Проблема Ферма–Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами

Галстян Арсен Хачатурович,
аспирант (МГУ им. М.В. Ломоносова, мехмат, каф. ДГиП)

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф. Тужилин Алексей Августинович

2022 г.

Всюду далее X — это конечномерное нормированное пространство и $\mathcal{H}(X)$ — пространство всех непустых компактных подмножеств пространства X, наделённое метрикой Хаусдорфа d_H.
Пусть $a \in X$, тогда

$$B_r(a) := \{x : |xa| \le r\};\;\; U_r(a) := \{x : |xa| < r\}.$$

Пусть $A \in \mathcal{H}(X)$, тогда

$$B_r(A) := \{x : \min_{a \in A} |xa| \le r\};\;\; U_r(A) := \{x : \min_{a \in A} |xa| < r\}.$$

Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$, тогда по определению

$$d_H(A, B) = \min\{r : A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\}.$$

Задача (проблема Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$): Пусть дан конечный набор компактов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Требуется найти все компакты K, реализующие минимум функции

$$S_{\mathcal{A}}(K) = \sum_{i=1}^{n} d_H(K, A_i).$$

Множество решений обозначается через $\Sigma(\mathcal{A})$. Известно, что $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(\mathcal{A})$, каждый из которых соответствует своему вектору расстояний по Хаусдорфу

$$d = (d_1, \ldots, d_n),$$

где d_i — это расстояние Хаусдорфа от A_i до любого компакта из $\Sigma_d(\mathcal{A})$. Каждый класс решений $\Sigma_d(\mathcal{A})$ содержит в себе единственный максимальный по включению компакт K_d и некоторое количество минимальных по включению компактов K_λ.

Утверждение (Иванов А.О., Тропин А.М., Тужилин А.А.)

(i) *В ограниченно компактном пространстве* Y *для* $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(Y)$ *верно*

$$\Sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset.$$

(ii) $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда*

$$K_\lambda \subset K \subset K_d$$

для некоторого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *и максимального компакта* $K_d \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

(iii) *Если* K_d *— максимальный компакт в* $\Sigma_d(\mathcal{A})$, *то* $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$.

Ещё немного определений

- Элементы из $\Sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(X)$ будем называть *компактами Штейнера*;
- Набор $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ называется *границей*, а его элементы $A_i \in \mathcal{H}(X)$ мы называем *граничными компактами*;
- Границу, все элементы которой являются конечными подмножествами, назовём *финитной*;
- Границу, все элементы которой являются выпуклыми компактами, назовём *выпуклой*.

Начало блока про финитные границы

Случай финитных границ

Нам понадобятся обозначения:

- Количество точек в граничном компакте A_i обозначим через m_i, т. е. $\#A_i = m_i$;
- Точки в граничных компактах A_i будем обозначать через a^i_j, т.е. $A_i = \{a^i_j\}_{j=1}^{m_i}$;
- Вместо $B_{d_i}(A_i)$ и $B_{d_i}(a^i_j)$ для краткости будем далее писать B^i и B^i_j соответственно;
- Множество $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Критерий минимального компакта Штейнера

Утверждение (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Любой компакт Штейнера $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ содержит в себе конечный компакт Штейнера $K_f \in \Sigma_d(\mathcal{A})$. В частности, каждый минимальный компакт Штейнера в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ конечен.

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Компакт $K \subset X$ является минимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие три условия:

(1) *K — конечное подмножество K_d;*

(2) *$K \cap B_j^i \neq \emptyset$ для любых $i \in 1, \ldots, n$ и $j \in 1, \ldots, m_i$;*

(3) *для любой $p \in K$ существуют $i \in 1, \ldots, n$ и $j \in 1, \ldots, m_i$ такие, что $\big(K \setminus \{p\}\big) \cap B_j^i = \emptyset$, т.е. K — минимальное по включению подмножество K_d, удовлетворяющее условию (2).*

И ещё немного определений

Определение

Отношением между множествами M и N называется произвольное подмножество декартова произведения $M \times N$.

Определение

Пусть $K \in \mathcal{H}(X)$. Зададим отношение $R(K) \subset K \times \widetilde{A}$ следующим образом: $(p, a^i_j) \in R(K)$, если и только если $|p\, a^i_j| \le d_i$. Отношение $R(K)$ назовем *d-каноническим* или просто *каноническим*.

Определение

Пусть дано отношение $R \subset M \times N$. Двудольный граф G_R с множеством вершин $M \sqcup N$, две вершины $m \in M$ и $n \in N$ которого соединены ребром, если и только если $(m, n) \in R$, называется *графом отношения* R.

