Научный семинар
«Дифференциальная геометрия и приложения»
под руководством академика А.Т. Фоменко,
6 декабря 2021 года,
МГУ им. М.В. Ломоносова

# О движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц

Кулешов А.С., Гаджиев М.М.

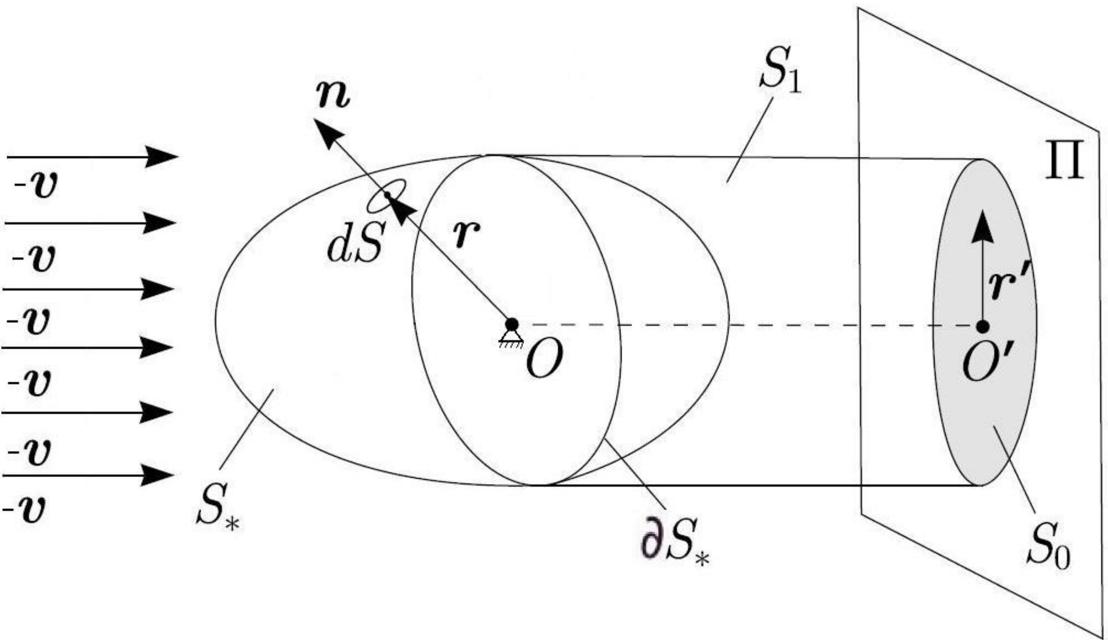
Кафедра теоретической механики и мехатроники,

Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,

Москва, Россия

E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su

# Постановка задачи




Рассмотрим задачу о движении твердого тела в потоке частиц вокруг неподвижной точки. Будем предполагать, что поток частиц представляет собой свободный молекулярный поток постоянной плотности $\rho$, частицы которого движутся поступательно с постоянной абсолютной скоростью: $-\mathbf{v} = v_0\boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\gamma}$ - единичный вектор, направленный вдоль потока.

Будем рассматривать следующий механизм взаимодействия набегающего потока с поверхностью тела. Частица при соударении отдает практически всю свою энергию и приходит в температурное равновесие с местом удара (несколько теперь нагретым). Когда это нагревание пройдет, частица выходит в пространство с тепловой скоростью, равной тепловой скорости молекул поверхности тела. Так как эта тепловая скорость существенно меньше тепловой скорости наружних частиц, то можно идеализировать эту картину гипотезой абсолютно неупругого удара, когда частицы полностью теряют свою энергию при столкновении с телом (и не отражаются).

# Вычисление момента - I

Получим выражение для силы и момента, действующего на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц. Пусть $O$ – неподвижная точка твердого тела. Распределение скоростей в твердом теле определяется формулой Эйлера:

$$\mathbf{u}_M = \left[ \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM} \right],$$

где $M$ – произвольная точка твердого тела. Если обозначить угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\overrightarrow{OM}$ через $\alpha$, то

$$\left| \mathbf{u}_M \right| = \left| \boldsymbol{\omega} \right| \left| \overrightarrow{OM} \right| \sin\alpha \le \left| \boldsymbol{\omega} \right| \left| \overrightarrow{OM} \right|$$

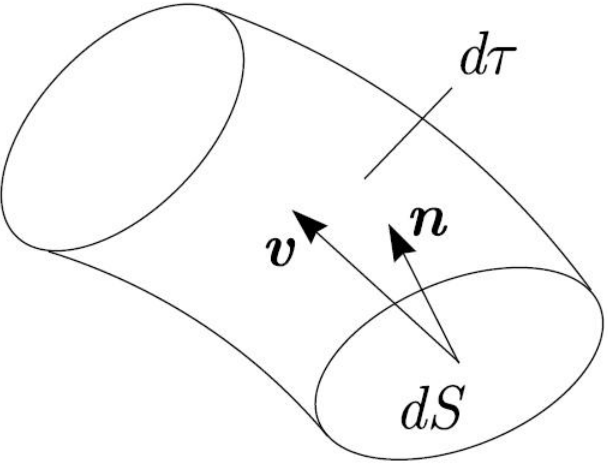
Предположим, что величина скорости набегающего потока существенно превосходит произведение характерного значения угловой скорости твердого тела и характерного расстояния от неподвижной точки до любой из точек твердого тела, то есть

$$\frac{\left| \boldsymbol{\omega} \right| \left| \overrightarrow{OM} \right|}{v_0} \ll 1. \qquad (1)$$

Перейдем в систему координат, движущуюся поступательно вместе с потоком. В этой системе координат тело движется относительно потока со скоростью

$$\mathbf{v} = -v_0 \boldsymbol{\gamma}.$$

# Вычисление момента - II




Выделим на поверхности тела элементарную площадку $dS$ и вычислим элементарный импульс, получаемый площадкой $dS$ , движущейся поступательно относительно потока со скоростью $\mathbf{v}$ , за время $dt$. Во время такого движения площадка «заметает» объем

$$d\tau = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dSdt,$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к площадке, причем $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) > 0.$ Внутри объема $d\tau$ содержится масса $dm=\rho\, d\tau.$

