К гипотезе Эйлера о неизгибаемости компактных поверхностей

И.Х. Сабитов

16/05/2022

План доклада

1. История вопроса и терминология
2. Что уже известно?
3. Не непрерывные и не дискретные деформации
4. О связях бесконечно малых изгибаний высших порядков с изгибаемостью

1. История вопроса и терминология

1. Вопрос о единственности/неединственности изометрической реализации данной метрики в пространство как метрики некоторой поверхности является одним из важнейших вопросов метрической геометрии. В свою очередь, вопрос о единственности имеет разные постановки в зависимости от требований на класс погружений и допустимых погружений. В частности, можно требовать, чтобы множество искомых изометрических погружений составляло **непрерывное** относительно некоторого параметра семейство. Тогда говорят о возможности **изгибания** поверхности, понимая под поверхностью некоторое рассматриваемое изометрическое погружение данной метрики (а иногда просто берется некоторая заданная поверхность и ищется ее непрерывная деформация с сохранением метрики – в этом случае вопрос о существовании изометрического погружения данной метрики отпадает). Поверхности, получаемые друг из друга деформацией изгибания, называются **наложимыми.**

Можно ставить вопрос о существовании хотя бы двух изометрических погружений данной метрики или вопрос о существовании **еще одной** поверхности, изометричной данной поверхности, в этом случае говорят о вопросе **однозначной определенности** рассматривамой поверхности ее метрикой или о **дискретной изометрической деформации**, когда не предполагается, что другая изометричная поверхность получается из исходной ее непрерывной изометрической деформацией. До недавнего времени в русскоязычной литературе для всех видов изометрических деформаций употреблялся общий термин "изгибание сейчас предпочитают говорить "изгибание имея в виду только **непрерывную** изометрическую деформацию, и говорить об изометрическом **преобразовании**, имея в виду дискретную изометрическую деформацию.

Но **семейство** изометричных поверхностей, каждая из которых получена из данной поверхности некоторым ее дискретным преобразоанием, само может и не быть дискретным, в том смысле, что его элементы не обязательно будут изолированными точками этого множества. Поэтому, имея в виду только факт отсутствия деформации изгибания, говорят о **множестве неналожимых** изометричных поверхностей, а какое оно, дискретное или нет, это уточняется в каждом конкретном случае..

Исторически первым вопрос о существовании поверхностей, между которыми можно установить взаимно-однозначное отображение, сохраняющее на них длины соответствующих кривых, появился в работе Эйлера [1], опубликованной уже после его смерти в 1862 г. Задачу он сформулировал так: "**Найти две поверхности, которые можно преобразовать друг в друга таким образом, чтобы между соответственными точками на каждой поверхности было бы одинаковое расстояние.**" Сам Эйлер установил, что если такие поверхности существуют и если их отнести к одним и тем же внутренним координатам, то в совпадении их первых квадратичных форм и заключается решение поставленной задачи.

Далее он пишет, что проверка такого совпадения представляется в высшей степени трудной задачей, а в конце статьи утверждается, что если фигура ограниченная и отовсюду замкнутая, то она не допускает таких изменений, пока она целостная (integra), например, такова сферическая поверхность, и еще раз уточняется, что если фигура не замкнутая и не целостная, то она должна допускать изменения с сохранением на ней длин кривых, но определить, какие это изменения, составляет, как кажется Эйлеру, сложнейшую проблему. Хотя Эйлер не пишет явно, **какие** он имеет в виду изометрические деформации, предполагается, что он имел в виду регулярные, т.е. по крайней мере гладкие деформации, и поэтому его утверждение об очевидной, по его мнению, неизменяемости замкнутой поверхности сейчас рассматривается как **гипотезой Эйлера о неизгибаемости замкнутых поверхностей** и почти во всех обзорных статьях и докладах она объявляется одной из самых интересных нерешенных проблем геометрии.

