Изгибаемые многогранники, не гомеоморфные сфере

Виктор Алексеевич Александров
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
& Новосибирский гос. университет

Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений
Московский гос. университет им. М.В. Ломоносова $*$ 22.03.2021

План доклада

§ **1**. Основные определения и факты теории изгибаемых многогранников.

§ **2**. Теоремы В.А. (1995) и М.И. Штогрина (2015) об изгибаемых многогранниках в $\mathbb{R}^3$, не гомеоморфных $\mathbb{S}^2$.

§ **3**. Теоремы Н.П. Долбилина – М.А. Штанько – М.И. Штогрина (1996, 1997, 1999), Lucio Rodríguez – Harold Rosenberg (2000), Г.Ю. Паниной (2003), И.Х. Сабитова (2014) о распространении на невыпуклые многогранники теоремы Коши об однозначной определённости выпуклых многогранников.

§ **4**. Результаты по вопросам, близким к изгибаемости многогранников, полученные геометрами и механиками

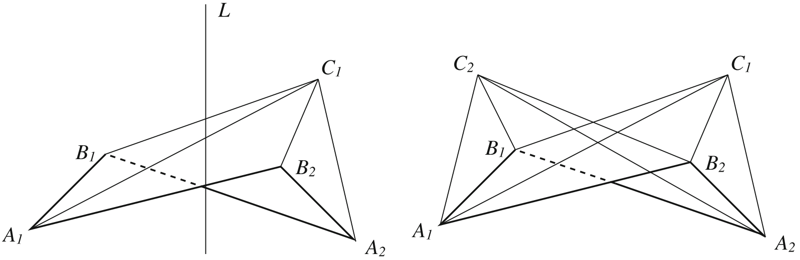
$\S\,\mathbf{1}$: Основные определения и факты теории изгибаемых многогранников

Многогранник это связная многогранная 2D поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Изгибаемый многогранник это многогранник, 3D форму которого можно изменить непрерывной деформацией, при которой каждая грань движется как твёрдое тело (т.е. так, что изменение пространственной формы достигается только за счёт изменения двугранных углов).

Изгибание многогранника это его непрерывная деформация, при которой каждая грань движется как твёрдое тело и при этом 3D форма многогранника изменяется.

§ 1. Пример: октаэдр Брикара типа 1



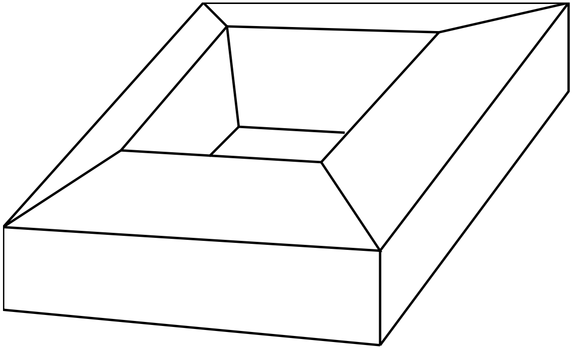
(1) существует вложенный гомеоморфный сфере изгибаемый многогранник (Robert Connelly, 1977); более того, известен такой пример всего с 9-ю вершинами (Klaus Steffen, ~1980);

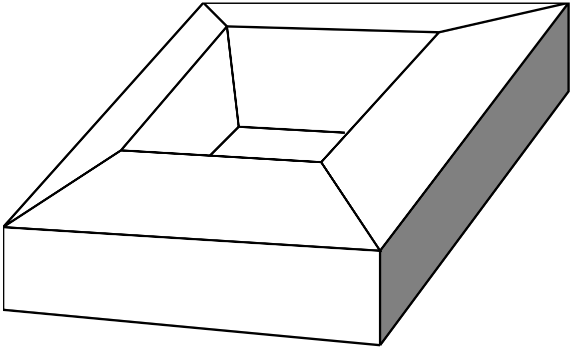
(2) существуют изгибаемые многогранники произвольного рода (фольклор; Nicolaas Kuiper, 1979); более того, существуют вложенные ориентируемые многогранники с любым числом ручек, у которых все двугранные углы изменяются в процессе изгибания (М.И. Штогрин, 2015);

