# Динамики систем эволюционных уравнений в частных производных

А.Г. Кушнер
Физический факультет МГУ

Семинар А.Т. Фоменко
Дифференциальная геометрия и приложения

16 ноября 2020 г.

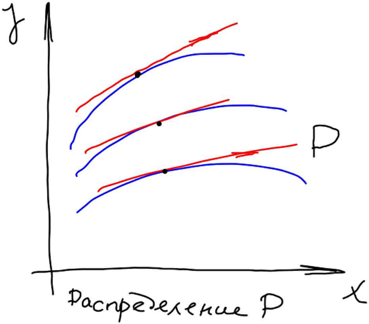
# План доклада

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \varphi\left(x, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial x^k}\right)}$$

1. Симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений
2. Потоки на пространствах решений ОДУ и конечномерные динамики
3. Примеры построения точных решений эволюционных уравнений в частных производных
4. Аттракторы эволюционных уравнений
5. Эволюционные системы уравнений
6. Неэволюционные уравнения математической физики
7. Численный метод на основе динамик

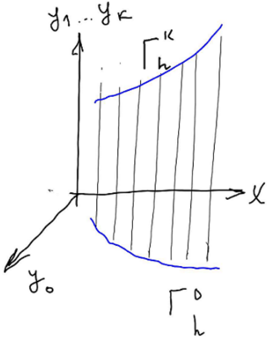
# Симметрии скалярных ОДУ

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$




$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = dy - f(x, y)dx$$

$$\boxed{y^{(k+1)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k)})}$$



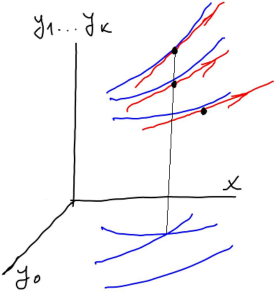

Пространство $k$-джетов $J^k(\mathbf{R})$: координаты $x, y_0, y_1, \dots, y_k$

$$\theta = [h]_a^k \in J^k(\mathbf{R})$$

$$x(\theta) = a, y_0(\theta) = h(a),$$

$$y_1(\theta) = h'(a), \dots y_k(\theta) = h^{(k)}(a).$$

$$\Gamma_h^k = \{y_0 = h(x), y_1 = h'(x), \dots, y_k = h^{(k)}(x)\}$$



Распределение P в J^k

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \dots + f \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$\omega_0 = dy_0 - y_1 dx,$$

$$\omega_1 = dy_1 - y_2 dx, \dots$$

$$\vdots$$

$$\omega_{k-1} = dy_{k-1} - y_k dx$$

$$\omega_k = dy_k - f dx$$

**Симметрия** ОДУ — диффеоморфизим $\Phi : J^k \to J^k$, сохраняющий распределение $P$: $\Phi_*(P) = P$, т.е. $\Phi_*(\mathcal{D}) = \lambda \mathcal{D}$ или эквивалентно

$$\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{ij} \omega_j \quad \text{или} \quad \Phi^*(\omega_i) \wedge \omega_0 \dots \wedge \omega_k = 0$$

**Инфинитезимальная симметрия** — векторное поле $X$, сдвиги вдоль которого являются симметриями ОДУ, т.е. $\Phi_t^*(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0$ для всех $i = 0 \dots k$.

$$\boxed{L_X(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0}$$

Инфинитезимальные симметрии ОДУ образуют алгебру Ли $\operatorname{Symm} P$.
Инфинитезимальные симметрии, сдвиги вдоль которых сохраняют каждую интегральную кривую распределения $P$ называются **характеристическими**.

**Теорема**

*Характеристические симметрии образуют идеал $\operatorname{Char} P$ в алгебре Ли $\operatorname{Symm} P$, т.е.*

- *если $X \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$ и $Y \in \operatorname{Symm} \mathrm{P}$, то $[X, Y] \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$;*
- *если $X \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$ и $f \in C^\infty(J^k)$, то $fX \in \operatorname{Char} \mathrm{P}$.*

Фактор-алгебра Ли $\boxed{\mathrm{Shuff\,P} := \mathrm{Symm\,P}/\mathrm{Char\,P}}$ называется алгеброй Ли **тасующих** симметрий ОДУ.

$$S = \sum_{i=0}^{k} a_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad a_i \in C^\infty(J^k)$$

## Теорема

*Всякая тасующая симметрия определяется одной функцией $\varphi \in C^\infty(J^k)$, которая называется производящей функцией:*

$$S = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{D}^i(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

$$\mathcal{D}^0 = \mathrm{id}, \quad \mathcal{D}^i = \underbrace{\mathcal{D} \circ \cdots \circ \mathcal{D}}_{i \text{ times}}$$

$$\boxed{\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}\right)}$$

$$\mathbf{y} = \left(y^1, \dots, y^n\right)^T, \mathbf{f} = \left(f^1, \dots, f^n\right)^T$$

$J^k := J^k(1; n)$ – пространство $k$-джетов функций $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$.
Координаты $x, y_i^j$ $(i = 0, \dots, k;\, j = 1, \dots, n)$.