По поводу самой этой работы Эйлера тоже можно поставить вопросы исторического характера. Работа опубликована с указанием фамилии Головин. Известно, что Михаил Евсеевия Головин (1756-1790), племянник Ломоносова, был учеником Эйлера и записывал под диктовку Эйлера его статьи, но в публикации [1] не указано, в каком году она написана. Между тем, в работе [2] утверждается. что Эйлер высказал такое свое предположение еще в 1766 г. и затем в 1770 г. обсуждал этот вопрос в письме к Лагранжу. Автору не известно такое письмо (всего Эйлер написал Лагранжу 6 писем). Было бы интересно выяснить, было ли это на самом деле так?

2. Что уже известно?

2. В классе выпуклых поверхностей гипотеза Эйлера доказана в самой общей постановке: в этом классе любая замкнутая выпуклая поверхность без всяких дополнительных предположений о регулярности однозначно определена своей метрикой (Лежандр-Коши, Гильберт, Либман, Кон-Фоссен, Герглотц, Погорелов).
Для поверхностей произвольного топологического рода их однозначная определенность своей метрикой доказана для так называемых T- поверхностей, у которых область с положительной кривизной связна и имеет интегральную кривизну 4π (А.Д. Александров - аналитический случай, Ниренберг - без требования аналитичности, но с некоторыми другими условиями).
Следующая признаки неизгибаемости связаны с дополнительными требованиями на деформации, а именно, с требованием их аналитичности относительно параметра деформации. Основной признак – если поверхность обладает жесткостью 1-го или 2-го порядка, тогда она неизгибаема в классе деформаций, аналитических относительно параметра деформации ([3],[4]).

Согласно результатам этих и других работ автора можно указать конкретные классы поверхностей, для которых гипотеза Эйлера верна. Именно, неизгибаемыми в классе аналитических по параметру деформаций являются все поверхности вращения (даже погруженные, т.е. с возможными самопересечениями), у которых меридиан имеет в изолированной точке ортогональную к оси вращения касательную (вне полюса). В частности, неизгибаемыми являются **все** аналитические торообразные поверхности вращения, так как их меридиан, как замкнутая кривая, обязательно имеет два изолированных экстремума (относительно направления оси вращения). Из этого признака следует, что среди поверхностей вращения кандидатами в изгибаемые могут быть только поверхности с однозначно проектируемыми на ось вращения меридианами. Неизгибаемыв поверхности есть также среди гомеоморфных сфере аналитических поверхностей вращения с уплощениями в полюсах

3. Не непрерывные и не дискретные деформации

3. В 1989 г. в работе [5] приведен пример компактной поверхности, у которой в любой ее окрестности существует счетное множество изометричных ей поверхностей, и тем самым было показано, что гипотезу Эйлера надо исследовать именно в классе изгибаний, так как в классе неналожимых или дискретных изометрических деформаций она неверна. В той же работе [5] без подробного доказательства было приведено утверждение, что предложенный метод пригоден также для построения семейства неналожимых изометричных поверхностей мощности континуума. В 2002 г. в работе [6] дано подробное его доказательство с уточнением, что это множество неналожимых изометричных поверхностей может иметь внутреннюю структуру любого замкнутого нигде не плотного множества на отрезке, в том числе и положительной меры.

Мы хотим представить тот же результат из [3] и [6] не как свойство поверхности, а как свойство погружаемой метрики.
Верна теорема

Theorem

Существуют метрики, которые можно изометрически погрузить в $\mathbb{R}^3$ в виде дисконтинуума неналожимых поверхностей гладкости C^∞.

Доказательство. Пусть метрика вращения

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\xi^2 + d\eta^2), \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{1}$$

задана в области $D : 0 \leq \rho < \infty$ (мы сразу ищем компактную поверхность рода 0; можно было бы найти, как в [6], часть поверхности как поверхность вращения и к ней гладко приклеить любую неподвижную поверхность, чтобы получилась поверхность любого желательного рода). Требование регулярности метрики в другом полюсе приводит к равенству $\Lambda(\infty) = 0$.

