Изгибания скольжения компактных поверхностей и гипотеза Эйлера

И.Х. Сабитов

2 марта 2023 г.

План доклада

1. История вопроса

2. Доказательство основной теоремы

3. Вопрос о тривиальности полученного б.м. изгибания

1. История вопроса

1. Гипотеза Эйлера, сформулированная им в 1770-х годах и опубликованная в первом томе его посмертных сочинений [1] под номером 97 по записям его ученика М.Е. Головина, утверждает. что компактная (т.е. ограниченная и без края) поверхность не допускает деформации изгибания. На самом деле у Эйлера нет такой четкой формулировки, так как в его время еще не было таких понятий, как компактность, непрерывность и изгибание. Такое понимание его предположения (даже будто бы и утверждения!) стало популярным, наверно, после появления статьи [2], в которой работе 97 из [1] приписывается именно такое толкование (хотя в той или иной формулировке этот вопрос наверняка должен был возникать у многих авторов еще в XIX веке, например, у Гаусса, Бонне, Петерсона и др.).

К настоящему времени гипотеза Эйлера доказана для выпуклых поверхностей в самой общей постановке, а для остальных классов поверхностей есть только отдельные результаты, о которых можно прочитать в [3], Во многих работах, в частности, и в [3], предлагается уточнить постановку задачи, обращая внимание на класс гладкости поверхности и ее рассматриваемых изгибаний, мы же сейчас предлагаем уточнить и вид изгибания. Среди многих видов изгибаний выделяются так называемые *изгибания скольжения*, в ходе которых точки поверхности изменяют свое положение в пространстве, оставаясь на само́й поверхности. Примером такого изгибания (правда, тривиального) является вращение поверхности вращения вокруг своей оси вращения. Изгибания скольжения известны, по-видимому, уже с 19-го века, по крайней мере они упоминаются в книге [4] со ссылкой на работу Бианки. В [4] утверждается, а в [5] доказывается, что метрика поверхности, допускающей изгибания скольжения, локально является метрикой вращения, и там же ставится вопрос о строении такой поверхности в целом при условии ее компактности.

Как ответ на этот вопрос в [6] показано, что такая поверхность должна быть гомеоморфна сфере или тору с метрикой вращения в целом. В настоящей работе доказана следующая теорема

Theorem

Любая компактная C^2 - гладкая поверхность в R^3 с метрикой вращения допускает скользящие б.м. изгибания 1-го порядка.

Мы предъявляем явный вид таких б.м. изгибаний, но вопрос о том, являются ли эти б.м. изгибания тривиальными или нет, в общем случае пока остается открытым.

2. Доказательство теоремы

2. Пусть рассматриваемая поверхность S допускает изгибания скольжения по себе и имеет топологический тип сферы. Тогда она является погружением в R^3 единичной сферы $S_0 \to R^3$ и ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ имеет представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta) = \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)\}. \tag{1}$$

Известно, что введенные координаты (ξ, η) всегда можно считать изотермическими, поэтому метрика поверхности имеет вид

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\xi^2 + d\eta^2), \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{2}$$

(учтено, что согласно [6] метрика должна быть метрикой вращения).

Аналитическое изгибание поверхности представляется в виде деформации

$$\mathbf{r}(\xi,\eta) \to \mathbf{r}(\xi,\eta,t) = \mathbf{r}(\xi,\eta) + 2t\mathbf{Z}_1(\xi,\eta) + 2t^2\mathbf{Z}_2(\xi,\eta) + \dots \tag{3}$$

с сохранением метрики ds^2, где параметр деформации t можно считать как время.
Изгибание скольжения поверхности по себе имеет в каждой точке поверхности вектор начальной скорости $2\mathbf{Z}_1(\xi,\eta)$, лежащий на касательной плоскости к поверхности, т.е. $\mathbf{Z}_1$ имеет вид

$$\mathbf{Z}_1 = a(\xi,\eta)\mathbf{r}_\xi + b(\xi,\eta)\mathbf{r}_\eta. \tag{4}$$

