

О классификации гладких взвешенных полных пересечений Яно

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0.

Опр. Многообразие Яно — гладкое полное алгебраическое многообразие с обильным антиканоническим классом.

Пр. (Кампби-Яу) Комплексные многообразия Яно — это в точности компактные кэлеровы многообразия с положительной кривизной Яичи.

Пр. (Кобаяши) Комплексные многообразия Яно односвязны.

Пр. Гладкие полные пересечения $X_{d_1, \dots, d_c} \subset \mathbb{P}^N$, где $\sum_{j=1}^c d_j \leq N$.

Пр. (Классификация в малых размерностях)

- $\dim(X) = 1$: $\mathbb{P}^1$.
- $\dim(X) = 2$: $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $Bl_S(\mathbb{P}^2)$, где $S \subset \mathbb{P}^2$ — набор точек в общем положении, и $|S| = 1, \dots, 8$.

Зам. Существует явная классификация в размерности 3 (Исковских — Мори — Мукaih): 105 дегерминационных классов.

Пр. (Каммар — Мияска — Мори) Количество дегерминационных классов гладких многообразий Яно данной размерности конечно.

Гладкие взвешенные полные пересечения Яно

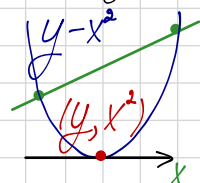
Опр. Взвешенным проективным пространством с весами $\mathbf{p} = (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0}^{N+1}$ называется $IP(\mathbf{p}) = Proj(R^{\mathbf{p}})$, где $R^{\mathbf{p}} = k[x_0, \dots, x_N]$ с градуировкой $\deg(x_i) = a_i$ для всех $i = 0, \dots, N$.

Эквивалентно, это квадрическое многообразие $IP(\mathbf{p}) = (A^{N+1} \setminus \{0\}) / G_m$ по действию $(x_0, \dots, x_N) \mapsto (t^{a_0} x_0, \dots, t^{a_N} x_N)$.

Опр. $IP(\mathbf{p})$ называется хорошо сбалансированным, если $\gcd(a_0, \dots, a_i, \dots, a_N) = 1$ для всех $i = 0, \dots, N$.

Пред. (Домачёв) $IP(\mathbf{p})$ изоморфно хорошо сбалансированному $IP(\mathbf{p}')$.

Пр. Скрученной кубике $\mathbb{A}_3(\mathbb{P}^1) = \mathbb{P}^3, (t, t^2, t^3)$, соответствует идеал (F_1, F_2, F_3) , где $F_1 = X \cdot Z - Y^2, F_2 = Y \cdot W - Z^2, F_3 = X \cdot W - Y \cdot Z$. При этом $\mathbb{A}_3(\mathbb{P}^1) = V(F_1, Z \cdot F_2 - W \cdot F_3)$



Зам. { Однородные } $\xrightarrow{I \mapsto \text{Proj}(\mathbb{R}^3/I) \subset \mathbb{P}(\mathbb{P})}$ { Замкнутые }
 { идеалы в $\mathbb{R}^3$ } $\xleftarrow{\text{масыщеные "идеалы"}}$ { подмодули в $\mathbb{P}(\mathbb{P})$ }

Опр. Замкнутая подмодуль $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{P})$ называется взвешенным полным пересечением мультистепеней $\mu = (a_1, \dots, a_c) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^c$, если соответствующий, насыщенный идеал $I_X \subset \mathbb{R}^3$ порожден регулярной последовательностью однородных элементов $(f_1, \dots, f_c)$ степеней $\deg(f_j) = a_j$ для всех $j = 1, \dots, c$.

Пр. $I_\mu \subset \mathbb{P}(\mathbb{P})$, где $\mathbb{P} = (1^{(l+t)}, 2^{(l)}, 3^{(l)})$, $\mu = (6^{(l)})$ и $l, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — гладкое взвешенное полное пересечение Гано.

Пр. Пусть $\mathbb{P} = (1, 1, 3, 6)$, и $I = \langle x_0^3, x_1^3 \rangle \subset \mathbb{R}^4$ — однородный идеал. Но насыщение $I_\mathbb{P}^\infty = \langle x_0^3, x_1^3, x_0^2 x_1^2 \rangle \subset \mathbb{R}^4$ не может быть порождено регулярной последовательностью.