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\substack{i=0,\dots,k-1 \\ j=1,\dots,n}} y_{i+1}^j \frac{\partial}{\partial y_i^j} + \sum_{j=1}^n f^j \frac{\partial}{\partial y_k^j}$$

$$\omega_i^j = dy_i^j - y_{i+1}^j dx, \quad \omega_k^j = dy_k^j - f^j dx \quad (i = 0, \dots, k-1; j = 1, \dots, n).$$

### Теорема

*Всякая тасующая симметрия системы ОДУ определяется одной вектор-функцией* $\boldsymbol{\varphi} = \left(\varphi^1, \dots, \varphi^n\right)$:

$$S = \sum_{\substack{i=0,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} \mathcal{D}^i(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial y_i^j}.$$

### Теорема

*Векторное поле* $S$ *является инфинитезимальной симметрией системы ОДУ тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{D}^{k+1}(\varphi^j) - \sum_{i=0,\dots,k} \mathcal{D}^i(\varphi^j) \frac{\partial f^j}{\partial y_i^j} = 0.$$

# Динамики эволюционных систем уравнений

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \varphi\left(x, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial x^k}\right)}$$

Пусть $\varphi(x, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k)$ — производящая вектор-функция тасующих симметрий системы ОДУ

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}\right).$$

Эта система ОДУ называется **конечномерной динамикой** системы эволюционных уравнений. Число $k+1$ называется **порядком** динамики

### Теорема

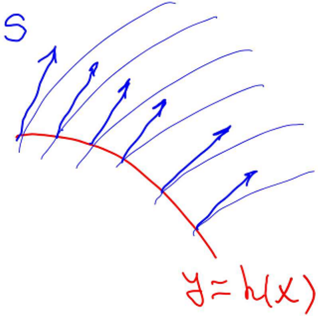
Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F = y_{k+1} - f(x, y_0, y_1, \dots, y_k) = 0$$

является динамикой эволюционного уравнения $u_t = \varphi(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$ тогда и только тогда, когда $[\varphi, F] = 0 \bmod \mathbf{DF}$, где $\mathbf{DF} = \langle F, D(F), D^2(F), \dots \rangle$ — дифференциальный идеал, порожденной функцией $F$, $D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots$ оператор полной производной по $x$ и

$$[\phi, F] = \sum_{i \geq 0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y_i} D^i(F) - \frac{\partial F}{\partial y_i} D^i(\phi) \right)$$

скобка Пуассона–Ли, продолженная в пространство джетов.




Пусть $\Phi_t$ сдвиг вдоль $S$ от $t = 0$ до $t$ и $\Gamma^k_{\mathbf{y}(x)} = \{\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x), \dots\}$ — $k$-график решения $\mathbf{y}(x)$ системы ОДУ.

**Теорема**

*Поверхность $\Phi_t\left(\Gamma^{(k)}_{\mathbf{y}(x)}\right) \subset J^k(2; n)$ является $k$-графиком решения эволюционного уравнения.*

Пространство начальных данных ОДУ в точке $x_0$: $\mathbf{R}^{n(k+1)}$.
Вместо векторного поля $S$ можно использовать поле

$$E = \sum_{\substack{i=0,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} \mathcal{D}^i(\overline{\varphi^j}) \frac{\partial}{\partial y_i^j}$$

**Первый способ**

Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x; \mathbf{a})$— решение системы ОДУ с начальным данными $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{a}_0, \mathbf{y}'(x_0) = \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{y}^{(k)}(x_0) = \mathbf{a}_k$. Применяя преобразование $\overline{\Phi}_t$ к точке $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k)$ (where $\mathbf{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$), мы получим однопараметрическое семейство решений системы ОДУ $\mathbf{y}(x; \overline{\Phi}_t(\mathbf{a}))$. Тогда функция $\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{y}(x, \overline{\Phi}_t(\mathbf{a}))$ является решением системы эволюционных уравнений с начальными условием $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{y}(x; \mathbf{a})$.