Изометрическое погружение метрики (1) в $\mathbb{R}^3$ задается уравнениями

$$x = \rho\Lambda(\rho)\cos\varphi,\ \ y = \rho\Lambda(\rho)\sin\varphi,\ \ z = g(\rho), \tag{2}$$

где функция $g(\rho)$ должна удовлетворять равенству

$$g'^2(\rho) = -\rho\Lambda'(\rho)(2\Lambda(\rho) + \rho\Lambda'(\rho)). \tag{3}$$

Пусть значение $\rho = 0$ соответствует полюсу $(0, 0, 0)$. В этой точке требование гладкости метрики (1) приводит к условию $\Lambda'(0) = 0$, а в окрестности полюса должно быть $\Lambda'(\rho) \leq 0$. Предположим, что в малой проколотой окрестности полюса выполнено строгое неравенство $\Lambda'(\rho) < 0$ и что там

$$g'(\rho)=\sqrt{-\rho\Lambda'(\rho)(2\Lambda(\rho)+\rho\Lambda'(\rho))},\ \ g(\rho)=\int_0^\rho \sqrt{-t\Lambda'(t)(2\Lambda(t)+t\Lambda'(t))}dt.$$

А дальше пусть появляются значения ρ, в которых $g'(\rho) = 0$. Предполагаем, что $\Lambda(\rho)$ класса C^∞. Производная $\Lambda'(\rho)$ не может быть положительной, иначе получится $g'^2 < 0$, значит, всюду $\Lambda'(\rho) \leq 0$, и положительная функция Λ убывает от $\Lambda(0$ до $\Lambda(\infty)$ (причем $\Lambda(R) = 0$, если $R = \infty$). Нули функции $\rho\Lambda'(\rho)(2\Lambda(\rho) + \rho\Lambda'(\rho))$ заполняют замкнутое множество, и на каждом интервале, где $g'^2\rho) > 0$, мы можем выбирать значение $g'(\rho) > 0$ или $g'(\rho) < 0$, тем самым получая разные поверхности с одинаковой метрикой. Множество таких поверхностей действительно будет континуумом, так как сопоставляя каждому интервалу число 0 или 1 в зависимости от выбора знака $g'(\rho)$, мы получим некоторое число, записанное в двоичной системе, т.е. в итоге множество полученных изометричных поверхностей окажется во взаимо-однозначном соответствии с множеством всех чисел. Так как построение C^∞-гладких функций с обращением в нуль в концевых точках счетного числа интервалов общеизвестно, то соответствующим образом построенные функции $\Lambda(\rho)$ дадут метрики, реализуемые дисконтинуумом неналожимых изометричных поверхностей. Теорема доказана.

4. О связях б.м. изгибаний высших порядков с аналитической изгибаемотью.

Выше было сказано, что если поверхность не допускает б.м. изгибаний 1-го или 2-го порядка, то она не допускает изгибаний, аналитических относительно некоторого параметра. Сформулируем это утверждение можно сформулировать как следствие следующей теоремы.

Theorem

Если поверхность допускает аналитическое по параметру изгибание, то она допускает б.м. изгибания 1-го и 2-го порядков и приведем его короткое **Доказательство**. Пусть

$$r(u,v;t) = r(u,v) + \sum_{n=k}^{\infty} 2t^n z_n(u,v) \tag{4}$$

- аналитическое изгибание, начинающееся с первой нетривиальной деформации z_k при степени $k \geq 1$. Из условия изометричности имеем равенство $dr^2(u,v) = dr^2(u,v;t)$ тождественно относительно t. Если $k = 1$, то имеем уравнения

$$drdz_1 = 0, drdz_2 + dz_1^2 = 0, .$$

значит, существуют поля нетривиального б.м. изгибания 1-го порядка z_1 и б.м. изгибаниие 2-го порядка с полями (z_1, z_2). Если же $k > 1$, то среди уравнений $dr^2(u,v) = dr^2(u,v;t)$ найдутся два уравнения $drdz_k = 0, drdz_{2k} + dz_k^2 = 0$, которые позволяют утверждать, что поле z_k является полем б.м. изгибания 1-го порядка, а пара (z_k, z_{2k}) представляет собой поле б.м. изгибания 2-го порядка.

