambda < \operatorname{diam} X$ *имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \le \operatorname{diam} X.$$

Пространство X *можно разбить на подмножества строго меньшего диаметра, если*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) < \operatorname{diam} X,$$

и не нельзя разбить на подмножества строго меньшего диаметра, если

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{diam} X.$$

Задача. Использовать предыдущую теорему, чтобы уменьшить размерность n в контрпримерах проблемы Борсука.

Число кликового покрытия

Подграф произвольного простого графа G называется *кликой*, если любые две его вершины соединены ребром (такой подграф сам является полным графом).

Замечание. Каждый одновершинный подграф также является кликой.

Семейство множеств вершин всех клик графа G образует покрытие множества вершин графа G. Наименьшее возможное число клик, образующих такое покрытие, называется *числом кликового покрытия* графа G и часто обозначается $\theta(G)$. Нахождение минимального кликового покрытия является NP-сложной задачей.

Пусть $G = (V, E)$ — конечный граф. Фиксируем два действительных числа $0 < a < b \leq 2a$. Задаем метрику на V следующим образом: расстояние между

- смежными вершинами графа G равно a, а
- несмежными вершинами графа G равно b.

Теорема (А.О.Иванов, А.Т.). *В описанных выше обозначениях имеет место*

$$\theta(G) = \min\bigl\{m \in \mathbb{Z} : m > 0,\ 2d_{GH}(a\Delta_m, V) < b\bigr\}.$$

Задача. Использовать предыдущую теорему для вычисления числа кликового покрытия в неизвестных случаях.

Спасибо за внимание!