Элементарный импульс, получаемый площадкой, и действующая на нее сила имеют вид:

$$d\mathbf{Q} = -\mathbf{v}dm = -\mathbf{v}\rho d\tau = -\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dSdt,$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS.$$

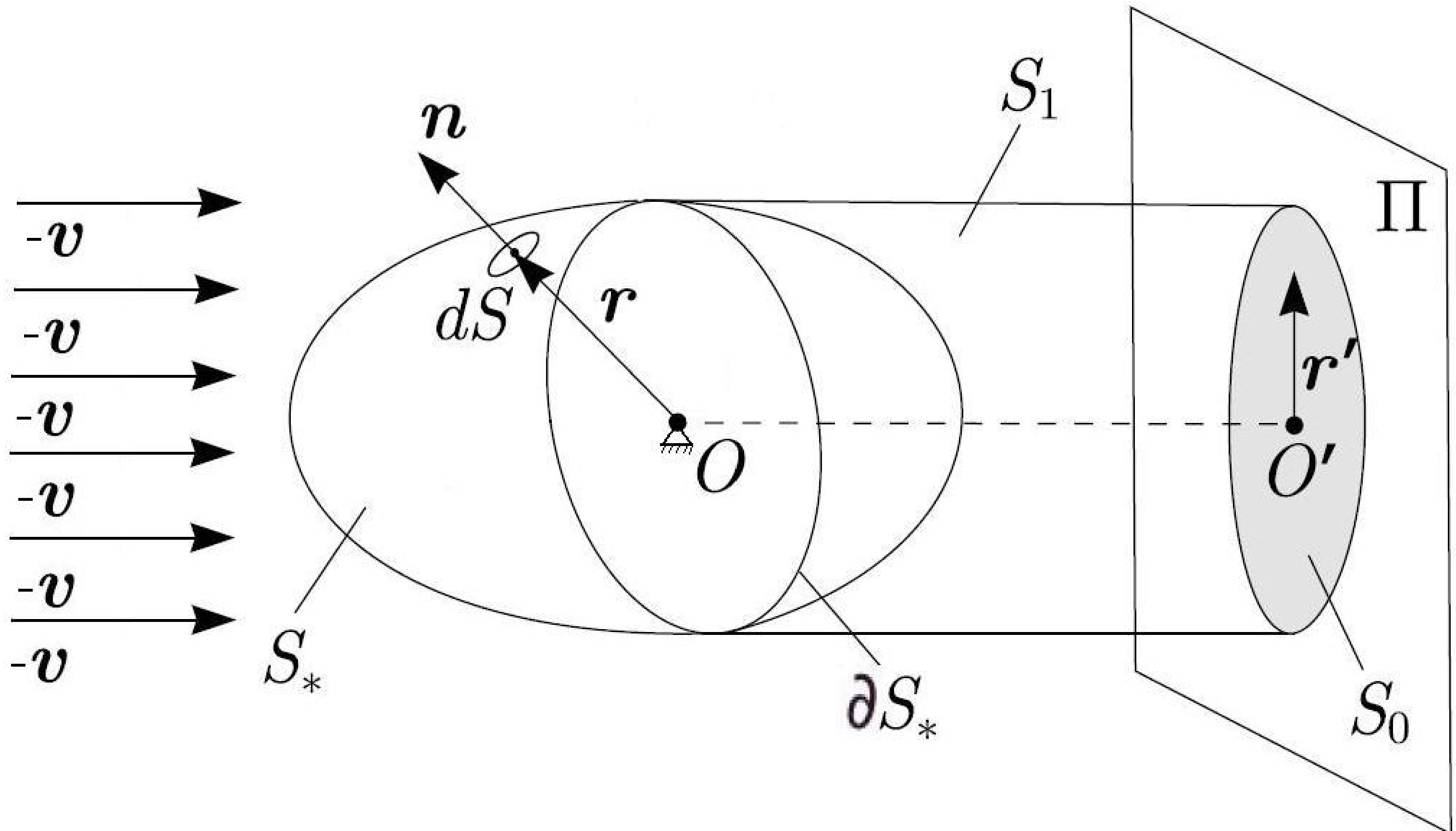
Рассмотрим выпуклое тело с неподвижной точкой, ограниченное гладкой замкнутой поверхностью и движущееся поступательно со скоростью $\mathbf{v} = -v_0\boldsymbol{\gamma}.$

# Вычисление момента - III

Главный вектор сил взаимодействия тела с молекулами задается формулой:

$$\mathbf{F} = -\int_{S_*} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS = -\rho\mathbf{v}\int_{S_*}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \tag{2}$$

В формуле (2) через $S_*$ обозначена часть поверхности тела, «омываемая» потоком молекул: на её границе $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})=0$, а во внутренних точках поверхности $S_*$ имеем: $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})>0$
Границу этой поверхности обозначим $\partial S_*$ .



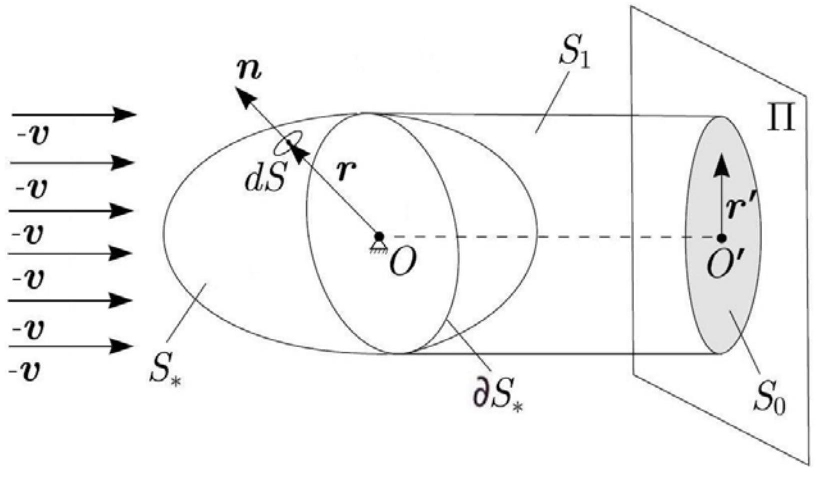
# Вычисление момента - IV

Главный момент сил взаимодействия молекул с телом относительно неподвижной точки $O$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{M}_O = -\rho \int_{S_*} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}](\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS = \rho \left[ \mathbf{v} \times \int_{S_*} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS \right], \qquad (3)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус – вектор точки поверхности тела относительно неподвижной точки $O$.