Зам. Радикальные идеалы всегда $\mathbb{P}$ -насыщены.

Опр. Замкнутая подмодуль $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{P})$ называется хорошо ссоришированной, если $\mathbb{P}(\mathbb{P})$ хорошо ссоришировано, и $\text{codim}_X(X \cap \text{Sing}(\mathbb{P}(\mathbb{P}))) \geq 2$.

Опр. Взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{P})$ мультистепеней $\mu = (a_1, \dots, a_c)$ называется

- нормализованным, если $a_0 \leq \dots \leq a_n$ и $a_1 \leq \dots \leq a_c$;
- пересечением с линейным конусом, если $a_i = a_j$ для некоторых i, j .

Осозн. „Хороший“ взвешенное полное пересечение — гладкое, хорошо ссоришированное и не пересечение с линейным конусом.

Классификация гладких взвешенных полных пересечений Гано

Пред. (Гришяковский-Ирамов) Пусть $X' \subset \mathbb{P}(\mathbb{P}')$ и $X'' \subset \mathbb{P}(\mathbb{P}'')$ — нормализованные „хорошие“ взвешенные полные пересечения мультистепеней μ' и μ'' соответственно, и выполнено $X' \cong X''$.

Если $\dim(X) \geq 3$ (или $\dim(X) \geq 2$ и X — Гано), то $\mathbb{P}' = \mathbb{P}''$ и $\mu' = \mu''$.

Спр. Индекс гладкого многообразия Яно X —
 $i_X = \max \{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid -K_X \sim mH, H \in \text{Pic}(X) \}$.

Лем. (Кобаяши-Ошима) $i_X \leq \dim(X) + 1$.

Спр. Коиндекс гладкого многообразия Яно X определяется как
 $\text{coindex}(X) = \dim(X) + 1 - i_X$.

Лр. (Классификация при малом коиндексе)

• $\text{coindex}(X) = 0$: $\mathbb{P}^{\dim(X)}$.

• $\text{coindex}(X) = 1$: $Q \subset \mathbb{P}^{\dim(X)+1}$ гладкая квадратика, и $\dim(X) > 1$.

Зам. Существует явная классификация в коиндексе 2 (Гурджия, Исковских).

Лем. (Гурджия-Исков) Пусть $X \subset \mathbb{P}(g)$, где $g = (a_0, \dots, a_n)$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно, и $\dim(X) > 1$.

Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) $\text{coindex}(X) \geq \text{codim}(X)$;

(2) $\text{coindex}(X) = \text{codim}(X) \Leftrightarrow X$ — полное пересечение квадратик в $\mathbb{P}(g) = \mathbb{P}^n$.

(3) $\text{coindex}(X) = \text{codim}(X) + 1$ и $\text{codim}(X) > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X$ — полное пересечение квадратик и кубики в $\mathbb{P}(g) = \mathbb{P}^n$.

Зам. В п. (3) при $\text{codim}(X) = 1$ возможны два варианта:

(1) $X \cong X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$; (2) $X \cong X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$.

В обоих случаях „приткнуть единицы к весам и взять квадратичное сечение“ невозможно.

Спр. Пусть $X \subset \mathbb{P}(g)$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно. Назовем отклонением многообразия X число

$$\text{var}(X) = \begin{cases} \text{coindex}(X) - \text{codim}(X), & \text{если } \dim(X) > 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Зам. Пусть $X \subset \mathbb{P}(g)$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно мультистепени μ . Тогда отклонение X вычисляется как

$$\text{var}(X) = \sum_{j=1}^r (d_j - 2) - \sum_{i=0}^n (a_i - 1); \quad g = (a_0, \dots, a_n), \quad \mu = (d_1, \dots, d_r).$$

Обозн. Обозначим через $\mathcal{O}$ множество семейств $\mathcal{F}_\mu^p$ взвешенных полных пересечений в $\mathbb{P}(p)$ мультистепени и т.д. существует $X \in \mathcal{F}_\mu^p$ — нормализованное, „хорошее“ и Яно.

