Проблема симплектической и контактной линеаризации уравнений типа Монжа–Ампера

А.Г. Кушнер

МГУ имени М. В. Ломоносова
Факультет физики

Семинар А.Т. Фоменко
13 февраля 2023

Уравнение типа Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными:

$$\boxed{Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0}$$

Системы Якоби:

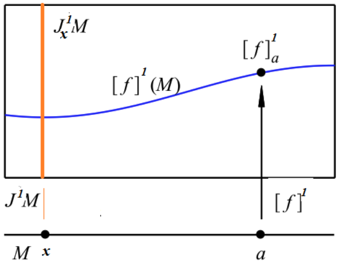
$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} A_1u_x + B_1u_y + C_1v_x + D_1v_y + E_1(u_xv_y - u_yv_x) + F_1 = 0 \\ A_2u_x + B_2u_y + C_2v_x + D_2v_y + E_2(u_xv_y - u_yv_x) + F_2 = 0 \end{array}\right.}$$

M — 2-мерное гладкое многообразие; x_1, x_2 — лок. коорд.;

- $f \sim_a g$ если $f(a) = g(a), \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a = \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_a, \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_a = \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_a$

  Класс эквивалентности $[f]^1_a$ называется *1-джетом* функции f в точке $a \in M$.
- Пространство 1-джетов

$$J^1_a(M) := C^\infty(M)/\sim_a; \quad J^1(M) := \bigcup_{a \in M} J^1_a(M)$$



- $J^1 = J^1(M)$ — пространство 1-джетов функций на M; канонические координаты: x_1, x_2, u, p_1, p_2; $\theta = [f]^1_a \in J^1$;

$$x_i(\theta) = a_i, \quad u(\theta) = f(a), \quad p_i(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a); \quad i = 1, 2;$$

- Распределение Картана на J^1:

$$\mathcal{C} : J^1 \ni a \mapsto \mathcal{C}(a) := \ker \varkappa_a \subset T_a J^1; \quad \kappa = du - p_1 dx_1 - p_2 dx_2$$

$$\mathcal{C} = \langle \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2} \rangle$$

- $T_a J^1 = \mathcal{C}(a) \oplus \mathbb{R}$
- 1-график функции v:

$$\Gamma^1_v := [v]^1(M) = \left\{ u = v(x), p_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1}, p_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} \subset J^1$$

$$\varkappa|_{\Gamma^1_v} = 0$$

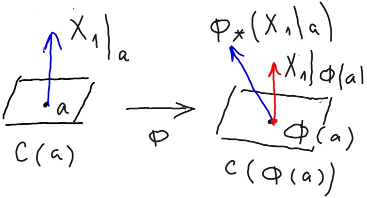
Контактные преобразования

Определение

Преобразование $\Phi : J^1 \to J^1$ *называется* контактным, *если оно сохраняет распределение Картана:* $\Phi_*(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
Если преобразование сохраняет форму Картана, т.е. $\Phi^*(\varkappa) = \varkappa$, *то оно называется* строго контактным.

Неканоничность разложения:

$$T_aJ^1 = C_(a) \oplus \mathbb{R}X_1(a), \quad X_1 = \partial_u$$



Оператор Лычагина

$$\omega \in \Omega^2(J^1); \quad \Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Omega^2(M)$$

$$\boxed{\Delta_\omega(v) := ([v]^1)^*(\omega)}$$

Пример

$$\omega = dp_1 \wedge dp_2 - dx_1 \wedge dx_2;$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\omega(v) &= d\left(v_{x_1}\right) \wedge d\left(v_{x_2}\right) - dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(v_{x_1x_1} dx_1 + v_{x_1x_2} dx_2\right) \wedge \left(v_{x_2x_1} dx_1 + v_{x_2x_2} dx_2\right) - dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(v_{x_1x_1} v_{x_2x_2} - v^2_{x_1x_2} - 1\right) dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_\omega : \Delta_\omega(v) = 0}$$

- $\mathcal{I} := \ker(\Delta : \omega \to \Delta_\omega) = \{f d\varkappa + \alpha \wedge \varkappa \,|\, f \in C^\infty(J^1), \alpha \in \Omega^1(J^1)\}$
- $\alpha \sim \beta \in$ если $\alpha - \beta \in \mathcal{I}$.

