

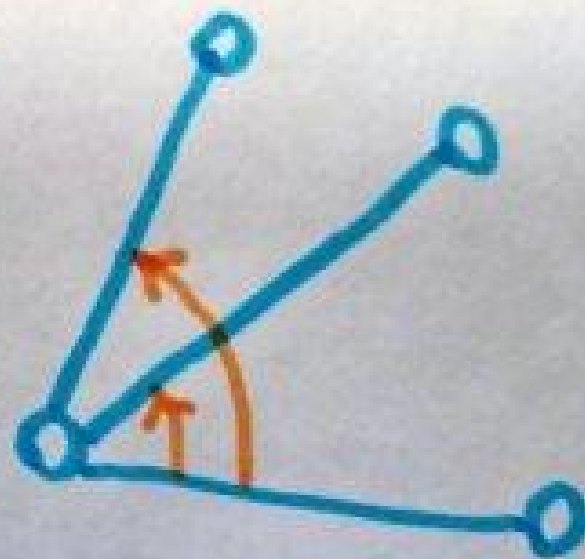
Об изгибаемости в плоскости полных двудольных графов

- Ковалёв Михаил Дмитриевич
- (по совместной с С.Ю.Оревковым работе)
- МГУ им. М.В.Ломоносова
- kovalev.math@mtu-net.ru

Простейшие случаи изгибаемости полных двудольных графов

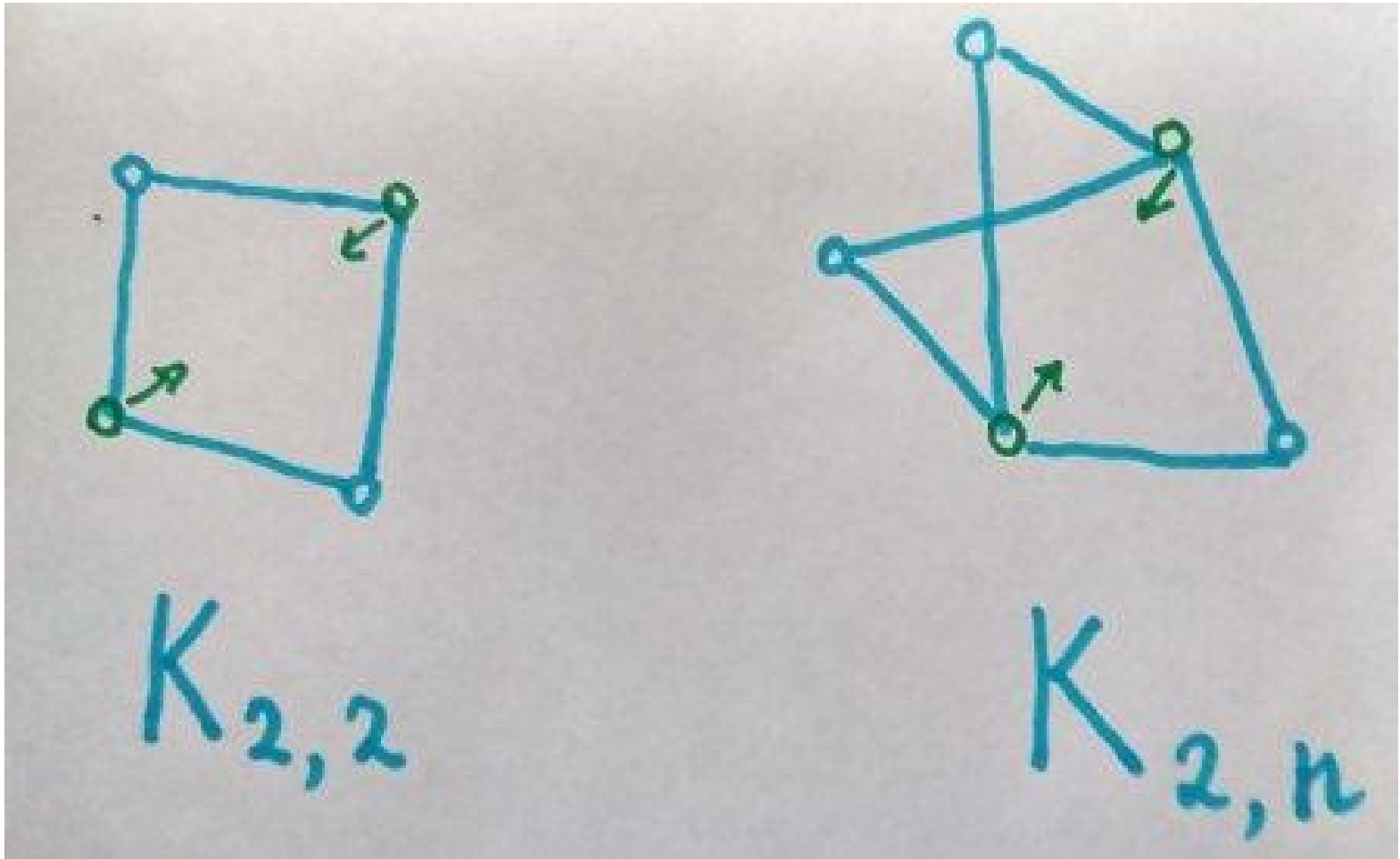


$K_{1,1}$



$K_{1,n}$

Ещё изгибаемость с одной степенью свободы



Первый случай А. Диксона (1899).