(3) в процессе изгибания ориентированного изгибаемого многогранника сохраняются:

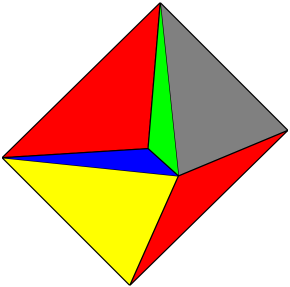
- интегральная средняя кривизна (Ralf Alexander, 1985);
- объём области, ограничиваемой многогранником (И.Х. Сабитов, 1995; А.А. Гайфуллин, 2014);
- инварианты Дена (А.А. Гайфуллин – Л.С. Игнащенко, 2018).

§ **2**. Явные конструкции замкнутых изгибаемых многогранников в $\mathbb{R}^3$, не гомеоморфных сфере





§ 2. Фольклор: добавление листа Мёбиуса

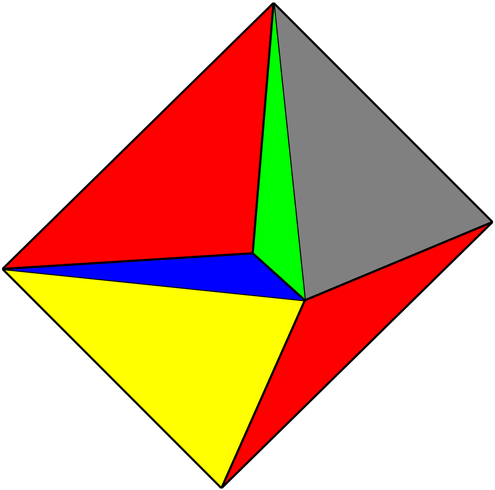


Гексаэдр / Hexahedron / Семигранник

Тетрагемигексаэдр / Tetrahemihexahedron:

- имеет те же вершины и рёбра, что и правильный октаэдр;
- имеет 6 вершин, 12 рёбер, и 7 граней (4 треугольных и 3 квадратных);
- является однородным звёздчатым многогранником;
- гомеоморфен вещественной проективной плоскости.

§ 2. Фольклор: добавление листа Мёбиуса



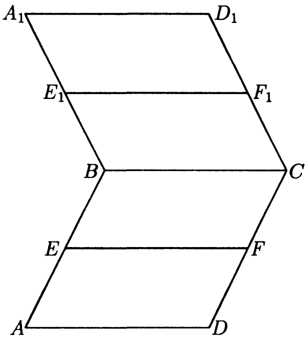
Гексаэдр / Hexahedron / Семигранник

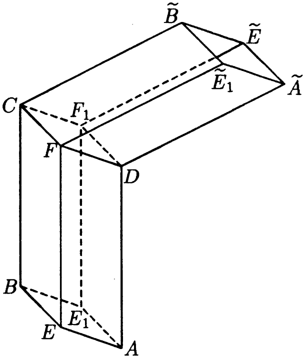
О добавлении ручки (но не листа Мёбиуса) написано, например, у Nicolaas Kuiper в 1979.

Проблема №1: *Всякий изгибаемый многогранник получается склеиванием более простого изгибаемого многогранника, ориентированный объём которого тождественно равен нулю в процессе изгибания, и неизгибаемого многогранника, объём которого, конечно, постоянен в процессе изгибания* (Robert Connelly, private communication)

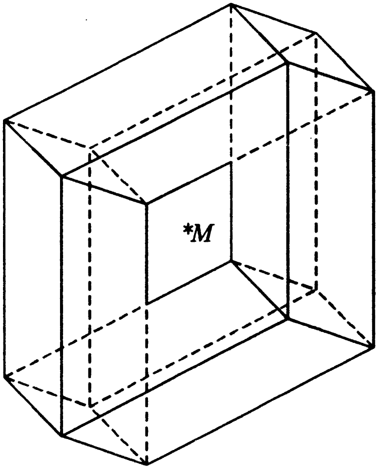
§ 2. Теорема (В.А., 1995)