Для вычисления интегралов, входящих в формулы (2) и (3), введем новое тело $T$, которое построим следующим образом. Перпендикулярно вектору $\mathbf{v}$ разместим плоскость П. Проекция тела на плоскость П вдоль вектора $\mathbf{v}$ (ортогональная проекция) является некоторой плоской фигурой $S_0$. Введем еще цилиндрическую поверхность $S_1$ с образующей $\mathbf{v}$ и направляющей – границей $\partial S_*$. Поверхность $S_1$, с одной стороны, ограничена этой направляющей, а с другой – линией пересечения с плоскостью П. Поверхность $\Sigma = S_* \bigcup S_1 \bigcup S_0$ и ограничивает тело $T$, объем которого обозначим через $\tau$.



# Вычисление момента - V

Согласно теореме Остроградского – Гаусса, справедливо соотношение:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS = \int_{T} \operatorname{div}(\mathbf{v})\, d\tau = 0,$$

Кроме того, справедливы соотношения:

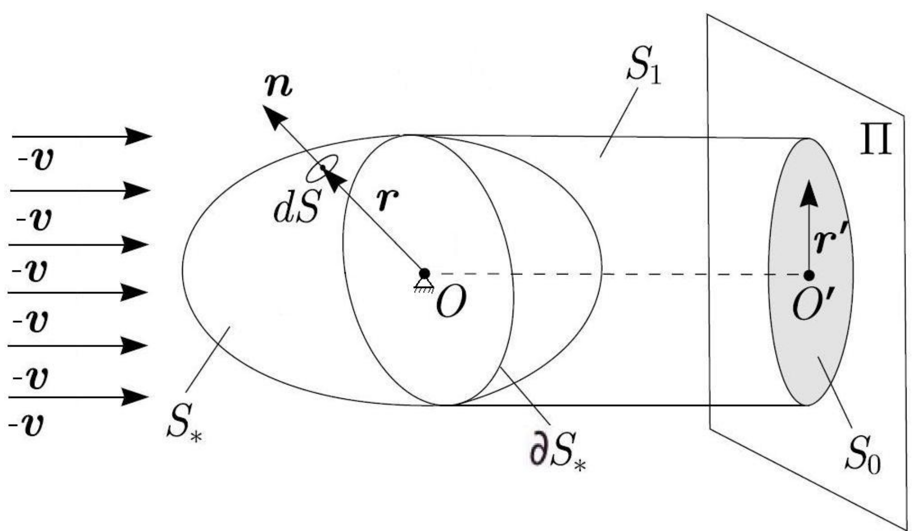
$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\big|_{S_1} = 0, \quad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\big|_{S_0} = -v_0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}) = -v_0.$$

Отсюда имеем:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS = \int_{S_*} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS + \int_{S_1} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS + \int_{S_0} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS = 0,$$

и следовательно

$$\int_{S_*} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS = -\int_{S_0} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dS = v_0 \int_{S_0} dS = v_0 S,$$ где $S$ – площадь фигуры $S_0$ .



# Вычисление момента - VI

Таким образом, главный вектор сил взаимодействия тела с молекулами задается формулой:

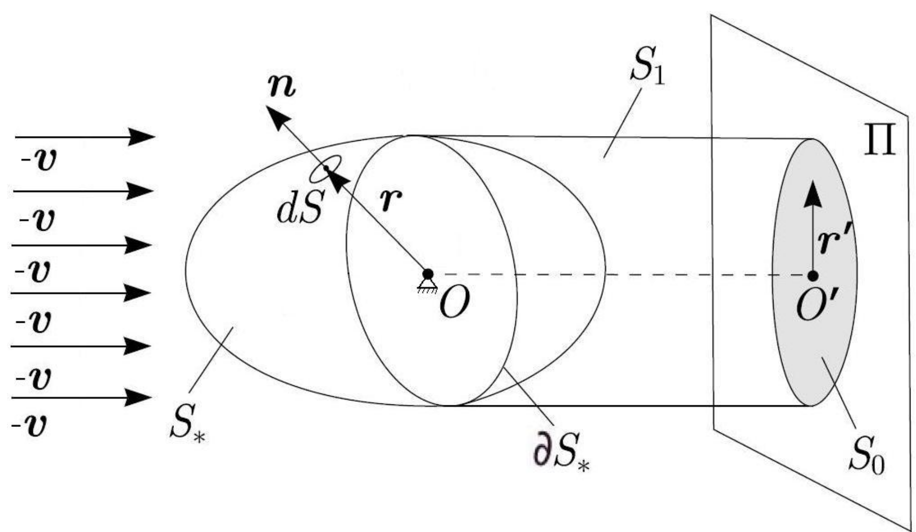
$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{v} v_0 S = \rho v_0^2 S \boldsymbol{\gamma}.$$

Введем систему координат *Oxyz* с началом в неподвижной точке *O* и осями, направленными вдоль главных осей инерции для точки *O*. По теореме Остроградского – Гаусса получаем:

$$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{r}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = \tau \mathbf{v}.$$

С другой стороны, можно написать, что

$$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{r}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS = \int\limits_{S_*} \mathbf{r}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) dS - v_0 \int\limits_{S_0} \mathbf{r}\, dS$$



