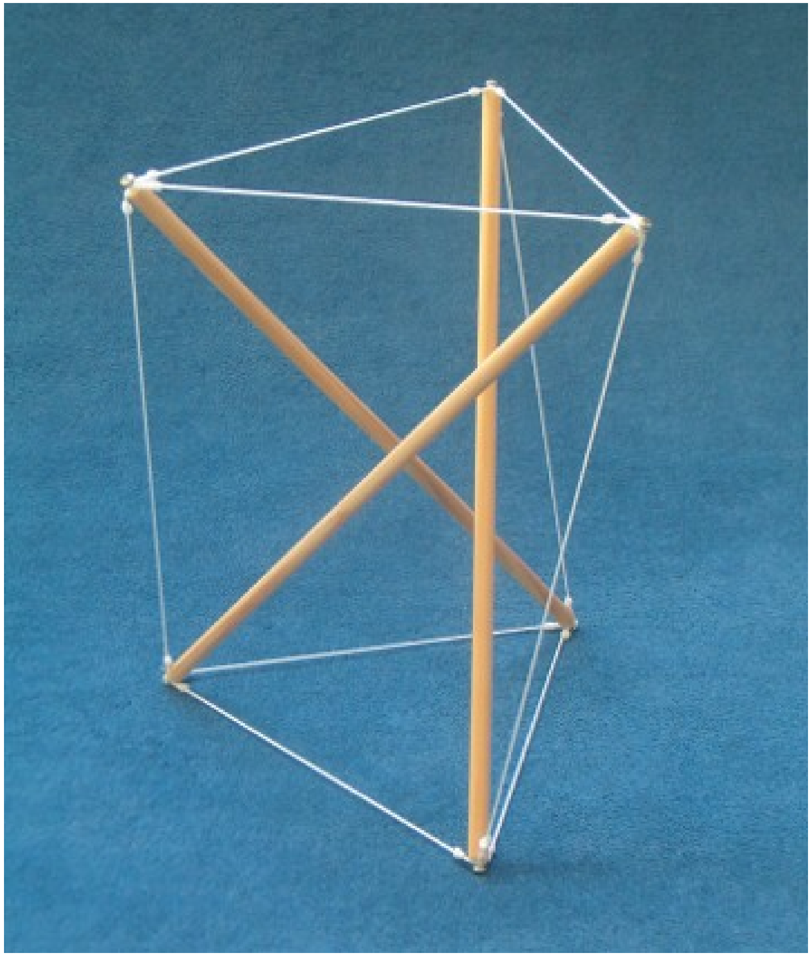
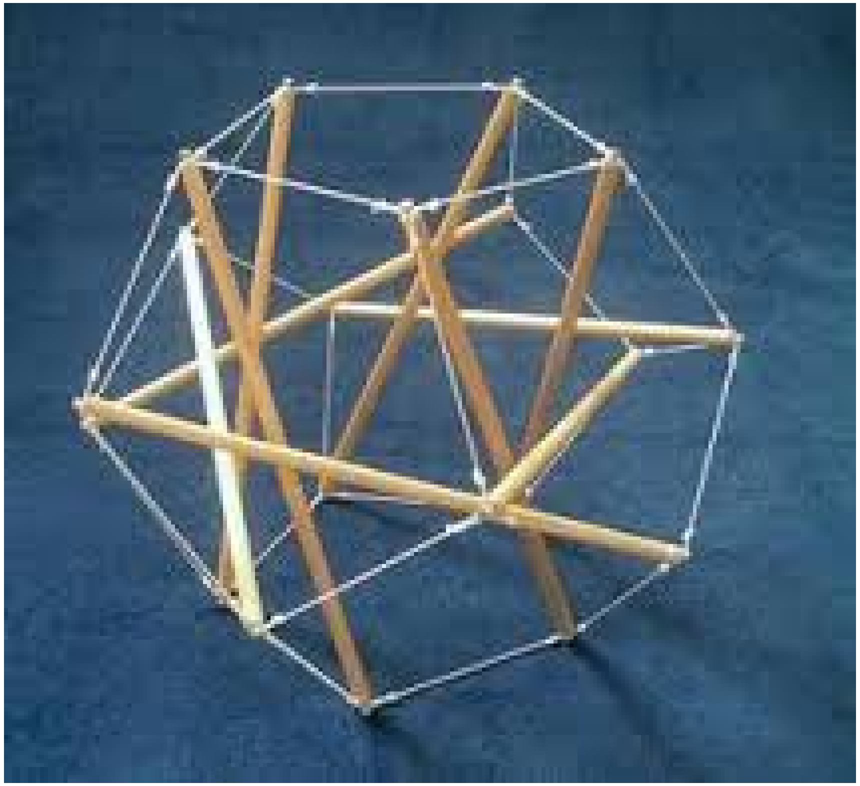
# О напряжённо-связанных конструкциях