Пример

Пусть $\alpha = dx_1 \wedge dp_1$ *и* $\beta = -dx_2 \wedge dp_2$. *Тогда* $\alpha \sim \beta$*:*

$$\alpha - \beta = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2 = d\varkappa \in \mathcal{I}.$$

Если $\alpha \sim \beta$ то $\Delta_\alpha = \Delta_\beta$.

- Эффективные 2-формы:

$$\Omega^2_\varepsilon(J^1) := \Omega^2(J^1)/\mathcal{I} = \{[\alpha] \,|\, \alpha \in \Omega^2(J^1)\}$$

- Представитель класса: $\partial_u \rfloor \omega = 0, \quad \omega \wedge d\varkappa|_{\mathcal{C}} = 0$

Эффективные 2-формы:

$$\omega = E dx_1 \wedge dx_2 + B\left(dx_1 \wedge dp_1 - dx_2 \wedge dp_2\right) + \\ + C dx_1 \wedge dp_2 - A dx_2 \wedge dp_1 + D dp_1 \wedge dp_2$$

Уравнения Монжа–Ампера:

$$\boxed{A v_{xx} + 2B v_{xy} + C v_{yy} + D(v_{xx} v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0}$$

Определение

Поверхность $L \subset J^1$ называется многозначным решением уравнения $\mathcal{E}_\omega$ если

1. *L — интегральное многообразие распределения Картана, т.е. $\varkappa \mid_L = 0$;*
2. *ограничение дифференциальной 2-формы ω на L равно нулю: $\omega \mid_L = 0$.*

Действие контактных преобразований на уравнения Монжа–Ампера

Определение

Преобразование $\Phi : J^1 \to J^1$ *называется контактным, если оно сохраняет распределение Картана:* $\Phi^*(\varkappa) \wedge \varkappa = 0$.

$$\Phi^*(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$$

Теорема (S. Lie)

Класс уравнений Монжа-Ампера замкнут относительно контактных преобразований.

$$\Phi^* : \Omega^2_\varepsilon(J^1) \to \Omega^2_\varepsilon(J^1), \quad \Phi^*([\omega]) := [\Phi^*(\omega)]$$

Пример

$$\boxed{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 1}$$

$$\omega = dp_1 \wedge dp_2 - dx \wedge dy$$

$$\Phi : (x, y, u, p_1, p_2) \mapsto (-p_1, y, u - xp_1, x, p_2)$$

$$\Phi^*(\omega) = dx \wedge dp_2 - dy \wedge dp_1$$

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

Геометрические структуры

$$T_aJ^1 = \mathcal{C}(a) \oplus \mathbb{R}, \qquad \Omega = d\varkappa|_{\mathcal{C}}$$

- Неголономное поле эндоморфизмов:

$$A_\omega : D(\mathcal{C}) \to D(\mathcal{C}), \quad A_\omega X \rfloor \Omega = X \rfloor \omega$$

- Пфаффиан $\mathrm{Pf}(\omega)$: $\quad \omega \wedge \omega = \mathrm{Pf}(\omega)\Omega \wedge \Omega$

$$\boxed{A_\omega + \mathrm{Pf}(\omega) = 0}$$

- Нормировка: $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{\sqrt{|\mathrm{Pf}(\omega)|}}$
- $\mathrm{Pf}(\omega) < 0$ – гиперболическое уравнение, $\quad A_\omega^2 = 1$
  $\mathrm{Pf}(\omega) > 0$ – эллиптическое уравнение, $\quad A_\omega^2 = -1$
  $\mathrm{Pf}(\omega) = 0$ – параболическое уравнение, $\quad A_\omega^2 = 0.$

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0$$

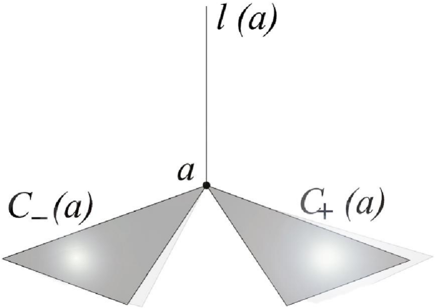
$$A_\omega = \left(B\frac{d}{dx_1} + C\frac{d}{dx_2} - E\frac{\partial}{\partial p_2}\right)\otimes dx_1 + \left(B\frac{\partial}{\partial p_1} + D\frac{d}{dx_2} - A\frac{\partial}{\partial p_2}\right)\otimes dp_1$$
$$\left(E\frac{\partial}{\partial p_1} - A\frac{d}{dx_1} - B\frac{d}{dx_2}\right)\otimes dx_2 + \left(C\frac{\partial}{\partial p_1} - D\frac{d}{dx_1} - B\frac{d}{dx_2}\right)\otimes dp_2$$

