

**Проверка обобщённой гипотезы Мищенко-Фоменко для алгебр Ли малой размерности.**

**Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович**

*Лобзин Федор Игоревич*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

*E-mail: fadat@mail.ru*

Пусть  $g$  - алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{K}$ . Соответственно  $g^*$ -пространство, сопряженное алгебре Ли  $g$ . Рассмотрим на  $g^*$  структуру, называемую скобкой Ли-Пуассона:

$$\mathcal{A}_x(x) = (c_{ij}^k x_k), \quad x \in g^*.$$

Данный тензор определяет скобку Ли-Пуассона на  $C^\infty(g^*)$ . Функции  $f \in C^\infty$ , лежащие в ядре скобки Ли-Пуассона, называются функциями Казимира.

Так же можно рассмотреть похожую структуру, называемую скобкой Пуассона с замороженным аргументом:

$$\mathcal{A}_a(x) = (c_{ij}^k a_k), \quad a, x \in g^*.$$

Алгебра Ли называется вполне интегрируемой, если на ней найдется полный набор функций, находящихся в инволюции. Полным считается набор, содержащий в себе  $n$  функционально независимых функций, где  $n$  определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2}(\dim g + \text{ind } g).$$

Наибольший практический интерес представляют наборы, состоящие из многочленов.

- Гипотеза Мищенко-Фоменко: на двойственном пространстве  $g^*$  любой алгебры Ли  $g$  существует полный набор полиномов в инволюции.
- Обобщенная гипотеза Мищенко-Фоменко: на двойственном пространстве  $g^*$  любой алгебры Ли  $g$  существует полный набор полиномов в биинволюции, то есть набор, одновременно находящийся в инволюции относительно  $\mathcal{A}_x$  и  $\mathcal{A}_a$ .

Первая гипотеза была доказана Садэтовым в 2004 году (см.[2]), но наборы, полученные им, не всегда оказывались в инволюции и относительно скобки с замороженным аргументом. Отметим, что при применении общего метода построения наборов в биинволюции (метод Мищенко-Фоменко сдвига аргумента), во-первых, полученные наборы не для всех алгебр Ли (как, например, для полупростых алгебр Ли) являются полными, во-вторых, они функционально независимы не для всех значений параметра  $a$ .

В докладе будет рассказано о проверке обобщенной гипотезы Мищенко-Фоменко для нильпотентных алгебр Ли малой размерности ( $\dim g < 8$ ), классификация таких алгебр Ли и функции Казимира были взяты из [1] и [3]. Для всех таких алгебр Ли различными методами в явном виде были построены полные наборы многочленов в биинволюции для всех параметров  $a$ . Были изучены параметры, для которых метод сдвига аргумента давал функционально зависимые наборы, и в них предоставлены другие полные наборы в биинволюции. Также установлена инвариантность построенных параметрических семейств многочленов в биинволюции относительно замены базиса.

### Источники и литература

- 1 А.А Короткевич, Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности// Матем.сб.200:12 (2009), 3-40.
- 2 A. V. Bolsinov, Complite commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko-Fomenko conjecture// Theor. Appl. Mech., 43:2 (2016), 145-168.
- 3 A.I. Ooms, The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven// journal of algebra 365 (2012) 83-113