Изгибаемый $K_n m$, $n, m \geq 3$

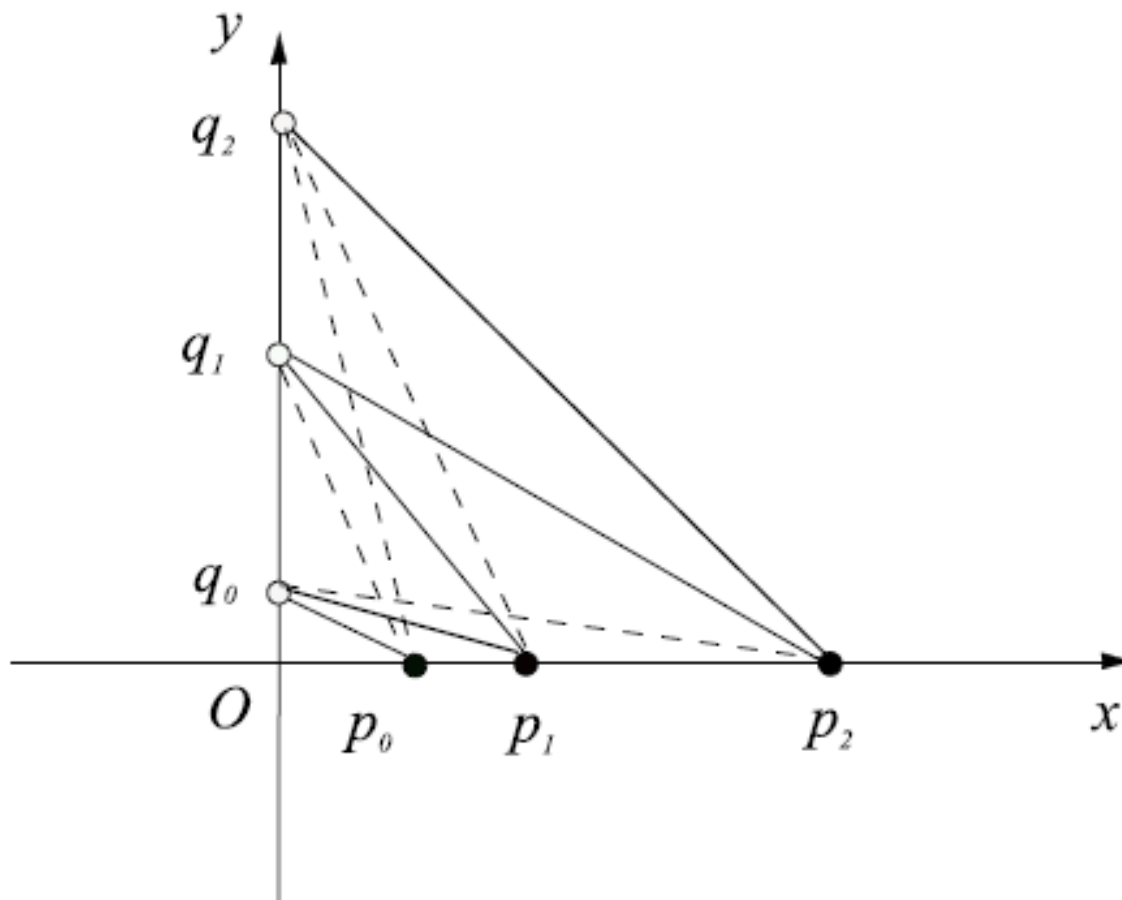


Рис. 2. Механизм Диксона первого типа $K_{3,3}$.

Механизм Диксона первого типа

- Пусть $p_i = (x_i, 0)$, $q_i = (0, y_i)$, тогда:

$$\begin{aligned}x_0^2 + y_0^2 &= r_{00}^2, & y_0^2 &= r_{00}^2 - x_0^2 \\x_1^2 + y_0^2 &= r_{10}^2, & x_1^2 &= r_{10}^2 - r_{00}^2 + x_0^2 \\x_1^2 + y_1^2 &= r_{11}^2, & y_1^2 &= r_{11}^2 - r_{10}^2 + r_{00}^2 - x_0^2 \\x_2^2 + y_1^2 &= r_{21}^2, & x_2^2 &= r_{21}^2 - r_{11}^2 + r_{10}^2 - r_{00}^2 + x_0^2 \\&\dots\dots, & &\dots\dots\end{aligned}$$

Таким образом, положения всех шарниров выражаются через x_0^2 , и видно, что

- все $r^2 = x^2 + y^2$ постоянны.

Простые обстоятельства

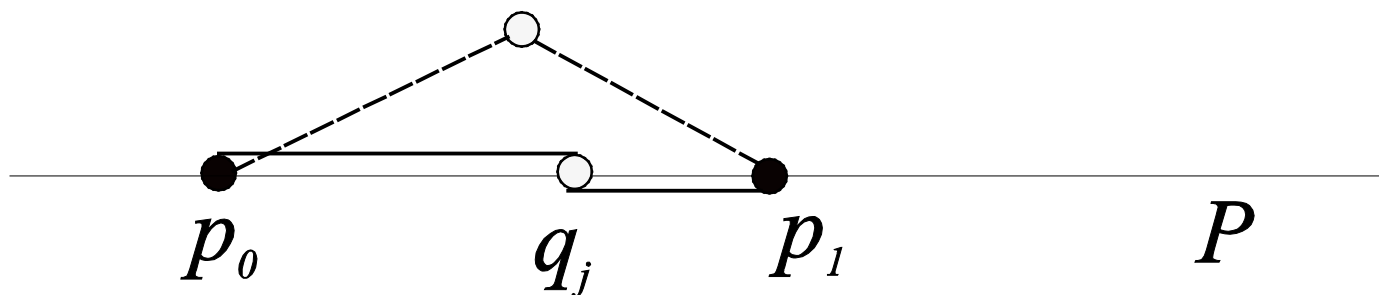
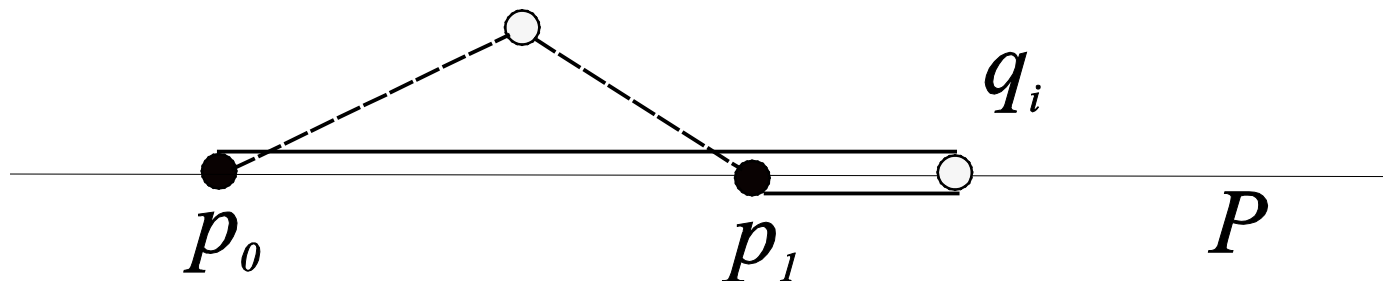
- **Лемма 2.1.** Если шарнирник $(K_{m,n}, \mathbf{p})$ где $m, n \geq 2$ изгибаем, то для любого его подшарнирика-четырёхзвенника $p_i q_j p_k q_l$ длина каждого рычага меньше суммы длин остальных трёх рычагов. Для шарнирников $(K_{2,n}, \mathbf{p})$ это условие является и достаточным условием изгибаемости.
- **Лемма 3.1.** Необходимым и достаточным условием перпендикулярности диагоналей четырёхугольника является равенство сумм квадратов длин его противоположных сторон.