В базисе

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{d}{dx_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2}$$

$$A_\omega = \left\| \begin{matrix} B & -A & 0 & -D \\ C & -B & D & 0 \\ 0 & E & B & C \\ -E & 0 & -A & -B \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

Характеристические распределения

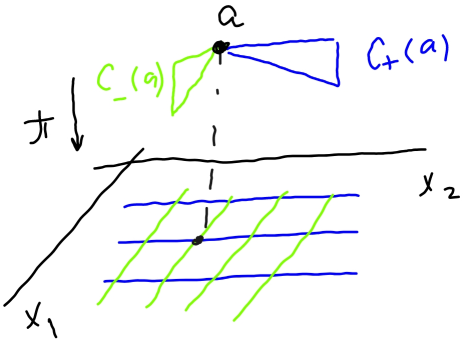


Каноническое разложение:

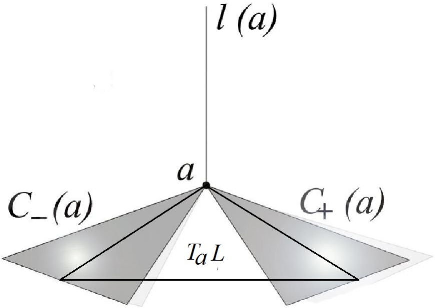
$$\mathcal{C}(a) = C_-(a) \oplus C_+(a), \quad T_a J^1 = C_-(a) \oplus l(a) \oplus C_+(a)$$

- Распределения C_+ и C_- косоортогоральны;
- 2-формы $\Omega = d\varkappa|_{C_\pm}$ невырождены.

Характеристические распределения для линейных гиперболических уравнений



Касательная плоскость к многозначному решению



$$T_a L = L_-(a) \oplus L_+(a)$$

Тензорные инварианты

$$q^s_{j,k}(X,Y) := -\mathbf{P}_s[\mathbf{P}_j X, \mathbf{P}_k Y],$$

Косая свёртка: $\langle \alpha\otimes X, \beta\otimes Y\rangle = (Y\rfloor\alpha)\wedge(X\rfloor\beta)\,, \qquad \alpha,\beta\in\Omega^2$
Дифференциальные 2-формы:

$$\lambda_+ = \left\langle q^2_{1,1}, q^1_{2,3}\right\rangle, \qquad \lambda_- = \left\langle q^2_{3,3}, q^3_{1,2}\right\rangle.$$

Пример (Линейные гиперболические уравнения)

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y)$$

$$\lambda_- = kdx\wedge dy \quad \textit{и} \quad \lambda_+ = -hdx\wedge dy$$

"Инварианты" Лапласа $k = ab + c - b_y \qquad h = ab + c - a_x$
Допустимые преобразования:

$$\Phi : (x,y,v)\mapsto (X(x), Y(y), A(x,y)v), \qquad (A(x,y)\neq 0)$$

Теорема (Овсянников?)

Линейное гиперболическое уравнение может быть приведено к волновому уравнению $v_{xy}=0$ *преобразованием* Φ *тогда и только тогда, когда* $k=h=0$.

Пример (Линейные эллиптические уравнения)

$$v_{xx} + v_{yy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y)$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4}\left(b_x - a_y \pm \left(\frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2c - a_x - b_y\right)\iota\right) dx \wedge dy$$

"Инварианты" Коттона:

$$K = b_x - a_y, \qquad \text{и} \qquad H = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2c - a_x - b_y$$

Контактная линеаризация

Теорема

Гиперболическое регулярное уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно волновому уравнению $v_{xy} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_{\pm} = 0$.

$$\boxed{Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0}$$

A, B, C, D, E, F – функции переменных x, y, u_x, u_y, т.е. $L_{\partial_u}(\omega) = 0$. Проекция вдоль ∂_u: $\pi : J^1M \to T^*M$.

