Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования

В. Н. Чубариков

28 сентября 2021 г.

Содержание I

Содержание II

Введение I

Источником для настоящего сообщения явились прекрасные исследования по комбинаторике, алгебре и математическому анализу. В основе их лежат свойства биномиальных коэффициентов и сама формула бинома Ньютона.

- Pincherle S., Amaldi. Le Operazioni Distributive// Zanichelli, Bologna, 1900.
- Hurwitz A. Über Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel// Acta Math., 1902, **26,** 199–203.
- Sheffer I. M. Some properties of polynomials of type zero// Duke Math., 1939, **5,** 590–622.
- Stefensen J. F. The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power// Acta Math., 1941, **73,** 333–366.
- Touchard J. Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli// Canad.J.Math., 1956, **8** 305–320.

Введение II

- Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М: Изд-во ин. лит., 1963.
- Riordan J. Inverse Relations and Combinatorial Identities// Amer.Math.Monthly, 1964, **71** 485–498.
- Riordan J. Combinatorial Identities. — New York: Wiley, 1968.
- Mullin R., Rota G.-C. On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration// Graph Theory and its Applications, 1970, 168–213.
- Hua Loo-Keng. 1983. Selected Papers. — N.-Y.,Heidelberg, Berlin, pp.888.
- Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.

Введение III

Чубариков В. Н. Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования// Чебышевский сборник, 2020, **XXI**, вып. 4(76), 270–301.

В первую очередь нас будут интересовать алгебраические и аналитические стороны последовательностей многочленов $p_n(x)$ с коэффициентами из некоторого поля (или евклидова кольца с единицей), удовлетворяющих следующей последовательности тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(x), p_0(x) = 1, p_m(0) = 0 (n \geq 0, m \geq 1),$$

где $p_n(x)$ — многочлен точной степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Последовательность таких многочленов называется последовательностью биномиального типа.

Введение IV

Примерами последовательностей многочленов биномиального типа являются следующие:

$$p_n(x) = x^n, n \geq 0$$

(степени),

$$p_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(нижние факториалы),

$$p_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(верхние факториалы),

$$p_n(x) = x(x-an)^{n-1}, n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

Введение V

(многочлены Абеля),

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^k, n \geq 1, p_0(x) = 1$$

(многочлены Лагерра).
Представляется интересным изучение обобщённого бинома смешанного типа. Пусть задана последовательность многочленов $q_n(x)$ биномиального типа, и пусть выполняется следующая последовательность тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_{n-k}(x) p_k(y), n \geq 0,$$

Введение VI

тогда последовательность $p_n(x)$ назовём последовательностью смешанного типа. К такому типу относятся следующие последовательности:

$$p_n(x) = B_n(x), q_n(x) = x^n$$

($B_n(x)$ — многочлены Бернулли),

$$p_n(x) = E_n(x), q_n(x) = x^n$$

($E_n(x)$ — многочлены Эйлера),

$$p_n(x) = A_n(x), q_n(x) = x^n$$

($A_n(x)$ — многочлены Аппеля). Все эти многочлены будут определены позже.

Введение VII

Хотя, как правило, нами используются элементарные методы (принцип математической индукции, рекуррентные соотношения), но при доказательстве ряда теорем мы не отказываемся от методов из основ математического анализа и простейших утверждений из теории дифференциальных уравнений.

Заключительная часть работы посвящена многочленам от нескольких переменных, являющихся обобщёнными многочленами биномиального и полиномиального типа.

Бином Ньютона и формула Тейлора–Маклорена I

Для полноты изложения здесь мы приводим с полными доказательствами классические утверждения, от которых будем отталкиваться при изучении свойств последовательностей многочленов биномиального и смешанного типов.
Сразу отметим, что формула бинома Ньютона лежит в основе алгебры и комбинаторики многочленов и математического анализа.
Теорема 1.1. (Формула бинома Ньютона). *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}.$$

Числа $\binom{n}{m}, 0 \leq m \leq n$, называются биномиальными коэффициентами и равны числу сочетаний из n различных элементов по $m \geq 1$ различным элементам. При $m = 0$ по

Бином Ньютона и формула Тейлора–Маклорена II

определению полагаем $\binom{n}{0} = 1$. Сочетанием из n по m различным элементам называется выбор m различных элементов из n различных элементов. Все сочетания из n по m можно разбить на два типа: содержащие n-й элемент или не содержащие его. Число сочетаний первого типа равно $\binom{n-1}{m-1}$, поскольку приходится делать из оставшихся $n-1$ элементов выбор $m-1$ различных элементов. Число сочетаний второго типа равно $\binom{n-1}{m}$. Таким образом получаем основное рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}.$$

Доказательство. При $n = 0$ формула очевидно верна. Предположим, что она справедлива для $n = m$. Докажем её для $n = m + 1$. Пользуясь предположением индукции и

Бином Ньютона и формула Тейлора–Маклорена III

основным рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов, имеем цепочку равенств

$$(x+y)^{m+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k y^{m-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{k+1}y^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k y^{m-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}x^k y^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k y^{m-k+1} =$$

$$\binom{m}{m}x^{m+1} + \binom{m}{0}y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\right)x^k y^{m-k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k y^{m-k+1},$$

Бином Ньютона и формула Тейлора–Маклорена IV

что и требовалось доказать.
Дадим другое доказательство теоремы, не использующее основное рекуррентное соотношение. Воспользуемся производной степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$. Индукция по n. При $n = 0$ теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение теоремы при $n = m + 1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{d(x+y)^{m+1}}{dx} = (m+1)(x+y)^m = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k y^{m-k}.$$

Далее проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$(x+y)^{m+1} = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}y^{m-k}+C(y) = \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k y^{m-k}$$

Бином Ньютона и формула Тейлора–Маклорена V

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = y^{m+1} = \binom{m+1}{0} y^{m+1}.$$

Следовательно, справедливо искомое равенство.

Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке I

Далее дадим арифметические приложения формулы бинома Ньютона к исследованию базисных свойств последовательности значений многочлена степени n (обобщённая проблема Варинга (Хуа Л.-к.,1940)) и последовательности значений векторов $(x, x^2, \ldots, x^n)$ (проблема Гильберта – Камке (Г.И.Архипов,1981)). Это касается только нижних оценок для числа переменных соответствующих сравнений и систем сравнений полиномиального вида. В оригинальной работе Г.И.Архипова, введённые им многочлены, представлялись через верхние факториальные многочлены, а многочлены Хуа Ло-кена — через нижние факториальные многочлены.

Теорема 2.1. (Хуа Л.-к. – Г.И.Архипов). *Пусть* $n \geq 1, x$ *— целые, и пусть*

$$H_n(x) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} \binom{x}{s} 2^{s-1}$$

Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке II

многочлен степени n. Тогда имеем

$$H_n(x) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2^n}, & \textit{если} \quad 2|x, \\ (-1)^{n-1} \pmod{2^n}, & \textit{если} \quad 2 \not| x. \end{cases}$$

Доказательство. По формуле Тейлора находим

$$(-1)^x = (1-2)^x = \sum_{s=0}^{x} \binom{x}{s} (-2)^s =$$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{n} \binom{x}{s} (-2)^s + \sum_{s=n+1}^{x} \binom{x}{s} (-2)^s \equiv$$

$$\equiv 1 + 2(-1)^n H_n(x) \pmod{2^{n+1}}.$$

Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке III

Следовательно,

$$H_n(x) \equiv (-1)^n \frac{(-1)^x - 1}{2} \pmod{2^n}.$$

Теорема доказана.

Пусть $P(x)$ — целозначный многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом. Хуа Ло-кен нашёл оценки количества переменных $G(n; P(x))$ для разрешимости при всех достаточно больших N обобщённого уравнения Варинга

$$P(x_1) + \cdots + P(x_s) = N$$

в неотрицательных целых неизвестных $x_1, \ldots, x_s$.

Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке IV

Поскольку $H_n(x)$ принимает только два несравнимых по модулю 2^n значения: 0 и $(-1)^{n-1}$, для разрешимости сравнения

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_s) \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$$

необходимо выполнение условия $s \geq 2^n - 1$.
Более того, так как при чётном n многочлен $H_n(x)$ принимает только три несравнимых по модулю 2^{n+1} значения: $0, -1$ и $2^n - 1$, то для разрешимости сравнения

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_s) \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}$$

необходимо выполнение условия $s \geq 2^n$.
Следовательно,

$$G(n; H_n(x)) \geq \begin{cases} 2^n - 1, & \text{если} (n, 2) = 1, \\ 2^n, & \text{если} 2 | n. \end{cases}$$

Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке V

Представим многочлен $H_n(x)$ в виде

$$H_n(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s x^s.$$

Г.И.Архипов нашёл необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений Гильберта – Камке

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = N_1, \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = N_n, \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$, и дал верхние и нижние оценки для числа переменных k.

Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке VI

Для того чтобы система сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k \equiv N_1 \pmod{2^n}, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv N_n \pmod{2^n}, \end{cases}$$

была разрешима, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$k \geq b_0,$$

где b_0 — наименьший неотрицательный вычет числа $b = b(N_1, \dots, N_n)$ по модулю 2^n,

$$b = \sum_{s=1}^{n} a_s N_s.$$

Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке VII

В самом деле, из разрешимости предыдущей системы сравнений следует, что разрешимо сравнение

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_k) \equiv b \pmod{2^n}.$$

Если положить $N_1 \equiv \cdots \equiv N_k \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$, то $b \equiv b_0 \pmod{2^n}$. Отсюда получим, что при $k \geq b_0 \geq 2^n - 1$ система сравнений Гильберта – Камке разрешима.
Формула бинома Ньютона лежит в основе многочлена Тейлора. Справедливо следующее утверждение.

Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси I

Формула бинома Ньютона лежит в основе многочлена Тейлора. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. (Формула Тейлора). *Пусть* $n \geq 0, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0,$ *— многочлен степени* n *над некоторым полем* F. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* F *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

где $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ *—* k*-я производная многочлена* $f(x)$*, причём*

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1, \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси II

Доказательство. Индукция по n. При $n = 0$ утверждение теоремы очевидно. Предположим утверждение теоремы верно при $n = m$. Докажем справедливость его при $n = m + 1$. Имеем

$$f(x) = g(x) + a_{m+1}x^{m+1}, g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

По предположению индукции получим

$$g(x + y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

а по формуле бинома Ньютона

$$a_{m+1}(x + y)^{m+1} = a_{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k =$$

Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси III

$$= a_{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(x^{m+1})^{(k)}}{k!} y^k.$$

Стало быть,

$$f(x+y) = g(x+y) + a_{m+1}(x+y)^{m+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\left(g(x) + a_{m+1}x^{m+1}\right)^{(k)}}{k!} y^k + \frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!} y^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь поле F является полем вещественных чисел.

Тогда справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси IV

Теорема 3.2. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для любых чисел x и y из $[a, b]$ справедливо тождество*

$$f(x+y) = P_n(x; y) + R_n(x; y),$$

где

$$P_n(x; y) = P_n(x; y; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

где $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k-я производная функции $f(x)$,

$$R_n = R_n(x; y) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} y^{n+1},$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси V

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $y > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_n = \varphi_n(x; y) = f(x + y) - P_n(x; y) - Hy^{n+1}.$$

Найдём параметр H из условия $\varphi_n(x; y) = 0$.
Очевидно, имеем

$$\varphi_n(x; 0) = \left.\frac{d\varphi_n(x; y)}{dy}\right|_{y=0} = \cdots = \left.\frac{d^n\varphi_n(x; y)}{dy^n}\right|_{y=0} = 0.$$

Из условия $\varphi_n(x; 0) = \varphi_n(x; y) = 0$ по теореме Ролля получим, что найдётся точка c_1 такая, что $0 < c_1 < y$ и $\left.\frac{d\varphi_n(x;y)}{dy}\right|_{y=c_1} = 0$.
Аналогично, по теореме Ролля найдётся точка c_2 с условием

Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси VI

$0 < c_2 < c_1$ и такая, что $\left.\frac{d^2\varphi_n(x;y)}{dy^2}\right|_{y=c_2} = 0$, и т.д. Наконец, найдётся точка $c_{n+1}, 0 < c_{n+1} < c_n$, такая, что

$$\left.\frac{d^{n+1}\varphi_n(x;y)}{dy^{n+1}}\right|_{y=c_{n+1}} = f^{(n+1)}(x + c_{n+1}) - (n+1)!H = 0.$$

Полагая $c = x + c_{n+1}$, получим $H = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$. Теорема доказана.

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле I

Дадим приложение формулы Тейлора к численному решению уравнения $f(x) = 0$ для гладкой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (метод касательных Ньютона, метод последовательных приближений).

Теорема 4.1. *Пусть $f(a)f(b) < 0$, и пусть на отрезке $[a, b]$ существует вторая непрерывная производная функции $f(x)$, причём для любого x имеем $|f''(x)| \leq M, |f'(x)| \geq m > 0$. Тогда предел последовательности*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

при

$$\frac{M}{2m} \left| \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)} \right| = q < 1$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле II

даёт единственное решение $x = \alpha$ *уравнения* $f(x) = 0$ *на отрезке* $[a, b]$, *причём*

$$|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{2m}{M} \frac{q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^{n+1}}}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора для любых $x, y \in [a, b]$ до второго члена с остаточным членом в форме Лагранжа находим

$$f(x + y) = f(x) + f'(x)y + \frac{1}{2}f''(c)y^2,$$

где $c \in [a, b]$ — некоторая точка.
Определим две последовательности α_n и β_n, $n \geq 0$, из равенств

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n, f(\alpha_n) + \beta_n f'(\alpha_n) = 0 (n \geq 0).$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле III

Отсюда, используя формулу Тейлора, получим

$$f(\alpha_{n+1}) = f(\alpha_n + \beta_n) = \frac{1}{2}f''(c_n)\beta_n^2,$$

где $c_n \in [a, b]$.
Переходя к оценкам, имеем

$$|\beta_{n+1}| \leq \frac{M}{2m}\beta_n^2 (n \geq 0).$$

Следовательно,

$$|\beta_{n+1}| \leq \frac{2m}{M} q^{2^{n+1}}.$$

Поскольку ряд

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле IV

по критерию Коши сходится, находим оценку точности приближения

$$|\alpha - \alpha_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\beta_k| \leq \frac{2m}{M} \frac{q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^{n+1}}}.$$

Теорема доказана.
Подобное утверждение (лемма Гензеля) имеет место для неархимедова нормирования. К сожалению, наглядной геометрической трактовки метода последовательных приближений для такого нормирования нет.
Напомним, что неархимедовым нормированием $|\cdot|$ поля K называется вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям:
1) $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$;

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле V

2) для любых α и β из K имеем $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$;
3) для любых $|\alpha| \leq 1$ из K имеем $|1+\alpha| \leq 1$, что эквивалентно условию: для любых β и γ из K справедливо неравенство

$$|\alpha + \beta| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

В частности, отсюда следует, что, если $|\gamma| < |\beta|$, то $|\beta + \gamma| = |\beta|$.
Поле K с нормированием $|\cdot|$ называется полным, если любая фундаментальная последовательность $\alpha_n, n \geq 1$, сходится к некоторому элементу из K. Последовательность $\alpha_n, n \geq 1$, фундаментальна, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех номеров $n > n_0$ и $m > n_0$ имеем $|\alpha_m - \alpha_n|\varepsilon$.
Множество тех α, для которых $|\alpha| \leq 1$ называется кольцом целых элементов поля K и обозначается символом $\Re$.

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле VI

Множество $\alpha \in \mathrm{K}$ таких, что $|\alpha| < 1$ образует максимальный идеал $\wp$ в кольце $\Re$.

Теорема 4.2. *Пусть* K — *полное поле,* $f(x) \in \Re[x]$, *и пусть* $\alpha_0 \in \Re$ *таково, что* $0 < |f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)|^2$. *Тогда предел последовательности*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

даёт единственное решение $x = \alpha$ *уравнения* $f(x) = 0$, *причём*

$$|\alpha - \alpha_n| \leq f_0^{2^{n+1}}, \quad f_0 = \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора находим

$$f(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}y^k,$$

где $f^{(k)}(x)=\left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k-я производная многочлена $f(x)$, причём

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+\dots+a_1\in\Re[x],\quad f^{(0)}(x)=f(x)\in\Re[x],$$

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\in\Re[x].$$

Для краткости записи определим величину $\beta_n, n\geq 0$, следующим образом

$$f(\alpha_n)+\beta_nf'(\alpha_n)=0.$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле VIII

Из условия теоремы имеем

$$|\beta_0| = \left|\frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}\right| < |f'(\alpha_0)| \leq 1.$$

Следовательно, $\beta_0 \in \mathfrak{R}$.
Сначала докажем, что 1) $\alpha_n \in \mathfrak{R}$; 2) $|f'(\alpha_{n+1})| = |f'(\alpha_n)|$, $n \geq 0$; 3) $|f(\alpha_n)| < |f'(\alpha_n)|^2$.
Индукция по n. Утверждения 1) и 3) при $n = 0$ входят в условие теоремы. Применяя формулу Тейлора к многочлену $f'(x)$, находим

$$|f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_0)}{k!}\beta_0\right| = |\beta_0| \cdot |G_1(\alpha_0)| \leq |\beta_0| =$$

$$= \left|\frac{f(\alpha_0)}{f'\alpha_0}\right| < |f'(\alpha_0)|.$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле IX

где

$$G_1(\alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_m)}{k!} \beta_m^{k-1}, m \geq 0.$$

Отсюда, используя условие 3 в определении нормирования, получим

$$|f'(\alpha_1)| \leq \max\{|f'(\alpha_0)|, |f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)|\} = |f'(\alpha_0)|,$$

$$|f'(\alpha_0)| \leq \max\{|f'(\alpha_1)|, |f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)|\} = |f'(\alpha_1)|,$$

т.е. $|f'(\alpha_1)| = |f'(\alpha_0)|$. Тем самым при $n = 0$ условие 2) доказано.