•Ковалёв Михаил Дмитриевич

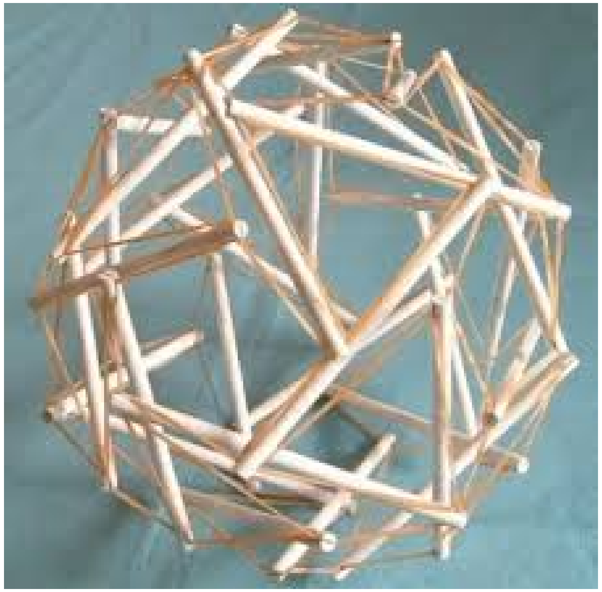
•МГУ им. М.В.Ломоносова
• mdkovalev@mtu-net.ru