Вопрос: *Существует ли изгибаемый многогранник, в построении которого не используется ни один из октаэдров Брикара?*

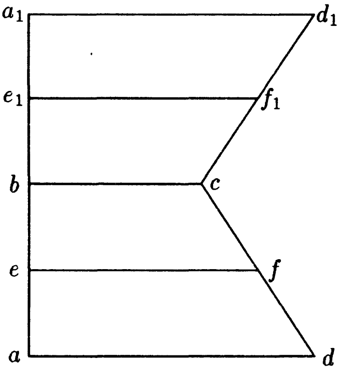


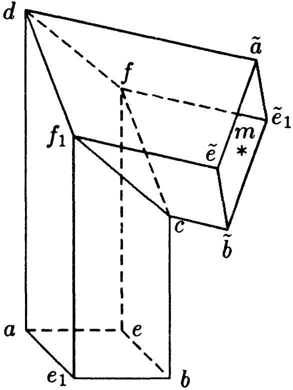


§ 2. Теорема (В.А., 1995)

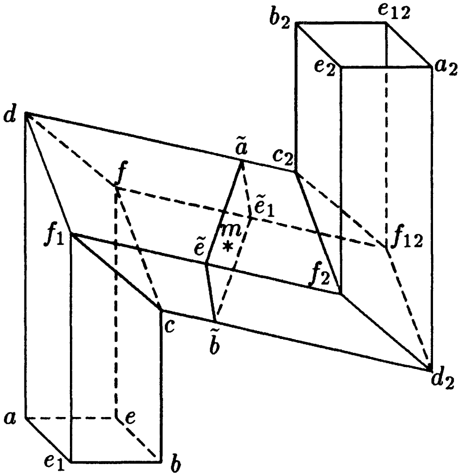


§ 2. Теорема (B.A., 1995)

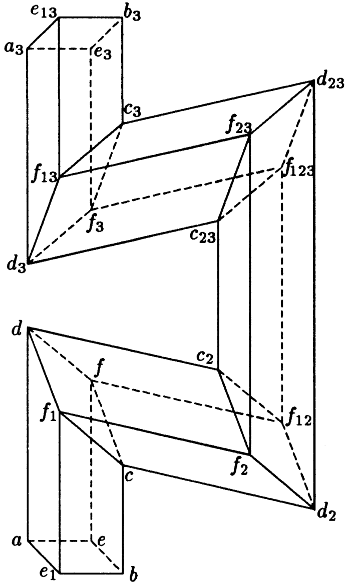




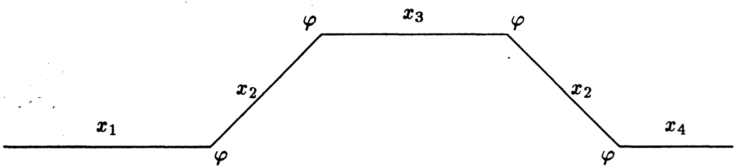
§ 2. Теорема (В.А., 1995)



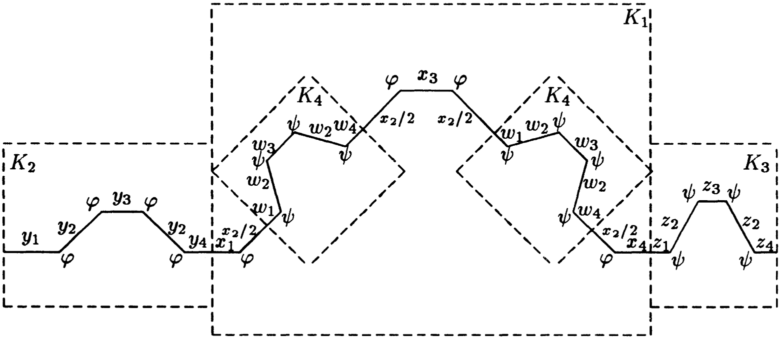
§ 2. Теорема (В.А., 1995)