Предположим, что утверждения 1),2),3) справедливы при $n = m$. Докажем их при $n = m + 1$.

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле X

Сначала покажем, что утверждение 1) справедливо. Имеем $\alpha_{m+1} = \alpha_m - \beta_m$. По предположению индукции (условие 1)) $\alpha_m \in \Re$, а из условия 2) находим

$$|\beta_m| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'(\alpha_m)}\right| < |f'(\alpha_m)| \leq 1,$$

что даёт условие $\beta_m \in \Re$. Следовательно, $\alpha_{m+1} \in \Re$. Используя формулу Тейлора для многочлена $f'(x)$, получим

$$|f'(\alpha_{m+1}) - f'(\alpha_m)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_m)}{k!}\beta_m\right| =$$

$$= |\beta_m| \cdot |G_1(\alpha_m)| \leq |\beta_m| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'\alpha_m}\right| < |f'(\alpha_m)|.$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле XI

Аналогично предыдущему, имеем

$$|f'(\alpha_{m+1})| = |f'(\alpha_m)|, m \geq 0;$$

что приводит к справедливости утверждения 2).
Докажем утверждение 3). По формуле Тейлора находим

$$f(\alpha_{m+1}) = f(\alpha_m) + \beta_m f'(\alpha_m) + \beta_m^2 G_0(\alpha_m),$$

где

$$G_0(\alpha_m) = \sum_{s=2}^{n} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} \beta_m^{s-2} \in \Re,$$

т.е. $|G_0(\alpha_m)| \leq 1$.
Поскольку $f(\alpha_m) + \beta_m f'(\alpha_m) = 0$, получим

$$|f(\alpha_{m+1})| = |\beta_m^2 G_0(\alpha_m)| \leq |\beta_m^2| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'(\alpha_m)}\right|^2 <$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле XII

(по предположению индукции $|f(\alpha_{m+1})| = |f(\alpha_m)|$ и $|f(\alpha_m)| < |f'(\alpha_m)|^2$)

$$< |f'(\alpha_m)|^2 = |f'(\alpha_{m+1})|^2,$$

т.е. $|f(\alpha_{m+1})| < |f'(\alpha_{m+1})|^2$. Утверждение 3) доказано.
Далее при $n \geq 1$ из условий $|f(\alpha_n)| < |\beta_{n-1}|^2, |f'(\alpha_n)| = |f'(\alpha_0)|$ имеем

$$|\beta_n| \leq \frac{|\beta_{n-1}|^2}{|f'(\alpha_0)|}.$$

Применяя последовательно это рекуррентное неравенство при $n, n-1, \ldots, 1$, находим

$$|\beta_n| \leq \frac{|\beta_{n-1}|^2}{|f'(\alpha_0)|} \leq \frac{|\beta_{n-2}|^{2^2}}{|f'(\alpha_0)|^2} \leq \cdots \leq \frac{|\beta_0|^{2^n}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{n-1}}}.$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле XIII

Наконец, при $n \geq 1$ из рекуррентного равенства $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}$ получим

$$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s.$$

Так как $|f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер q такой, что для всех $Q \geq 2^q$ выполняется неравенство

$$f_0^Q = \left(\frac{|f(\alpha_0)|}{|f'(\alpha_0)|^2} \right)^Q < \varepsilon.$$

Отсюда, используя критерий Коши для полного поля K, к оценке

$$|\alpha_r - \alpha_q| \leq |\sum_{s=q+1}^{r} \beta_s| \leq \max_{q<s\leq r} |\beta_s| \leq \max_{q<s\leq r} \frac{|\beta_0|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{s-1}}} =$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле XIV

$$= \max_{q<s\leq r} \frac{|f(\alpha_0)|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{2s}}} |f'(\alpha_0)|^{2^{s+1}} \leq \max_{q<s\leq r} \frac{|f(\alpha_0)|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{2s}}} = f_0^{2^q} < \varepsilon.$$

Тем самым доказано, что при $n \to \infty$ последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к некоторому элементу α из K.
Оценим скорость сходимости этой последовательности. Имеем

$$|\alpha - \alpha_n| = \left| \sum_{s=n+1}^{\infty} \beta_s \right| = \sup_{q\geq 1} \max_{n<s\leq q} |\beta_s| \leq f_0^{2^{n+1}}.$$

Теорема полностью доказана.
Далее рассмотрим итерационную формулу для вычисления значений гладкой функции в точке на вещественной оси. Пусть $x_0 \in \mathrm{R}$ и $f_0 = f(x_0)$, и пусть f_n — приближение к f_0 с точностью $\Delta_n = |f_n - f_0|$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле XV

Теорема 4.3. *Пусть $G(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки f_0, причём в этой окрестности* $\max|G''(t)| = c$, *и пусть* $f_{n+1} = G(f_n)$

$$G(f_0) = f_0,\ G(t)|_{t=f_0} = 0.$$

Тогда $\Delta_{n+1} \leq 0,5c\Delta_n^2$.
Действительно, по формуле Тейлора – Маклорена имеем

$$f_{n+1} = G(f_n) = G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) + 0,5G''(\xi)(f_n - f_0)^2,$$

где ξ — некоторая точка в окрестности f_0.
Поскольку $G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) = f_0$, находим

$$\Delta_{n+1} \leq 0,5c\Delta_n^2.$$

Численное решение уравнений для гладких функций и в неархимедовском полном поле XVI

Например, 1) для $x_0 > 0, f(x_0) = \sqrt{x_0}$ получим $f_{n+1} = G(f_n) = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{x_0}{f_n}\right)$;
2) для $0,5 \leq x_0 \leq 1, f(x_0) = \frac{1}{x_0}, G(f_n) = 2f_n - x_0 x_n^2,$
3) для $\frac{1}{8} \leq x_0 \leq 1, f(x_0) = \sqrt[3]{x_0}, G(f_n) = \frac{1}{3}\left(2f_n + \frac{x_0}{f_n^2}\right)$ или $G(f_n) = \frac{f_n(f_n^2+2f_0)}{2f_n^3+f_0}$.

Многочлены Бернулли I

Для дальнейшего необходимы следующие новые понятия. Определим числа Бернулли $B_n, n \geq 0$, из соотношений

$$B_0 = 1, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n, n \geq 0.$$

Далее определим многочлены Бернулли $B_n(x), n \geq 0$, следующим образом

$$B_0(x) = 1, B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k, n \geq 0.$$

В частности, отсюда находим

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42};$$

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Многочлены Бернулли II

Теорема 5.1.. *Пусть* $n \geq 0$. *Тогда для любых чисел* x *и* y *имеем*

$$B_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m B_{n-m}(y).$$

Доказательство. По определению и формуле бинома Ньютона имеем

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \binom{n}{k} (x+y)^k = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} x^s y^{k-s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} x^s \sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{s} B_{n-k} y^{k-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s \sum_{k=0}^{n-s} \binom{n-s}{k} B_{n-k-s} y^k =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s B_{n-s}(y),$$

что и требовалось доказать.
Теорема 5.2. (Формула Ньютона для многочленов Бернулли). *Пусть*

$$f(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + \cdots + a_n B_n(x),$$

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0,$$

многочлен степени n над некоторым полем F. *Тогда для любых чисел x и y из* F *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} B_k(y).$$

Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам I

В теории чисел формула Эйлера – Маклорена часто применяется для дважды непрерывно дифференцируемых функций (формула Н.Я.Сонина).