Доказательство леммы 3.1

Рассмотрим произвольный, возможно самопересекающийся четырёхугольник. Пусть a, b, c, d суть векторы последовательных сторон четырёхугольника при каком-либо его обходе. Тогда $a + b + c + d = 0$, и по условию: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Выражая d из первого равенства, подставляя во второе и сокращая на 2, получим $b^2 + ab + ac + bc = 0$. Но это в точности равно скалярному произведению $(a+b)(b+c)$ векторов диагоналей четырёхугольника. И обратно, если $(a+b)(b+c) = 0$, то вычитая удвоенное это соотношение из равенства $(a+b+c+d)^2 = 0$ получим

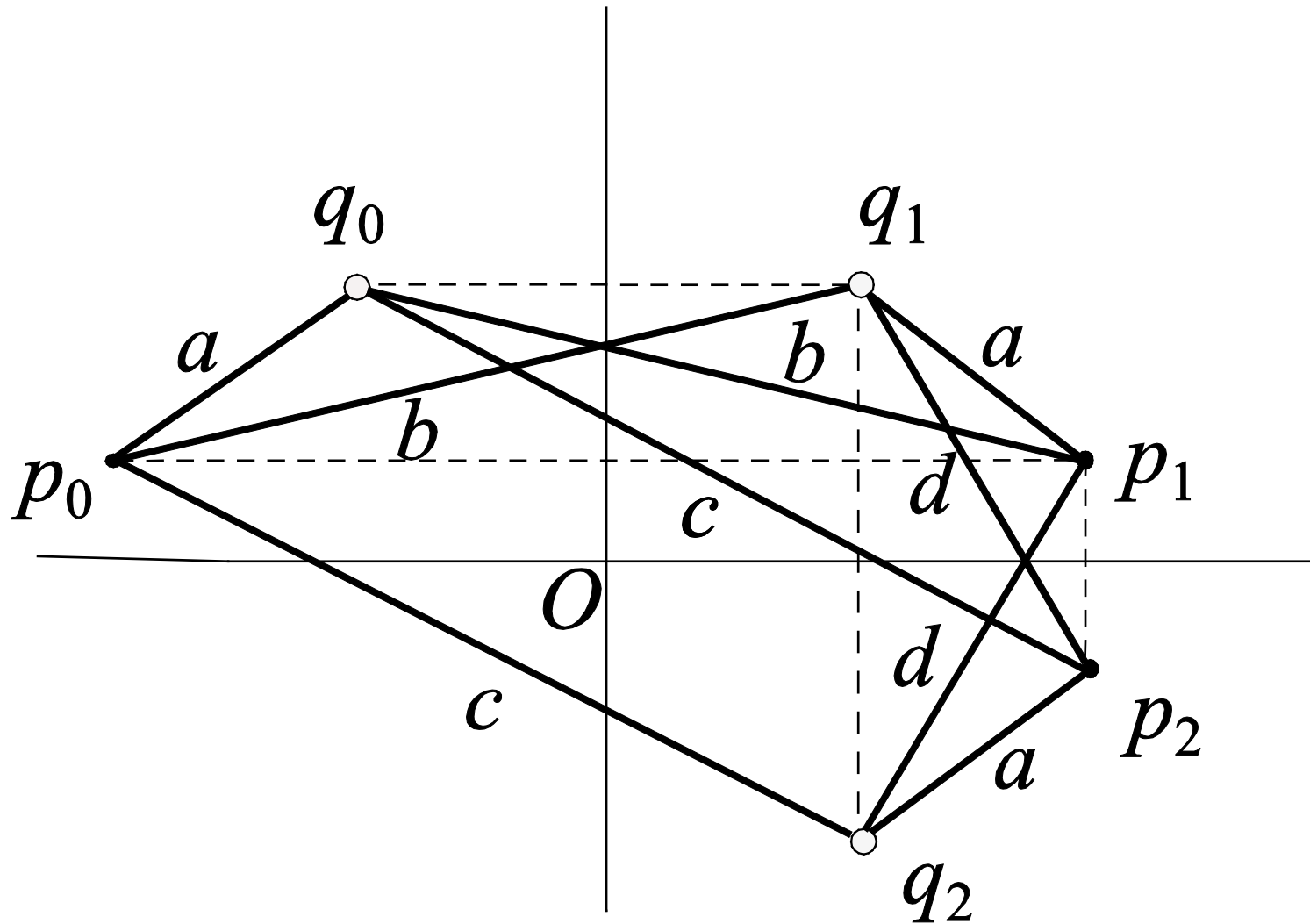
$$a^2 - b^2 + c^2 + d^2 + 2(d, a + b + c) = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

При $n, m \geq 2$ шарнирник $(K_{n,m}, p)$ неизгибаем тогда и только тогда, когда ненулевое расстояние между двумя шарнирами одной доли постоянно. Иллюстрация достаточности условия леммы 2.1 для $K_{2,n}$.