# Простейшие вязанки





# Более сложные конструкции. Вышка-вязанка.



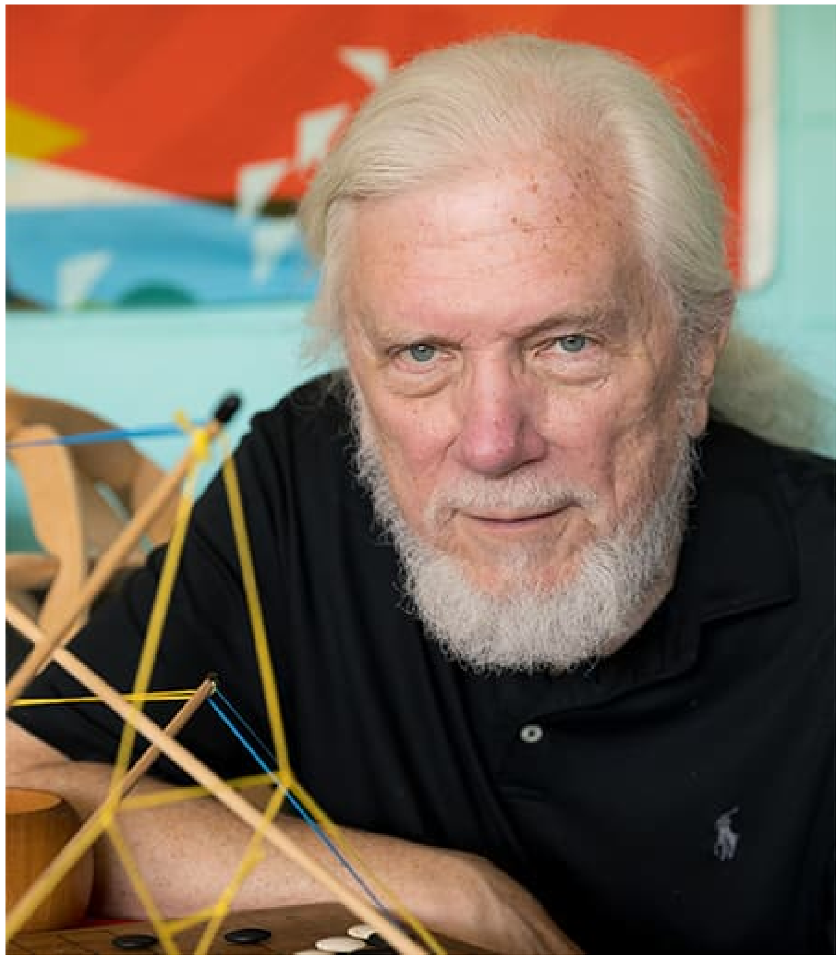
# История

- 1921. В России такие конструкции продвигал сразу после октябрьской революции петроградский художник - конструктивист латыш Карл Иогансон (1890 - 1929).
- 1940-1950-е. Энтузиастами их применения в архитектуре стали американцы Кеннет Снельсон (Kenneth Snelson 1927 -  2016) и Ричард Бакминстер Фуллер (Richard Buckminster Fuller1895 - 1983)  (Tensegrity frameworks)
- В геометрии -- Роберт Коннелли начиная с 1980-х.

# Арка-вязанка

# Мост на основе стяжек

# Роберт Коннелли (1942). Совместная с Гестом книга в интернете «Frameworks, Tensegrities and Symmetry: Understanding Stable Structures» 2015



Впервые в русской литературе с геометрической стороны этот круг вопросов освещён в книге

# Структура

- Структуру задаёт связный граф без петель и кратных рёбер с рёбрами трёх сортов, отвечающих рычагам (стержням), тросам (верёвкам), распоркам.
- Незакреплённые конструкции. Неизгибаемые --- фермы.
- Если есть лишь тросы и распорки --- *стяжка*. *Вязанкой* назовём стяжку, для которой каждая верёвка натянута между концами распорок, а среди распорок нет смежных друг другу.

# Рычажное отображение

- (Обобщённый) шарнирник в $R^n$ определяется заданием положений $p_i$ всех его $m$ узлов в пространстве.
- Пусть *r* – число рычагов (стержней), *s* -число тросов (верёвок), *u* – число распорок.
- Рычажное отображение $F\colon\ R^{nm} \to\ R^{r+s+u}$ $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$.

# Кинематическая схема и подчинённое ей устройство.

- Шарнирник **p**$= \{p_{\boldsymbol{i}}\} \in R^{nm}$, кинематическая схема (КС) **d**$= \left\{d_{ij}\right\} \in R^{r+s+u}$
- Устройством, подчинённым КС $\boldsymbol{d}^0$, назовём компоненту связности полного прообраза $F^{-1}(K(\boldsymbol{d}^0))$ сдвинутого координатного угла $K(\boldsymbol{d}^0) \subset R^{r+s+u}$, задающегося условиями:
$d_{ij} = {d^0}_{ij}$ , $\{ij\} \in E_0$,
$d_{ij} \leq {d^0}_{ij}$ , $\{ij\} \in E_-$ ,

# Напряжённосвязанные фермы

- Если все шарнирники **р** устройства, подчинённого некоторой КС, получаются один из другого движениями без отражения пространства $R^n$, то эти шарнирники называем *неизгибаемыми*, в противном случае --- *изгибаемыми*.
- Это фермы. Наиболее интересны фермы стяжки и фермы вязанки.

# Жёсткость напряжённосвязанных шарнирников, допустимые скорости

- Для допустимых скоростей узлов справедливы соотношения:

$$(p_i - p_j)\cdot(p_i' - p_j') = 0, \qquad \text{рычаг}$$

$$(p_i - p_j)\cdot(p_i' - p_j') \le 0, \qquad \text{трос}$$

$$(p_i - p_j)\cdot(p_i' - p_j') \ge 0, \qquad \text{распорка.}$$

# Определение жёсткости

- Шарнирник называется жёстким, если любой допустимый набор скоростей его узлов является тривиальным, то есть порождается движением шарнирника как жёсткого целого
- Необходимое условие жёсткости пространственного шарнирника: (число связей)>3(число узлов)-6,
- Плоского: (число связей)>2(число узлов)-3.
- Жёсткий шарнирник неизгибаем.