Теорема 6.1. (Формула Эйлера-Маклорена суммирования значений функции по целым точкам). *Пусть $m, n \geq 1$ — натуральные числа,a, b — вещественные числа, и пусть $f^{(m)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (или является функцией ограниченной вариации). Тогда имеем*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{B_k(\{x\})}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m,$$

где

$$R_m = (-1)^{m+1} \int\limits_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx.$$

Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам II

Доказательство. Индукция по m. При $m = 1$ вывод формулы (см., например, [?], гл. VIII, §2, с.205-206) использует формулу Ньютона–Лейбница. Действительно, следует доказать, что

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{B_1(\{x\})}{1!} f^{(0)}(x)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{B_1(\{x\})}{1!} f'(x)\,dx.$$

Положим

$$F(y) = \sum_{a<n\le y} f(n) + B_1(\{y\})f(y), B_1(y) = y - \frac{1}{2};$$

$$G(y) = \int_a^y \frac{B_1(\{x\})}{1!} f'(x)\,dx + B_1(\{a\})f(a).$$

Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам III

Функции $F(y)$ и $G(y)$ являются непрерывными на $[a, b]$, поскольку “скачок” суммы в $F(y)$ при переходе через целую точку гасится скачком функции $B_1(\{y\})f(y)$ в этой точке. В нецелых точках производные функций $F(y)$ и $G(y)$ равны. Наконец, $F(a) = G(a) = B_1(\{a\})f(a)$. Следовательно, функции $F(x)$ и $G(x)$, как первообразные от одной и той же функции, совпадают на всём отрезке $[a, b]$. Тем самым в случае $m = 1$ утверждение теоремы доказано. Предположим, что утверждение теоремы верно при $m = s$. Докажем его при $m = s + 1$. Преобразуем R_s. Интегрируя по частям, находим

$$(-1)^{s+1}R_s = \int_a^b \frac{B_s(\{x\})}{s!}f^{(s)}(x)\,dx = \int_a^b \frac{f^{(s)}(x)}{s!}d\left(\int_0^x B_s(\{u\})\,du\right) =$$

Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам IV

$$= \frac{f^{(s)}(x)}{s!}\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b \frac{f^{(s+1)}(x)}{s!}\left(\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\right)\,dx.$$

Поскольку

$$B_s(\{u\}) = \frac{B'_{s+1}(\{u\})}{s+1},$$

получим

$$\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du = \int\limits_0^x \frac{B_{s+1}(\{u\})}{s+1}\,du = \frac{B_{s+1}(\{x\})}{s+1} - \frac{B_{s+1}(0)}{s+1}.$$

Следовательно,

$$(-1)^{s+1}R_s = \frac{B_{s+1}(\{x\})}{(s+1)!}f^{(s)}(x)\Bigg|_a^b - R_{s+1},$$

Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам V

$$R_{s+1} = \int\limits_a^b \frac{B_{s+1}(\{x\})}{(s+1)!} f^{(s+1)}(x)\,dx,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Заметим, что для любых целых a и b и при $m \geq 1$ формулу Эйлера–Маклорена можно представить в виде

$$\frac{1}{2}f(a) + \sum_{n=a+1}^{b-1} f(n) + \frac{1}{2}f(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_{2m},$$

где

$$R_{2m} = -\int\limits_a^b \frac{B_{2m}(\{x\})}{(2m)!} f^{(2m)}(x)\,dx,$$

Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам VI

так как $B_k(\{a\}) = B_k(\{b\}) = B_k(0) = B_k$.
При любых целых a и b из предыдущей теоремы следует формула Эйлера суммирования значений гладкой функции

$$\frac{1}{2}f(a) + \sum_{n=a+1}^{b-1} f(n) + \frac{1}{2}f(b) = \int\limits_a^b (f(x) + B_1(\{x\})f'(x))\,dx.$$

Отметим ещё один интересный случай, когда числа a и b — любые полуцелые. Тогда формула Эйлера-Маклорена приобретает вид

$$\sum_{a<n<b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}(1/2)}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_{2m},$$

Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам VII

с той же функцией R_{2m}, что и в предыдущей формуле, причём

$$B_1\left(\frac{1}{2}\right)=0, B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{2k-1}}\right)B_{2k}, k\geq 1.$$

При полуцелых a и b также справедлива следующая формула Эйлера

$$\sum_{a<n\leq b} f(n)=\int\limits_a^b (f(x)+B_1(\{x\})f'(x))\,dx.$$

Последняя формула используется для вывода формулы Пуассона суммирования значений гладкой функции по целым точкам.

Формула Пуассона суммирования значений гладкой функции по целым точкам I

В начале отметим, что подобная формула имеет место и для функций с ограниченным изменением.

Теорема 7.1. Формула Пуассона. *Пусть числа a и b — полуцелые, функция $f(x)$ имеет непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, причём для любого x из $[a, b]$ имеем $|f'(x)| \leq C$. Тогда при любом натуральном M справедлива формула*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \sum_{m=-M}^{M} \int_a^b f(x)e^{2\pi imx}\,dx + R_M,$$

где

$$R_M \leq \frac{8C(b-a)(\ln M + 1)}{M}.$$

Доказательство см., например, в [?], с.442, теорема 3.

Последовательности биномиального типа I

Далее дадим обобщение формулы бинома Ньютона. Последовательность многочленов $p_n(x), \deg(p_n(x)) = n, \quad n \geq 0$, со старшим коэффициентом, равным 1, и удовлетворяющих последовательности тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y)(n \geq 0) p_0(x) = 1, p_s(0) = 0 (s \geq 1),$$

называют последовательностью биномиального типа. По существу, эти тождества представляют обобщение формулы бинома Ньютона.

Теорема 8.1. (Формула бинома для многочленов биномиального типа). *Пусть задана последовательность многочленов биномиального типа* $p_n(x), n \geq 0, p_0(x) \equiv 1$, *над*

Последовательности биномиального типа II

некоторым полем F. *При любом* $n \geq 1$ *имеем* $p_n(0) = 1$. *Тогда для любого многочлена* $f(x)$ *степени* n,

$$f(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \cdots + a_n p_n(x), a_n \neq 0,$$

и для любых чисел x *и* y *из* F *справедливо тождество*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^k f(x)}{k!} p_k(y),$$

где $Q^k f(x) = Q\left(Q^{k-1} f(x)\right)$ *—* k*-я итерация линейного оператора* Q *многочлена* $f(x)$ *с условиями*

$$Q(p_n(x)) = np_{n-1}(x), \quad Qp_0(x) = 0,$$

$$Q^{(0)} p_n(x) = p_n(x), \quad p_n(0) = 0(n \geq 1).$$

Последовательности биномиального типа III

Доказательство. Индукция по n. При $n = 0$ утверждение теоремы очевидно. Предположим утверждение теоремы верно при $n = m$. Докажем справедливость его при $n = m + 1$. Имеем

$$f(x) = g(x) + a_{m+1}p_{m+1}(x), g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k p_k(x).$$

По предположению индукции получим

$$g(x+y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}g(x)}{k!} p_k(y),$$

а по формуле бинома Ньютона для последовательности многочленов биномиального типа находим

$$a_{m+1}p_{m+1}(x+y) = a_{m+1}\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} p_{m+1-k}(x)p_k(y) =$$

Последовательности биномиального типа IV

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{Q^k(a_{m+1}p_{m+1}(x))}{k!} p_k(y).$$

Так как $Q^{m+1}g(x) = 0$, поскольку $Qp_0(x) = 0$, то отсюда имеем

$$f(x+y) = g(x+y) + a_{m+1}p_{m+1}(x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^k\left(g(x) + a_{m+1}p_{m+1}(x)\right)}{k!} p_k(y) + \frac{Q^{m+1}f(x)}{(m+1)!} p_{m+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{Q^k f(x)}{k!} p_k(y).$$

Теорема доказана.

Нижние и верхние факториальные многочлены I

Нижние (убывающие) факториальные степени

$$x_{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1), \quad x_{(0)} = 1, n \geq 0,$$

подсчитывают число взаимно-однозначных функций из множества, состоящего из n различных элементов во множество из x различных элементов. Другими словами, из x различных элементов подсчитывается число перестановок n элементов, а именно перестановки образуются так: первый из x различных элементов можно выбрать x способами, выбор второго элемента потребует $x-1$ способов, и так до выбора n элемента, что можно произвести $x-n+1$ способами. Отсюда получаем формулу для $x_{(n)}$. Заметим, что в каждом сочетании из x по n с заданными n элементами будет содержатся $n!$ перестановок. Таким образом, находим

$$n!\binom{x}{n} = x_{(n)}, \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{x!}{n!(x-n)!}.$$

Нижние и верхние факториальные многочлены II

Докажем формулу бинома для нижних факториалов.

Теорема 9.1. *Пусть* $n \geq 0$. *Тогда для любых чисел* x *и* y *имеем*

$$(x+y)_{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x_{(m)} y_{(n-m)}.$$

Доказательство. Очевидно, имеем $x_{(n)} = (x-n+1)x_{(n-1)}$. Индукция по n. При $n=0$ утверждение теоремы справедливо. Предположим, что оно имеет место при $n=m$. Докажем его при $n=m+1$. Используя предположение индукции, находим

$$(x+y)_{(m+1)} = (x+y-m)(x+y)_{(m)} = (x+y-m)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{(k)} y_{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-k) x_{(k)} y_{(m-k)} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{(k)} (y-m+k) y_{(m-k)} =$$

Нижние и верхние факториальные многочлены III

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x_{(k)} y_{(m-k+1)} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{(k)} y_{(m-k+1)} =$$

$$= \binom{m}{m} x_{(m+1)} y_{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) x_{(k)} y_{(m-k+1)} + \binom{m}{0} x_{(0)} y_{(m+$$

что и требовалось доказать.