Алгоритм построения минимального компакта Штейнера

Алгоритм (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

- *Шаг 1. Пусть* $K' \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *— произвольный компакт Штейнера (например,* $K_d = \bigcap_{i=1}^n B^i$*) и* $R' = R(K')$ *— каноническое отношение.*
- *Шаг 2. Для каждой* $a_j^i \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *выберем* $p \in K'$ *такую, что* $(p, a_j^i) \in R'$ *(для разных* a_j^i *выбранные точки могут совпадать); множество выбранных точек обозначим через* K*. В результате мы получим каноническое отношение* $R = R(K)$ *как ограничение* R' *на* $K \times \widetilde{\mathcal{A}}$*. Возьмём граф* G_R *этого отношения.*
- *Шаг 3. Если в* K *содержатся точки, являющиеся вершинами графа* G_R*, смежными лишь с вершинами степени больше 1, то выбираем любую из этих точек и удаляем её из множества* K*, перестраиваем отношение* $R(K)$ *и граф* G_R*. Повторяем Шаг 3 до тех пор, пока это возможно.*

Алгоритм построения минимального компакта Штейнера

Утверждение (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Предыдущий алгоритм корректен, результат его работы — минимальный компакт Штейнера.

Утверждение (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

С помощью предыдущего алгоритма может быть построен любой минимальный компакт $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

Оценки на число точек в минимальном компакте

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Для любого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *верно*

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{\mathcal{A}} - n + 1,$$

а в случае, когда имеется больше одного A_i, *для которого* $m_i > 1$, *выполняется*

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{\mathcal{A}} - n,$$

где n *— количество граничных компактов.*

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Если норма пространства X *строго выпукла и в* K_d *нет изолированных точек, то*

$$\#K_\lambda \le \#\widetilde{\mathcal{A}} - n.$$

Определение точек сцепки

Определение

Если $\#\left(B_j^i \cap K_d\right) < \infty$, то будем называть $B_j^i \cap K_d$ *множеством точек сцепки* K_d *с* B_j^i и обозначать его через $\mathrm{HP}_d(a_j^i)$.

Множество всех таких a_j^i, для которых $\#\left(B_j^i \cap K_d\right) < \infty$ обозначим через D. Введём обозначение

$$\mathrm{HP}_d(D) := \bigcup_{a_j^i \in D} \mathrm{HP}_d(a_j^i).$$

Утверждение (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Множество $\mathrm{HP}_d(D)$ *содержится в* ∂K_d.

Теорема о существовании точек сцепки

Все результаты далее в блоке про финитные границы формулируются для пространств X со строго выпуклой нормой.

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Для любой финитной границы $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ существует такая $a_j^i \in A_i$, что $\mathrm{HP}_d(a_j^i) \neq \emptyset$.

Следствие (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Для любого $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ выполняется: $\partial K_d \cap K \neq \emptyset$.

Критерий единственности минимального компакта Штейнера в классе решений

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Минимальный компакт Штейнера K_λ — единственный минимальный компакт в $\Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a_j^i такая, что $\mathrm{HP}_d(a_j^i) = \{p\}$.

Свойства минимальных компактов Штейнера

Будем говорить, что на точке $p \in X$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a^i_j \in A_i$ такая, что $|a^i_j\, p| = d_i$.

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Каждое d_i реализуется по крайней мере на одной точке из $K_\lambda \cap \mathrm{HP}_d(D)$ для любого $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

Теорема (Галстян А.Х., Иванов А.О., Тужилин А.А.)

Для каждого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ и любого номера i существует точка $p \in K_\lambda$ такая, что на ней реализуются по крайней мере два расстояния d_i и d_k $(i \neq k)$.

Конец блока про финитные границы

Обобщение концепции множества сцепки на произвольные границы

Определение

Точку $a \in A_i$ назовём *дискретной*, если $\#B_{d_i}(a) \cap K_d < \infty$.

Определение

Точку $a \in A_i$ назовём *неплотной*, если $\mathrm{Int}\big(B_{d_i}(a) \cap K_d\big) = \emptyset$.

Определение

Точку $a \in A_i$ назовём *далёкой*, если $U_{d_i}(a) \cap K_d = \emptyset$.

О совпадении понятий

Замыкание множества $M \subset X$ всюду далее будем обозначать через $\mathrm{Cl}\, M$.