§ 2. Теорема (В.А., 1995)



§ 2. Теорема (B.A., 1995)



Теорема (В.А., 1995)

При выполнении условий (3)–(7) многогранник является изгибаемым, и в процессе изгибания его ориентированный объем тождественно равен нулю. Здесь:

$$\varphi = \widetilde{\varphi}, \tag{3}$$

$$\psi = \widetilde{\psi}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + {} + z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4 \\ + 2(w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4) = \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 + \tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + \tilde{y}_4 \\ + \tilde{z}_1 + 2\tilde{z}_2 + \tilde{z}_3 + \tilde{z}_4 + 2(\widetilde{w}_1 + 2\widetilde{w}_2 + \widetilde{w}_3 + \widetilde{w}_4), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} x_2 + y_2 + w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4 - 8w_2 \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \cos^2\psi}{\sin^2\varphi - \sin^2\psi} \\ = \tilde{x}_2 + \tilde{y}_2 + \widetilde{w}_1 + 2\widetilde{w}_2 + \widetilde{w}_3 + \widetilde{w}_4 - 8\widetilde{w}_2 \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \cos^2\psi}{\sin^2\varphi - \sin^2\psi}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$z_2 + 2w_2 + 8w_2 \frac{\sin^2\psi \cos^2\psi \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\psi} = \tilde{z}_2 + 2\widetilde{w}_2 + 8\widetilde{w}_2 \frac{\sin^2\psi \cos^2\psi \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\psi}, \tag{7}$$

§ 2. Открытые проблемы

Проблема №2: *Существует ли функция на пространстве многогранников, значения которой на изгибаемых торах, построенных в теореме В.А., задаются формулами (6) или (7)? Каков геометрический смысл этой функции?*

Проблема №3: *Найти исчерпывающий список инвариантов, сохраняющихся в процессе изгибания любого многранника.* (Мы знаем, что в этот список входят объём, интегральная средняя кривизна, инварианты Дена, . . . , площадь поверхности, интегральная гауссова кривизна . . . . Что ещё?)

Теорема (М.И. Штогрин, 2015)

Для любого $g \in \mathbb{N}$, существует замкнутая ориентируемая многогранная поверхность рода g, вложенная в $\mathbb{R}^3$, допускающая только однопараметрическое изгибание.
В процессе изгибания поверхности изгибаются все её двугранные углы, кроме одного.

Замечание: Не известно, верна ли эта теорема при дополнительном условии, что все грани треугольные.

Проблема №4: *Верно ли, что у всякого вложенного замкнутого изгибаемого многогранника есть по крайней мере один двугранный угол, величина которого не меняется в процессе изгибания?*

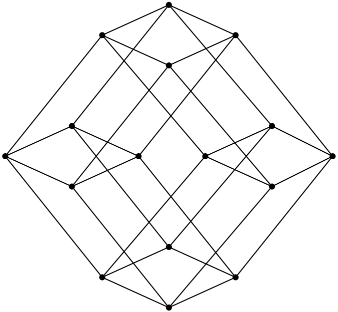


Рис. 3. Изгибаемый тор

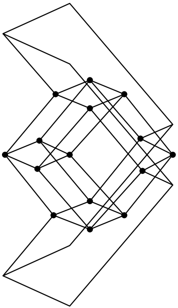
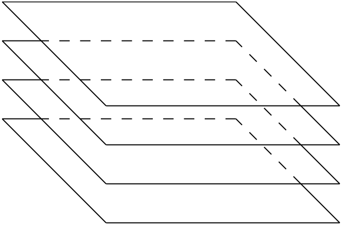