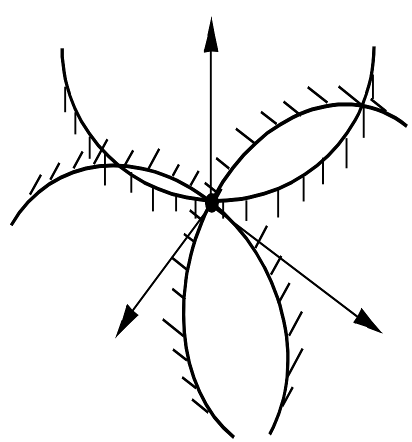
# Геометрическая трактовка жёсткости в случае закреплённых конструкций

- Условие неудлиняемости троса

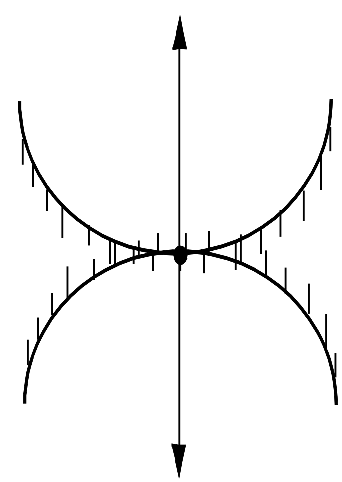
$$(p_i - p_j)^2 \leq d_{ij}$$

задаёт внутренность цилиндра в *3m*-мерном пространстве параметров $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$

Жёсткость



Неизгибаемость

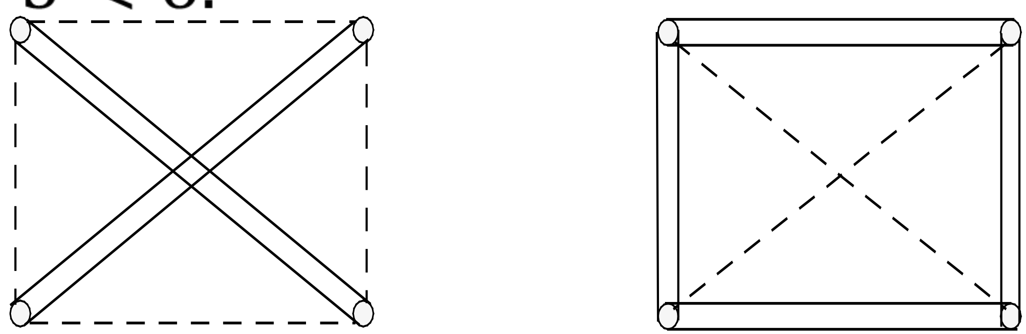


# Определённость шарнирников

- Назовём шарнирник $\mathbf{p} \in R^n$ определённым, если любой шарнирник $\mathbf{q} \in R^n$ с теми же длинами связей получается из $\mathbf{p}$ изометрией пространства.
- Назовём шарнирник $\mathbf{p} \in R^n \subset R^N$ сверхопределённым, если любой шарнирник $\mathbf{q} \in R^N$ с теми же длинами связей получается из $\mathbf{p}$ изометрией пространства.

# Жёсткие плоские стяжки

- Двойные линии – распорки, пунктир – тросы. Левая конструкция (вязанка) собирается однозначно, она определённа (более того, она сверхопределённа), правая (стяжка) – не определённа. Число связей 6, узлов – 4, $2 \times 4 - 3 < 6$.



# Пространственные стяжки

- Большинство пространственных стяжек нежёстко. Так для простейшей вязанки Снельсона  (первый сегодняшний пример) число узлов 6, связей 12, для жёсткости оно должно быть больше 12. Для стяжки второго примера эти числа: 20, 40 (для жёсткости должно быть более 54 связей).
- Несмотря на нежёсткость  пространственные стяжки достаточно хорошо держат форму за счёт малой деформации и возникающих при ней внутренних напряжений.

# Условия равновесия сил в узлах

$$\sum_j \omega_{ij}(p_j - p_i) = 0, \quad 1 \le i \le m, \omega_{ij} = \omega_{ji}.$$

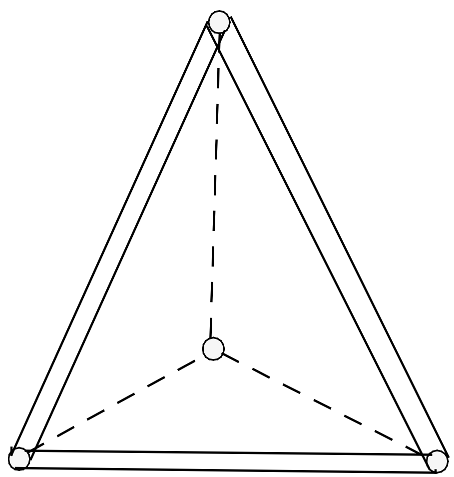
- Внутреннее напряжение $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_{ij}\}$ шарнирника **p**$= \{p_{\boldsymbol{i}}\}$ есть нетривиальное решение этой системы уравнений.
- Допустимое --- с условиями $\omega_{ij} \geq 0$ для тросов, и $\omega_{ij} \leq 0$ --- для распорок.
- Полное, если все $\omega_{ij} \neq 0$ .
- $\Omega = \| \Omega_{ij} \|$ --- матрица этой системы.