Утверждение (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, K_d) = K_d$, *то все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Следствие (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если $\mathrm{Int}\, K_d \neq \emptyset$ *и граница* $\mathcal{A}$ *выпукла, то все неплотные точки совпадают с далёкими.*

Утверждение (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если граница $\mathcal{A}$ *финитна и норма пространства* X *строго выпукла, то все неплотные точки совпадают с дискретными.*

О совпадении понятий

Следствие (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если граница $\mathcal{A}$ финитна и норма пространства X строго выпукла, то всегда найдётся по крайней мере один граничный компакт, содержащий неплотную точку.

Теорема (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если граница $\mathcal{A}$ финитна, норма пространства X строго выпукла и K_d не содержит в себе изолированных точек, то неплотные, дискретные и далёкие точки совпадают друг с другом.

Случай границы без далёких точек

Финитная граница
$\mathcal{A} = \{A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}\}$ в $\mathbb{R}^2$:

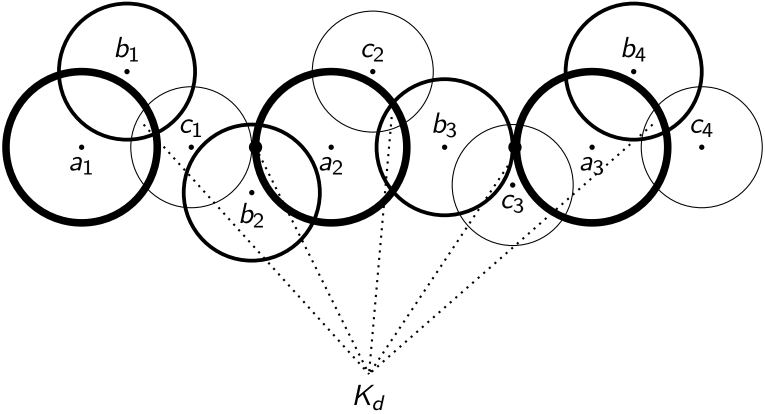

Рис.: Все неплотные точки совпадают с дискретными, но далёких нет.

О непрерывности одной операции с выпуклыми компактами

Теорема (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Пусть A и B — непустые выпуклые компакты в X. Тогда

$$f\colon \big[|AB|, +\infty\big) \to \mathcal{H}(X),$$

$$f\colon r \mapsto B_r(A) \cap B,$$

непрерывна.

О непрерывности функции f

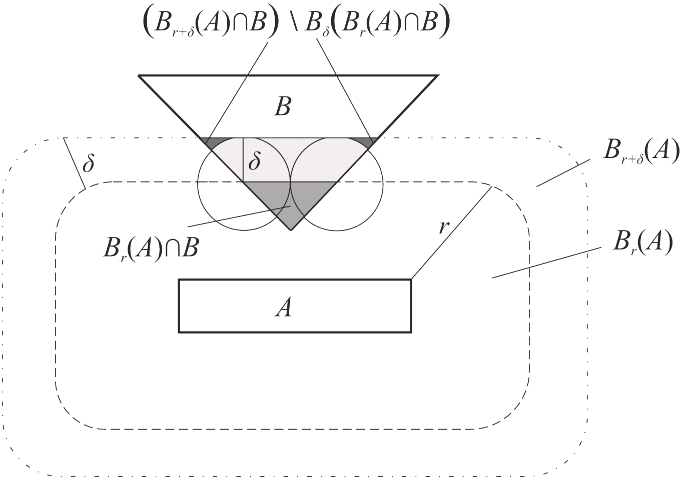

Рис.: Пример, когда $d_H\left(B_r(A)\cap B, B_{r+\delta}(A)\cap B\right) > \delta$.

О непрерывности функции f

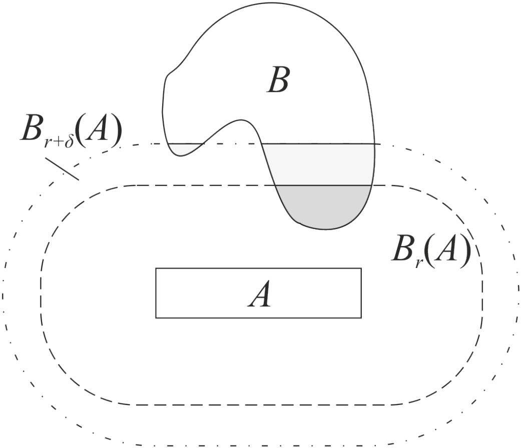

Рис.: Пример, когда f не является непрерывным в случае невыпуклых компактов.

Начало блока про выпуклые границы

Случай выпуклой границы

Теорема (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Для любого класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ существует граничный компакт A_i, содержащий далёкую точку.