Эту скорость можно толковать также как поле бесконечно малого изгибания, которое по определению является полем начальных скоростей изгибания, поэтому векторное поле $\mathbf{Z}_1$ должно удовлетворять уравнению

$$d\mathbf{r}d\mathbf{Z}_1 = 0. \tag{5}$$

При раскрытии этого уравнения б.м изгибания по дифференциалам аргументов надо иметь в виду соотношения

$$\mathbf{r}_\xi^2 = \Lambda^2,\ \mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_\eta = 0,\ \mathbf{r}_\eta^2 = \Lambda^2,$$

$$2\mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_{\xi\xi} = (\Lambda^2)_\xi,\ 2\mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_{\xi\eta} = (\mathbf{r}_\xi^2)_\eta = (\Lambda^2)_\eta,\ 2\mathbf{r}_\eta\mathbf{r}_{\xi\eta}=(\mathbf{r}_\eta^2)_\xi=(\Lambda^2)_\xi, 2\mathbf{r}_\eta\mathbf{r}_{\eta\eta}=(\Lambda^2)_\eta.$$

Тогда из (5) получим систему

$$\begin{cases} a_\xi\Lambda^2 + \frac{a}{2}(\Lambda^2)_\xi + \frac{b}{2}(\Lambda^2)_\eta = 0 \\ b_\eta\Lambda^2 + \frac{a}{2}(\Lambda^2)_\xi + \frac{b}{2}(\Lambda^2)_\eta = 0 \\ b_\xi\Lambda^2+a\mathbf{r}_\eta\mathbf{r}_{\xi\xi}+\frac{b}{2}(\Lambda^2)_\xi+a_\eta\Lambda^2+\frac{a}{2}(\Lambda^2)_\eta+b\mathbf{r}_\xi\mathbf{r}_{\eta\eta}=0. \end{cases}$$

Вычитая 2-е уравнение из первого, получаем

$$a_\xi - b_\eta = 0, \tag{6}$$

а сумма этих уравнений дает уравнение

$$a_\xi + b_\eta = -a(\ln\Lambda^2)_\xi - b(\ln\Lambda^2)_\eta. \tag{7}$$

Учитывая разложения вторых производных радиус-вектора по базису $(\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v,\ \mathbf{n})$ с использованием символов Кристоффеля, 3-е уравнение принимает вид

$$a_\eta + b_\xi = 0. \tag{8}$$

Видим, что уравнения (6) и (8) составляют для функций a и b систему Коши-Римана, следовательно, функция $W = a + ib$ является голоморфной на всей поверхности.

Считаем, что координаты (ξ, η) являются на параметрической сфере S_0 стереографическими координатами. Тогда точка ∞ является на S_0 особой точкой параметризации. Пусть ей на поверхности S соответствует некоторая точка A. Перейдем к координатам $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ по закону $\zeta = \dfrac{1}{\tilde{\zeta}}$ с обозначением $\zeta = \xi + i\eta$, $\tilde{\zeta} = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$. Тогда точке A будет соответствовать регулярная точка $\tilde{\zeta} = 0$. Метрическая форма ds^2 как инвариантная величина не изменится, но примет вид

$$ds^2 = \tilde{\Lambda}^2(\tilde{\zeta})(d\tilde{\xi}^2 + d\tilde{\eta}^2) = \Lambda^2(\frac{1}{\tilde{\zeta}})\frac{d\tilde{\xi}^2 + d\tilde{\eta}^2}{(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)^2},$$

следовательно, $\Lambda^2(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$ как $O(\dfrac{1}{\rho^4}), \rho \to \infty$ (так как $\tilde{\Lambda}^2(\tilde{\zeta})$ при $\tilde{\zeta} \to 0$ стремится к отличной от нуля конечной величине). Тогда $a^2 + b^2 = \dfrac{|Z|^2}{\Lambda^2(\rho)} = O(\rho^4), \rho \to \infty$ (в слабом смысле, т.е. рост не выше 4-й степени).