Механизм Диксона второго типа

$$K_{3,3}: a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$



Основная теорема в случае попарно несовпадающих шарниров

- **Теорема 1.** Пусть $\min(m, n) \geq 3$. Тогда шарнирник с попарно несовпадающими шарнирами изгибаем в том и только том случае, когда выполнено одно из двух условий:
 1. Точки $p_0, \dots, p_{m-1}$ лежат на одной прямой P , точки $q_0, \dots, q_{n-1}$ лежат на другой прямой Q , и эти две прямые взаимно перпендикулярны.
 2. Можно так выбрать декартову прямоугольную систему координат в плоскости, и два прямоугольника со сторонами, параллельными её координатным осям, и общим центром симметрии в начале координат, что точки $p_0, \dots, p_{m-1}$ будут лежать в вершинах одного из этих прямоугольников, а точки $q_0, \dots, q_{n-1}$ — в вершинах другого. Поскольку все точки различны, в этом случае $m \leq 4$ и $n \leq 4$.

Вывод общего случая из случая $K_{3,3}$

- Предположим, что $n \geq m \geq 3$, $n \geq 4$. Рассмотрим шесть точек p_0, p_1, p_2 и
- q_0, q_1, q_2 . Они удовлетворяют одному из условий 1) или 2).
- Пусть, они удовлетворяют условию 1). Тогда и точки p_0, p_1, p_2 и q_0, q_1, q_j , $j > 2$ не удовлетворяют условию 2). А поскольку подграф, натянутый на них, изгибаем, то они удовлетворяют условию 1). То есть, точка q_j лежит на прямой Q .
- Таким образом, все точки $q_0, \dots, q_{n-1}$ лежат на прямой Q . По тем же причинам точки $p_0, \dots, p_{m-1}$ лежат на P .

Вывод общего случая из случая $K_{3,3}$

- Предположим теперь, что рассматриваемые шесть точек удовлетворяют условию 2). Рассмотрим набор точек $p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_j, j > 2$. Он тоже удовлетворяет условию 2), так как точки p_0, p_1, p_2 не лежат на одной прямой, а значит, условие 1) не может выполняться. Априори можно было бы предположить, что условие 2) выполнено для некоторого другого выбора координатных осей, однако в треугольнике $p_0p_1p_2$ есть только одна пара перпендикулярных сторон, однозначно определяющих соответствующий прямоугольник, а значит, направления осей и начало системы координат, совпадающее с центром прямоугольника. Заметим также, что центрально симметричный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, однозначно определяется любой из его вершин. Следовательно, точки q_0, q_1, q_j лежат в вершинах того же самого прямоугольника, что и точки q_0, q_1, q_2 . Аналогично доказывается, что и все точки $p_0, \dots, p_{m-1}$ лежат в вершинах одного и того же прямоугольника. Поскольку точки попарно не совпадают, то $m \leq 4$ и $n \leq 4$.

Сложная теорема для $K_{3,3}$

ТЕОРЕМА 2. *Механизмы с кинематической схемой $(K_{3,3}, d)$ и попарно несовпадающими шарнирами возможны лишь в следующих случаях:*

1. *Первый тип Диксона (Рис.2): для каждого цикла $p_i q_j p_k q_l$ суммы квадратов длин противоположных рёбер равны. (Независимы, как легко проверить, лишь 4 из девяти таких условий.)*

2. *Второй тип Диксона (Рис.3): $|q_0 p_0| = |q_1 p_1| = |q_2 p_2| = a, |q_0 p_1| = |q_1 p_0| = b, |q_0 p_2| = |q_2 p_0| = c, |q_1 p_2| = |q_2 p_1| = d$ и выполнено соотношение: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. И все соотношения, получающиеся из них перенумерацией вершин в долях. Геометрически — это случай, когда все циклы длины 4, в которые дважды входит сторона длины a (встречающаяся трижды) параллелограмматические, то есть имеют противоположные стороны равной длины.*

История вопроса

- Теорема 1 была доказана при $m \geq 3$ и $n \geq 5$ (первый случай Диксона) в *H. Maehara and N. Tokushige, “When does a planar bipartite framework admit a continuous deformation?”(2001),*
- теорема 2 — в работе *D. Walter and M. L. Husty, “On a nine-bar linkage, its possible configurations and conditions for paradoxical mobility”, (2007).* Сложные вычисления, вычисления с идеалами, многочлены с миллионами членов, 26-й степени.
- Недоказанной она оставалась для графов $K_{3,4}$ и $K_{4,4}$.
- **Сведение же общего случая к случаю $m = n = 3$, как мы видели, совсем просто, и опирается на следующую лемму:**

Лемма, сводящая теорему 1 к теореме 2.

- **Лемма 3.2.** *Для шарнирника второго типа Диксона тройки шарниров долей лежат в вершинах прямоугольников с параллельными сторонами и общим центром. Эти шарнирники изгибаемы с одной степенью свободы.*

Возможность совпадения шарниров одной доли. Если шарнир p_0 не лежит на прямой $p_1p'_2$, то правый шарнирник $K_{3,3}$ (рычаги – штрихами) неизгибаем