- кокасательное расслоение: $T^*M : q_1, q_2, p_1, p_2$;
- симплектическая структура: $\Omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$;
- оператор $\Delta_\omega(v) := F_v^*(\omega), \quad F_v : M \to T^*M$,

$$F_v : (q_1, q_2) \mapsto \left(q_1, q_2, \frac{\partial v}{\partial q_1}, \frac{\partial v}{\partial q_2}\right)$$

- эффективная форма: $\omega \in \Omega^2(T^*M), \quad \omega \wedge \Omega = 0$;
- многозначнок решение: лагранжево многообразие: $\omega|_L = 0$;
- поле операторов: $A_\omega X \rfloor \ \Omega = X \rfloor \omega$

Симплектическая линеаризация

Теорема (Лычагин, Рубцов)

Невырожденное симплектическое уравнение Монжа–Ампера $\mathcal{E}_\omega$ симплектически эквивалентно

- *волновому уравнению $v_{xx} - v_{yy} = 0$ (в гиперболическом случае) или*
- *уравнению Лапласа $v_{xx} + v_{yy} = 0$ (в эллиптическом случае)*

тогда и только тогда, когда $d\omega = 0$ или, эквивалентно, скобка Нийенхейса оператора A_ω равна нулю. Здесь ω – нормированная форма, т.е. $\mathrm{Pf}(\omega) = \pm 1$.

$$\boxed{N_A(X, Y) := A^2[X, Y] + [AX, AY] - A[AX, Y] - A[X, AY]}$$

Набросок доказательства для эллиптических уравнений

Почти комплексная структура $A^2 = -1$ *интегрируема*, если существуют комплексные координаты $z_1 = x_1 + \iota y_1$, $z_2 = x_2 + \iota y_2$, такие, что

$$A : \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_k} \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial y_k}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y_k} \longmapsto -\dfrac{\partial}{\partial x_k}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iota_{[X,Y]}(\Omega) &= \iota_X d\iota_Y(\Omega) - d\Omega(X,Y) - \iota_Y d\iota_X(\Omega), \\
\iota_{A[X,AY]}(\Omega) &= -\iota_X d\iota_Y(\Omega) + d\Omega(X,Y) - \iota_{AY} d\iota_X(\omega), \\
\iota_{A[AX,Y]}(\Omega) &= \iota_{AX} d\iota_Y(\omega) + \iota_Y d\iota_X(\Omega) + d\Omega(X,Y), \\
\iota_{[AX,AY]}(\Omega) &= \iota_{AX} d\iota_Y(\omega) + d\Omega(X,Y) - \iota_{AY} d\iota_X(\omega).
\end{aligned}$$

$$Z := A^2[X,Y] + [AX,AY] - A[AX,Y] - A[X,AY]$$

Складывая, получаем что $\iota_Z(\Omega) = 0$, т.е. $Z = 0 \quad \forall X, Y$, т.е. почти комплексная структура интегрируема.

Комплексная симплектическая структура:

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^{\mathbb{C}} - \iota\omega^{\mathbb{C}}$$

Комплексные координаты на T^*M: z_1, z_2.
Комплексный вариант теоремы Дарбу:
$\theta = dz_1 \wedge dz_2$, т.е.
$\Omega = dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2$,
$\omega = -dx_1 \wedge dy_2 - dy_1 \wedge dx_2$, или

$$\Omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2,$$
$$\omega = dq_1 \wedge dp_2 + dp_1 \wedge dq_2.$$

$q_1 = x_1, p_1 = x_2, q_2 = y_1, p_2 = -y_2.$

Система уравнений Якоби

- N – гладкое 2-мерное многообразие, $M = N \times \mathbb{R}^2$;
- $\theta_1, \theta_2 \in \Omega^2(M)$;
- $u_1, u_2 \in C^\infty(N \to \mathbb{R})$; $\Gamma_{(u_1,u_2)} \subset M$ – график вектор-функции (u_1, u_2);
- $\Delta_\theta : C^\infty(N \to \mathbb{R}) \times C^\infty(N \to \mathbb{R}) \to \Omega^2(N)$;

$$\boxed{\Delta_\theta(u_1, u_2) := \theta|_{\Gamma_{(u_1,u_2)}}}$$

- система Якоби:

$$\mathcal{E}_{(u_1,u_2)} : \begin{cases} \Delta_{\theta_1}(u_1, u_2) = 0, \\ \Delta_{\theta_2}(u_1, u_2) = 0. \end{cases}$$