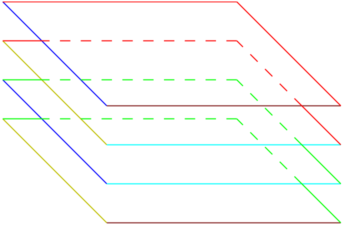
Рис. 4. Диск с ручкой

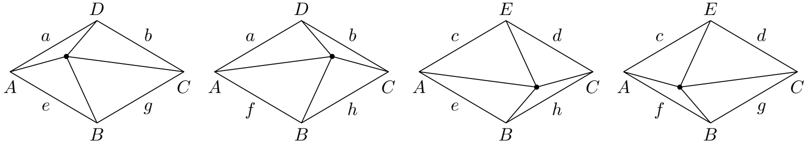
Теорема (М.И. Штогрин, 2015)

Для любого $h \in \mathbb{N}$, существует замкнутая неориентируемая многогранная поверхность с h плёнками Мёбиуса, допускающая только однопараметрическое изгибание. При изгибании этой поверхности все её двугранные углы являются переменными (в частности, каждая её пленка Мёбиуса изгибается).

§ 2. Теорема М.И. Штогрина, 2015







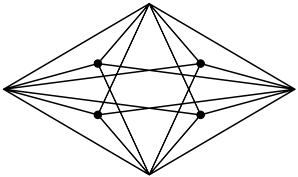


Рис. 5. Триангуляция изгибаемой проективной плоскости

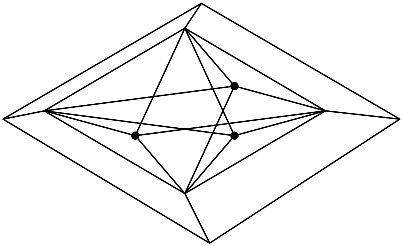


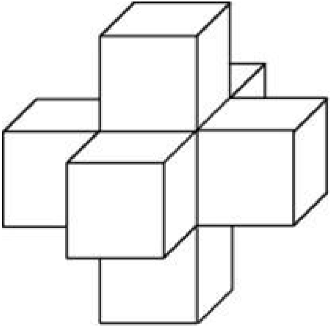
Рис. 7. Диск с пленкой Мёбиуса

§ **3**. Теоремы о невыпуклых многогранниках, аналогичные теореме Коши об однозначной определённости выпуклых многогранников

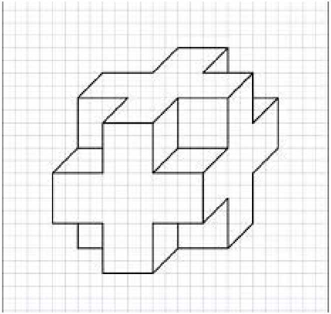
Вопрос: Для каких классов многогранников можно утверждать, что они состоят только из неизгибаемых многогранников?

Определение: Квадрильяжем некоторой поверхности называется гомеоморфный ей многограннник, составленный из плоских единичных квадратов.

Примеры: куб, объёмный крест



Недорисованный пример квадрильяжа сферы:



Теорема (Н.П. Долбилин – М.А. Штанько – М.И. Штогрин, 1999)

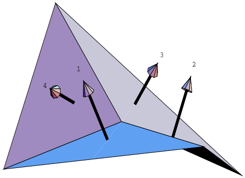
Любой вложенный квадрильяж тора неизгибаем.

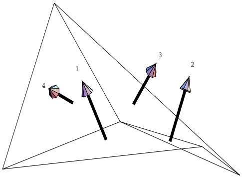
Теорема (М.И. Штогрин, 1999)

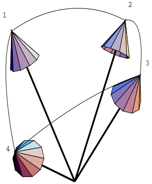
Каждый вложенный квадрильяж кренделя неизгибаем.

Замечание: Эти теоремы верны не только для вложенных квадрильяжей, но и для тех, чей рёберный остов погружен в $\mathbb{R}^3$.