Теперь встает естественный вопрос а можно ли обобщить связь неизгибаемости вообще с жесткостью какого-нибудь порядка? При попытке ответить на этот вопрос прежде всего выяснилось, что классическое определение жесткости n-го порядка логически некорректно. В самом деле, по классике б.м. изгибание порядка n

$$r + tz_1 + ... + t^n z_n$$

называется **нетривиальным**; если **первое** поле z_1 является нетривиальным полем б..м. изгибания 1-го порядка. Тогда, если нетривиальное аналитическое изгибание

$$r + t^k z_k + ... + t^n z_n + ...$$

начинается со степени $k > 1$, тогда ее часть

$$r + t^k z_k + ... + t^n z_n \tag{5}$$

не может называться нетривиальным б.м. изгибанием порядка n, хотя длины кривых на поверхности изменяются на порялок $o(t^n)$, $t \to 0$.

Такая логическая некорректность была замечена в [5] и там же было предложено ввести понятие б.м. изгибания порядка (k, n) вида (5) и назвать такую деформацию б.м. изгибанием порядка (k, n) (конечно, предполагая, что длины при этом изменяются на порядок $o(t^n), t \to 0$. Тогда достаточный признак аналитической неизгибаемости читается так (см. [8]):

Theorem

Если поверхность допускает ***единственное*** *линейно независимое поле нетривиального б.м. изгибания 1-го порядка и обладает жесткостью какого-нибудь порядка (k, n) с $n \geq 3k$ (например, жесткостью 3-го порядка в классическом смысле), тогда она неизгибаема в классе аналитических по параметру деформаций.*

Важность условия единственности б.м. изгибания 1-го порядка подтверждается примером (Connelly and Servatius 1994)..

Если же полей нетривиальных б.м. изгибаний 1-го порядка много, то мы имеем только маленькое продвижение. Именно, есть такая теорема

Theorem

Если для даной поверхности пространство линейно независимых полей ее б.м. изгибаний 1-го порядка имеет размерность 2 и поверхность жестка относительно б.м. изгибаний порядка (k, N) для некоторого $N \geq 3$ и всех $k : 1 \geq k \leq N - 1$, тогда она неизгибаема в классе аналитических по параметру деформаций (гладкости поверхности и деформаций предполагаются класса C^1, т.е минимально допустимые).

Теорема доказана Н.Г.Перловой (Ростов) в соавторстве с автором доклада еще в 2004 г., но не опубликована.

Как итог, мы думаем, что гипотеза Эйлера верна только в аналитическом классе поверхностей и для деформаций в виде (4) с аналитической зависимостью от параметра деформации (например, от времени). Есть основания предполагать, что в классе поверхностей гладкости C^{∞} даже для деформаций с формальной аналитической зависимостью от параметра деформации (т.е. в виде не обязательно сходящегося ряда (4)) можно построить примеры изгибаемых поверхностей.

Euler L. Opera postum, I. Geometria.Petropoli (1862), p. 494-496.

Глюк Г. Почти все односвязные замкнутые поверхности неизгибаемы. В сб. "Исследования... М., Мир. 1980. с.148 -163.

Сабитов И.Х. Жесткость и неизгибаемость "в малом"и "в целом".... Мат. сб., (2013), 204:10, с. 127 -160.

Сабитов И.Х. Б. м. изгибания 2-го порядка пов. вращения с уплощениями в полюсах. Мат. сб.,(2014), 205:12, с. 111 -140.

Сабитов И.Х. Локальная теория изгибаний поверхностей. ВИНИТИ, Совр. проблемы мат. Т. 48, Геом.-3. (1989), с. 196 - 270.

Са Эрп, Тубиана Э Дискретные и недискретные изом. деформации пов. в R^3. СМЖ, (2002), 43:4, с. 887 - 893.

Сабитов И.Х. О метриках, допускающих дисконтинуум неконгр. погружений в R^3. СЭМИ, (2020), 18:2, с. 1023 -1026.

Сабитов И.Х. О связях между б. м. изгибаниями разных порядков. УГС, (1992), вып. 35, с. 118 - 124 ,

С П А С И Б О !