Значит, целая голоморфная функция $W = a + ib$ является многочленом не выше 2-й степени, поэтому в самом общем случае $W(\zeta)$ имеет вид

$$W = a + ib = a_0\zeta^2 + a_1\zeta + a_2, (|a_0| \geq 0). \tag{9}$$

Далее, с учетом равенства (7) имеем $2Re\ W'_\zeta = -a(\ln\Lambda^2)_\xi - b(\ln\Lambda^2)_\eta$ или

$$Re\ W' + a(\ln\Lambda)_\xi + b(\ln\Lambda)_\eta = 0. \tag{10}$$

Используя вид W из (9) и учитывая, что Λ зависит только от $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, из (10) получаем равенство

$$2a_0\zeta + a_1 + 2\bar{a}_0\bar{\zeta} + a_1 + \bar{a}_1 + (\zeta\bar{W} + \bar{\zeta}W)(\ln\Lambda)'_\rho = 0,$$

из которого, положив $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, приходим к уравнениям

$$a_1 + \bar{a}_1 = 0,$$
$$2a_0 e^{2i\varphi} + 2\bar{a}_0 + (\bar{a}_0\rho^2 + \bar{a}_2 e^{2i\varphi} + a_0\rho^2 e^{2i\varphi} + a_2)(\ln\Lambda)'_\rho = 0.$$

Так как второе уравнение выполняется тождественно по φ, получается вывод, что $a_0 = a_2 = 0$ и $a_1 = ic$, где c - действительное число. Значит, $W = a + ib = ic\zeta, a = -c\eta, b = c\xi$, и

$$\mathbf{Z}_1 = c(-\eta\mathbf{r}_\xi + \xi\mathbf{r}_\eta), \tag{11}$$

при этом можем считать, что с самого начала в точке $\zeta = 0$ базисные векторы подчинялись условию $\mathbf{r}_\xi(0) = \Lambda(0)\mathbf{i}, \mathbf{r}_\eta(0) = \Lambda(0)\mathbf{j})$. Таким образом, $\mathbf{Z}_1(0,0) = \mathbf{0}$, и так как $\mathbf{r}_\xi^2 + \mathbf{r}_\eta^2 = 2\Lambda^2(\zeta) = O(\rho^{-4}$ при $\rho \to \infty$, получаем, что $\mathbf{Z}_1(\infty) = 0$. Значит, при изгибании скольжения на компактной поверхности есть по крайней мере две точки, в которых начальная скорость изгибания равна нулю.
На самом деле, в формуле (11) ничего неожиданного нет: в полярных координатах она имеет вид $\mathbf{Z}_1 = c\mathbf{r}_\varphi$, т.е. скольжение идет по касательной к φ-линиям.

3. Тривиально ли полученное б.м. изгибание?

Почему важен такой вопрос? Если поле $\mathbf{Z}_1$ окажется тривиальным, тогда есть надежда, что поверхность не допускает аналитических по параметру изгибаний, т.е и для изгибаний скольжения гипотеза Эйлера окажется верной. Здесь есть такая тонкость - известно, что если поле б.м. изгибаний поверхности состоит только из тривиальных б.м.изгибаний 1-го порядка, тогда поверхность не допускает аналитических по параметру изгибаний. Но если мы докажем, что б.м. изгибания скольжения 1-го порядка тривиальные, из этого не следует, что нет других нетривиальных б.м. изгибаний из числа не скользящих по поверхности. Поэтому тривиальность б.м. изгибания скольжения является только необходимым, но вовсе не достаточным условием неизгибаемости поверхности по упомянотому выше признаку аналитической неизгибанмости.

