Инварианты уравнений Монжа-Ампера и решение уравнений фильтрации

А.Г. Кушнер

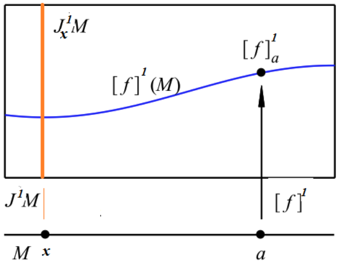
МГУ имени М. В. Ломоносова
Факультет физики

Семинар А.Т. Фоменко
19 сентября 2022

M — 2-мерное гладкое многообразие; x_1, x_2 — лок. коорд.;

- $f \sim_a g$ если $f(a) = g(a), \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a = \left.\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\right|_a, \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right|_a = \left.\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right|_a$
  Класс эквивалентности $[f]^1_a$ называется *1-джетом* функции f в точке $a \in M$.
- Пространство 1-джетов

$$J^1_a(M) := C^\infty(M)/\sim_a; \quad J^1(M) := \bigcup_{a \in M} J^1_a(M)$$



- $J^1 = J^1(M)$ — пространство 1-джетов функций на M; канонические координаты: x_1, x_2, u, p_1, p_2; $\theta = [f]^1_a \in J^1$;

$$x_i(\theta) = a_i, \quad u(\theta) = f(a), \quad p_i(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a); \quad i = 1, 2;$$

- Распределение Картана на J^1:

$$\mathcal{C} : J^1 \ni a \mapsto \mathcal{C}(a) := \ker \varkappa_a \subset T_a J^1; \quad \kappa = du - p_1 dx_1 - p_2 dx_2$$

$$\mathcal{C} = \langle \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2} \rangle$$

- $T_a J^1 = \mathcal{C}(a) \oplus \mathbb{R}$
- 1-график функции v:

$$\Gamma^1_v := [v]^1(M) = \left\{ u = v(x), p_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1}, p_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} \subset J^1$$

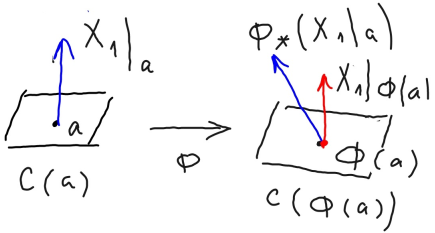
$$\varkappa|_{\Gamma^1_v} = 0$$

Определение

Преобразование $\Phi : J^1 \to J^1$ *называется контактным, если оно сохраняет распределение Картана:* $\Phi^*(\varkappa) \wedge \varkappa = 0$.

Неканоничность разложения:

$$T_a J^1 = C_(a) \oplus \mathbb{R} X_1(a), \quad X_1 = \partial_u$$



Оператор Лычагина

- $\omega \in \Omega^2(J^1)$; $\quad \Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Omega^2(M)$

$$\boxed{\Delta_\omega(v) := ([v]^1)^*(\omega)}$$

Пример

$$\omega = dp_1 \wedge dp_2 - dx_1 \wedge dx_2;$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\omega(v) &= d\left(v_{x_1}\right) \wedge d\left(v_{x_2}\right) - dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(v_{x_1x_1}dx_1 + v_{x_1x_2}dx_2\right) \wedge \left(v_{x_2x_1}dx_1 + v_{x_2x_2}dx_2\right) - dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(v_{x_1x_1}v_{x_2x_2} - v_{x_1x_2}^2 - 1\right) dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

- $\mathcal{I} := \ker(\Delta : \omega \to \Delta_\omega) = \{f d\varkappa + \alpha \wedge \varkappa \,|\, f \in C^\infty(J^1), \alpha \in \Omega^1(J^1)\}$
- $\alpha \sim \beta \in$ если $\alpha - \beta \in \mathcal{I}$.