- $\theta_1 \wedge \theta_2 = 0$, $\theta_1 \wedge \theta_1 \pm \theta_2 \wedge \theta_2 = 0$
- $\boxed{A_{\mathcal{E}} X \rfloor\ \theta_2 = X \rfloor \theta_1}$

Координатное представление систем Якоби

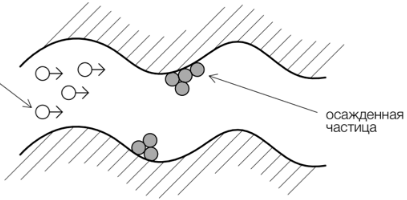
$$\begin{cases} A_1 u_x + B_1 u_y + C_1 v_x + D_1 v_y + E_1(u_x v_y - u_y v_x) + F_1 = 0, \\ A_2 u_x + B_2 u_y + C_2 v_x + D_2 v_y + E_2(u_x v_y - u_y v_x) + F_2 = 0, \end{cases}$$

Линеаризация систем Якоби

Теорема (Fossum, Туницкий)

Система Якоби $\mathcal{E}$ эквивалентна системе с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда скобка Нийенхейса оператора $A_{\mathcal{E}}$ равна нулю.

Совместно с С. Мухиной



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = h(v)u. \end{cases}$$

- u – концентрация взвешенных частиц,
- v – концентрация захваченных частиц,
- $h(v)$ – коэффициент захвата частиц.

$$\begin{cases} \theta_1 = h(u_2)u_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge du_1 - dx_2 \wedge du_1, \\ \theta_2 = -h(u_2)u_1 dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge du_2. \end{cases}$$

$$\Omega_1 = -\theta_1 + \theta_2, \quad \Omega_2 = \theta_1 + \theta_2,$$

$$\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0, \quad \Omega_1 \wedge \Omega_1 + \Omega_2 \wedge \Omega_2 = 0$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = -2u_1 h(u_2) dx_1 \wedge dx_2 - dx_1 \wedge du_1 + dx_2 \wedge du_1 - dx_2 \wedge du_2, \\ \Omega_2 = dx_1 \wedge du_1 - dx_2 \wedge du_1 - dx_2 \wedge du_2. \end{cases}$$

Скобка Нийенхейса оператора $A_{\mathcal{E}}$ не равна нулю!

$$\Phi : (x_1, x_2, u_1, u_2) \mapsto (x_1 - x_2, -x_2, u_1, u_2)$$

$$\begin{cases} \omega = 2h(u_2)u_1 dx_1 \wedge dx_2 - dx_1 \wedge du_1 + dx_2 \wedge du_2 \\ \Omega = dx_1 \wedge du_1 + dx_2 \wedge du_2 \end{cases}$$

От системы Якоби к симплектическому уравнению Монжа–Ампера

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2, \quad p_1 = u_1, \quad p_2 = u_2,$$

$$\begin{cases} \omega_0 = 2h(p_2)p_1 dq_1 \wedge dq_2 - dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2, \\ \Omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2. \end{cases}$$

$$\boxed{v_{q_1 q_2} = h(v_{q_2}) v_{q_1}}$$

Это симплектическое гиперболическое уравнение

$$A_{\omega_0} = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_1 h(p_2) & -1 & 0 \\ -2p_1 h(p_2) & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Скобка Нийенхейса оператора A_{ω_0} не равна нулю и поэтому уравнение не может быть приведено к волновому уравнению контактным преобразованием!