# Матрица напряжений

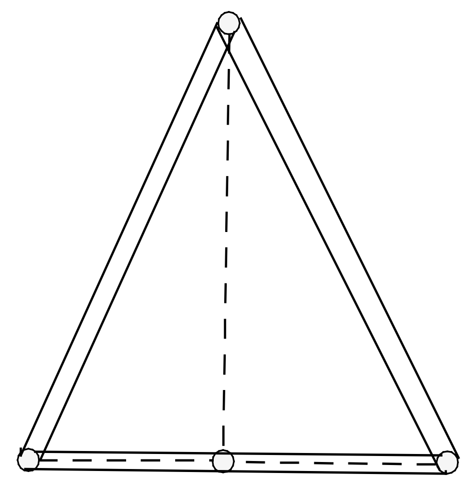
- $\Omega = \| \Omega_{ij} \|$ матрица размера $m \times m$
- $\Omega_{ij} = 0$ если нет связи $\{ij\}$,
- $\Omega_{ij} = -\omega_{ij}$ если есть связь $\{ij\}$,
- $\Omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik}$ если $i = j$.
- Матрица $\Omega$ симметрическая, и сумма её строк равна нулевой строке.

# Напрягаемость

- **Теорема** (Коннелли 1982). Любая напряжённосвязанная ферма  (в частности стяжка) допускает внутреннее напряжение, возможно, неполное.



а)



)

# Сверхопределённость стяжек

- Теорема (Р. Коннелли). Пусть аффинная оболочка узлов стяжки p совпадает с $R^n$, и p допускает полное напряжение $\omega$, а Ω --- соответствующая матрица напряжений. Если выполнены условия:
  1. Ω неотрицательно определена,
  2. Rank Ω = m-n-1, m --- число узлов стяжки,
  3. совокупность векторов всех связей стяжки p не лежит ни на какой квадрике в бесконечности ( их координаты не удовлетворяют однородному квадратичному уравнению) ,

  то стяжка p сверхопределена.

# Следствие из теоремы Коннелли

- **Теорема (Коннелли 1982).** *Плоская стяжка все узлы которой лежат в вершинах выпуклого многоугольника, тросы – стороны этого многоугольника, распорки – какие-то из его диагоналей, и допускающая внутреннее напряжение ненулевое на каждой связи, единственна с точностью до изометрий (даже в* $R^N, N \geq 2$ *).*

# Следствие из теоремы Коннелли

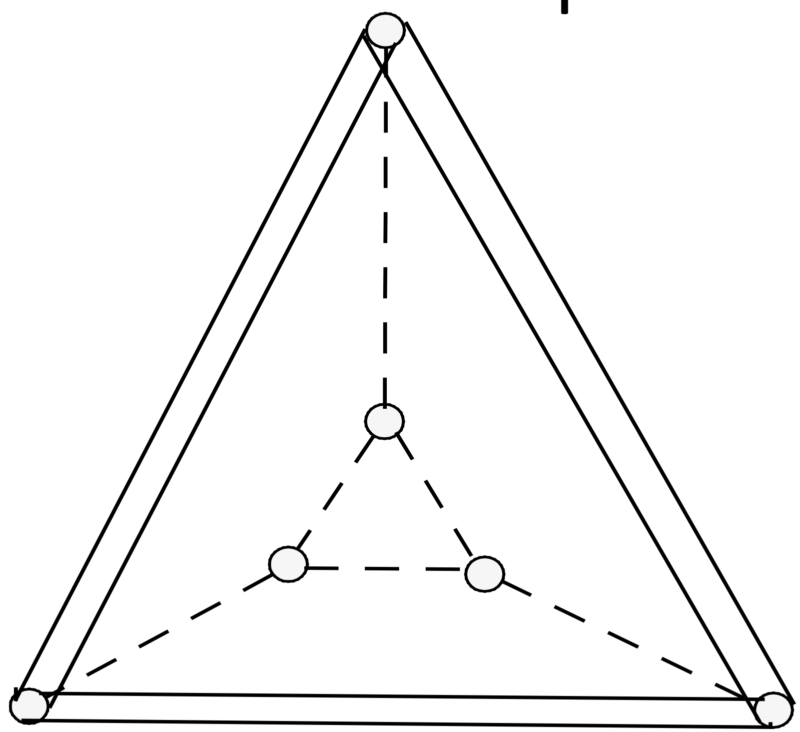
- **Теорема (Коннелли, Террелл 1995)**. *Симметричная призматическая вязанка $P_n(j,k)$ узлы которой лежат в вершинах двух одинаковых правильных n-угольников $\mathrm{M}_1$ и $\mathrm{M}_2$, расположенных в параллельных плоскостях, тросы соединяют i-ю вершину каждого из многоугольников с его $i \pm k$-й вершиной, а также есть распорки между вершинами двух многоугольников, и тросы, соединяющие конец распорки на $\mathrm{M}_1$ с вершиной на $\mathrm{M}_2$ , отстоящей на j сторон от конца этой распорки на $\mathrm{M}_2$, определённа (и сверхопределённа) тогда и только тогда, когда $k = 1$* либо $k = n - 1$ .

