

Четность в теории узлов

Никонов И.М.

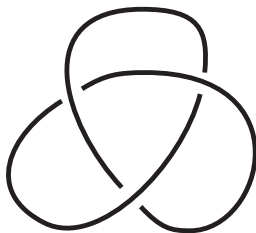


Рис.: Узел

Узел — это вложение окружности в пространство, рассматриваемое с точностью до изотопии.

Комбинаторный подход к теории узлов

Принцип 1

Узел — это класс эквивалентности диаграмм по модулю движений Рейдемейстера.

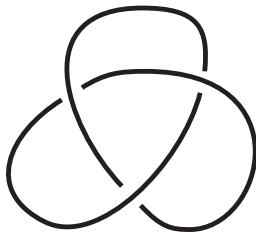


Рис.: Диаграмма узла

Принцип 2

Диаграмма состоит из перекрестков, соединенных между собой.

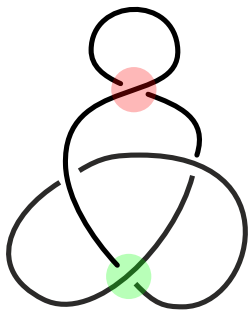


Рис.: Метки на перекрестках

Четность (В.О. Мантуров, 2009).

Четность — это правило сопоставления чисел 0 и 1 (классическим) перекресткам диаграмм узла, согласованное с движениями Рейдемейстера.

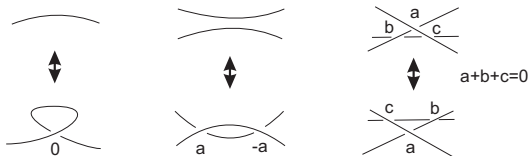
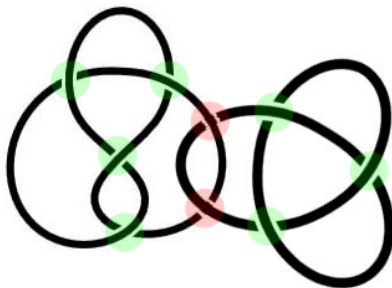


Рис.: Аксиомы четности

Приложения четности:

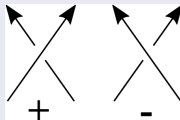
- усиление инвариантов узлов
- продолжение инвариантов узлов (функториальные отображения)
- минимальность в сильном смысле (скобка четности)

Четность зацеплений



Обобщенный индекс зацеплений

$$lk = \frac{1}{2} \sum_{c \text{ odd}} sgn(c)$$

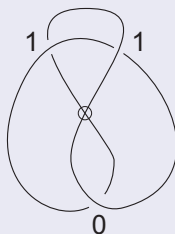


Гауссова четность

Определение

Гауссова четность перекрестка равна числу (классических) перекрестков, которые лежат на половине узла относительно данного перекрестка.

Пример



Нечетный индекс самозацепления $J = \sum_{c \text{ odd}} \text{sgn}(c) = -2$.

Виртуальные узлы

Определение

Виртуальная диаграмма — это погружение общего положения оснащенного 4-графа в $\mathbb{R}^2$ (а также образ этого погружения), где каждая вершина (*классический перекресток*) оснащена структурой прохода–перехода, а точки самопересечения называются *виртуальными перекрестками* и обозначаются кружочком.

Пример



Три подхода к виртуальным узлам. Виртуальные диаграммы



Рис.: Диаграмма виртуального трилистника

Определение

Виртуальный узел — это класс эквивалентности виртуальных диаграмм по модулю движений Рейдемейстера.



Три подхода к виртуальным узлам. Узлы в утолщенных поверхностях

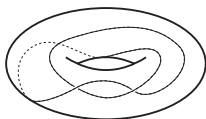


Рис.: Виртуальный трилистник

Определение

Виртуальный узел — это узел в утолщенной поверхности $S_g^2 \times I$, рассматриваемый с точностью до изотопий и (де)стабилизаций.

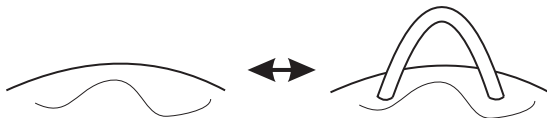


Рис.: Движение стабилизации

Три подхода к виртуальным узлам. Диаграммы Гаусса

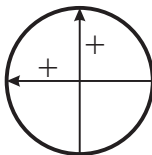
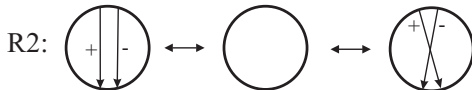
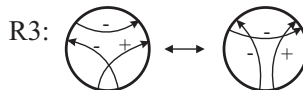
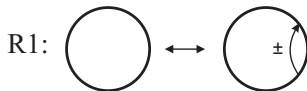


Рис.: Диаграмма Гаусса виртуального трилистника

Определение

Виртуальный узел — это класс эквивалентности Гауссовых диаграмм по движениям Рейдемейстера.