Посмотрим, тривиально ли полученное поле б.м. изгибания 1-го порядка. Если к данному полю б.м. изгибания добавить произвольное поле тривиального б.м. изгибания, то снова получим некоторое поле б.м. изгибания. Если поле $\mathbf{Z}_1$ из (10) тривиальное, тогда добавляемое поле тривиального б.м. изгибания можно подобрать так, чтобы новое поле было тождественно нулевым. Так как поле (10) уже равно $\mathbf{0}$ в точке O с координатами $(\xi, \eta) = (0.0)$, то добавлять можно только поле вращения $\mathbf{V} \times \mathbf{r}$ с постоянным полем $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$, при этом не обязательно, чтобы новое поле тоже было полем скольжения. Следовательно, мы должны проверить, можно ли подобрать поле $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$c(-\eta\mathbf{r}_\xi + \xi\mathbf{r}_\eta) + \{V_2 z - V_3 y, V_3 x - V_1 z, V_1 y - V_2\} = \mathbf{0}.$$

Переходя к полярным координатам, это уравнение можно представить в виде системы

$$x_\varphi + V_2 z - V_3 y = 0, \;\; y_\varphi + V_3 x - V_1 z = 0, \;\; z_\varphi + V_1 y - V_2 x = 0. \quad (12)$$

Проверку такой возможности проводим при трех возможных случаях. **Первый случай** $V_1 = V_2 = 0$. Тогда система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} cx_\varphi - V_3 y &= 0, \\ cy_\varphi + V_3 x &= 0, \\ z_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} c^2 x_{\varphi\varphi} + V_3^2 x &= 0, \\ c^2 y_{\varphi\varphi} + V_3^2 y &= 0, \\ z = z(\rho) &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Из этой системы выводим уравнение поверхности

$$x = C_1(\rho)\cos(\frac{V_3}{c}\varphi) + C_2(\rho)\sin(\frac{V_3}{c}\varphi)$$
$$y = D_1(\rho)\cos(\frac{V_3}{c}\varphi) + D_2(\rho)\sin(\frac{V_3}{c}\varphi)$$
$$z = z(\rho),$$

а требование регулярности поверхности около точки O приводит к равенству $V_3 = c$. Далее, эта поверхность должна иметь метрику

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2),$$

что, в частности, накладывает на коэффициенты C_1, C_2, D_1, D_2 условие выполнения равенств

$$C_1C_2 + D_1D_2 = 0, C_1^2 + D_1^2 = C_2^2 + D_2^2 = \rho^2\Lambda^2,$$

откуда получаем представления

$$C_1 = \rho\Lambda(\rho)\cos\alpha, D_1 = \rho\Lambda(\rho)\sin\alpha, C_2 = \rho\Lambda(\rho)\cos\beta, D_2 = \rho\Lambda(\rho)\sin\beta,$$

с равенством $\cos(\alpha - \beta) = 0$. Равенство $\mathbf{r}_\rho^2 = \Lambda^2$ получается подбором функции $z(\rho)$, а равенство $(\mathbf{r}_\rho \mathbf{r}_\varphi) = 0$ доказывается прямой проверкой.

В итоге получается, что поверхность является поверхностью вращения с осью вращения Oz, а ее найденное б.м. изгибание скольжения есть не что иное как вращение вокруг Oz. Значит, в рассмотренном случае нетривиального изгибания скольжения нет и для поверхностей вращения в этом классе изгибаний гипотеза Эйлера оказывается верной.

Второй случай $V_3 = 0, V_1 \neq 0, V_2 \neq 0$. Тогда система (12) принимает вид

$$cx_\varphi + V_2 z = 0, \tag{14}$$
$$cy_\varphi - V_1 z = 0, \tag{15}$$
$$cz_\varphi + V_1 y - V_2 x = 0,$$

откуда имеем

$$c^2 z_{\varphi\varphi} + (V_1^2 + V_2^2) z = 0.$$

Для регулярности $z(\xi, \eta)$ нужно выбрать V_1 и V_2 такими, чтобы было $V_1^2 + V_2^2 = c^2$, и для z получим значение

$$z = C_1(\rho)\cos\varphi + C_2(\rho)\sin\varphi. \tag{16}$$

Теперь из (13) и (14) можем найти x и y:

$$x = -\frac{V_2}{c}[C_1(\rho)\sin\varphi - C_2(\rho)\cos\varphi] + \frac{C_3(\rho)}{c} \quad (17)$$

$$y = \frac{V_1}{c}[C_1(\rho)\sin\varphi - C_2(\rho)\cos\varphi] + \frac{C_4(\rho)}{c}. \quad (18)$$