Теорема 9.2. (Формула бинома для нижних факториалов). *Пусть*
$n \geq 0, \quad f(x) = a_0 x_{(0)} + a_1 x_{(1)} + \cdots + a_n x_{(n)}, a_n \neq 0,$ *— многочлен степени* n *над некоторым полем* F. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* F *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(x)}{k!} y_{(k)},$$

Нижние и верхние факториальные многочлены IV

где $\Delta^k f(x) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f(x)\right)$ *— k-я убывающая конечная разность многочлена* $f(x)$, *причём*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \Delta^0 f(x) = f(x).$$

Пусть теперь поле F является полем вещественных чисел. Тогда справедлива следующая формула Тейлора для нижних факториалов с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 9.3. *Пусть существует* $f^{(n+1)}(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. *Тогда для любых чисел x из* $[a, b]$ *и любых* $0 < y < 1$ *справедливо тождество*

$$f(x+y) = P(x; y; n) + R(x; y; n),$$

где

$$P(x; y; n) = P(x; y; n; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^{(k)} f(x)}{k!} y_{(k)},$$

Нижние и верхние факториальные многочлены V

где $\Delta^{(k)} f(x) = \Delta\left(\Delta^{(k-1)} f(x)\right)$ *— k-я конечная убывающая разность функции*
$f(x), \Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \Delta^{(0)} f(x) = f(x)$,

$$R = R(x; y; n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} y_{n+1},$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

Доказательство. Сначала докажем, что в точках $y = 0, 1, \ldots, n$ разность $f(x+y) - P(x; y; n)$ обращается в нуль. Индукция по n. Очевидно, утверждение справедливо при $n = 0$. Предположим оно имеет место при параметре $n = m$. Докажем его при $n = m+1$, т.е. справедлива формула

$$f(x+m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\Delta^{(k)} f(x)}{k!} (m+1)_k = S.$$

Нижние и верхние факториальные многочлены VI

Преобразуем правую часть S этой формулы. Используя предположение индукции, имеем

$$S = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \Delta^{(k)} f(x) = \binom{m+1}{0} \Delta^{(0)} f(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) \Delta^{(k)} f(x) + \binom{m+1}{m+1} \Delta^{(m+1)} f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{(k)} f(x) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{(k+1)} f(x) = f(x+m) + \Delta f(x+m) = f(x$$

Рассмотрим далее вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \varphi(x; t; n) = f(x+t) - P(x; t; n) - Ht_{(n+1)}.$$

Имеем

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \cdots = \varphi(n) = 0.$$

Нижние и верхние факториальные многочлены VII

Найдём параметр H из условия $\varphi(y) = 0$. Далее, по теореме Ролля из условия, что функция $\varphi(t)$ обращается в нуль в $n+2$ различных точках: $0 < y < 1 < \cdots < n$, получим, что найдутся $n+1$ различных $c_1, \ldots, c_{n+1}$ точек таких, что

$$\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = \varphi'(c_{n+1}) = 0.$$

Повторяя это рассуждение $n+1$ раз, находим, что существует точка c^* такая, что

$$\varphi^{(n+1)}(c^*) = 0,$$

т.е.

$$f(x + c^*) - (n+1)!H = 0.$$

Положим $c = x + c^*$. Имеем $H = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$. Теорема доказана.

Нижние и верхние факториальные многочлены VIII

Подобным образом, верхние (возрастающие) факториальные степени

$$x^{(n)} = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad n \geq 1, x^{(0)} = 1,$$

подсчитывают число различных способов размещения n различных шаров в x различных ячеек, когда выбран линейный порядок шаров внутри каждой ячейки и нет ограничений на число шаров в любой из них. Искомое количество $x^{(n)}$ получается размещением сначала n одинаковых шаров в x различных ячеек, т.е. число решений в неотрицательных целых $n_1, \dots, n_x$ уравнения $n_1 + \dots + n_x = n$, а затем для каждого размещения, предполагая, что шары различные, найдем, что их можно переставить $n!$ способами. Таким образом, учитывая, что число решений уравнения равно $\binom{x+n-1}{n}$, получим

$$x^{(n)} = n! \binom{x+n-1}{n}.$$

Нижние и верхние факториальные многочлены IX

Докажем, что последовательность верхних (возрастающих) факториалов является последовательностью биномиального типа.

Теорема 9.4. *Пусть* $n \geq 0$. *Тогда для любых чисел* x *и* y *имеем*

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{(m)} y^{(n-m)}.$$

Доказательство. Определим оператор $\nabla x^{(n)} = x^{(n)} - (x-1)^{(n)}$.
Имеем $\nabla x^{(n)} = nx^{(n-1)}$, $n \geq 1$.
Докажем утверждение теоремы индукцией по n. При $n=0$ оно справедливо. Предположим, что утверждение имеет место при $n=m$. Докажем его при $n=m+1$. Используя предположение индукции и предыдущее равенство, находим

$$\nabla(x+y-s)^{(m+1)} = (m+1)(x+y-s)^{(m)} = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-s)^{(k)} y^{(m}$$

Нижние и верхние факториальные многочлены X

Суммируя эти равенства по s от 0 до x, получим

$$(x+y)^{(m+1)} - y^{(m+1)} = \sum_{s=0}^{x} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (m+1)(x-s)^{(k)} y^{(m-k)}.$$

Поскольку

$$\sum_{s=0}^{x} (x-s)^{(k)} = \frac{x^{(k+1)}}{k+1},$$

имеем

$$(x+y)^{(m+1)} - y^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (m+1) \left(\sum_{s=0}^{x} (x-s)^{(k)} \right) y^{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} x^{(k)} y^{(m-k+1)},$$

что и требовалось доказать.

Нижние и верхние факториальные многочлены XI

Теорема 9.5. (Формула бинома для верхних факториалов). *Пусть* $n \geq 0, \quad f(x) = a_0x^{(0)} + a_1x^{(1)} + \cdots + a_nx^{(n)}, a_n \neq 0,$ *— многочлен степени n над некоторым полем* F. *Тогда для любых чисел x и y из* F *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\nabla^k f(x)}{k!} y^{(k)},$$

где $\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1} f(x)\right)$ *— k-я разность противоположного сдвига многочлена $f(x)$, причём*

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1), \quad \nabla x^{(0)} = 0, \quad \nabla^0 f(x) = f(x).$$

Нижние и верхние факториальные многочлены XII

Теорема 9.6. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для любых чисел x из $[a, b]$ и любых $y \in [0, 1]$ справедливо тождество*

$$f(x+y) = P(x; y; n) + R(x; y; n),$$

где

$$P(x; y; n) = P(x; y; n; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\nabla^k f(x)}{k!} y^{(k)},$$

где $\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1} f(x)\right)$ — k-я конечная возрастающая разность функции
$f(x), \nabla f(x) = f(x) - f(x-1), \nabla^{(0)} f(x) = f(x),$

$$R = R(x; y; n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} y^{(n+1)},$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

Последовательность многочленов Абеля I

В том же духе можно рассмотреть многочлены Абеля

$$A_n(x) = A_n(x; a) = x(x - an)^{n-1}, \quad 0 \leq n < x/a.$$

Далее находим вероятность того, что при случайном бросании дуги окружности длины a на дугу той же окружности длины x при $n < x/a$ испытаниях, любые две дуги длины a не пересекаются. Эта вероятность равна

$$\frac{A_n(x; a)}{x^n} = \frac{x(x - an)^{n-1}}{x^n}.$$

Теорема 10.1. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$A_n(x + y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A_m(x) A_{n-m}(y).$$

Последовательность многочленов Абеля II

Доказательство. Без ограничения общности теорему достаточно доказать при $a = 1$. Воспользуемся производной степенной функции

$$(A_n(x))' = (x-n)^{n-1} + (n-1)x(x-n)^{n-2} = nA_{n-1}(x-1).$$

Индукция по n. При $n = 0$ теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение теоремы при $n = m+1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{dA_{m+1}(x+y)}{dx} = (m+1)A_m(x+y-1) = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A_k(x-1)A_{m-k}($$

Проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$A_{m+1}(x+y) = (x+y)(x+y-m)^m = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A_{m-k}(y)\left(\int A_k(x -\right.$$

Последовательность многочленов Абеля III

Далее при $k \geq 1$ вычислим интеграл

$$\int A_k(x-1)\,dx = \int \frac{x-1}{k} d(x-k-1)^k = \frac{(x-1)(x-k-1)^k}{k} - \frac{1}{k}\int (x-$$

$$= \frac{x(x-k-1)^k}{k+1} = \frac{A_{k+1}(x)}{k+1}.$$

Следовательно

$$A_{m+1}(x+y) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} A_k(x) A_{m+1-k}(y) + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = A_{m+1}(y) = \binom{m+1}{0} A_0(x) A_{m+1}(y).$$

Последовательность многочленов Абеля IV

Следовательно, справедливо искомое равенство для разложения многочлена Абеля как многочлена биномиального типа.