Созн. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu^p$ — семейство взвешенных полных пересечений. Введем обозначения $\mathcal{F}_{(m)}^{(\ell)} = \mathcal{F}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{p}}$, где $\tilde{p} = (1^{(\ell+2m)}; p)$ и $\tilde{\mu} = (2^{(m)}; \mu)$.

Предл. (-) Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$, тогда

- $\mathcal{F}^{(\ell)} \in \mathcal{O}$ для всех $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- $\mathcal{F}_{(m)} \in \mathcal{O} \Leftrightarrow$ существует $X \in \mathcal{F}_\mu^p$ — „хорошее“, Яно и алгебрабельное.

Опр. Пусть $X \subset \mathbb{P}(p)$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение, где $p = (a_0, \dots, a_n)$. Назовём многообразие X алгебрабельным, если (1) $X \cap \{X_i = 0 \mid a_i = 1\} = \emptyset$; (2) $a_i \neq 2$ для всех $i = 0, \dots, n$.

Опр. Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$ — семейство взвешенных полных пересечений т.д. $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}_{(m)}^{(\ell)}$ для всех $\mathcal{G} \in \mathcal{O} \setminus \{\mathcal{F}\}$ и $\ell, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

• Если $\mathcal{F}$ содержит алгебрабельное взвешенное полное пересечение, то назовём серией, порожденной семейством $\mathcal{F}$, подмножество $S(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} \in \mathcal{O} \mid \mathcal{G} = \mathcal{F}_{(m)}^{(\ell)}, \ell, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

• Если $\mathcal{F}$ не содержит алгебрабельное взвешенное полное пересечение, то назовём полусерией, порожденной семейством $\mathcal{F}$, подмножество $S(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} \in \mathcal{O} \mid \mathcal{G} = \mathcal{F}^{(\ell)}, \ell, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

Зам. Серии и полусерии образуют разбиение $\mathcal{O}$ на подмножества семейств постоянного отклонения.

Темр. (-) Количество серий и полусерий данного отклонения конечно и ограничено в терминах отклонения.

Темр. (-) Пусть $X \subset \mathbb{P}(p)$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно мультистепени $\mu = (d_1, \dots, d_s)$, и $(-K_X)^{\dim(X)} = 1$. Тогда (1) $\dim(10_X(1)) < \dim(X) \Leftrightarrow X$ не алгебрабельно; (2) d_j — не степень простого числа для всех $j = 1, \dots, s$.

Л. Количество семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$, содержащих „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно $X \in \mathcal{F} \subset (-K_X)^{\dim(X)} = 1$ и $\text{var}(X) = r$, конечно.

Приложения и гипотезы

Предл. (-) Пусть $\Theta(S) \subset \Theta$ — подмножество семейств взвешенных полных пересечений размерности n и коразмерности S т.ч. $n - S = S$. Тогда для любого $S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место разложение

$$\Theta(S) = \bigsqcup_{r=0}^S \left\{ F_{(m)}^{(S-r)} \mid F \in \Theta_n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \sqcup \bigsqcup_{r=0}^S \left\{ G^{(S-r)} \mid G \in \tilde{\Theta}_n \right\},$$

где $\Theta_n \subset \Theta$ (соответственно, $\tilde{\Theta}_n \subset \Theta$) — подмножество семейств, порождающих серию (соответственно, полусерию) отклонения r .

Предл. Семейство $F \in \Theta$ — порождающее $\Leftrightarrow \sum \alpha_i - \sum \alpha_j = 1$ и $\alpha_j \geq 2$.

Пр. (Серии и полусерии отклонения не выше 2)

Но.	$\dim(X)$	$IP(g)$	Степени	Асимптотично
0.1	0	pt	—	+
1.1	2	$IP(1^{(2)}, 2, 3)$	6	—
1.2	2	$IP(1^{(3)}, 2)$	4	—
1.3	2	IP^3	3	+
2.1	3	$IP(1^{(4)}, 3)$	6	+
2.2	3	IP^4	4	+
2.3	4	$IP(1^{(3)}, 2^{(2)}, 3^{(2)})$	6, 6	—
2.4	4	$IP(1^{(4)}, 2^{(2)}, 3)$	4, 6	—
2.5	4	$IP(1^{(5)}, 2^{(2)})$	4, 4	—
2.6	4	$IP(1^{(6)}, 2)$	3, 4	—
2.7	4	IP^6	3, 3	+

Опр. Назовем число $S_2(X) = |\{j \mid \alpha_j \geq 2\}|$ квадратичной иррегулярностью „хорошего“ взвешенного полного пересечения F и $n(X)$.