Плоские и свободные узлы



Рис.: Переключение перекрестка и виртуализация

Определение

Плоские узлы — это виртуальные узлы по модулю переключений перекрестков.

Свободные узлы — это виртуальные узлы по модулю переключений перекрестков и виртуализаций.

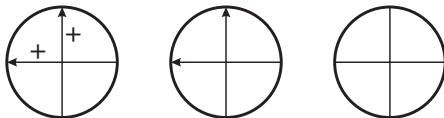
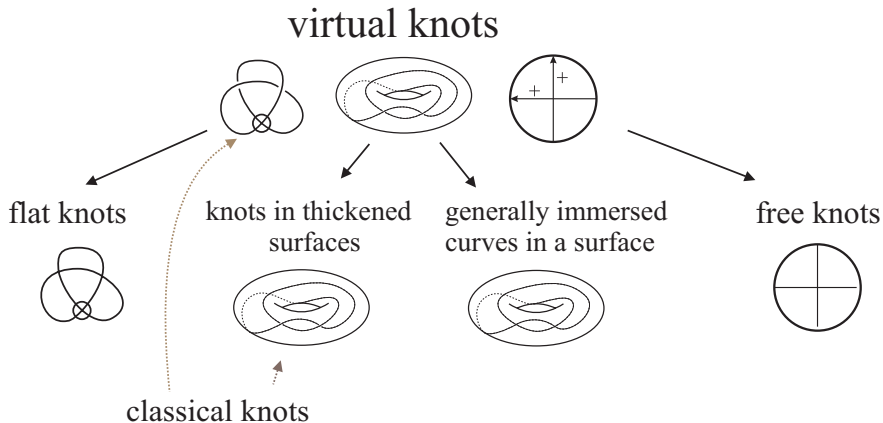


Рис.: Виртуальный, плоский и свободный узел



Когомологическая четность

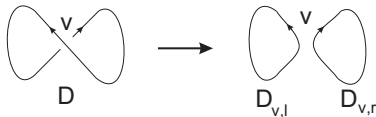


Рис.: Половины узла в перекрестке

Определение

Пусть D — диаграмма узла на поверхности S и $\alpha \in H^1(S, \mathbb{Z}_2)$, где $\alpha(D) = 0$. Когомологическая четность перекрестка v равна $p_\alpha(v) = \alpha(D_v) \in \mathbb{Z}_2$.

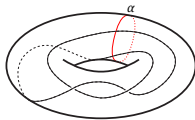


Рис.: Четность на поверхности



Рис.: Разведения перекрестка

Определение

Пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ — $\mathbb{Z}_2$ -пространство, порожденное оснащенными 4-графами, профакторизованное по второму движению Рейдемейстера и соотношению $L \sqcup \bigcirc = 0$.

Пусть K — диаграмма свободного узла. Определим *скобки четности* как

$$\{K\} = \sum_{s_{\text{чет}}} K_{s_{\text{чет}}} \in \tilde{\mathfrak{S}}, \quad [K] = \sum_{s_{1,\text{чет}}} K_{s_{1,\text{чет}}} \tilde{\mathfrak{S}}.$$

Теорема

Скобки $\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ являются инвариантами свободных узлов.

Минимальность в сильном смысле

Определение

Диаграмма K свободного узла называется *минимальной в сильном смысле*, если $[K] = K$.

Диаграмма K является *неприводимой нечетной*, если все перекрестки в K нечетные и нельзя применить уменьшающее второе движение Рейдемейстера.

Утверждение

Любая неприводимая нечетная диаграмма минимальна в сильном смысле.



Рис.: Неприводимая нечетная диаграмма

Проекция четности



Рис.: Проекция четности

Определение

Пусть K — диаграмма виртуального узла. *Проекция четности* действует на диаграмме K , сопоставляя ей диаграмму $f(K)$, в которой все нечетные перекрестки заменены на виртуальные.

Теорема

Проекция четности f корректно определена на узлах, т.е. переводит эквивалентные диаграммы в эквивалентные.

Замечание

Проекция четности определяется по *слабой четности*.