О взаимосвязи выпуклой границы с максимальным компактом Штейнера

Введём ряд обозначений:

- F_i — множество всех далёких точек компакта $A_i \in A$ и $F = \bigcup\limits_i F_i$;
- $\mathrm{HP}_d(p, F_i) = B_{d_i}(p) \cap K_d$, где $p \in F_i$;
- $\mathrm{HP}_d(F_i) = \bigcup\limits_{p \in F_i} \mathrm{HP}_d(p, F_i)$;
- $\mathrm{HP}_d(F) = \bigcup\limits_i \mathrm{HP}_d(F_i)$;

Теорема (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Пусть все d_i положительны. Тогда для любого номера i существует точка $p \in \mathrm{HP}_d(F)$ такая, что $p \in \mathrm{HP}_d(F_i)$ или $p \in \partial B_{d_i}(A_i)$.

Вопрос устойчивости

Введём отображение $\mathrm{Conv} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, которое каждому элементу $\mathcal{H}(X)$ ставит в соответствие его выпуклую оболочку.
Положим

$$\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}} := \{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}.$$

Границу $\mathcal{A}$ назовём **устойчивой**, если

$$\min_{K \in \mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}}(K) = \min_{K \in \mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}}(K).$$

Сохранение векторов решений

Положим $K_d^{\mathrm{Conv}} := \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$.

Утверждение (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Для всех A_i верно

$$d_H(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}) \le d_i,$$

где $d_i = d_H(A_i, K_d)$.

Сохранение векторов решений

Следствие (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если граница $\mathcal{A}$ неустойчива, то

$$\min_{K\in\mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}}(K) > \min_{K\in\mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}}(K).$$

Следствие (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если граница $\mathcal{A}$ устойчива, то K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера для $\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}$.

Достаточное условие неустойчивости

Пусть все элементы $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ конечны, все d_i положительны, $\mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, а норма пространства X строго выпукла. Тогда справедлива

Теорема (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Граница $\mathcal{A}$ является неустойчивой, если существует компакт $A_s \in \mathcal{A}$ такой, что

$$\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_j^s \cap \mathrm{HP}_d(D) \subset \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Пример применения достаточного условия

В качестве примера возьмём конфигурацию из работы [1], где $A = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и $A_i = \{a_i, b_i\}$ для всех i.

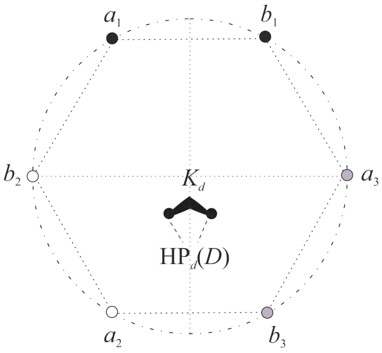

Рис.: Конфигурация из работы [1].

1. A. Kh. Galstyan, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, "*The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric*", Sb. Math., 212:1 (2021), 25–56

Пример применения достаточного условия

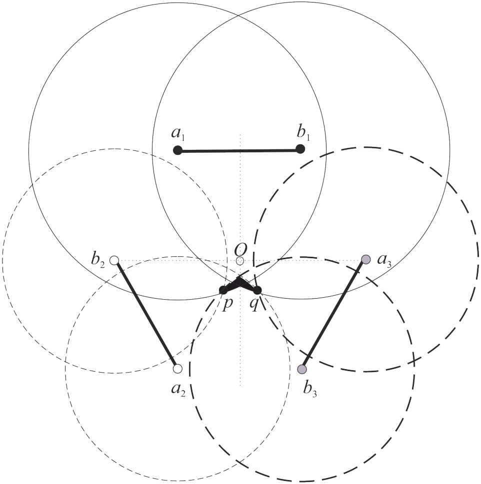

Рис.: Граница $\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}$ и окрестности $U_{d_1}(A_1), U_{d_2}(A_2), U_{d_3}(A_3)$.

Пример применения достаточного условия

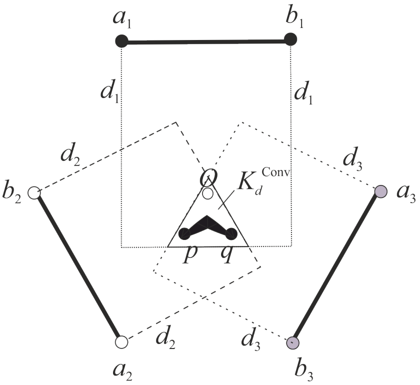

Рис.: $\mathrm{HP}_d(D) \subset \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!