Теорема 10.2. (Формула бинома для многочленов Абеля). *Пусть*
$n \geq 0, \quad f(x) = a_0 A_0(x) + a_1 A_1(x) + \cdots + a_n A_n(x), a_n \neq 0,$ — *многочлен степени n над некоторым полем* F. *Тогда для любых чисел x и y из* F *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(DE)^k f(x)}{k!} A_k(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x+k)}{k!} A_k(y),$$

где $(DE)^k f(x) = DE\left((DE)^{k-1} f(x)\right)$ — *k-я итерация композиции операторов сдвига и дифференцирования многочлена $f(x)$, причём*

$$DE(A_n(x)) = (A_n(x+1))' = nA_{n-1}(x), \quad (DE)^0 A_n(x) = A_n(x).$$

Последовательность многочленов Абеля V

Теорема 10.3. *Пусть существует* $f^{(n+1)}(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. *Тогда для любых чисел* x *из* $[a, b]$ *и любых* $y \in [0, 1]$ *справедливо тождество*

$$f(x + y) = P(x; y; n) + R(x; y; n),$$

где

$$P(x; y; n) = P(x; y; n; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(DE)^k f(x)}{k!} A_k(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x + k)}{k!} A_k(y$$

где $(DE)^k f(x) = DE\left((DE)^{k-1} f(x)\right)$ — k*-я степень линейного оператора* DE, *применённого к функции* $f(x), DE(f(x)) = f'(x + 1), DE^{(0)} f(x) = f(x)$,

$$R = R(x; y; n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} A_{n+1}(y),$$

Последовательность многочленов Абеля VI

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x + y$.

Последовательность многочленов Лагерра I

Приведём ещё один важный пример последовательности биномиального типа — это последовательность многочленов Лагерра

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^k$$

Теорема 11.1. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$L_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} L_m(x) L_{n-m}(y).$$

Доказательство. Имеем классическое рекуррентное равенство для многочлена Лагерра

$$(L_n(x))' = n(L_{n-1}(x))' - n(L_{n-1}(x)).$$

Индукция по n. При $n = 0$ Теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение

Последовательность многочленов Лагерра II

теоремы при $n = m + 1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{dL_{m+1}(x+y)}{dx} = (m+1)\frac{L_m(x+y)}{dx} - (m+1)L_m(x+y) =$$

$$= (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_k'(x)L_{m-k}(y) - (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_k(x)L_{m-k}(y).$$

Проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$L_{m+1}(x+y) = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_k(x)L_{m-k}(y) - (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\int L_k(x$$

При $k \geq 1$ вычислим разность

$$L_k(x) - \int L_k(x)\,dx = \sum_{s=1}^{k}(-1)^s\frac{k!}{s!}\binom{k-1}{s-1}x^s - \sum_{s=2}^{k+1}(-1)^{s-1}\frac{k!}{(s-1)!}\binom{k-}{s-}$$

Последовательность многочленов Лагерра III

$$= \sum_{s=2}^{k}(-1)^s \frac{k!}{s!}\left(\binom{k-1}{s-1}+\binom{k-1}{s-1}\right)x^s - k!x - (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^s$$

Следовательно

$$L_{m+1}(x+y) = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_{m-k}(y)\frac{L_{k+1}(x)}{k+1} + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = L_{m+1}(y) = \binom{m+1}{0}L_0(x)L_{m+1}(y).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$L_{m+1}(x+y) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{m+1}{k+1}L_{m-k}(y)L_{k+1}(x) + \binom{m+1}{0}L_0(x)L_{m+1}(y)$$

Последовательность многочленов Лагерра IV

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} L_{m-k+1}(y) L_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 11.2. (Формула бинома для многочленов Лагерра). *Пусть*
$n \geq 0, \quad f(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \cdots + a_n L_n(x), a_n \neq 0,$ — *многочлен степени* n *над некоторым полем* F. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* F *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L^k f(x)}{k!} L_k(y),$$

где $(L^k f(x) = L\left(L^{k-1} f(x)\right)$ — k*-я итерация оператора Лагерра многочлена* $f(x)$, *причём*

$$L(L_n(x)) = (nL_{n-1}(x) - L_n(x))' = nL_{n-1}(x), \quad L^0 L_n(x) = L_n(x).$$

Последовательности многочленов Аппеля и Эйлера I

Пусть задана некоторая последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ элементов из поля F. Определим многочлены Аппеля $A_n(x)$ формулой

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, n \geq 0.$$

Имеем $A_n'(x) = nA_{n-1}(x), n \geq 1$.

Теорема 12.1. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$A_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m A_{n-m}(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(A_n(y))^{(m)}}{m!} x^m.$$

Доказательство. По определению и формуле бинома Ньютона имеем

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}(x+y)^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} x^s y^{k-s} =$$

Последовательности многочленов Аппеля и Эйлера II

$$= \sum_{s=0}^{n} x^s \sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{s} a_{n-k} y^{k-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s \binom{n-s}{k} a_{n-k-s} y^k =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s A_{n-s}(y) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} A_{n-s}(y) x^s = \sum_{s=0}^{n} \frac{(A_n(y))^{(s)}}{s!} x^s.$$

что и требовалось доказать.

Теорема 12.2. (Формула бинома для многочленов Аппеля).
Пусть

$$f(x) = b_0 A_0(x) + b_1 A_1(x) + \dots + b_n A_n(x),$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n, b_n \neq 0,$$

Последовательности многочленов Аппеля и Эйлера III

многочлен степени n над некоторым полем F. *Тогда для любых чисел x и y из* F *имеем*

$$f(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}A_k(y).$$

К классу многочленов Аппеля принадлежат многочлены Л.Эйлера

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{E_k}{2^k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k,$$

где $E_k, k\geq 0$ — числа Эйлера, причём $E_0=1, E_{2k+1}=0$ при $k\geq 0$, и

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}E_{2k}=0, m\geq 1,$$

Последовательности многочленов Аппеля и Эйлера IV

поскольку эти многочлены удовлетворяют уравнению

$$E_n'(x) = nE_{n-1}(x), n \geq 0.$$

Отметим, также, что

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k E_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

и производящая функция для многочленов Эйлера имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k(x)}{k!} t^k = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1}$$

Теорема 12.3. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$E_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m E_{n-m}(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(E_n(y))^{(m)}}{m!} x^m.$$

Теорема 12.4. (Формула бинома для многочленов Эйлера). *Пусть*

$$f(x) = b_0 E_0(x) + b_1 E_1(x) + \cdots + b_n E_n(x),$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, b_n \neq 0,$$

имногочлен степени n *над некоторым полем* F. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* F *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} E_k(y).$$

Многочлены от нескольких переменных I

Первым обобщением бинома является полином Ньютона.
Теорема 13.1. (Формула полинома Ньютона). *Пусть $n \geq 0, r \geq 1$ — натуральные числа. Тогда для любых чисел $x_1, \ldots, x_r$ имеем*

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\cdots+m_r=n}}^{n} \cdots \sum_{m_r}^{n} \frac{n!}{m_1! \ldots m_r!} x_1^{m_1} \ldots x_r{}^{m_r}.$$

Доказательство. При $r = 1$ формула очевидно верна. Предположим, что она справедлива для $r - 1$ переменных. Докажем её для r переменных. Положим $x = x_1 + \cdots + x_{r-1}$. По формуле бинома Ньютона (теорема 1) находим

$$(x + x_r)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m x_r{}^{n-m}.$$

Многочлены от нескольких переменных II

Далее по предположению индукции имеем

$$x^m = (x_1 + \dots + x_{r-1})^m = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\dots+m_{r-1}=m}}^{m} \cdots \sum_{m_{r-1}=0}^{m} \frac{m!}{m_1! \dots m_{r-1}!} x_1^{m_1} \dots {x_{r-1}}^{m_{r-1}}.$$

Отсюда получим

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x_r^{n-m} \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\dots+m_{r-1}=m}}^{m} \cdots \sum_{m_{r-1}}^{m} \frac{m!}{m_1! \dots m_{r-1}!} x_1^{m_1} \dots {x_{r-1}}^{m}$$

что и даёт искомое равенство.