Четные диаграммы

Определение

Диаграмма виртуального узла *четная*, если все перекрестки в ней четные (по Гауссу). Узел *четный*, если у него есть четная диаграмма.

Замечание

У четной диаграммы: атом является ориентированным, поверхность вложения имеет шахматную раскраску, есть структура источник-сток.

Теорема (О.Я. Виро – В.О. Мантуров)

Если четные виртуальные диаграммы K_1 и K_2 эквивалентны, то они эквивалентны в классе четных диаграмм.

Утверждение

Любая минимальная диаграмма четного узла является четной.

Определение

Категория диаграмм — это категория $\mathcal{K}$, у которой

- объекты — диаграммы некоторого узла $\mathcal{K}$;
- морфизмы — композиции *элементарных морфизмов*.

Элементарные морфизмы — это:

- изотопии
- движения Рейдемейстера
- изоморфизмы

Для диаграммы $D \in \mathcal{K}$ обозначим множество перекрестков диаграммы через $\mathcal{V}(D)$.

Замечание

Отображение $D \mapsto \mathcal{V}(D)$ задает функтор из $\mathcal{K}$ в категорию конечных множеств и частичных изоморфизмов.

Четность с коэффициентами в группе A

Определение

Четность p с коэффициентами в абелевой группе A на диаграммах узла $\mathcal{K}$ — это семейство отображений $p_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow A$ для каждой диаграммы D узла, такое что для любого элементарного морфизма $f: D \rightarrow D'$:

- 1 $p_{D'}(v') = p_D(v)$ для любых соответствующих друг другу перекрестков $v \in \mathcal{V}(D)$ и $v' \in \mathcal{V}(D')$;
- 2 $p_D(v) = 0$, если f — уменьшающее первое движение Рейдемейстера и v — исчезающий перекресток;
- 3 $p_D(v_1) + p_D(v_2) = 0$, если f — уменьшающее второе движение Рейдемейстера и v_1, v_2 — исчезающие перекрестки;
- 4 $p_D(v_1) + p_D(v_2) + p_D(v_3) = 0$, f — третье движение Рейдемейстера, и перекрестки v_1, v_2, v_3 участвуют в движении.

Определение

Четность r_u с коэффициентами в A_u называется универсальной четностью, если для любой четности P с коэффициентами в группе A существует единственный гомоморфизм $\rho : A_u \rightarrow A$, такой что $\rho_D = \rho \circ (r_u)_D$ для любой диаграммы D .

Theorem (Д.П. Ильютко, В.О. Мантуров, Н., 2011)

Пусть $\mathcal{K}$ — свободный узел. Тогда гауссова четность (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) является универсальной четностью на диаграммах узла $\mathcal{K}$.

Определение

Пусть $\mathcal{K}$ — узел в замкнутой ориентированной поверхности S . Обозначим $A = H_1(S; \mathbb{Z}_2)/[\mathcal{K}]$. Пусть D — диаграмма узла $\mathcal{K}$. Гомологическая четность перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$ определяется как класс гомологий $hp(v) = [D_{v,l}] \in A$, где $D_{v,l}$ — левая половина узла в перекрестке v .

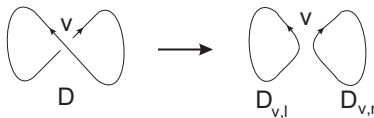


Рис.: Половины узла в перекрестке

Теорема (Д.П. Ильютко, В.О. Мантуров, Н., 2011)

Гомологическая четность универсальна на диаграммах узла в поверхности S .

Следствие

Любая четность на классических узлах тривиальна.

Соотношение $2p = 0$ для четности

Утверждение

Для любой четности p и любого перекрестка a выполнено равенство $2p(a) = 0$.

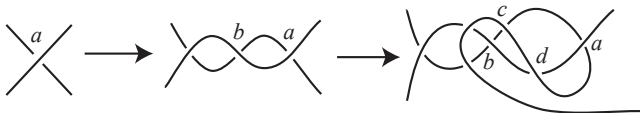


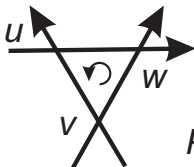
Рис.: Доказательство равенства $2p(a) = 0$

Определение

Ориентированная четность с коэффициентами в группе G на диаграммах узла $\mathcal{K}$ — это семейство отображений $p_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow G$ для каждой диаграммы D узла, такое что для любого элементарного морфизма $f: D \rightarrow D'$:

- 1 $p_{D'}(v') = p_D(v)$ для любых соответствующих друг другу перекрестков $v \in \mathcal{V}(D)$ и $v' \in \mathcal{V}(D')$;
- 2 $p_D(v) = 1$, если f — уменьшающее первое движение Рейдемейстера и v — исчезающий перекресток;
- 3 $p_D(v_1)p_D(v_2) = 1$, если f — уменьшающее второе движение Рейдемейстера и v_1, v_2 — исчезающие перекрестки;
- 4 $\prod p_D(v_i)^{\epsilon(v_i)} = 1$, f — третье движение Рейдемейстера, перекрестки v_1, v_2, v_3 участвуют в движении и $\epsilon(v_i)$ — индекс инцидентности вершину к треугольнику движения; порядок множителей определяется ориентацией поверхности.