# Далеко не всё ясно с призматическими вязанками

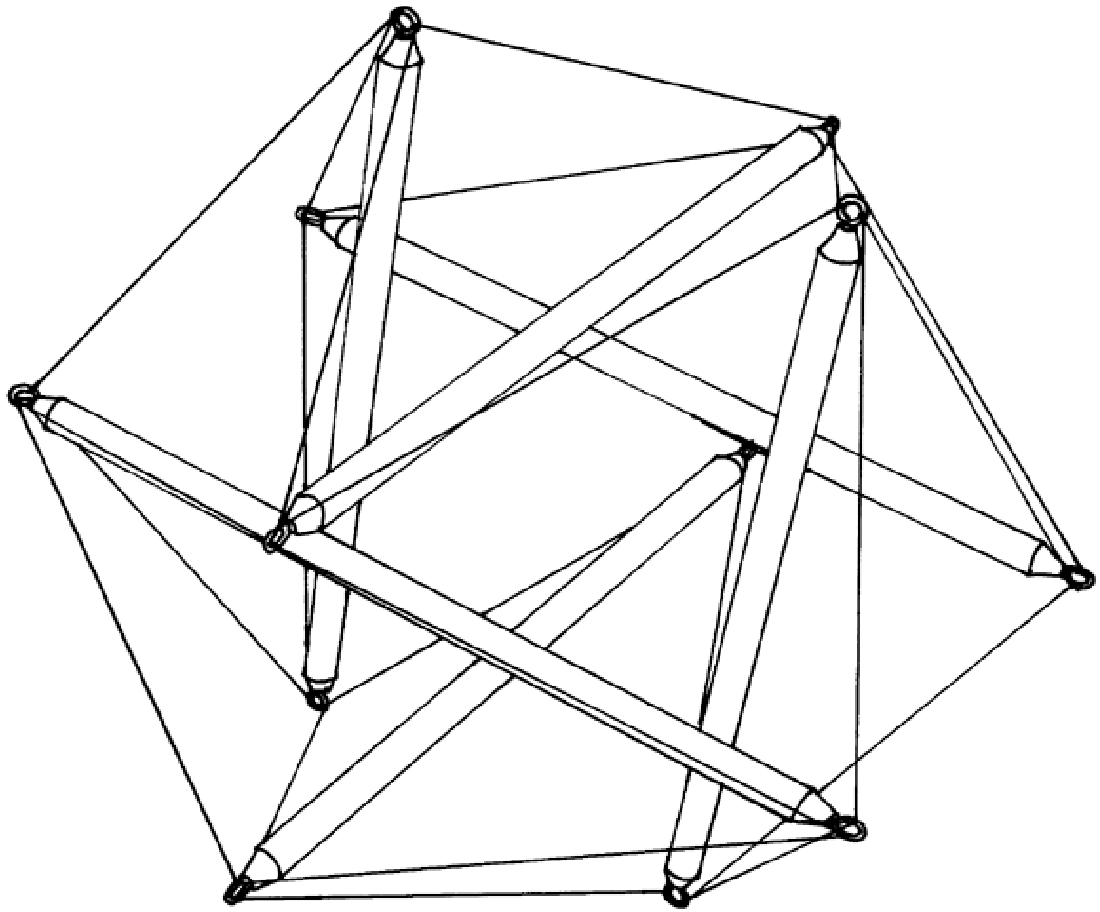
- Призматические вязанки $P_n(j,k)$, $n \geq 3$ не являются жёсткими.
- Относительно призматической вязанки $P_5(2,2)$ имеются подозрения о её изгибаемости, но изгибание не предъявлено (2018).

