

Теорема Матиясевича и модели Изинга-Поттса-Биггса

Научный руководитель – Талалаев Дмитрий Валерьевич

Казаков Антон Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,
Россия

E-mail: anton.kazakov.4@mail.ru

Теорема Матиясевича и модели Изинга-Поттса-Биггса

Научный руководитель – Талалаев Дмитрий Валерьевич

Казаков Антон Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,
Россия

E-mail: anton.kazakov.4@mail.ru

Теорема Матиясевича и модели Изинга-Поттса-Биггса

Определим модель Изинга-Поттса-Биггса (interaction model) на произвольном графе Γ следующим образом:

Определение 1. В каждой вершине v графа Γ зафиксируем некоторое значение $a(v)$ (для каждой вершины свое) из некоторого коммутативного кольца A с единицей, совокупность всех значений в вершинах назовем состоянием σ . Энергией состояния σ назовем величину $H(\sigma) = \prod i(\delta(vw))$, где произведение ведется по всем ребрам vw графа Γ (ребро vw соединяет вершины v и w), $\delta(vw) = a(v) - a(w)$ и $\forall b \in A \ i(b) = i(-b)$. Статсуммой назовем следующую величину - $Z_\Gamma = \sum_\sigma H(\sigma)$, где суммирование ведется по всем возможным состояниям σ .

Оказывается, что язык таких моделей является чрезвычайно удобным для изучения различных комбинаторных задач теории графов. Так в докладе будет рассказано новое доказательство теоремы Матиясевича, которая может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 1. (теорема Матиясевича) Рассмотрим граф Γ , хроматический полином этого графа - X_Γ , может быть вычислен с помощью потоковых полиномов - C_A , всех его остовных подграфов A следующим образом:

$$X_\Gamma(n) = \frac{(n-1)^{e(\Gamma)}}{n^{e(\Gamma)-v(\Gamma)}} \sum_A \frac{C_A(n)}{(1-n)^{e(A)}}$$

Более того, будет рассказано, как получать теоремы такого рода регулярным образом, например, будет рассказано «обращение» теоремы Матиясевича:

$$F_{\Gamma}(n) = n^{v(\Gamma)} C_{\Gamma}(n) = (n-1)^{e(\Gamma)} \sum_A \frac{n^{e(A)}}{(1-n)^{e(A)}} X_A(n)$$

Также будет рассказано о развитии полученной техники на примере теоремы 2 и ее связи с конволютивной формулой [4].

Теорема 2. *Рассмотрим граф Γ и n -модель Поттса (где $n = n_1 n_2 \dots n_k$), тогда статсумма этой n -модели Поттса может быть вычислена с помощью статсумм n_i -моделей Поттса ($i = 1 \dots k$) всех остовных подграфов A графа Γ .*

Литература.

1. Матиясевич Ю. В. Об одном представлении хроматического многочлена // Дискретный анализ. – 1977. – Т. 31. – С. 61-70.
2. Карпов Д. В. Теория графов // СПб.: Санкт-Петербургское отделение Мат. института им. В.А. Стеклова РАН. – 2017.
3. Biggs N. L. et al. Interaction models. – Cambridge University Press, 1977. – Т. 30.
4. Kook W., Reiner V., Stanton D. A convolution formula for the Tutte polynomial // arXiv preprint math/9712232. – 1997.