Ориентированная четность



$$P(u)P(v)^{-1}P(w)^{-1}=1$$

Рис.: Индекс инцидентности и соотношение для ориентированной четности

Замечание

- 1) Ориентированная четность не зависит от ориентации узла.
- 2) Обычная четность является ориентированной.
- 3) Для свободных узлов ориентированная четность коммутативна.

Пример

Гауссов индекс $ip(v) = D \cdot D_{I,v}$ — ориентированная четность с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

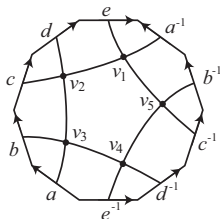


Рис.: Узел в поверхности рода 2

У узла имеется $\mathbb{Z}_5$ -симметрия, если рассматривать его как плоский. Для четности p с коэффициентами в группе A все четности $p(v_i)$, $i = \overline{1, 5}$, совпадают. Из аксиом четности следует, что $\sum_{i=1}^5 p(v_i) = 0$. Тогда $5p(v_i) = 0$ и $p(v_i) = 0$. С другой стороны, $hp(v_i) \neq 0$.

Определение

Ориентированный функтор четности P на диаграммах ориентированного узла $\mathcal{K}$ — функтор из категории диаграмм в категорию групп и частичных изоморфизмов между ними вместе с семейством отображений из множества перекрестков $P_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow P(D)$ каждой диаграммы D , такое что для любого элементарного морфизма $f: D \rightarrow D'$:

- 1 $P_{D'}(v') = f_*(P_D(v))$ для любых соответствующих перекрестков $v \in \mathcal{V}(D)$ и $v' \in \mathcal{V}(D')$, где f_* — изоморфизм между подгруппами $\tilde{P}(D) \subset P(D)$ и $\tilde{P}(D') \subset P(D')$, порожденными образами перекрестков;
- 2 $P_D(v) = 1$, если f — уменьшающее первое движение Рейдемейстера и v — исчезающий перекресток;
- 3 $\prod P_D(v_i)^{\epsilon(v_i)} = 1$, если f — уменьшающее второе или третье движение, v_i — перекрестки, участвующие в движении, и $\epsilon(v_i)$ — индексы инцидентности вершин к исчезающей области; для плоских и виртуальных узлов порядок множителей определяется согласно ориентации поверхности.

Теорема (Гауссов ориентированный функтор четности)

Пусть P — универсальный функтор четности на свободных узлах. Тогда $P(D) \simeq \mathbb{Z}_4$, если диаграмма D содержит нечетные хорды, иначе $P(D) = 0$. Изоморфизм группы коэффициентов не естественный. Универсальную ориентированную четность с коэффициентами в $\mathbb{Z}_4$ можно определить на длинных свободных узлах.

Замечание

Обобщенный индекс зацепления гауссова ориентированного функтора четности совпадает с инвариантом L , определенным для свободных узлов В.О. Мантуровым.

Определение

Пусть $\mathcal{K}$ — узел на ориентированной замкнутой поверхности S . Обозначим $A = H_1(S; \mathbb{Z})/[\mathcal{K}]$ и $G = \pi_1(S)/[\mathcal{K}]$. Пусть D — диаграмма узла $\mathcal{K}$. Гомологической (гомотопической) ориентированной четностью перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$ называется элемент $HP(v) = [D_{v,l}] \in A$ (соотв. $PR(v) = [D_{v,l}] \in G$), где $D_{v,l}$ — левая половина узла в перекрестке v .

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — узел в ориентированной замкнутой поверхности S . Тогда гомотопическая четность PR является универсальной ориентированной четностью на диаграммах узла $\mathcal{K}$, а ее ограничение на подгруппы в G , порожденными четностями перекрестков, является универсальным ориентированным функтором четности. Гомологическая четность HP является универсальной для ориентированных четностей с коэффициентами в коммутативных группах.