# Вычисление момента - VII

На поверхности $S_0$ вектор $\mathbf{r}$ представляет собой вектор, соединяющий неподвижную точку с различными точками фигуры $S_0$. Поэтому на $S_0$ представим вектор $\mathbf{r}$ в виде:

$$\mathbf{r} = -\frac{l\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \mathbf{r}' = l\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r}'.$$

Здесь $l$ – длина перпендикуляра, опущенного на плоскость П из неподвижной точки. Для вектора $\mathbf{r}'$ справедливо условие: $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') = 0$. Тогда

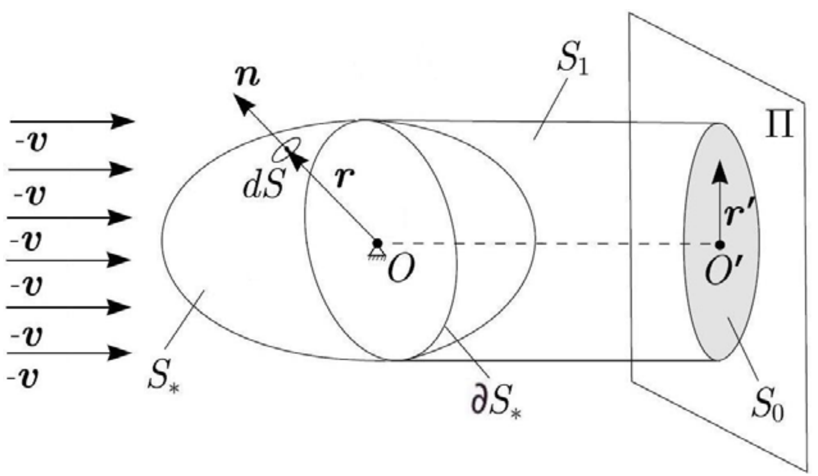
$$v_0 \int_{S_0} \mathbf{r} dS = v_0 l \boldsymbol{\gamma} \int_{S_0} dS + v_0 \int_{S_0} \mathbf{r}' dS = -lS\mathbf{v} + v_0 \int_{S_0} \mathbf{r}' dS = -lS\mathbf{v} + v_0 \mathbf{P}_{O'}$$

Здесь обозначено:

$$\mathbf{P}_{O'} = \int_{S_0} \mathbf{r}' dS$$

Итак, окончательно,

$$\tau \mathbf{v} = \int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + lS\mathbf{v} - v_0 \mathbf{P}_{O'}$$



# Вычисление момента - VIII

Таким образом,

$$\int\limits_{S_*} \mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS = (\tau - lS)\,\mathbf{v} + v_0\mathbf{P}_{O'}$$

и следовательно,

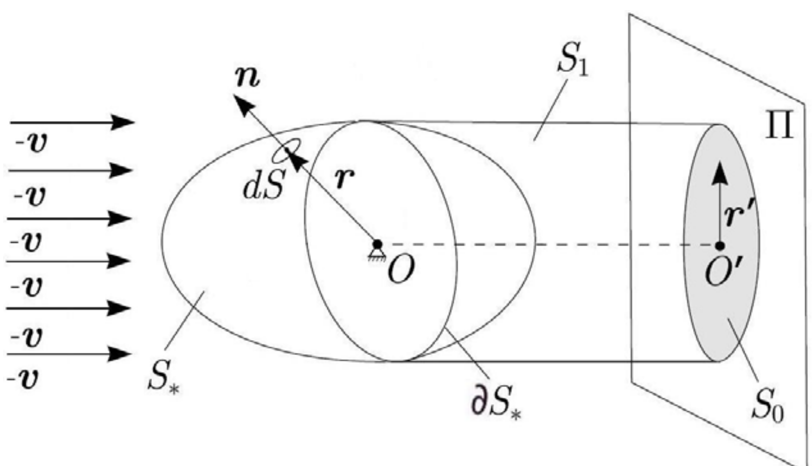
$$\mathbf{M}_O = \rho v_0\left[\mathbf{v}\times\mathbf{P}_{O'}\right] = -\rho v_0^2\left[\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{P}_{O'}\right].$$

Теперь вычислим интеграл

$$\mathbf{P}_{O'} = \int\limits_{S_0} \mathbf{r}'\,dS.$$

В этом интеграле вектор $\mathbf{r}'$ представляет собой вектор, проведенный из точки $O'$ в различные точки фигуры $S_0$ . Представим теперь, что фигура $S_0$ - это наклеенная на плоскость П бесконечно тонкая однородная пластинка плотностью $\rho_1 = \mathrm{const}$. Тогда

$$\int\limits_{S_0} \mathbf{r}'\,dS = \frac{1}{\rho_1}\int\limits_{S_0} \rho_1\mathbf{r}'\,dS = \frac{\rho_1 S}{\rho_1}\ \overrightarrow{O'G} = S\ \overrightarrow{O'G}$$




Здесь $S = S(\boldsymbol{\gamma})$ - площадь фигуры $S_0$ , а $\overrightarrow{O'G}$ - вектор, соединяющий точку $O'$ - проекцию точки $O$ на плоскость П с центром масс $G$ однородной пластинки, имеющей форму фигуры $S_0$ .

# Вычисление момента - IX

В общем случае

$$S = S(\boldsymbol{\gamma}), \quad \overrightarrow{O'G} = \mathbf{c} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Введем также обозначение

$$\rho v_0^2 = f.$$

Таким образом, главный момент сил взаимодействия молекул с телом относительно неподвижной точки $O$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{M}_O = -f\, S(\boldsymbol{\gamma})\left[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})\right]. \qquad (4)$$

Итак, мы получили выражение для момента, действующего на твердое тело с неподвижной точкой, находящееся в потоке частиц. Несложно видеть, что этот момент зависит от направления потока, «омывающего» тело. Заметим, что при выводе этой формулы мы использовали предположение (1). Поэтому данной формулой следует пользоваться лишь при изучении медленных вращательных движений тела с неподвижной точкой. Таким образом, уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц имеют вид:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \left[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right] = -f\, S(\boldsymbol{\gamma})\left[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})\right], \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}\right] = 0. \qquad (5)$$

Здесь $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ - это тензор инерции тела относительно неподвижной точки $O$. Для того, чтобы более четко осознать, что представляют собой уравнения (5), рассмотрим несколько примеров тел с неподвижной точкой, ограниченных разными поверхностями и обтекаемых потоком частиц.