Определения: многогранник, моделирующий сферу; многогранник, моделирующий проективную плоскость; ~~многогранник, моделирующий тор~~; оснащение многогранника; гауссово отображение; естественное оснащение

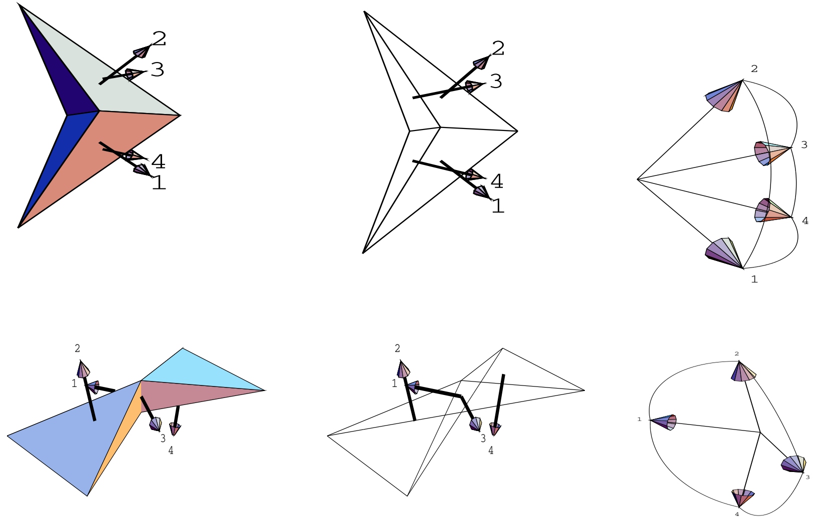






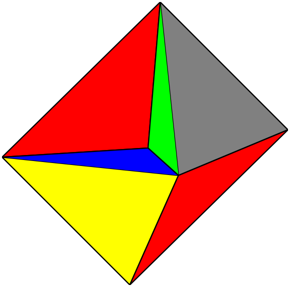
§ 3. Lucio Rodríguez – Harold Rosenberg (2000)

Определения: неестественное оснащение; противоестественное оснащение



Теорема (L. Rodríguez – H. Rosenberg, 2000)

Всякий многогранник P, моделирующий сферу или проективную плоскость и снабжённый оснащением, является ε-жёстким (т.е. $\exists \varepsilon > 0 : \forall$ многогранник Q, ε-близкий к P и такой, что соответствующие грани P и Q конгруентны, сам конгруэнтен P).



§ 3. Неизгибаемость невыпуклых многогранников

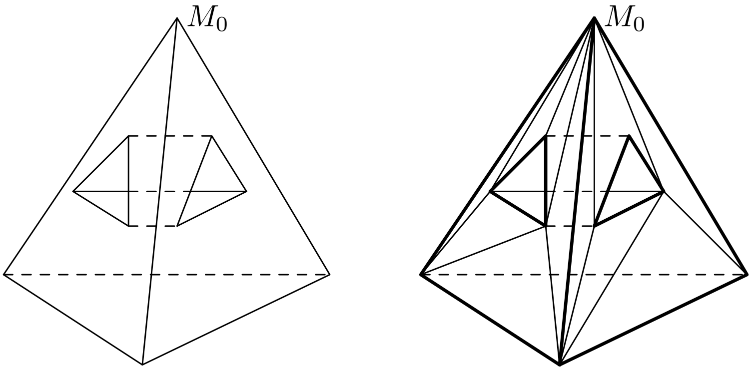
Многогранные ежи (L. Rodríguez – H. Rosenberg, 2000).

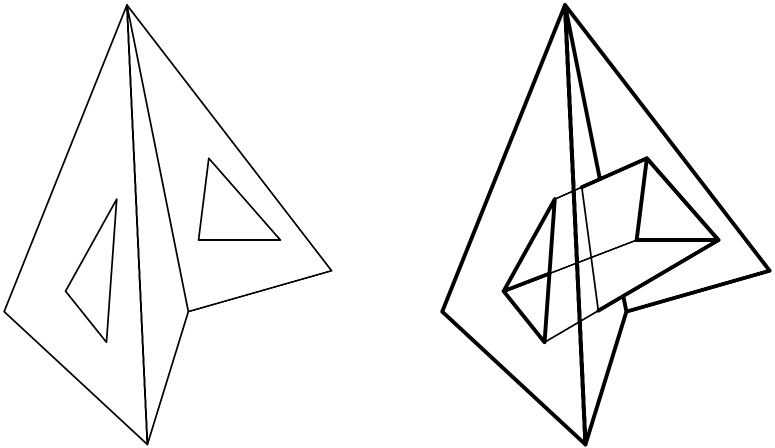
Виртуальные многогранники наследуют многие свойства выпуклых (Г.Ю. Панина — диссертация, 2006; Г.Ю. Панина – Ileana Streinu — УМН, 2015).