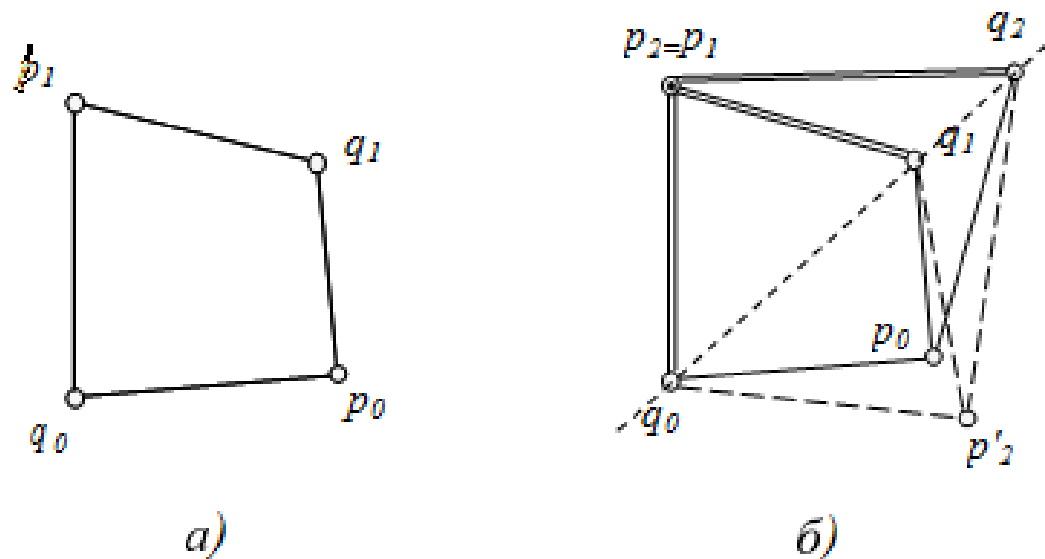
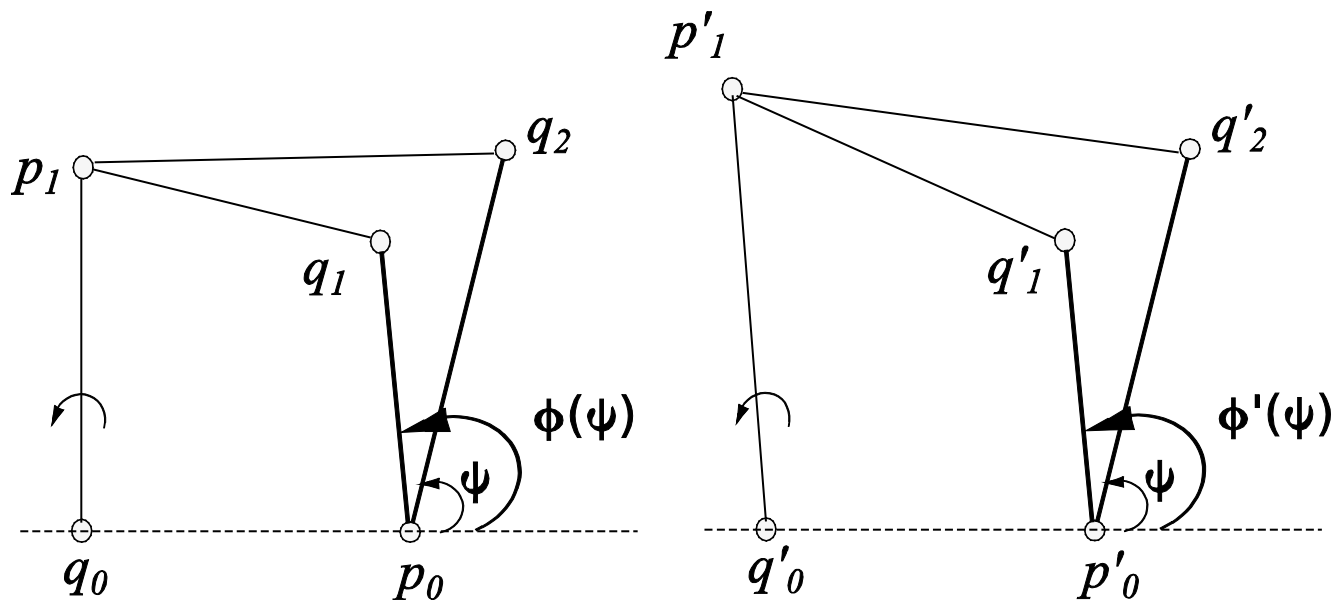


Рис. 3. а) Шарнирный четырёхзвенник. б) В случае равенства длин соответствующих рычагов, исходящих из шарниров p_1 и p_2 , эти шарниры могут совместиться, и возникнет механизм по существу с графом $K_{2,3}$. Это может произойти тогда и только тогда, когда шарниры q_0 , q_1 , q_2 лежат на одной прямой. Совместившиеся рычаги показаны двойными линиями.