Теорема 13.2. (Формула Тейлора для многочленов от нескольких переменных). *Пусть $n \geq 0, r \geq 1$ — целые числа,* $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_r)$,

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

Многочлены от нескольких переменных III

многочлен степени n над некоторым полем F. *Тогда для любых векторов* x *и* y *имеем*

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_{\mathrm{y}}^{(k)} f(\mathrm{x}),$$

где $D_{\mathrm{y}}^{(k)} f(\mathrm{x}) = D\left(D_{\mathrm{y}}^{(k-1)} f(\mathrm{x})\right)$ *— k-й дифференциал многочлена* $f(\mathrm{x})$, *причём*

$$D_{\mathrm{y}} f(\mathrm{x}) = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_s} y_s, \quad D_{\mathrm{y}}^{(0)} f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}).$$

Заметим, что

$$D_{\mathrm{y}}^{(k)} f(\mathrm{x}) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\dots+k_r=k}}^{n} \cdots \sum_{k_r=0}^{n} \frac{k!}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial f^{(k)}(\mathrm{x})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} y_1^{k_1} \dots y_r^{k_r}.$$

Многочлены от нескольких переменных IV

Доказательство. При $r = 1$ формула очевидно верна (теорема 2). Предположим, что она справедлива для $r-1$ переменных. Докажем её для r переменных. Положим $\mathrm{x}^{(r-1)} = (x_1, \dots, x_{r-1}), \mathrm{y}^{(r-1)} = (y_1, \dots, y_{r-1})$. По формуле Тейлора (теорема 2) находим

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = g(x_r + y_r) = \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}(x_r)}{m!} y_r^m.$$

Далее по предположению индукции имеем

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = h(\mathrm{x}^{(r-1)} + \mathrm{y}^{(r-1)}) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{k!} D^{(k)}_{\mathrm{y}^{(r-1)}} h(\mathrm{x}^{(r-1)}).$$

Отсюда получим

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{n-m} \frac{1}{s!} D^{s}_{\mathrm{y}^{(r-1)}} \left(\frac{\partial^m f(\mathrm{x})}{\partial x_r^m} y_r^m \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^{(k)}_{\mathrm{y}} f(\mathrm{x}).$$

Теорема доказана.
Справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
Теорема 13.3. *Пусть существует* $D^{(n+1)}f(\mathrm{x})$ *в некоторой окрестности точки* $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$. *Тогда для любых точки* $\mathrm{b} = \mathrm{a} + \mathrm{h}$ *из этой окрестности найдётся такая точка* $\mathrm{c} = \mathrm{a} + \theta\mathrm{h}, 0 < \theta < 1,$ *что справедлива формула*

$$f(\mathrm{a} + \mathrm{h}) = P_n(\mathrm{a}; \mathrm{h}) + R_n(\mathrm{a}; \mathrm{h}),$$

где

$$P_n(\mathrm{a}; \mathrm{h}) = P_n(\mathrm{a}; \mathrm{h}; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D_{\mathrm{h}}^{(k)} f(\mathrm{a})}{k!},$$

Многочлены от нескольких переменных VI

где $D_{\mathrm{y}}^{(k)} f(\mathrm{x}) = D_{\mathrm{y}}\left(D_{\mathrm{y}}^{(k-1)} f(\mathrm{x})\right)$ *— k-й дифференциал функции* $f(\mathrm{x})$, *отвечающий приращению аргумента* y,

$$R_n = R_n(\mathrm{a};\mathrm{h}) = \frac{D_{\mathrm{h}}^{(n+1)} f(\mathrm{c})}{(n+1)!}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_n(t) = f(\mathrm{a} + t\mathrm{h}), 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда по формуле Тейлора (теорема 3) существует постоянная θ такая, что имеем равенство

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Многочлены от нескольких переменных VII

Так как

$$\varphi(0) = f(\mathrm{a}), \varphi'(0) = D_{\mathrm{h}} f(\mathrm{a}), \ldots, \varphi^{(n)}(0) = D_{\mathrm{h}}^{(n)} f(\mathrm{a}),$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = D_{\mathrm{h}}^{(n+1)} f(\mathrm{c}), \mathrm{c} = \mathrm{a} + \theta \mathrm{h},$$

то подставляя эти выражения в предыдущую формулу получим утверждение теоремы.

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных I

Докажем многомерный аналог формулы Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым точкам.

Теорема 14.1. *Пусть*
$\mathrm{a} = (a_1, \dots, a_r), \mathrm{b} = (b_1, \dots, b_r)$ — *векторы с полуцелыми координатами,* $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \mathrm{x} = (x_1, \dots, x_r)$ — *вектор с вещественными координатами, и пусть* $\frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}}$ *непрерывны в параллелепипеде* $a_k \leq x_k \leq b_k, 1 \leq k \leq r$, *по всем наборам* $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq r, 1 \leq s \leq r$. *Тогда имеем*

$$\sum_{a_1 < n_1 < b_1} \cdots \sum_{a_r < n_r < b_r} f(n_1, \dots, n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq r} 1 \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \dots \rho(x_{j_s}) \, dx_1 \dots dx_r.$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных II

Доказательство. Индукция по r. При $r = 1$ имеем

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b (f(x) - \rho(x)f'(x))\, dx,$$

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = -B_1(\{x\}),$$

что является формулой Эйлера – Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым точкам. Это и доказывает теорему при $r = 1$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $r = q$, т.е. имеет место формула

$$\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_q<n_q<b_q} f(n_1, \ldots, n_q) = \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1\leq j_1<\cdots\leq j_s\leq q} 1\times$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных III

$$\times \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(x)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q.$$

Докажем теорему при $r = q + 1$. Воспользуемся сначала предположением индукции, а затем формулой Эйлера суммирования значений гладкой функции по целым точкам. Получим

$$\sum_{a_1 < n_1 \le b_1} \cdots \sum_{a_q < n_q \le b_q} \sum_{a_{q+1} < n_{q+1} < b_{q+1}} f(n_1, \ldots, n_q, n_{q+1}) =$$

$$= \sum_{a_{q+1} < n_{q+1} \le b_{q+1}} \left(\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} 1 \times \right.$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных IV

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q \Bigg) =$$

$$= \int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})$$

$$dx_1 \ldots dx_q\, dx_{q+1} -$$

$$- \int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \rho(x_{q+1}) \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^{s+1} f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s} \partial x_{q+1}}$$

$$\rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q\, dx_{q+1} =$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных V

$$= \sum_{s=0}^{q+1} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_s \le q+1} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \dots \rho(x_{j_s})$$

$$dx_1 \dots dx_{q+1}.$$

Теорема доказана.

Следствием многомерной формулы Эйлера-Маклорена является многомерная формула Пуассона суммирования значений гладкой функции.

Теорема 14.2. *Пусть*

$\mathrm{a} = (a_1, \dots, a_r), \mathrm{b} = (b_1, \dots, b_r)$ — *векторы с полуцелыми координатами,* $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_r)$ — *вектор с вещественными координатами, и пусть* $\frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}}$ *непрерывны в параллелепипеде* $a_k \le x_k \le b_k, 1 \le k \le r$, *по всем наборам*

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных VI

$1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$, *причём найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\left| \frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}} \right| \le C$$

для всех наборов $1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$.
Тогда при любых натуральных $1 \le M_1 \le \dots \le M_r$ *имеем*

$$\sum_{a_1 < n_1 < b_1} \dots \sum_{a_r < n_r < b_r} f(n_1, \dots, n_r) = \sum_{m_1 = -M_1}^{M_1} \dots \sum_{m_r = -M_r}^{M_r} 1 \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1, \dots x_r) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_r x_r)} \, dx_1 \dots dx_r + R(M_1, \dots, M_r),$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных VII

где

$$R(M_1,\dots,M_r)\le 8{\cdot}3^r C(b_1-a_1)\dots(b_r-a_r)\frac{(\ln M_1+1)\dots(\ln M_r+1)}{M_1}.$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы имеем

$$S_r=\sum_{a_1<n_1<b_1}\cdots\sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1,\dots,n_r)=\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le r}1\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_r}^{b_r}\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}\rho(x_{j_1})\dots\rho(x_{j_s})\,dx_1\dots dx_r.$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных VIII

Представим $\rho(x)$ при $n \geq 1$ в виде

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = s_n(x) + \sigma_n(x), s_n(x) = \sum_{k \leq n} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k},$$

где $\sigma_n(x) \leq \frac{4}{\sqrt{1+n^2 \sin^2 \pi x}}$.

Тогда

$$S_r = \sum_{a_1 < n_1 < b_1} \cdots \sum_{a_r < n_r < b_r} f(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq r} 1 \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(x)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} (s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) + \sigma_{M_{j_1}}(x_{j_1})) \ldots (s_{M_{j_s}}(x_{j_1}) + \sigma_{M_{j_s}}(x_{j_1}))\, dx_1 \ldots$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных IX

Раскрывая скобки, находим
$S_r = S(M_1, \ldots, M_r) + \Sigma(M_1, \ldots, M_r)$, где

$$S(M_1, \ldots, M_r) = \sum_{a_1 < n_1 \le b_1} \cdots \sum_{a_r < n_r \le b_r} f(n_1, \ldots, n_r) =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r} 1 \times$$

$$\times \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots s_{M_{j_s}}(x_{j_1})\, dx_1 \ldots dx_r,$$

сумма $\Sigma(M_1, \ldots, M_r)$ подобна ей, но в ней заменяется в каждом слагаемом по $1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r$ хотя бы один сомножитель $s_{M_{j_t}}(x_{j_t})$ на $\sigma_{M_t}(x_{j_t})$.