От симплектической геометрии к контактной

$$\mathcal{C}_+ = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial q_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + p_1 h(p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} \right\rangle$$

$$\mathcal{C}_- = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u} + p_1 h(p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} \right\rangle$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial u} + p_1 h'(p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} + h(p_2) \frac{\partial}{\partial p_2}$$

$$\lambda_+ = -h''(p_2)\left(h(p_2) p_1 p_2 dq_1 \wedge dq_2 - h(p_2) p_1 dq_1 \wedge du + p_1 dq_1 \wedge dp_2\right)$$

$$\lambda_- = 0$$

Теорема

Уравнение $v_{q_1 q_2} = h(v_{q_2}) v_{q_1}$ контактно эквивалентно волновому уравнению $v_{q_1 q_2} = 0$ тогда и только тогда, когда функция h линейна.

$$\boxed{v_{q_1 q_2} = v_{q_1}(\alpha v_{q_2} + \beta)}$$

$$\Phi_1 : (q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto (q_1, \alpha^{-1} q_2, u + \alpha^{-1}\beta q_2, p_1, \alpha p_2 + \beta)$$

$$\boxed{v_{q_1 q_2} = \alpha v_{q_1} v_{q_2}}$$

Интегралы распределений

$$C_-^{(1)} : \quad H_1^- = q_1, \quad H_2^- = p_1 e^{-\alpha u}$$

$$C_+^{(1)} : \quad H_1^+ = q_2, \quad H_2^+ = p_2 e^{-\alpha u}$$

$$\Phi_2 : (q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto (q_1, q_2, -\alpha^{-1} e^{-\alpha u}, p_1 e^{-\alpha u}, p_2 e^{-\alpha u})$$

$$\boxed{v_{q_1 q_2} = 0}$$

Теорема

Общее решение уравнения $v_{q_1 q_2} = v_{q_1}(\alpha v_{q_2} + \beta)$ *имеет вид*

$$v = -\frac{1}{\alpha}\left(\beta q_2 + \ln\left(-\alpha A(q_1) + \alpha B\left(\frac{q_2}{\alpha}\right)\right)\right).$$

Теорема

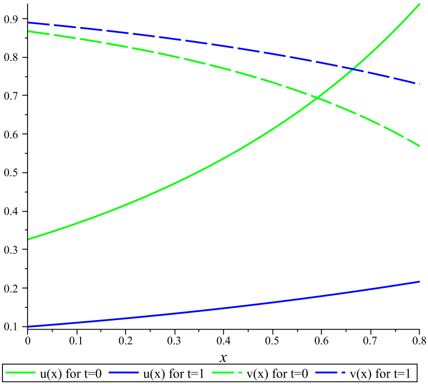
Общее решение уравнения системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} - (\alpha v + \beta)u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = (\alpha v + \beta)u \end{cases}$$

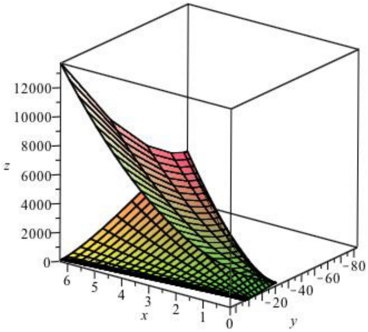
где $\alpha \neq 0$ *имеет вид*

$$\begin{cases} u = u = \dfrac{A'(x-t)}{\alpha(A(x-t) - B(x))}, \\ v = \dfrac{\beta(B(x) - A(x-t)) - B'(x)}{\alpha\,(A(x-t) - B(x))}. \end{cases}$$

Здесь A, B *– произвольные функции.*



Распределение взвешенных и захваченных частиц в различные моменты времени.


12000
10000
8000
z
6000
4000
2000
0
6
5
4
3
x
2
1
0
-20
-40
-60
-80
y

$$u^i_t = \sum_{j=1}^{n} A^i_j(u^1, \dots, u^n) u^j_x, \quad i = 1, \dots, t.$$

$$H_A(X, Y) = A^2 N_A(X, Y) + N_A(AX, AY) - AN_A(AX, Y) - AN_A(X, AY).$$

Теорема (Haantjes)

Матрица A диагонализуема тогда и только тогда, когда $H_A = 0$.

Haantjes, A. On Xn – 1-forming sets of eigenvectors. *Indagationes Mathematicae*. - 1955. - V. 17, No2. - P. 158–162.

Пусть A — поле полупростых эндоморфизмов на вещественном гладком многообразии N и

$$T_a^{\mathbb{C}}N = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i(a).$$

Теорема

Пусть A — поле полупростых эндоморфизмов. Тогда тензор Хаантьеса H_A допускает следующее разложение:

$$H_A = -\sum_{j,k,s} \left((\lambda_s - \lambda_j)(\lambda_s - \lambda_k)\right)^2 \tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}.$$