# Явное выражение для момента сил в случае обтекания сферы - I.

Вычислим момент $\mathbf{M}_O$, определяемый формулой (4) в случае, когда тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью сферы радиуса $R$, а неподвижной точкой является центр сферы. Тогда фигура $S_0$ представляет собой круг, радиус которого равен радиусу $R$ сферы. Площадь этого круга постоянна и равна

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = \pi R^2 = \text{const}.$$

Очевидно, что центр масс однородной пластины, имеющей форму фигуры $S_0$, будет располагаться в центре круга. Поэтому вектор $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$, соединяющий проекцию неподвижной точки на плоскость, перпендикулярную потоку, и центр масс пластины, имеющей форму фигуры $S_0$, в данном случае равен нулю. Следовательно,

$$\mathbf{M}_O = 0.$$

Вычислим момент $\mathbf{M}_O$ в случае, когда в качестве неподвижной точки выбрана произвольная точка $O_1$ внутри шара. Введем систему координат $O_1xyz$, оси которой направлены по главным осям инерции для точки $O_1$. Координаты центра сферы – точки $O$ в системе координат $O_1xyz$ обозначим

$$\overrightarrow{O_1O} = (a_1, a_2, a_3).$$

Согласно известной формуле теоретической механики

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O - \left[\overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F}\right] = \left[\overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F}\right] = \left[\overrightarrow{O_1O} \times f\, S(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}\right] = f\pi R^2 \left[\overrightarrow{O_1O} \times \boldsymbol{\gamma}\right].$$

# Явное выражение для момента сил в случае обтекания сферы - II.

Пусть $\mathbf{M}_{O_1} = \left(M_1, M_2, M_3\right)$ в системе координат $O_1xyz$ . Тогда

$$M_1 = f\pi R^2\left(a_2\gamma_3 - a_3\gamma_2\right),\ \ M_2 = f\pi R^2\left(a_3\gamma_1 - a_1\gamma_3\right),\ \ M_3 = f\pi R^2\left(a_1\gamma_2 - a_2\gamma_1\right).$$

Уравнения движения тела принимают вид:

$$\begin{aligned}
&A_1\dot{\omega}_1 + \left(A_3 - A_2\right)\omega_2\omega_3 = f\pi R^2\left(a_2\gamma_3 - a_3\gamma_2\right), && \dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,\\
&A_2\dot{\omega}_2 + \left(A_1 - A_3\right)\omega_1\omega_3 = f\pi R^2\left(a_3\gamma_1 - a_1\gamma_3\right), && \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,\\
&A_3\dot{\omega}_3 + \left(A_2 - A_1\right)\omega_1\omega_2 = f\pi R^2\left(a_1\gamma_2 - a_2\gamma_1\right); && \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.
\end{aligned}$$

Видно, что в этом случае уравнения (5) принимают вид классических уравнений Эйлера – Пуассона, описывающих движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Поэтому можно рассматривать систему уравнений (5) как возможное обобщение классических уравнений Эйлера – Пуассона.

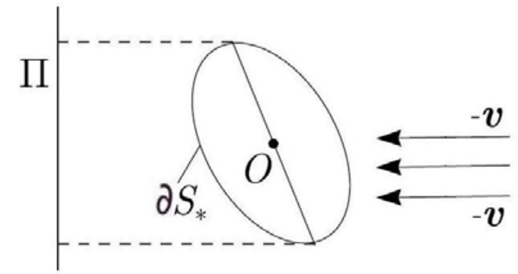
# Явное выражение для момента сил в случае обтекания эллипсоида - I.

Вычислим момент $\mathbf{M}_O$, определяемый формулой (4) в случае, когда тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью эллипсоида, а неподвижной точкой является центр эллипсоида. Будем считать, что главные оси инерции тела в неподвижной точки совпадают с главными осями эллипсоида. Пусть в главных осях инерции с началом в неподвижной точке уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (6)$$

Найдем $\partial S_*$. Касательная плоскость к эллипсоиду в точке с координатами ($x, y, z$) задается следующим уравнением относительно $X$, $Y$, $Z$:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$




Пусть точка ($x, y, z$) принадлежит границе $\partial S_*$. Тогда прямая

$$X=x-v_0\gamma_1 t,\;\; Y=y-v_0\gamma_2 t,\;\; Z=z-v_0\gamma_3 t$$

лежит в касательной плоскости к поверхности тела, то есть для любого $t$ выполняется равенство:

$$\frac{x\left(x-v_0\gamma_1 t\right)}{a^2}+\frac{y\left(y-v_0\gamma_2 t\right)}{b^2}+\frac{z\left(z-v_0\gamma_3 t\right)}{c^2}=1.$$

# Явное выражение для момента сил в случае обтекания эллипсоида - II.

Отсюда следует, что

$$\frac{x\gamma_1}{a^2}+\frac{y\gamma_2}{b^2}+\frac{z\gamma_3}{c^2}=0. \qquad (7)$$

Это уравнение вместе с уравнением эллипсоида задает границу $\partial S_*$ . «Омываемая» потоком часть $S_*$ поверхности тела лежит в полупространстве