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных X

В сумме $S(M_1, \dots, M_r)$ каждый интеграл интегрируем по частям. Используя $s_M(a) = s_M(b) = 0$, находим

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathrm{x})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}} s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \dots s_{M_{j_s}}(x_{j_s})\, dx_1 \dots dx_r =$$

$$= (-1)^s \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} f(x_1, \dots, x_r) s'_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \dots s'_{M_{j_s}}(x_{j_s})\, dx_1 \dots dx_r =$$

$$= (-1)^s \sum_{m_{j_1}=-M_{j_1}}^{M_{j_1}} \cdots \sum_{m_{j_s}=-M_{j_s}}^{M_{j_s}} 1 \times$$

$$\times \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} f(x_1, \dots, x_r) e^{2\pi i(m_{j_1}x_{j_1} + \dots + m_{j_s}x_{j_s})}\, dx_1 \dots dx_r.$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных XI

Суммируя по s, получим

$$S(M_1,\dots,M_r)=\sum_{m_1=-M_1}^{M_1}\cdots\sum_{m_r=-M_r}^{M_r}1\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_r}^{b_r}f(x_1,\dots x_r)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_rx_r)}\,dx_1\dots dx_r.$$

Оценим сверху $|\Sigma(M_1,\dots,M_r)|$. Воспользуемся при полуцелых a и b следующими оценками

$$s_M=\int_a^b|s_M(x)\,dx|\le(b-a)(\ln M+1),\sigma_M=$$

Формулы суммирования для функций от нескольких переменных XII

$$= \int\limits_a^b |\sigma_M(x)|\,dx \le 8(b-a)\frac{\ln M + 1}{M}.$$

Находим

$$|\Sigma(M_1,\dots,M_r)| \le \sum_{s=1}^{r}(-1)^s \sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le r} 1\times$$

$$\times 8C(b_1-a_1)\dots(b_r-a_r)\frac{\ln(M_{j_1}+1)\dots\ln(M_{j_s}+1)}{M_1} \le$$

$$\le \frac{8C}{M_1}\prod_{t=1}^{r}(b_t-a_t)(\ln(M_t+1))\sum_{s=1}^{r}2^s\binom{r}{s} \le$$

$$\le \frac{8\cdot 3^r C}{M_1}\prod_{t=1}^{r}(b_t-a_t)(\ln(M_t+1)).$$

Теорема доказана.

Формула Пуассона суммирования для функций от комплексных переменных I

На комплексной плоскости C зададим область

$$D = D(a, b, c, d) = \{z \in \mathrm{C} \mid a < \Re z \le b, c < \Im z \le d\},$$

где a, b, c, d — полуцелые вещественные числа.
Теорема 15.1. *Пусть* $z = x + iy$,

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x}, \frac{\partial f(z)}{\partial y}, \frac{\partial^2 f(z)}{\partial x \partial y},$$

непрерывны в области $D = D(a, b, c, d)$, *причём найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial x}\right| \le C, \left|\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right| \le C, \left|\frac{\partial^2 f(z)}{\partial x \partial y}\right| \le C.$$

Формула Пуассона суммирования для функций от комплексных переменных II

Тогда, суммируя по целым гауссовым числам z, *при любых натуральных* $1 \leq M, N, \Lambda = \min\{M, N\}$, *имеем*

$$\sum_{a<\Re z<b} \sum_{c<\Im z<d} f(z) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \int\int_{D} f(z) e^{2\pi i \Re(\bar{\mu} z)}\, dxdy + R(M, N),$$

где $\mu = m + in$ *— целое гауссово число,*

$$R(M, N) \leq 72C(b-a)(d-c)\frac{(\ln M + 1)(\ln N + 1)}{\Lambda}.$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и формулы Пуассона для функций от вещественных переменных.

Формула Пуассона суммирования для функций от комплексных переменных III

Для дальнейшего зададим область

$$D = D(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}) = \{\mathrm{z} \in \mathrm{C}^r \mid a_\nu < \Re z_\nu < b_\nu, c_\nu < \Im z_\nu < d_\nu\},$$

где $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ — полуцелые вещественные числа.

Теорема 14.2. *Пусть* $z_\nu = x_\nu + iy_\nu, 1 \le \nu \le r$,

$$\frac{\partial^{s+t} f(\mathrm{z})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s} \partial y_{k_1} \ldots \partial y_{k_t}}$$

непрерывны в области D *по всем наборам* $1 \le j_1 \le \cdots \le j_s \le r, 1 \le k_1 \le \cdots \le k_t \le r, 1 \le s, t \le r$, *причём найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\left| \frac{\partial^{s+t} f(\mathrm{z})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s} \partial y_{k_1} \ldots \partial y_{k_t}} \right| \le C.$$

Формула Пуассона суммирования для функций от комплексных переменных IV

Тогда, суммируя по целым гауссовым числам $z_1, \ldots, z_r$, *при любых натуральных*
$1 \leq M_1, N_1, \ldots, M_r, N_r, \Lambda = \min\{M_1, N_1, \ldots, M_r, N_r\}$, *имеем*

$$\sum_{a_1 < \Re z_1 \leq b_1} \sum_{c_1 < \Im z_1 \leq d_1} \cdots \sum_{a_r < \Re z_r \leq b_r} \sum_{c_r < \Im z_r \leq d_r} f(z_1, \ldots, z_r) =$$

$$= \sum_{m_1 = -M_1}^{M_1} \sum_{n_1 = -N_1}^{N_1} \cdots \sum_{m_r = -M_r}^{M_r} \sum_{n_r = -N_r}^{N_r} 1 \times$$

$$\times \int \cdots \int_D f(z_1, \ldots z_r) e^{2\pi i \Re(\bar{\mu}_1 z_1 + \cdots + + \bar{\mu}_r z_r)} \, dx_1 dy_1 \ldots dx_r dy_r +$$

$$+ R(M_1, N_1 \ldots, M_r, N_r),$$

Формула Пуассона суммирования для функций от комплексных переменных V

где

$$R(M_1, N_1, \ldots, M_r, N_r) \leq 8\cdot 3^{2r} \frac{C}{\Lambda} \prod_{s=1}^{r} (b_s - a_s)(d_s - c_s)(\ln M_s + 1)(\ln N_s + 1).$$

Эта теорема является многомерным аналогом предыдущей теоремы.

Многочлены биномиального типа от нескольких переменных I

Перейдём к обобщению формулы Тейлора для многочленов биномиального типа от нескольких переменных. Приведем формулировку соответствующей теоремы.

Теорема 16.1. (Формула Ньютона для многочленов биномиального типа от нескольких переменных). *Пусть задана последовательность многочленов биномиального типа* $p_n(x), n \geq 0, p_0(x) \equiv 1,$ *над некоторым полем* F. *При любом* $n \geq 1$ *имеем* $p_n(0) = 1$. *Тогда для любого многочлена* $f(\mathrm{x}), \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, *степени* n,

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\cdots+t_r\leq n}}^{n} \cdots \sum_{t_1=0}^{n} a(t_1, \ldots, t_r) p_{t_1}(x_1) \ldots p_{t_r}(x_r),$$

Многочлены биномиального типа от нескольких переменных II

и для любых чисел x *и* y *из* F *справедливо тождество*

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_{\mathrm{y}}^{k} f(\mathrm{x})}{k!},$$

где $Q_{\mathrm{y}}^{(k)} f(\mathrm{x}) = Q_{\mathrm{y}}\left(Q_{\mathrm{y}}^{(k-1)} f(\mathrm{x})\right)$ — *k-я итерация оператора* Q_{y} *многочлена* $f(\mathrm{x})$ *с условиями*

$$Q_{\mathrm{y}} f(\mathrm{x}) = \sum_{s=1}^{r} \partial_s f(\mathrm{x}) p_1(y_s), \quad Q_{\mathrm{y}}^{(0)} f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}).$$

$$\partial_s(p_{t_1}(x_1)\dots p_{t_r}(x_r)) =$$

$$= t_s p_{t_s-1}(x_{t_s}) p_{t_1}(x_1)\dots p_{t_{s-1}}(x_{t_s}) p_{t_{s+1}}(x_{t_s})\dots p_{t_r}(x_r).$$

Заключение I

В настоящем сообщении достаточно подробно рассмотрены интересные свойства классической формулы бинома Ньютона и её многомерных аналогов. Проведён анализ ряда этих свойств для многочленов биномиального типа. Получены многомерные аналоги формул Эйлера – Маклорена и Пуассона суммирования значений гладких функций по решётке. Исследования по дальнейшему изучению этих понятий и свойств предполагается продолжить. Представляется полезным дать их новые приложения. В частности, рассмотреть меру Хаара, преобразование Фурье на локально компактных топологических абелевых группах и формулу Пуассона суммирования значений функции по элементам её дискретной подгруппы (диссертация Тейта).