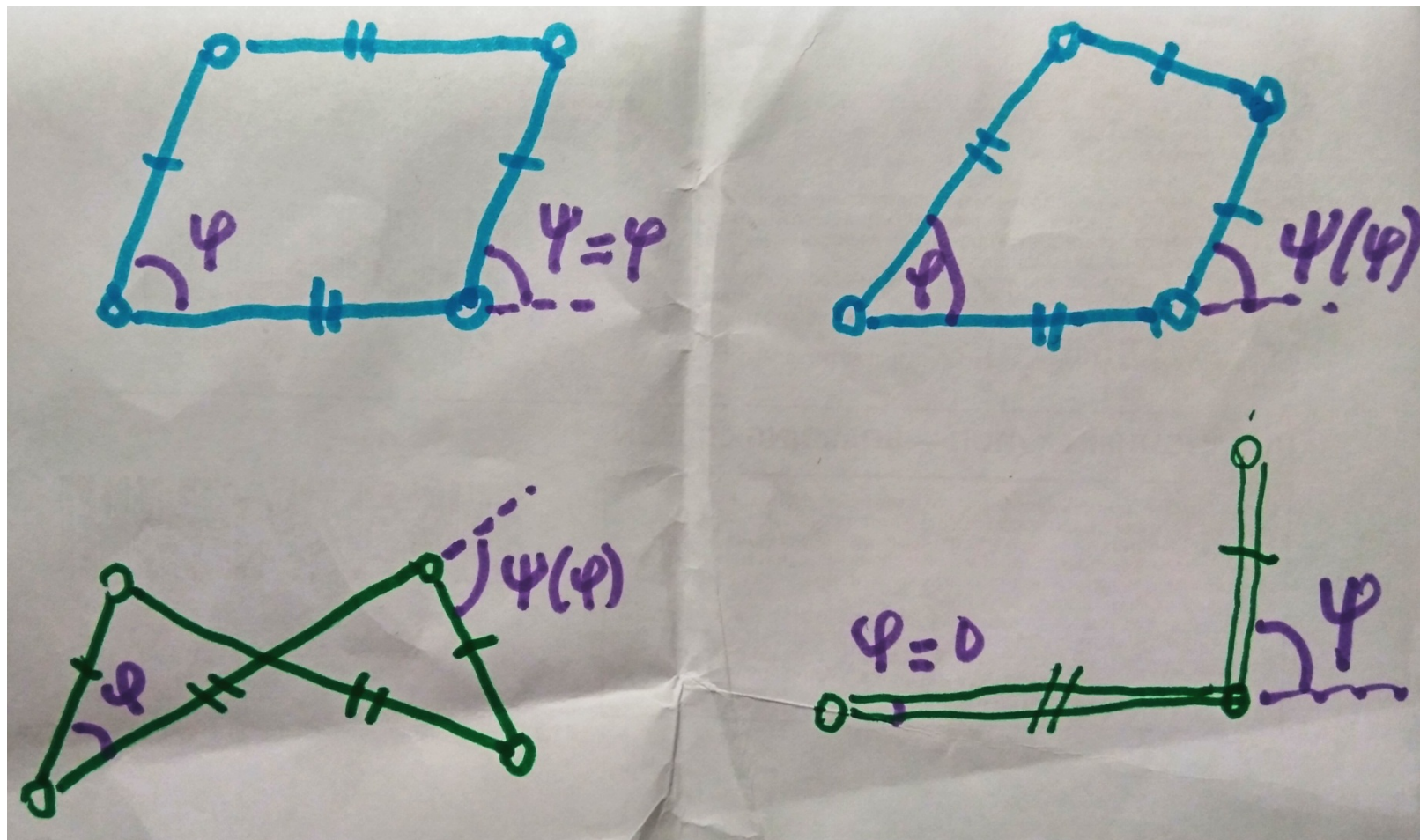
Ищем возможности совпадения передаточных функций



Алгебраическое множество называется приводимым, если оно является объединением двух собственных алгебраических подмножеств.

- ***Лемма. Конфигурационное пространство шарнирного четырёхзвенного механизма приводимо лишь в двух случаях: когда механизм — шарнирный параллелограмм, либо когда это складывающийся механизм (дельтоид).***

Разные передаточные функции на разных неприводимых
компонентах конфигурационного пространства
параллелограмматического и дельтоидного
четырёхзвенников