# Паутины состоят лишь из тросов и допускают напряжение

- Являются определёнными, при условии определённости точек закрепления тросов.

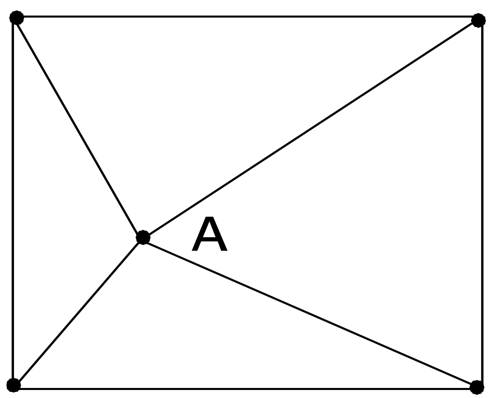


# Икосаэдрическая вязанка Фуллера. Методы построения симметричных вязанок.

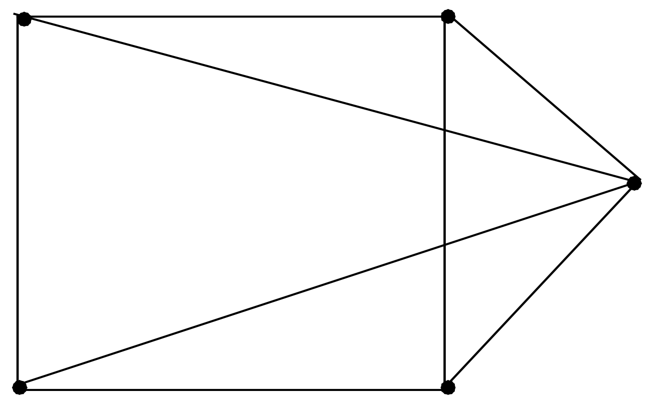


# Шарнирник может быть определённым но не сверхопределённым

- Шарнирник а) определён в плоскости, но изгибаем в пространстве.
- Шарнирник б) сверхопределён.




а)



б)

# Типичные (generic) шарнирники

- Это шарнирники, координаты узлов которых не удовлетворяют никаким полиномиальным с целыми коэффициентами уравнениям. Они составляют всюду плотное множество в пространстве всех шарнирников.
- Они представляют собой подмножество шарнирников общего положения.

# Теоремы для типичных обычных шарнирников

- Теорема(Коннелли 2005). Неизгибаемый типичный шарнирник $\mathbf{p}$ с $m$ шарнирами в пространстве $R^n$, для которого матрица напряжений $\Omega$ имеет ранг $m-n-1$, является определённым.
- Теорема(S. Gortler, A. Healy, and D. Thurston 2007). Если типичный шарнирник $\mathbf{p}$ с $m$ шарнирами в пространстве $R^n$является определённым, то либо это симплекс, либо его матрица напряжений $\Omega$ имеет ранг $m-n-1$.

# Ещё об определённости обычных типичных шарнирников

- Неизгибаемость с запасом: если шарнирник остаётся неизгибаемым при удалении любого его рычага.
- **Теорема** (Необходимое условие определённости Хендриксона 1986). Если типичный шарнирник **p** (не симплекс) в пространстве $R^n$определён, то он неизгибаем с запасом, и его граф вершинно $n+1$ связен.
- **Теорема** (Джексон, Джордан 2005). Типичный шарнирник в плоскости неизгибаемый с запасом,

# Спасибо за внимание!

# Матрица шарнирника

- Матрица шарнирника $P^*$ размера $n+1 \times m$ составлена из $m$ столбцов вида $\binom{p_i}{1}$
- Матрица $\Omega$ является матрицей напряжений шарнирника **p** тогда и только тогда, когда $P^*\Omega$=O.