Пирамида — это многогранник, у которого есть вершина, соединённая ребрами со всеми остальными вершинами. Эту вершину называют главной.

Замечания:

• главных вершин может быть несколько;
• пирамида может не быть выпуклой;
• пирамида может иметь любой род и даже быть неориентируемой.


M_0
M_0



Пирамида принадлежит классу А, если существует её главная вершина u такая, что для всякого ребра v, w пирамиды, не содержащего u, треугольник с вершинами u, v, w невырожден.

Теорема (И.Х. Сабитов, 2014)

Любая симплициальная пирамида в $\mathbb{R}^3$ класса А неизгибаема.

Следствие: Любая погруженная в $\mathbb{R}^3$ пирамида неизгибаема.

Замечание: Существуют и изгибаемые пирамиды, гомеоморфные сфере (И.Х. Сабитов, 1983).

§ 4. Результаты по вопросам, близким к изгибаемости многогранников, полученные геометрами и механиками

§ 4 : Шестизвенный механизм Брикара

Bricard 6 Bar Linkage на YouTube:

https://www.youtube.com/watch?v=f010I-YZS3Y

§ 4 : Шестизвенный механизм Брикара

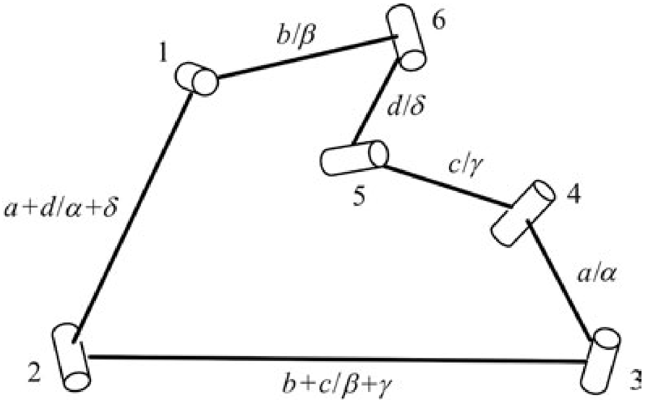
(a)

(b)

(c)

(d)

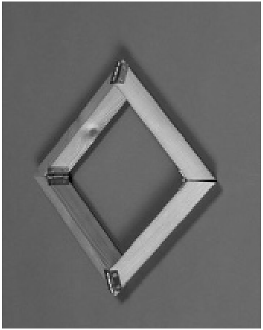
§ 4 : Шестизвенный механизм Брикара



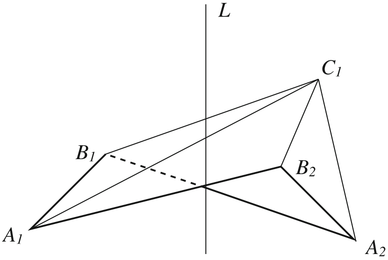
Оба рисунка из книги Zhong You, Yan Chen “Motion Structures. Deployable structural assemblies of mechanisms.” Spon Press: London, 2012.