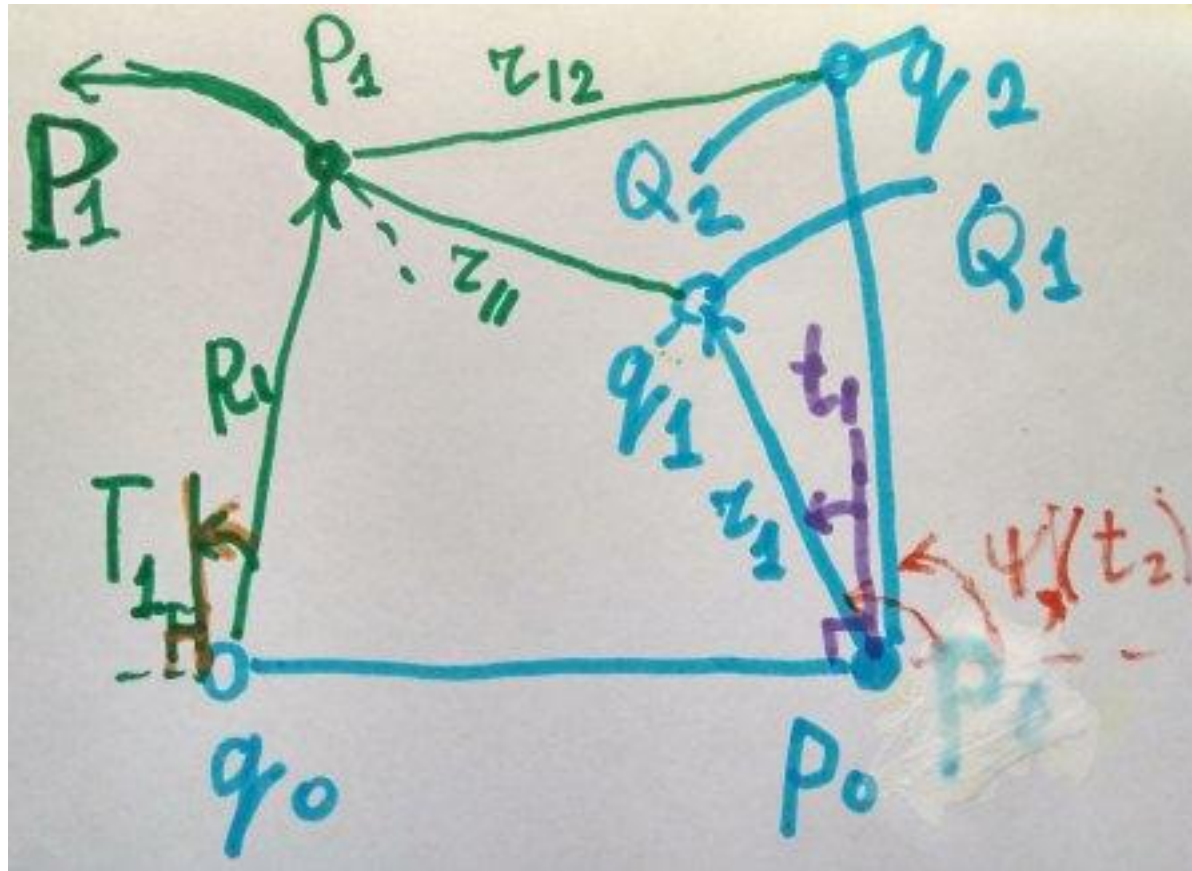


Начало доказательства теоремы 2

Рассмотрим шарнирники с заданными положительными длинами рёбер и графом $K_{2,3}$ рисунка 5, с двумя закреплёнными шарнирами p_0 и q_0 . Обозначим радиусы окружностей P_1 и Q_1, Q_2 , на которых лежат шарниры, как: $R_1 = r_{10}, r_1 = r_{01}, r_2 = r_{02}$. Если выполнено необходимое условие изгибаемости и шарниры попарно не совпадают, то шарнирники $(\mathbf{p}, K_{2,3})$ взаимно однозначно отвечают точкам кривой $M_1 = \{(p_1, q_1, q_2) \in P_1 \times Q_1 \times Q_2, \text{ задающей уравнениями: } |p_1 - q_1| = r_{11} \text{ и } |p_1 - q_2| = r_{12}. \text{ Применяя параметризации окружностей}^4 :$

$$T_1 \mapsto (X_1(T_1), Y_1(T_1)) = \left(1 + \frac{2R_1T_1}{T_1^2 + 1}, \frac{R_1(T_1^2 - 1)}{T_1^2 + 1}\right) \quad (\text{для } P_1),$$
$$t_k \mapsto (x_k(t_k), y_k(t_k)) = \left(-1 + \frac{2r_k t_k}{t_k^2 + 1}, \frac{r_k(t_k^2 - 1)}{t_k^2 + 1}\right) \quad (\text{для } Q_k, \ k = 1, 2),$$

Голубые рычаги постоянной длины



Начало доказательства теоремы 2

получаем задание M_1 полиномиальными по T_1, t_1, t_2 уравнениями $f_1(T_1, t_1) = 0$, $f_2(T_1, t_2) = 0$, где $f_k(T_1, t_k)$ есть числитель рациональной функции

$$(X_1(T_1) - x_k(t_k))^2 + (Y_1(T_1) - y_k(t_k))^2 - r_{1k}^2.$$

Эта проекция C_1 является алгебраической кривой, задающейся уравнением, получающимся приравниванием результата f_1 и f_2 как многочленов от T_1 к нулю. Этот результат $F_1(t_1, t_2)$ есть многочлен восьмой степени, и имеет четвёртую степень по обоим переменным. Уравнение $F_1(t_1, t_2) = 0$ задаёт зависимость углов $\phi(\psi)$, о которой говорилось выше. Результат может обращаться в ноль и в случае зануления старших коэффициентов (при T_1^2) многочленов f_1 и f_2 . Однако, при положительных длинах рычагов это может происходить лишь при конечном наборе значений (t_1, t_2) , и не может привести к выявлению изгибаемых шарнирников.

Вычисления 1. Механизм Диксона первого типа.

4.1. Общий случай, F_1 и F_2 пропорциональны. Составляем многочлен $F = \frac{F_1}{16R_1^2} - a \frac{F_2}{16R_2^2}$, считая далее вещественную постоянную a ненулевой, и приравниваем его коэффициенты нулю. Многочлен F имеет восьмую степень по переменным t_1, t_2 , и четвёртую степень по каждому из них, все его 25 коэффициентов c_{ij} (при $t_1^i t_2^j$) ненулевые. Величины c_{ij} , зависящие от a, R_1, R_2, r_1, r_2 и r_{ij} , включают десятки слагаемых, и весьма громоздки. Но эту систему уравнений удаётся вручную упростить и решить. Конечно, для работы с ней не обойтись без ноутбука и математического пакета. Первое обнадёживающее обстоятельство состоит в том, что матрица коэффициентов центрально симметрична,

Вычисления 2. Механизм Диксона второго типа.

§ 5. Вырожденный случай: F_1 и F_2 не пропорциональны,
но имеют общий множитель положительной степени

5.1. Приводимость конфигурационного пространства кинематической схемы $(K_{3,2}, d)$. Будем говорить, что кинематическая схема $(K_{3,2}, d)$ удовлетворяет условию U), если все её рычаги положительной длины, и выполнено необходимое условие изгибаемости, дающееся леммой 2.1. То есть,

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены условия U), то многочлен F_1 приводим над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из четырёхзвенников схемы $(K_{3,2}^, d)$ является параллелограмматическим, либо хотя бы один из закреплённых четырёхзвенников является дельтоидом (первого или второго типа), либо свободный четырёхзвенник есть дельтоид первого типа.*

Случай совмещения шарниров

Для шарнирников со структурой полного двудольного графа и рычагами ненулевой длины совмещаться могут лишь шарниры одной доли. Пусть в шарнирнике $\mathbf{p}$ с кинематической схемой $(K_{m,n}, \mathbf{d})$ совпадают шарниры p_i и p_j . Тогда с необходимостью

$$|p_i q_k| = |p_j q_k|, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (6.1)$$

Шарнирник же $\mathbf{p}$ можно рассматривать и как шарнирник $\mathbf{p}'$ с на единицу меньшим числом шарниров в первой доле и кинематической схемой $(K_{m-1,n}, \mathbf{d}')$, где набор $\mathbf{d}'$ получается отбрасыванием из набора $\mathbf{d}$ квадратов длин рычагов, смежных одному из отброшенных шарниров (например, шарниру p_j). Будем называть кинематическую схему $(K_{m-1,n}, \mathbf{d}')$ уменьшением схемы $(K_{m,n}, \mathbf{d})$.

ЛЕММА 6.1. Пусть кинематической схеме $(K_{m,n}, \mathbf{d})$ отвечает хотя бы один шарнирник. Тогда для неё шарнирник с совпавшими шарнирами p_i и p_j имеется тогда и только тогда, когда выполнены условия (6.1). При этом, шарнирник с несовпадающими шарнирами p_i и p_j имеется тогда и только тогда, когда есть шарнирник, для которого все шарниры q_k , $1 \leq k \leq n$ лежат на прямой.

Случай совмещения шарниров

Пусть кинематическая схема $(K_{\mu,\eta}, \mathbf{d}')$, получена уменьшением схемы $(K_{t,n}, \mathbf{d})$.