Пример

Пусть $\alpha = dx_1 \wedge dp_1$ *и* $\beta = -dx_2 \wedge dp_2$. *Тогда* $\alpha \sim \beta$:

$$\alpha - \beta = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2 = d\varkappa \in \mathcal{I}.$$

Если $\alpha \sim \beta$ то $\Delta_\alpha = \Delta_\beta$.

- Эффективные 2-формы:

$$\Omega^2_\varepsilon(J^1) := \Omega^2(J^1)/\mathcal{I} = \{[\alpha] \,|\, \alpha \in \Omega^2(J^1)\}$$

- Представитель класса: $\partial_u \rfloor \omega = 0, \quad \omega \wedge d\varkappa|_{\mathcal{C}} = 0$
- Выделение эффективной части:

$$p(\omega) := \omega - \varkappa \wedge (\partial_u \rfloor \omega)$$

$$\omega_\varepsilon = p(\omega) - f_\omega d\varkappa, \quad \text{где} \quad p(\omega) \wedge d\varkappa = f_\omega d\varkappa \wedge d\varkappa$$

Уравнения Монжа–Ампера

$$\boxed{\mathcal{E}_\omega : \Delta_\omega(v) = 0}$$

$$\begin{aligned}\omega = &E dx_1 \wedge dx_2 + B\left(dx_1 \wedge dp_1 - dx_2 \wedge dp_2\right) + \\ &+ C dx_1 \wedge dp_2 - A dx_2 \wedge dp_1 + D dp_1 \wedge dp_2\end{aligned}$$

$$\boxed{A v_{xx} + 2B v_{xy} + C v_{yy} + D(v_{xx} v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0}$$

Определение

Поверхность $L \subset J^1$ называется многозначным решением уравнения $\mathcal{E}_\omega$ если

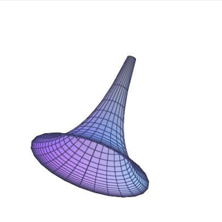
1. *L — интегральное многообразие распределения Картана, т.е. $\varkappa\,|_L = 0$;*
2. *ограничение дифференциальной 2-формы ω на L равно нулю: $\omega\,|_L = 0$.*

Пример

$$\boxed{v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2 + (1 + v_x^2 + v_y^2)^2 = 0,}$$

$$L = \left\{x_1 = \sin t \cos s, x_2 = \sin t \sin s, u = \log\left(\tan\frac{t}{2}\right) + \cos t\right\}$$

$$L^{(1)} = \left\{\ldots, p_1 = \frac{\cos t \cos s}{\sin t}, p_2 = \frac{\sin s \cos t}{\sin t}\right\}.$$



Действие контактных преобразований на уравнения Монжа–Ампера

Определение

Преобразование $\Phi : J^1 \to J^1$ *называется контактным, если оно сохраняет распределение Картана:* $\Phi^*(\varkappa) \wedge \varkappa = 0$.

$$\Phi^*(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$$

Теорема (S. Lie)

Класс уравнений Монжа-Ампера замкнут относительно контактных преобразований.

$$\Phi^* : \Omega^2_\varepsilon(J^1) \to \Omega^2_\varepsilon(J^1), \quad \Phi^*([\omega]) := [\Phi^*(\omega)]$$

Пример

$$\boxed{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 1}$$

$$\omega = dp_1 \wedge dp_2 - dx \wedge dy$$

$$\Phi : (x, y, u, p_1, p_2) \mapsto (-p_1, y, u - xp_1, x, p_2)$$

$$\Phi^*(\omega) = dx \wedge dp_2 - dy \wedge dp_1$$

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

$$T_aJ^1 = \mathcal{C}(a) \oplus \mathbb{R}, \qquad \Omega = d\varkappa|_{\mathcal{C}}$$

- Неголономное поле эндоморфизмов:

$$A_\omega : D(\mathcal{C}) \to D(\mathcal{C}), \quad A_\omega X \rfloor \Omega = X \rfloor \omega$$