Лемм. (-) Пусть X — „хорошее“ взвешенное полное пересечение F и $n(X)$.

Если $\text{var}(X) > 0$, то $S_2(X) \leq 3\text{var}(X) - 2$.

Лип. Пусть X — „хорошее“ взвешенное полное пересечение F и $n(X)$.

Тогда выполнена оценка $S_2(X) \leq \text{var}(X)$.

Идея доказательства

Предл. (Jirka - Tavin - Sano, Трехяковский - Ираиш) Пусть $X \subset \mathbb{P}(1; p)$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно.

Тогда $|O_X(1)| \neq \emptyset$, и общий элемент $H \in |O_X(1)|$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно.

Предл. (-) Пусть $X \in \mathcal{F}_\mu^p$ — „хорошее“ взвешенное полное пересечение Яно. Тогда общий элемент $\mathcal{F}_\mu^{(1,1;p)}$ обладает теми же свойствами.

Опр. Пусть $\mathcal{F}: T \rightarrow B$ — семейство. Говорят, что общий элемент семейства $\mathcal{F}$ обладает свойством P , если подмножество $B_P = \{X \in B \mid X \text{ имеет свойство } P\} \subset B$ открыто и везде плотно.

Идея Все интересующие нас свойства — общие и задают сильные комбинаторные ограничения, что даст возможность классификации.

Предл. (Ditsa, Трехяковский - Ираиш) Пусть $X \subset \mathbb{P}(p)$ — взвешенное полное пересечение. Следующие условия эквивалентны:

- X гладкое и хорошо сформировано;
- $\mathbb{P}(p)$ хорошо сформировано, $X \cap \text{Sing}(\mathbb{P}(p)) = \emptyset$ и X квазигладко.

Опр. Пусть $X \subset \mathbb{P}(p)$ — замкнутое подмногообразие, и $\pi: \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(p)$ проекция. Если $\pi^{-1}(X)$ гладко, то X называется квазигладким.

Лем. Пусть $\mathbb{P}(p) = \text{Proj}(R^p)$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство с весами $\mathbf{p} = (a_0, \dots, a_n)$. Тогда выполняется $\text{Sing}(\mathbb{P}(p)) = \bigcup_I \{X_i = 0 \mid i \notin I\}$, $R^p = k[X_0, \dots, X_n]$, где I пробегает подмножества $\{0, \dots, n\}$ т.ч. $\gcd(\{a_i \mid i \in I\}) > 1$.

Зам. Пусть $\mathbb{P}(p)$ хорошо сформировано, $a_i \neq 2$, и $X \in \mathcal{F}_\mu^p$ — взвешенное полное пересечение, не являющееся пересечением с линейным конусом.

• Если $X \cap Q$ квазигладко, где Q — общая квадрика, то $X \cap \{X_i = 0 \mid a_i = 1\} = \emptyset$.

• Если $X \cap \{X_i = 0 \mid a_i = 1\} = \emptyset$, то $X \cap \text{Sing}(\mathbb{P}(p)) = \emptyset$ и все $I \subset \{i \mid a_i > 1\}$

„имеют тип (Q_i) “. Тогда по критерию Jirka - Tavin - Sano общие элементы $X' \in \mathcal{F}_\mu^p$ и $X'' \in \mathcal{F}_{(2,\mu)}^{(1,1;p)}$ — квазигладкие. Можно показать, что $X' \cap \{X_i = 0 \mid a_i = 1\} = X'' \cap \{\tilde{X}_i = 0 \mid \tilde{a}_i = 1\} = \emptyset \Rightarrow X' \text{ и } X'' \text{ алгебраически независимы.}$