ЛЕММА 6.2. Если схеме $(K_{\mu,\eta}, \mathbf{d}')$ отвечает $k > 0$ шарнирников, то и схеме $(K_{t,n}, \mathbf{d})$ отвечает не менее k шарнирников. Схеме $(K_{\mu,\eta}, \mathbf{d}')$ не отвечает ни одного шарнирника тогда и только тогда, когда схеме $(K_{t,n}, \mathbf{d})$ не отвечает ни одного шарнирника.

ЛЕММА 6.3. Пусть у кинематической схемы $(K_{t,n}, \mathbf{d})$, $t, n \geq 2$ имеется хотя бы одно уменьшение. Тогда этой схеме отвечает шарнирник, изгибаемый с l степенями свободы в том и только том случае, когда какой-либо её уменьшенной схеме $(K_{\mu,\eta}, \mathbf{d}')$ отвечает шарнирник, изгибаемый с l степенями свободы.

Общая теорема, учитывающая случаи совмещения шарниров

ТЕОРЕМА 5. Пусть в кинематической схеме $(K_{m,n}, d)$, $m \leq n$ длины всех рычагов положительны, и удовлетворяют необходимому условию изгибаемости, дающемуся леммой 2.1. Тогда схеме $(K_{m,n}, d)$ отвечают изгибаемые шарнирники (то есть, хотя бы один механизм) лишь в следующих случаях:

1. Это схема $(K_{1,n}, d)$, $n \geq 2$. Ей отвечает один механизм с $n-1$ степенью свободы.
2. Это неуменьшаемая схема $(K_{2,n}, d)$, $n \geq 2$, ей отвечают шарнирники, изгибаемые с одной степенью свободы. Либо у исходной схемы есть неуменьшаемое уменьшение $(K_{2,\eta}, d')$, $\eta \geq 2$, или $(K_{\mu,2}, d')$, $\mu \geq 2$. В этом случае исходной схеме $(K_{m,n}, d)$, помимо изгибаемых с одной степенью свободы шарнирников, может отвечать ещё и неизгибаемый шарнирник.

Теорема 5. Продолжение.

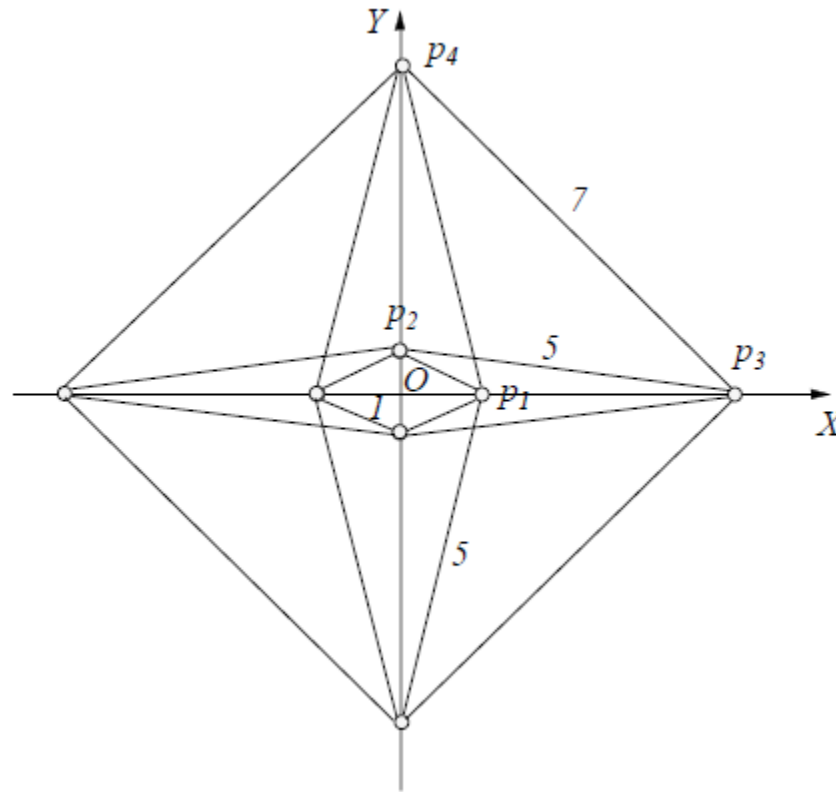
3. Это схема $(K_{m,n}, \mathbf{d})$, $m, n \geq 3$, удовлетворяющая условию Диксона первого типа. Для шарнирников с такими схемами возможно совпадение шарниров. Если такой схеме не отвечает уменьшенных схем $(K_{1,n}, \mathbf{d}')$, $n \geq 3$, или $(K_{m,1}, \mathbf{d}')$, $m \geq 3$, то ей отвечают лишь шарнирники, изгибаемые с одной степенью свободы. В противном случае, ей отвечают шарнирники, изгибаемые с $n - 1$ или, соответственно, $m - 1$ степенями свободы. Неизгибаемых шарнирников таким схемам не отвечает.

4. Это схемы $(K_{3,3}, \mathbf{d})$, $(K_{3,4}, \mathbf{d})$ или $(K_{4,4}, \mathbf{d})$, удовлетворяющие условиям Диксона второго типа. Либо схемы $(K_{m,n}, \mathbf{d})$, для которых имеется уменьшенная схема вида одной из этих трёх. Всем этим схемам отвечают шарнирники, изгибаемые с одной степенью свободы. Кроме того, могут отвечать и неизгибаемые шарнирники.

Ещё одно утверждение

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого двудольного графа $K_{m,n}$, кроме графа $K_{1,1}$, имеется кинематическая схема $(K_{m,n}, \mathbf{d})$, которой отвечают лишь изгибаемые шарнирники, с попарно несовпадающими шарнирами.*

Пример полностью и одинаково напряжённого в каждом своём положении механизма структуры $K_{4,4}$, у которого все углы между смежными рычагами переменны



Спасибо за внимание!

.