- Пфаффиан $\mathrm{Pf}(\omega)$: $\quad \omega \wedge \omega = \mathrm{Pf}(\omega)\Omega \wedge \Omega$

$$\boxed{A_\omega + \mathrm{Pf}(\omega) = 0}$$

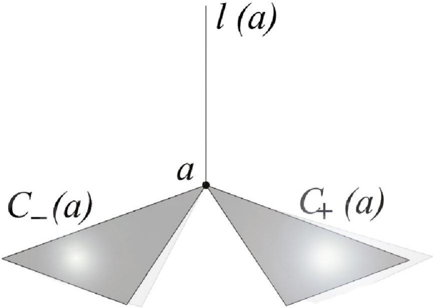
- Нормировка: $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{\sqrt{|\mathrm{Pf}(\omega)|}}$
- $\mathrm{Pf}(\omega) < 0$ – гиперболическое уравнение, $\quad A_\omega^2 = 1$
  $\mathrm{Pf}(\omega) > 0$ – эллиптическое уравнение, $\quad A_\omega^2 = -1$
  $\mathrm{Pf}(\omega) = 0$ – параболическое уравнение, $\quad A_\omega^2 = 0.$

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0$$

$$A_\omega = \left(B\frac{d}{dq_1} + C\frac{d}{dq_2} - E\frac{\partial}{\partial p_2} \right) \otimes dq_1 + \left(B\frac{\partial}{\partial p_1} + D\frac{d}{dq_2} - A\frac{\partial}{\partial p_2} \right) \otimes dp_1$$
$$\left(E\frac{\partial}{\partial p_1} - A\frac{d}{dq_1} - B\frac{d}{dq_2} \right) \otimes dq_2 + \left(C\frac{\partial}{\partial p_1} - D\frac{d}{dq_1} - B\frac{d}{dq_2} \right) \otimes dp_2$$

$$A_\omega = \left\| \begin{array}{rrrr} B & -A & 0 & -D \\ C & -B & D & 0 \\ 0 & E & B & C \\ -E & 0 & -A & -B \end{array} \right\| \qquad (1)$$

Характеристические распределения

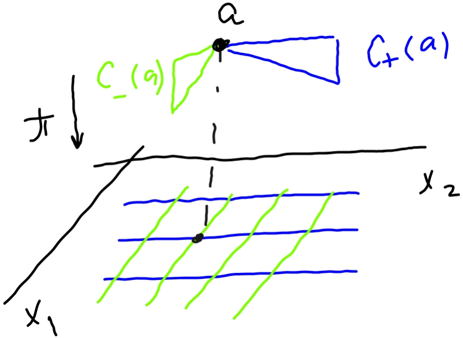


Каноническое разложение:

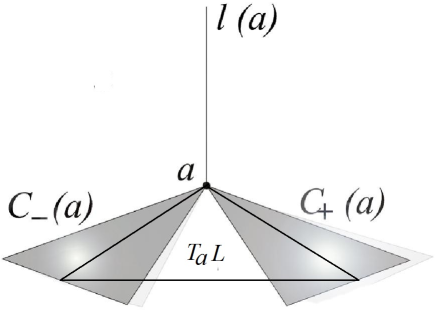
$$\mathcal{C}(a) = C_-(a) \oplus C_+(a), \quad T_a J^1 = C_-(a) \oplus l(a) \oplus C_+(a)$$

- Распределения C_+ и C_- косоортогоральны;
- 2-формы $\Omega = d\varkappa|_{C_p m}$ невырождены.