N-звенные замкнутые механизмы известны при $N = 4, 5, 6, 8, 10, 12, \ldots$

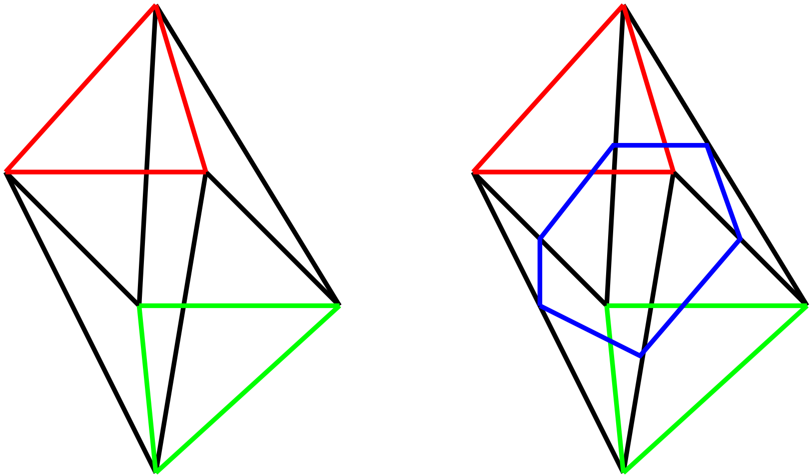
4-звенный механизм предложил Geoffrey Bennett в 1914 году в статье “The skew isogram mechanism,” Proceedings of the London Mathematical Society, (2) **13**, 151–173.



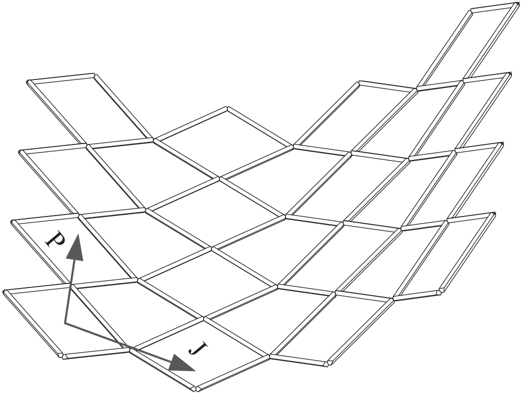
§ 4 : Напоминание: октаэдр Брикара типа 1



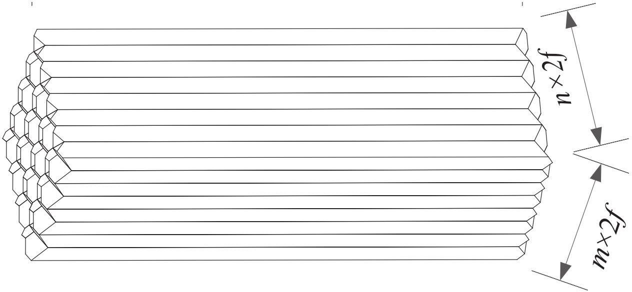
§ 4 : Шестизвенный механизм Брикара – объяснение



§ 4 : Четырёхзвенный механизм Беннета – приложения



Раскладывающаяся параболическая антенна



Оба рисунка из статьи
Xiaoke Song et al., “Networking of Bennett linkages and its application on deployable parabolic cylindrical antenna.” Mechanism and Machine Theory **109** (2017), 95–125.

Несмотря на то, что кинематика этого семейства механизмов изучена очень хорошо, оно мало применяется в промышленности. Надеемся, что со временем ситуация изменится. – Чэнь Янь, Ю Чжун (2012).

Although the kinematics study on this family of linkages is in depth, little industry application has been developed. So it is the lost jade in the treasure box of mechanisms, waiting for being recovered and cherished. – Yan Chen, Zhong You (2012)

§ 5 : Raoul Bricard (1870, Париж –1943,)

Французский инженер и математик.
Наиболее известен своим вкладом в геометрию и кинематику.

Некоторые факты из биографии Рауля Брикара:

1897: Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. Journ. de Math. (5) **3**, 113–148.
1904: лауреат de l'Académie des sciences за работы по кинематике.
1908: профессор прикладной геометрии в Национальной консерватории искусств и ремесел в Париже.
1910: президент Société mathématique de France.
1918: награждён орденом Почётного легиона.
1926–1927: Leçons de cinématique, T. 1–2. Paris, Gauthier-Villars.
1931: офицер (позже — коммандор) ордена Почётного легиона.
1932: премия Понселе по математике de l'Académie des sciences за работы по геометрии.

Спасибо за внимание!