Следствие

Любая ориентированная четность на классических узлах тривиальна.

Слабые четности для узлов на поверхности

Пусть $\mathcal{K}$ — узел на замкнутой поверхности S . Пусть D — диаграмма узла $\mathcal{K}$ и $x_0 \in D$ не является перекрестком.

Теорема

Существует биекция между слабыми четностями на диаграммах узла $\mathcal{K}$ и подгруппами $H \subset \pi_1(S, x_0)$, такими что $[\mathcal{K}] \in H$.

Для заданной подгруппы H соответствующая слабая четность ψ^H определяется согласно условию: для перекрестка v в D имеем $\psi_D^H(v) = 0$ тогда и только тогда, когда $[\hat{D}_{v,1}] \in H$, где $\hat{D}_{v,1}$ — приведенная половина диаграммы в перекрестке v .

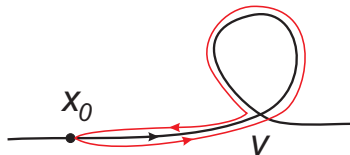


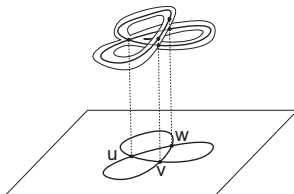
Рис.: Приведенная половина диаграммы в перекрестке v

Проекция четности и накрытия

Пусть K — узел в замкнутой поверхности S и D — его диаграмма. Пусть H — подгруппа $\pi_1(S, x_0)$, $x_0 \in D$, такая что $[K] \in H$. Тогда поднятие $\tilde{D}$ диаграммы D при соответствующем накрытии $p: \tilde{S} \rightarrow S$ замкнуто.

Утверждение

- вершина v диаграммы D четная (относительно слабой четности ψ^H) тогда и только тогда, когда поднятие $\tilde{D}_{v,1} \subset \tilde{D}$ половины $D_{v,1}$ замкнуто;
- поднятие $\tilde{D}$ диаграммы совпадает с результатом применения соответствующей проекции четности Ψ^H к диаграмме D .



Theorem

Пусть K — узел в замкнутой поверхности S и D — его диаграмма. Тогда проекция четности $\Psi^{hom}(D)$, соответствующая подгруппе $H = \langle [K] \rangle$, переводит диаграмму D в диаграмму классического узла.

Следствие

Имеется проекция Π из виртуальных узлов в классические: для виртуального узла K положим

$$\Pi(K) = \Psi^{hom}(\overline{K}),$$

где $\overline{K}$ — представитель минимального рода для K .

Определение

Пусть $\mathcal{K}$ — ориентированный виртуальный узел, и p — ориентированная четность на диаграммах узла $\mathcal{K}$ с коэффициентами в абелевой группе A . Для каждой диаграммы D узла определим *цикл четности* по формуле

$$\delta_D^p = \sum_{a \in \mathcal{A}(D)} \delta_a \cdot a \in C_1(D, A).$$

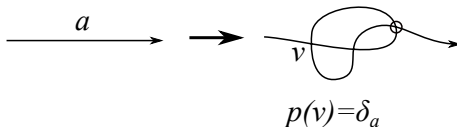


Рис.: Потенциал δ_a дуги a

Определение

Теорема

Пусть p — ориентированная четность с коэффициентами в группе A на диаграммах ориентированного виртуального узла $\mathcal{K}$, D — диаграмма узла, и δ_D^p — цикл четности. Тогда

- 1 цепь δ_D^p — цикл в клеточном комплексе $C_*(\tilde{D}, A)$, т.е. $d\delta_D^p = 0$;
- 2 цикл δ_D^p инвариантен относительно движений Рейдемейстера;
- 3 цикл δ_D^p нормализован;
- 4 (формула пересечения) для любого перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$ имеем

$$p_D(v) = D_v^I \cdot \delta_D^p.$$

Определение

Пусть B — непустое множество с бинарными операциями $\circ, *$, такими что:

- $x \circ x = x * x$
- отображения $*x, \circ x : B \times B \rightarrow B$ и $S : B \times B \rightarrow B \times B$, где $S(x, y) = (y * x, x \circ y)$, биективны.
- $(x \circ y) \circ (z \circ y) = (x \circ z) \circ (y * z)$
- $(x \circ y) * (z \circ y) = (x * z) \circ (y * z)$
- $(x * y) * (z * y) = (x * z) * (y \circ z)$

Тогда $(B, \circ, *)$ называется *биквандлом*.