Характеристические распределения для линейных гиперболических уравнений



Касательная плоскость к многозначному решению



$$T_a L = L_-(a) \oplus L_+(a)$$

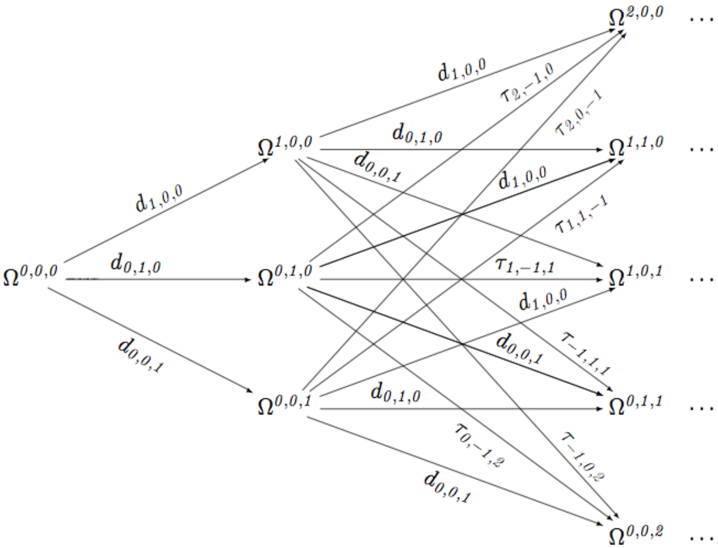


Диаграмма 1. Разложение комплекса де Рама для уравнений Монжа-Ампера.

Тензорные инварианты

$$
\begin{aligned}
q_{2,-1,0}: &\quad D(\mathcal{C}_+) \wedge D(\mathcal{C}_+) \to D(I),\\
q_{0,-1,2}: &\quad D(\mathcal{C}_-) \wedge D(\mathcal{C}_-) \to D(I),\\
q_{-1,1,1}: &\quad D(\mathcal{C}_-) \wedge D(I) \to D(\mathcal{C}_+),\\
q_{1,1,-1}: &\quad D(\mathcal{C}_+) \wedge D(I) \to D(\mathcal{C}_-).
\end{aligned}
$$

Пример

$$v_{xy} = f\,(x, y, v, v_x, v_y)$$

$$
\begin{aligned}
q_{-1,1,1} = &\,(ff_{p_2p_2}\,dx_1 \wedge du - f_{p_2p_2}\,dp_2 \wedge du - p_1 f_{p_2p_2}\,dx_1 \wedge dp_2 - p_2 f_{p_2p_2}\,dx_2 \wedge dp_2 +\\
&(f_u - p_2 f_{p_2u} + f_{p_1} f_{p_2} - ff_{p_1p_2} - f_{x_2p_2})\,dx_2 \wedge du +\\
&(p_1 f_u - p_1 p_2 f_{p_2u} - p_2 ff_{p_2p_2} + p_1 f_{p_1} f_{p_2} - p_1 ff_{p_1p_2} - p_1 f_{x_2p_2})\,dx_1 \wedge dx_2)\\
&\otimes \frac{\partial}{\partial p_1}
\end{aligned}
$$

Косая свёртка: $\langle \alpha \otimes X, \beta \otimes Y \rangle = (Y \rfloor \alpha) \wedge (X \rfloor \beta)\,, \qquad \alpha, \beta \in \Omega^2$
Дифференциальные 2-формы:

$$\lambda_+ = \langle q_{0,-1,2}, q_{1,1,-1} \rangle\,, \qquad \lambda_- = \langle q_{2,-1,0}, q_{-1,1,1} \rangle$$

Пример (Линейные гиперболические уравнения)

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y)$$

$$\lambda_- = k dx \wedge dy \quad \text{и} \quad \lambda_+ = -h dx \wedge dy$$

“Инварианты” Лапласа

$$k = ab + c - b_y \qquad\qquad h = ab + c - a_x$$

$$\Phi : (x, y, v) \mapsto (X(x), Y(y), A(x,y)v), \qquad (A(x,y) \neq 0)$$

Теорема (Овсянников?)

Линейное гиперболическое уравнение может быть приведено к волновому уравнению $v_{xy} = 0$ преобразованием Φ тогда и только тогда, когда $k = h = 0$.