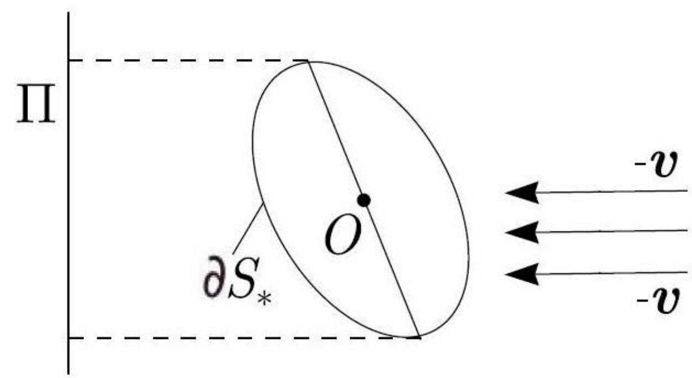
$$\frac{x\gamma_1}{a^2}+\frac{y\gamma_2}{b^2}+\frac{z\gamma_3}{c^2}\le 0.$$

Сечение эллипсоида (6) плоскостью (7) представляет собой эллипс. Найдем его площадь. Она равна произведению полуосей эллипса, умноженному на $\pi$. Квадраты полуосей суть экстремумы функции $f=x^2+y^2+z^2$ при условиях (6) и (7). Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа и рассмотрим функцию

$$L=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\mu\left(\frac{x\gamma_1}{a^2}+\frac{y\gamma_2}{b^2}+\frac{z\gamma_3}{c^2}\right).$$

В точках ее экстремума выполняются неравенства:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=0.$$




Соответствующие уравнения имеют вид:

# Явное выражение для момента сил в случае обтекания эллипсоида - III.

Соответствующие уравнения имеют вид:

$$2x+\frac{2\lambda x}{a^2}+\mu\frac{\gamma_1}{a^2}=0,\quad 2y+\frac{2\lambda y}{b^2}+\mu\frac{\gamma_2}{b^2}=0,\quad 2z+\frac{2\lambda z}{c^2}+\mu\frac{\gamma_3}{c^2}=0. \tag{8}$$

Их решение имеет вид:

$$x=-\frac{\mu\gamma_1}{2\left(a^2+\lambda\right)},\quad y=-\frac{\mu\gamma_2}{2\left(b^2+\lambda\right)},\quad z=-\frac{\mu\gamma_3}{2\left(c^2+\lambda\right)}.$$

Подставим найденные значения для $x$, $y$, $z$ в (7) и получим:

$$\frac{\gamma_1^2}{a^2\left(a^2+\lambda\right)}+\frac{\gamma_2^2}{b^2\left(b^2+\lambda\right)}+\frac{\gamma_3^2}{c^2\left(c^2+\lambda\right)}=0,$$

то есть

$$\frac{\gamma_1^2}{a^2}\left(b^2+\lambda\right)\left(c^2+\lambda\right)+\frac{\gamma_2^2}{b^2}\left(a^2+\lambda\right)\left(c^2+\lambda\right)+\frac{\gamma_3^2}{c^2}\left(a^2+\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)=0,$$

или

$$\begin{gathered} a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0,\\ a_0=\frac{\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_2^2}{b^2}+\frac{\gamma_3^2}{c^2},\quad a_2=a^2b^2c^2\left(\frac{\gamma_1^2}{a^4}+\frac{\gamma_2^2}{b^4}+\frac{\gamma_3^2}{c^4}\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Решать полученное уравнение не нужно, чтобы выяснить смысл $\lambda$, умножим уравнения системы (8) на $x$, $y$, $z$ соответственно и сложим. Получим, что

$$\lambda=-\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

# Явное выражение для момента сил в случае обтекания эллипсоида - IV.

Площадь эллипса, получаемого сечением эллипсоида (6) плоскостью (7), равна $S_1 = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ - корни полученного выше квадратного уравнения. По теореме Виета

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a^2b^2c^2\left(\dfrac{\gamma_1^2}{a^4}+\dfrac{\gamma_2^2}{b^4}+\dfrac{\gamma_3^2}{c^4}\right)}{\dfrac{\gamma_1^2}{a^2}+\dfrac{\gamma_2^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_3^2}{c^2}}.$$

Окончательно получаем:

$$S_1 = \pi abc\sqrt{\frac{\dfrac{\gamma_1^2}{a^4}+\dfrac{\gamma_2^2}{b^4}+\dfrac{\gamma_3^2}{c^4}}{\dfrac{\gamma_1^2}{a^2}+\dfrac{\gamma_2^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_3^2}{c^2}}}.$$

Фигура $S_0$ , площадь которой входит в выражение для силы и момента сил, действующих на тело со стороны потока частиц, является проекцией соответствующего эллипса на плоскость П. Площадь этой фигуры равна

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = S_1\frac{(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{|\mathbf{N}|}, \quad \mathbf{N} = \left(\frac{\gamma_1}{a^2},\frac{\gamma_2}{b^2},\frac{\gamma_3}{c^2}\right)$$

Здесь **N** – вектор нормали к плоскости (7), то есть к плоскости, в которой лежит граница $\partial S_*$

# Явное выражение для момента сил в случае обтекания эллипсоида - V.

Для площади $S(\boldsymbol{\gamma})$ получаем следующее выражение:

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = \pi abc\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2} + \frac{\gamma_2^2}{b^2} + \frac{\gamma_3^2}{c^2}}$$

Таким образом, компоненты главного вектора сил взаимодействия тела с молекулами потока в системе координат $Oxyz$ имеют вид:

$$F_x = \rho v_0^2 \pi abc\gamma_1\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2} + \frac{\gamma_2^2}{b^2} + \frac{\gamma_3^2}{c^2}}, \quad F_y = \rho v_0^2 \pi abc\gamma_2\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2} + \frac{\gamma_2^2}{b^2} + \frac{\gamma_3^2}{c^2}}, \quad F_z = \rho v_0^2 \pi abc\gamma_3\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2} + \frac{\gamma_2^2}{b^2} + \frac{\gamma_3^2}{c^2}}$$

Центр масс фигуры $S_0$ находится в точке $O'$, поэтому $\mathbf{M}_O = 0$.