Для диаграммы узла D отображение $s : \mathcal{A}(D) \rightarrow X$, удовлетворяющее условию на рисунке, называется *раскраской*. Множество раскрасок обозначим через $Col_B(D)$.

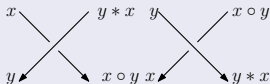


Рис.: Правила раскраски в перекрестках

Коцикл биквандла и цикл четности

Определение

Отображение $\theta: B \rightarrow A$ называется 1-коциклом биквандла B с коэффициентами в A , если для всех $x, y \in B$.

$$\theta(x) - \theta(x \circ y) = \theta(y) - \theta(y * x).$$

Утверждение

Пусть θ — 1-коцикл биквандла B с коэффициентами в A . Для диаграммы D и раскраски $c \in \text{Col}_B(D)$ положим

$$\delta_D^\theta = \sum_{a \in A(D)} (\theta \circ c)(a) \cdot a \in C_1(D, A)$$

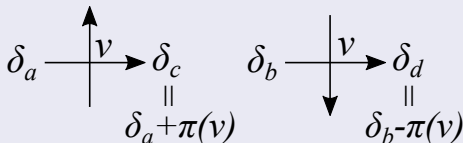
и $\delta_D^\theta = \sum_{c' \in \text{Col}_B(D)} \delta_{D, c'}^\theta$. Тогда δ_D^θ — инвариантный 1-цикл с коэффициентами в A .

Определение

Пусть p — ориентированная четность с коэффициентами в группе A на диаграммах ориентированного виртуального узла $\mathcal{K}$ и δ^p — соответствующий цикл четности. Пусть D — диаграмма узла. Для каждого перекрестка v диаграммы положим

$$\pi_D(v) = \delta_c - \delta_a = \delta_b - \delta_d.$$

Отображение $\pi_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow A$ называется *квази-индексом* четности p .



Определение

Пусть $\mathcal{K}$ — виртуальный узел. Семейство отображений $\pi_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow A$, заданных для всех диаграмм D узла, называется *квази-индексом*, если

- (Q0) для любого движения Рейдемейстера $f: D \rightarrow D'$ и перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$, не участвующего в движении, $\pi_D(v) = \pi_{D'}(f_*(v))$;
- (Q2) $\pi_D(v_1) = \pi_D(v_2)$ для перекрестков $v_1, v_2 \in \mathcal{V}(D)$, участвующих во втором движении Рейдемейстера;
- (Q3) если перекрестки $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}(D)$ участвуют в третьем движении Рейдемейстера $f: D \rightarrow D'$, то найдется элемент $\lambda(f) \in A$, такой что

$$\pi_{D'}(f_*(v_i)) = \pi_D(v_i) + \epsilon_\Delta(v_i) \cdot \lambda(f), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\epsilon_\Delta(v_i)$ индексы инцидентности v_i к исчезающему треугольнику Δ .

Квази-индекс π называется *индексом*, если все элементы $\lambda(f)$ в условии (Q3) равны 0.

Формула пересечения для квази-индекса

Теорема

Пусть p — ориентированная четность с коэффициентами в группе A на диаграммах ориентированного виртуального узла $\mathcal{K}$ и δ^p — соответствующий цикл четности и $\pi_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow A$ — квази-индекс четности.

- 1 семейство отображений π является квази-индексом на диаграммах узла $\mathcal{K}$;
- 2 для любой диаграммы D существует единственный элемент $\rho(D) \in A$, такой что

$$\delta_D = \sum_{v \in \mathcal{V}(D)} \pi_D(v) \cdot D_v^r + \rho(D) \cdot D \in H_1(D, A).$$

Следствие (Формула пересечения)

$$p_D(v) = \sum \pi_D(v') \cdot (D_v^l \cdot D_{v'}^r) - \rho(D) \cdot ip_D(v)$$

Производные четности

Теорема

Пусть p — ориентированная четность с коэффициентами в группе A на диаграммах ориентированного виртуального узла $\mathcal{K}$. Тогда формула

$$p'_D(v) = \sum_{v' \in \mathcal{V}(D)} p_D(v') \cdot (D_v^+ \cdot D_{v'}^-)$$

задает ориентированную четность p' с коэффициентами в группе $\bar{A} = A / \langle \sigma(p) \rangle$, где $\sigma(p) = \sum_{v \in \mathcal{V}(D)} p(v) \cdot ip(v) \in A$ — сигнатура четности π .

Пример



Рис.: Узел 3.1. Векторы четности $ip = (-1, -1, 2)$, $ip' = (-1, 1, -1)$, $ip'' = (-1, 0, 1)$, $ip''' = 0$.