Коэффициенты $C_i(\rho), i = 1, 2, 3, 4$ находим из условия, что метрика поверхности известна. В частности, из соотношений

$$x_\varphi = -\frac{V_2}{c}z,\ \ y_\varphi = \frac{V_1}{c}z,\ \ z_\varphi = xV_2 - yV_1$$

при выборе $V_1^2 + V_2^2 = c^2$ находим, что

$$\rho^2\Lambda^2 = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = C_1^2(\rho) + C_2^2(\rho).$$

Значит,

$$C_1 = \rho\Lambda(\rho)\cos\alpha,\ \ C_2 = \rho\Lambda(\rho)\sin\alpha$$

и получаем такой вид для компонент радиуса-вектора поверхности:

$$x = -\frac{V_2}{c}(\rho\Lambda)\sin(\varphi - \alpha) + \frac{C_3(\rho)}{c}$$
$$y = \frac{V_1}{c}(\rho\Lambda)\sin(\varphi - \alpha) + \frac{C_4(\rho)}{c} \qquad (19)$$
$$z = \rho\Lambda\cos(\varphi - \alpha).$$

Остается найти $C_3(\rho)$ и $C_4(\rho)$ из условия знания остальных слагаемых метрики ds^2. Пропуская подробности вычислений, скажем только, что искомая поверхность со значением параметра $\alpha = 0$ окажется полученной из стандартной поверхности вращения с осью Oz

$$x = \xi\Lambda, \; y = \eta\Lambda, z = h(\rho)$$

действием ортогональной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{V_2}{c} & \frac{V_1}{c} \\ 0 & \frac{V_1}{c} & \frac{V_2}{c} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, и этом случае мы пока не получаем **новых** поверхностей с

Теперь рассмотрим **третий** возможный случай, когда у вектора вращения V все три компоненты V_1, V_2, V_3. отличны от нуля. Тогда для них из системы 12) для каждой компоненты дифференцированием получаем одинаковые уравнения вида, скажем,

$$x_{\varphi\varphi\varphi} + \frac{\Sigma}{c^2} x_\varphi = 0, \tag{20}$$

где $\Sigma = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$. Выберем $\Sigma = 1$, что нужно для регулярности полученных ниже значений $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)$. Тогда общее решение уравнения (20) даст компоненты соответствующей поверхности

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = C_1(\rho) \cos\varphi + C_2(\rho) \sin\varphi + D_1(\rho) \\ y(\xi, \eta) = C_3(\rho) \cos\varphi + C_4(\rho) \sin\varphi + D_2(\rho) \\ z(\xi, \eta) = C_5(\rho) \cos\varphi + C_6(\rho) \sin\varphi + D_3(\rho) \end{cases}$$

Общий вывод пока такой
если метрика вращения, заданная сфере, допускает изометрическую реализацию в R^3 в виде некоторой поверхности, отличной от поверхности вращения, то любая такая поверхность является нежесткой относительно б.м. изгибаний скольжения.
Все высказанные утверждения верны и для поверхностей с метрикой вращения топологического типа тора.

L. Euleri, Opera postuma. I. Petropoli, 1862, pp. 494-496.

H/ Gluck, Almost all simply connected closed surfaces are rigid. Lectue Notes in Math., 1975, v.438, pp.225-240 (русский перевод в сборнике "Математика М., Мир, вып. 18, с. 148-163.)

И.Х. Сабитов, К гипотезе Эйлера о неизгибаемости компактных поверхностей. http://dfgm.math.msu.su/chairsem.php (2022).

Каган В.Ф., Основы теории поверхностей. Часть вторая. М.-Л., ОГИЗ, 1948.

Spivak M., A comprehensive introduction in Differential Geometry, vol. 5, Berkeley: Publish or Perish, 1979, 661 p.

Сабитов И.Х., Квазиконформные отображения поверхности, порожденные ее изометрическими преобразованиями, и изгибания поверхности на себя. Фундаментальная и прикладная математика, 1995, 1:1, с. 281-288.