Вычислим момент $\mathbf{M}_O$ в случае, когда в качестве неподвижной точки выбрана произвольная точка $O_1$ внутри эллипсоида. Введем систему координат $O_1xyz$, оси которой направлены по главным осям инерции для точки $O_1$. Координаты центра эллипсоида – точки $O$ в системе координат $O_1xyz$ обозначим

$$\overrightarrow{O_1O} = \left(h_x, h_y, h_z\right)$$

Согласно известной формуле теоретической механики

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O - \left[\overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F}\right] = \left[\overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F}\right] = \left[\overrightarrow{O_1O} \times f\, S(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}\right] = f\, S(\boldsymbol{\gamma})\left[\overrightarrow{O_1O} \times \boldsymbol{\gamma}\right].$$

# Явное выражение для момента сил в случае обтекания эллипсоида - VI.

Пусть $\mathbf{M}_{O_1} = \left(M_x, M_y, M_z\right)$ в системе координат $O_1xyz$ . Тогда

$$M_1 = f\pi abc\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_2^2}{b^2}+\frac{\gamma_3^2}{c^2}}\left(h_y\gamma_3 - h_z\gamma_2\right),$$

$$M_2 = f\pi abc\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_2^2}{b^2}+\frac{\gamma_3^2}{c^2}}\left(h_z\gamma_1 - h_x\gamma_3\right),$$

$$M_3 = f\pi abc\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_2^2}{b^2}+\frac{\gamma_3^2}{c^2}}\left(h_x\gamma_2 - h_y\gamma_1\right).$$

Уравнения Эйлера – Пуассона принимают вид:

$$A_1\dot{\omega}_1 + \left(A_3 - A_2\right)\omega_2\omega_3 = f\pi abc\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_2^2}{b^2}+\frac{\gamma_3^2}{c^2}}\left(h_y\gamma_3 - h_z\gamma_2\right),$$

$$A_2\dot{\omega}_2 + \left(A_1 - A_3\right)\omega_1\omega_3 = f\pi abc\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_2^2}{b^2}+\frac{\gamma_3^2}{c^2}}\left(h_z\gamma_1 - h_x\gamma_3\right),$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + \left(A_2 - A_1\right)\omega_1\omega_2 = f\pi abc\sqrt{\frac{\gamma_1^2}{a^2}+\frac{\gamma_2^2}{b^2}+\frac{\gamma_3^2}{c^2}}\left(h_x\gamma_2 - h_y\gamma_1\right);$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,$$

$$\dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,$$

$$\dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.$$

# Общие выводы, касающиеся полученных уравнений - I.

Вернемся к системе уравнений (5)

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}] = -f\,S(\boldsymbol{\gamma})[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})], \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0. \tag{5}$$

Уравнения (5) обладают интегральным инвариантом плотности единица, а также первыми интегралами

$$J_1 = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \quad \text{и} \quad J_2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1.$$

Однако в общем случае эти уравнения не обладают первым интегралом типа энергии. Справедливо следующее утверждение

<u>Утверждение 1.</u> Если для любых $i, \; j, \; i \neq j$ выполняются соотношения

$$c_i \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} + \frac{\partial c_i}{\partial \gamma_j} S(\boldsymbol{\gamma}) = c_j \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_i} S(\boldsymbol{\gamma}), \tag{10}$$

то уравнения движения тела с неподвижной точкой в потоке частиц (10) обладают интегралом типа энергии

$$J_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - f\,U(\boldsymbol{\gamma}) = h = \text{const}$$

# Общие выводы, касающиеся полученных уравнений - II.

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$S(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \tag{11}$$

для некоторой функции $U(\boldsymbol{\gamma})$. Тогда если функция $U(\boldsymbol{\gamma})$ достаточно гладкая, то для выполнения соотношений (11) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (10). При этом уравнения движения (5) допускают первый интеграл типа энергии $J_0$.

Отметим, что в случае эллипсоида условия (10) выполняются только если эллипсоид является эллипсоидом вращения, а неподвижная точка лежит на оси вращения.

<u>Утверждение 2.</u> Если поверхность тела центрально симметрична, то вектор $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ можно выбрать так, чтобы он соединял неподвижную точку и центр симметрии. Тогда

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{c} = \text{const}$$

В этом случае соотношения (10) принимают вид:

$$c_i \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} = c_j \frac{\partial S}{\partial \gamma_i}.$$

# Выводы о структуре момента в случае обтекания тела вращения - I.

Выясним, какова структура момента $\mathbf{M}_O$ в случае обтекания тела вращения. Пусть тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью вращения

$$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-f\left(z\right)=0. \qquad (12)$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{df}{dz}.$$

Введем обозначение

$$G=\sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{4}\left(\frac{df}{dz}\right)^2}=\sqrt{f\left(z\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{df}{dz}\right)^2}=G\left(z\right).$$

Тогда вектор нормали к поверхности имеет вид:

$$\mathbf{n}=\left(\frac{x}{G\left(z\right)},\frac{y}{G\left(z\right)},\frac{-\frac{1}{2}\frac{df}{dz}}{G\left(z\right)}\right)$$

Уравнение границы обдуваемой области имеет вид $\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)=0$ или в явном виде:

$$x\gamma_1+y\gamma_2=\frac{1}{2}\frac{df}{dz}\gamma_3. \qquad (13)$$

# Выводы о структуре момента в случае обтекания тела вращения - II.

Введем новую систему координат. Ее начало также будет в неподвижной точке. Единичные векторы главных осей инерции (они совпадают с главными осями поверхности, в которых записано уравнение (12)) обозначим $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Единичные векторы новой системы координат обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Они связаны с векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ соотношениями:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\mathbf{e}_x - \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{e}_x + \gamma_2 \mathbf{e}_y + \gamma_3 \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{\gamma_1\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\mathbf{e}_x - \frac{\gamma_2\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\mathbf{e}_y + \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\,\mathbf{e}_z.$$

Легко видеть, что $\left(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2\right) = \left(\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}\right) = 0$ и $\left(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2\right) = \left(\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\gamma}\right) = 0$, то есть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$ - единичные векторы в плоскости П, перпендикулярной потоку.