Четность

L.H. Kauffman (2004)

B.O. Мантуров (2009)

L.H. Kauffman (2012)

Z. Chen (2012)

Индекс

V. Turaev (2004)

A. Henrich (2010)

Y.H. Im, K. Lee, S.Y. Lee (2010)

S. Satoh, K. Taniguchi (2014)

Определение

Пусть $\mathcal{K}$ — категория диаграмм. *Индексом с коэффициентами в множестве I на категории диаграмм $\mathcal{K}$* называется отображение ι , сопоставляющее значение $\iota(v) \in I$ каждому перекрестку $v \in \mathcal{V}(D)$ каждой диаграммы $D \in \mathcal{K}$ в категории и удовлетворяющее свойствам:

- (I0) для любого элементарного морфизма $f: D \rightarrow D'$ в $\mathcal{K}$ и перекрестка $v \in \text{dom}(f_*)$ имеем $\iota(v) = \iota(f_*(v))$;
- (I2) $\iota(v_1) = \iota(v_2)$ для любых перекрестков $v_1, v_2 \in \mathcal{V}(D)$, к которым можно применить второе движение Рейдемейстера.

Пусть S — множество с инволюцией $*$: $S \rightarrow S$. *Ориентированный индекс с коэффициентами в S на категории диаграмм $\mathcal{K}$* — это отображение $\sigma: \bigsqcup_{D \in \mathcal{K}} \mathcal{V}(D) \rightarrow S$, удовлетворяющее (I0) и свойству

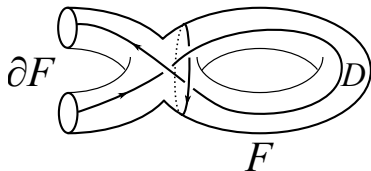
- (I2+) для любых перекрестков $v_1, v_2 \in \mathcal{V}(D)$, к которым можно применить второе движение Рейдемейстера, имеем $\sigma(v_1) = \sigma(v_2)^*$.

Танглы на поверхности

Определение

Пусть F — ориентированная связная компактная поверхность ∂F с краем ∂F . *Ориентированным танглом* в утолщенной поверхности $F \times (0, 1)$ называется вложение $T: M \rightarrow F \times (0, 1)$ ориентированного компактного одномерного многообразия M , такое что $T(\partial M) \subset \partial F \times (0, 1)$ и T трансверсально ∂F . Образ отображения T также называется танглом.

Связная компонента тангла, не имеющая края, называется *замкнутой*, в противном случае компонента называется *длинной*.



Компонентный и порядковый индекс

Пусть $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ — диаграмма тангла и v — перекресток в D . Тогда определен компонентный индекс $\tau(v)$ и, если v является самопересечением длинной компоненты, задан порядковый индекс $o(v)$.

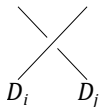


Рис.: Перекресток с компонентным индексом $\tau(v) = (i, j)$

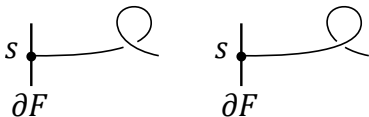


Рис.: Ранний проход ($o(v) = -1$) и ранний переход ($o(v) = 1$)

Перекресток имеет также гомотопический индекс $h_i(v) \in \hat{\pi}(F, z_i)$ при $\tau(v) = (i, i)$, или $h_{ij}(v) \in \hat{\pi}(F, z_i, z_j)$ при $\tau(v) = (i, j)$, $i \neq j$.

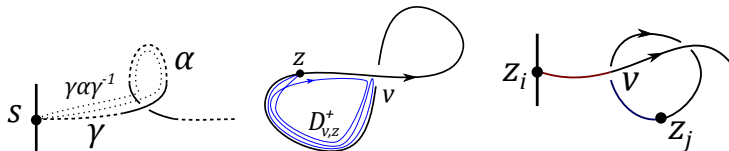


Рис.: Гомотопический индекс в длинном, замкнутом и смешанном случаях

Индекс узлов на поверхностях

Теорема

Компонентный, порядковый и гомотопический индекс образуют индекс $\iota^u = (\tau, o, h)$, который является универсальным на категории диаграмм танглов на поверхности F .

Следствие

- 1. Не существует нетривиальных индексов на диаграммах классических узлов.*
- 2. Компонентный индекс является универсальным на диаграммах классических зацеплений.*

Следствие

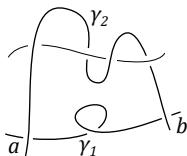
Гомотопический индекс h со значениями в $\mathbb{Z}$ является универсальным индексом для узлов в полнотории.