Пример (Линейные эллиптические уравнения)

$$v_{xx} + v_{yy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y)$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4}\left(b_x - a_y \pm \left(\frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2c - a_x - b_y\right)\iota\right) dx \wedge dy$$

"Инварианты" Коттона:

$$K = b_x - a_y, \qquad \text{и} \qquad H = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2c - a_x - b_y$$

$$\boxed{v_{xy} = f\left(x, y, v, v_x, v_y\right)}$$

$$\begin{aligned}\lambda_- =& f_{p_2 p_2}\left(f_{p_1} dx_1 \wedge du - dx_1 \wedge dp_2\right) + \\ & \left(f_u - p_2 f_{p_2 u} + f_{p_1} f_{p_2} - p_2 f_{p_1} f_{p_2 p_2} - f f_{p_1 p_2} - f_{x_2 p_2}\right) dx_1 \wedge dx_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_+ =& f_{p_1 p_1}\left(f_{p_2} dx_2 \wedge du - dx_2 \wedge dp_1\right) + \\ & \left(-f_u + p_1 f_{p_1 u} - f_{p_1} f_{p_2} + p_1 f_{p_2} f_{p_1 p_1} + f f_{p_1 p_2} + f_{x_1 p_1}\right) dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

Контактная линеаризация

Теорема

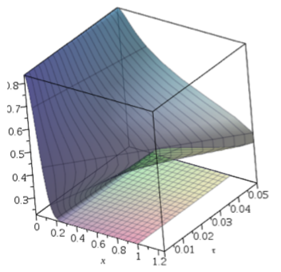
Гиперболическое регулярное уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно волновому уравнению $v_{xy} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_{\pm} = 0$.

Пример (Эволюция водонасыщенности)

$$\boxed{u_{tx} - u_t u_{xx} = 0}$$

$$\omega = -2p_1 dx_1 \wedge dp_2 + dx_1 \wedge dp_1 - dx_2 \wedge dp_2$$

$$\begin{cases} x_1 = k'(a), \\ x_2 = e^{-b}\left(ak'(a) - k(a)\right) + r'(b), \\ u = r(b) - br'(b) + (b+1)e^{-b}(k(a) - ak'(a)), \\ p_1 = -ae^{-b}, \\ p_2 = -b \end{cases}$$



Симплектические уравнения Монжа–Ампера

$$\boxed{Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0}$$

A, B, C, D, E, F – функции переменных x, y, u_x, u_y

- кокасательное расслоение: $T^*M : x_1, x_2, p_1, p_2$;
- симплектическая структура: $\Omega = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2$;
- оператор $\Delta_\omega(v) := F_v^*(\omega)$, $\quad F_v : M \to T^*M$,

$$F_v : (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1, x_2, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$$

- эффективная форма: $\omega \in \Omega^2(T^*M)$, $\quad \omega \wedge \Omega = 0$;
- многозначнок решение: лагранжево многообразие: $\omega|_L = 0$;
- поле операторов: $A_\omega X \rfloor \Omega = X \rfloor \omega$

Симплектическая линеаризация

Теорема (Лычагин, Рубцов)

Невырожденное симплектическое уравнение Монжа–Ампера $\mathcal{E}_\omega$ *симплектически эквивалентно волновому уравнению (в гиперболическом случае)* $v_{xx} - v_{yy} = 0$ *или уравнению Лапласа (в эллиптическом случае)* $v_{xx} + v_{yy} = 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$d\omega = \frac{1}{2} d\left(\ln|\operatorname{Pf}(\omega)|\right)$$

или, эквивалентно, скобка Нийенхейса оператора A_ω *с нормированной формой* ω *равна нулю.*

$$\boxed{N_A(X,Y) := A^2[X,Y] + [AX,AY] - A[AX,Y] - A[XAY]}$$