Пусть радиус вектор **r** в новой системе координат имеет вид:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3.$$

Тогда в новых координатах уравнение поверхности (12) имеет вид:

$$x_1^2 + \left(y_1\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - z_1\gamma_3\right)^2 = f\left(y_1\gamma_3 + z_1\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\right), \tag{14}$$

а уравнение границы имеет вид:

$$\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\left(y_1\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - z_1\gamma_3\right) = \frac{1}{2}\frac{df}{dz}\gamma_3. \tag{15}$$

# Выводы о структуре момента в случае обтекания тела вращения - III.

Исключив из уравнений (14), (15) координату $y_1$, получим уравнение связи между $x_1$ и $z_1$, То есть уравнение проекции границы на плоскость, перпендикулярную потоку. Эта проекция ограничивает область, площадь которой входит в выражение для момента сил, действующего на тело с неподвижной точкой. Выясним некоторые свойства этой площади.

Из уравнений (14) и (15) можно сделать следующие выводы:

1. Величина этой площади является функцией только переменной $\gamma_3$ - угла между осью симметрии тела и направлением потока.
2. Кривая, ограничивающая проекцию, симметрична относительно оси $Oz_1$, то есть центр тяжести этой проекции обязательно лежит на оси $Oz_1$.

Итак, в данном случае можно считать, что площадь проекции равна $S(\boldsymbol{\gamma}) = S(\gamma_3)$ .

Учитывая, что центр тяжести проекции лежит на оси $Oz_1$, представим вектор $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ в виде:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = c(\gamma_3)\mathbf{e}_3$$

Заметим, что вектор $\mathbf{e}_3$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\mathbf{e}_z$$

и поэтому

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\gamma_3 c(\gamma_3)}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\boldsymbol{\gamma} + \frac{c(\gamma_3)}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}\mathbf{e}_z$$

# Выводы о структуре момента в случае обтекания тела вращения - IV.

Таким образом, выражение для момента сил

$$\mathbf{M}_O = -f\,S(\boldsymbol{\gamma})\left[\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})\right]$$

может быть переписано в виде:

$$\mathbf{M}_O = -f\,S(\gamma_3)\frac{c(\gamma_3)}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}\left[\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{e}_z\right]$$

Таким образом, можно считать, что

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{c(\gamma_3)}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}\mathbf{e}_z$$

и $\mathbf{e}_z$ - единичный вектор оси симметрии. Если главные оси инерции не совпадают с главными осями поверхности, то в главных осях инерции вектор оси симметрии поверхности имеет вид:

$$\mathbf{e}_z = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),$$

а вместо $\gamma_3$ всюду нужно подставить $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})$. Окончательно, можно сделать вывод, что в этом случае справедливо следующее утверждение.

# Выводы о структуре момента в случае обтекания тела вращения - V.

Утверждение 3. Пусть тело, обтекаемое потоком частиц, ограничено осесимметричной поверхностью, единичный вектор оси симметрии которой в главных осях инерции тела имеет вид $\mathbf{e}_z = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$ . Тогда, если неподвижная точка расположена на оси симметрии, то

$$S = S\left(\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)\right), \quad \mathbf{c}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) = \chi\left(\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)\right)\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right).$$

В этом случае условия (10) выполняются, и мы имеем:

$$U\left(\boldsymbol{\gamma}\right) = \int\limits_0^{\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right)} S\left(u\right)\chi\left(u\right)du$$

Компоненты $\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$ постоянны. Меняя их, мы можем получать различные интегрируемые случаи.

# Случаи, когда уравнения движения обладают дополнительным интегралом - I.

Укажем некоторые случаи, когда уравнения движения обладают дополнительным интегралом.

Тривиальный случай**.** Пусть поверхность тела центрально симметрична и центр симметрии совпадает с неподвижной точкой. Тогда $\mathbf{M}_O = 0$ и уравнения (5) допускают интеграл

$$J_3 = (\mathbf{J\omega})^2 .$$

В этом случае задача вполне интегрируема и совпадает с задачей Эйлера – Пуансо.

Случай осевой симметрии. Пусть тело динамически симметрично, то есть выполнено, например, условие $A_1 = A_2$. Пусть также поверхность тела центрально симметрична и центр симметрии лежит на оси $Ox_3$. Тогда уравнения движения (5) допускают первый интеграл

$$J_3 = \omega_3 = \mathrm{const}.$$

Этот случай аналогичен случаю Лагранжа.

# Случаи, когда уравнения движения обладают дополнительным интегралом - II.

Аналог случая Гесса - I. Пусть поверхность тела центрально симметрична, центр симметрии и моменты инерции таковы, что

$$A_1 < A_2 < A_3, \quad c_3\sqrt{\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}} \mp c_1\sqrt{\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}} = 0, \quad c_2 = 0.$$

Тогда уравнения движения допускают частный интеграл:

$$J_3 = A_1\omega_1\sqrt{\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}} \pm A_3\omega_3\sqrt{\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}} = 0.$$

Аналог случая Гесса - II. Пусть поверхность тела осесимметрична, ось симметрии определяется вектором $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и содержит точку подвеса. Тогда если компоненты вектора оси симметрии удовлетворяют условиям:

$$A_1 < A_2 < A_3, \quad \alpha_3\sqrt{\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}} \mp \alpha_1\sqrt{\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}} = 0, \quad \alpha_2 = 0,$$

Тогда уравнения движения допускают частный интеграл:

$$J_3 = A_1\omega_1\sqrt{\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}} \pm A_3\omega_3\sqrt{\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}} = 0.$$

# Выводы

1. Получены уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в свободном молекулярном потоке частиц. Показано, что эти уравнения обобщают классические уравнения Эйлера – Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.
2. Получены условия, при которых уравнения движения допускают первый интеграл типа интеграла энергии. Показано, что эти условия выполняются в случае движения тела, ограниченного осесимметричной поверхностью, с неподвижной точкой, лежащей на оси симметрии.
3. Указаны несколько случаев, обобщающих классические случаи интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

# Спасибо за внимание!