Лемма

Пусть D — диаграмма тангла в F . Пусть $a, b \in \mathcal{V}(D)$ — концы дуг $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, такие что

- 1 γ_1 и γ_2 пересекаются трансверсально (т.е. не имеют общих участков);
- 2 γ_2 пересекает сверху γ_1 в точках a и b ;
- 3 γ_1 гомотопна γ_2 в F как кривая с закрепленными концами.

Тогда для любого индекса его значения на перекрестках a и b совпадают.



Признак на категории диаграмм

Определение

Пусть $\mathcal{K}$ — категория диаграмм. *Признаком со значениями в множестве Θ на категории диаграмм $\mathcal{K}$* называется отображение $\theta: \bigsqcup_{D \in \mathcal{K}} \mathcal{V}(D) \rightarrow \Theta$, удовлетворяющее условию

(10) для любого элементарного морфизма $f: D \rightarrow D'$ в $\mathcal{K}$ и любого перекрестка $v \in \text{dom}(f_*)$ выполнено $\theta(v) = \theta(f_*(v))$.

Замечание

Четности, индексы и ориентированные индексы являются признаками.

Принцип неразличимости для классических узлов

Теорема (Принцип неразличимости для перекрестков классических узлов)

Не существует внутреннего признака, который бы позволил различить два перекрестка одинакового знака на классической диаграмме узла.

Теорема (Принцип подмены для перекрестков классических узлов)

В классической диаграмме узла любой перекресток может подменить любой перекресток того же знака.

Теорема

Универсальный признак является ориентированным индексом.

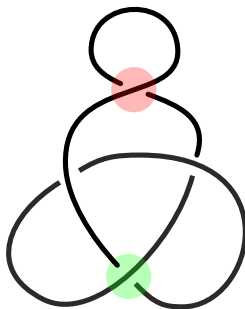


Рис.: Метки на перекрестках

Принцип подмены. Пример

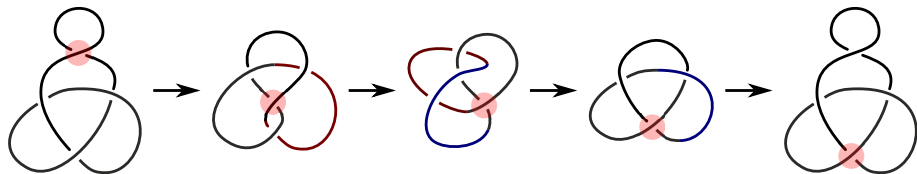


Рис.: Подмена перекрестка

Обертывание перекрестка

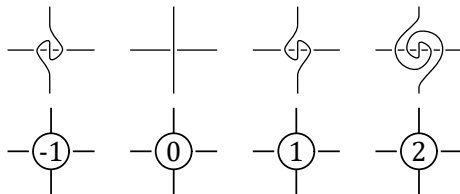


Рис.: Обертывание перекрестка

Рокировка обертывания

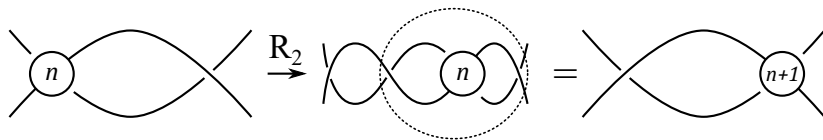


Рис.: Рокировка обертывания

Принцип подмены для дуг классической диаграммы

Теорема (Принцип подмены для дуг классических узлов)

В классической диаграмме узла на сфере любая дуга может подменить любую другую дугу.

Замечание

1. Теорема следует из известного факта, что классические узлы и классические длинные узлы — это одно и то же.
2. Аналогичное утверждение для классических диаграмм в $\mathbb{R}^2$ неверно.

Отсутствие инвариантных меток на перекрестках оставляет несколько возможностей:

- Можно использовать *статистические* инварианты классических узлов, которые рассматривают все перекрестки одинаково. Скобка Кауфмана, алгебра Конвея, гомологии Хованова и все другие комбинаторные инварианты относятся к этому типу.
- Можно рассматривать *эквивариантные* метки перекрестков, которые сохраняются с точностью до изоморфизма. Инвариантами такого типа являются функторы четности и квандлы. Принцип подмены для дуг сосуществует с инвариантами раскрасок.
- Использовать нерейдемейстерское описание узлов, где место перекрестков займут другие объекты (например, квадрисеканты).
- Работать в теории виртуальных узлов, где четности и индексы вполне функциональны.