## Второй способ

Пусть $\Phi_t^*: C^\infty(J^k) \to C^\infty(J^k)$ — "антиувлечение" функций: $\Phi_t^*(f) := f \circ \Phi_t$.

$$\Gamma^k_{\mathbf{y}(x)} = \{\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}(x) = 0,\ \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}'(x) = 0, \dots,\ \mathbf{y}_k - \mathbf{y}^{(k)}(x) = 0\}.$$

Применив преобразование $\left(\Phi_t^{-1}\right)^*$ к этой системе, получим

$$\mathbf{F}^0(t, x, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k) = 0, \dots, \mathbf{F}^k(t, x, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k) = 0$$

Откуда находим

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{Y}_0(t, x), \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{Y}_1(t, x), \quad \dots, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{Y}_k(t, x).$$

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{Y}_0(t, x), \quad \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial x^j} = \mathbf{Y}_j(t, x)}$$

$$\boxed{u_t = u_{xx} + f(u)}$$

**Теорема**

*Уравнение КПП допускает динамики второго порядка вида $F := y_2 - A(y_0)y_1 - B(y_0)$ тогда и только тогда, когда*

$$f(u) = f_3 u^3 + f_2 u^2 + f_1 u + f_0,$$

*где $f_0, \dots, f_3 \in \mathbb{R}$.*

Рассмотрим случай $f_3 < 0$, т.е. $f_3 = -2q^2$. Динамика:

$$y'' + \left(3qy - \frac{f_2}{2q}\right) y' + q^2 y^3 - \frac{f_2}{2} y^2 - \frac{f_1}{2} y - \frac{f_0}{2} = 0.$$

Распределение P:

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} - \left( \left( 3qy_0 - \frac{f_2}{2q} \right) y_1 + q^2 y_0^3 - \frac{f_2}{2} y_0^2 - \frac{f_1}{2} y_0 - \frac{f_0}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$\omega_1 = dy_0 - y_1 dx,$$

$$\omega_2 = dy_1 + \left( \left( 3qy_0 - \frac{f_2}{2q} \right) y_1 + q^2 y_0^3 - \frac{f_2}{2} y_0^2 - \frac{f_1}{2} y_0 - \frac{f_0}{2} \right) dx.$$

Тасующие симметрии:

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \overline{\phi}\frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{D}(\overline{\phi})\frac{\partial}{\partial y_1}\\
=& \left(-3q^2y_0^3 + \frac{3}{2}f_2y_0^2 + \left(-3qy_1 + \frac{3}{2}f_1\right)y_0 + \frac{1}{2q}f_2y_1 + \frac{3}{2}f_0\right)\frac{\partial}{\partial y_0}\\
&\left(3q^3y_0^4 - 2qf2y_0^3 + \frac{1}{4q^2}(-6q^3f_1 + qf_2^2)y_0^2 + \frac{1}{4q^2}(qf_1f_2 - 6q^3f_0)y_0\right.\\
&\left.-3qy_1^2 + \frac{1}{4q^2}(6f_1q^2 + f_2^2)y_1 + \frac{1}{4q}f_0f_2\right)\frac{\partial}{\partial y_1}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
S_2 =& y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{D}(y_1)\frac{\partial}{\partial y_1}\\
=& y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + \left(-q^2y_0^3 + \frac{1}{2}f_2y_0^2 + \left(-3qy_1 + \frac{1}{2}f_1\right)y_0 + \frac{1}{2q}f_2y_1 + \frac{1}{2}f_0\right)\frac{\partial}{\partial y_1}.
\end{aligned}
$$

$$
[S_1, S_2] = 0.
$$

$$W = \begin{Vmatrix} \omega_1(S_1) & \omega_1(S_2) \\ \omega_2(S_1) & \omega_2(S_2) \end{Vmatrix}$$

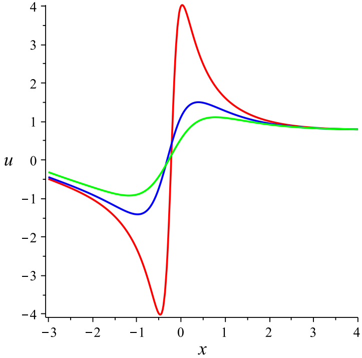
Рассмотрим область где $\det W \neq 0$. Тода вместо форм $\omega_1, \omega_2$ рассмотрим формы

$$\begin{Vmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{Vmatrix} = W^{-1} \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Vmatrix}.$$

Тогда $\varpi_i(S_j) = \delta_{i,j}$. Так как $[S_1, S_2] = 0$, то

$$d\varpi_i\,(S_1, S_2) = S_1(\varpi_i(S_2)) - S_2(\varpi_i(S_1)) - \varpi([S_1, S_2]) = 0.$$

$$d\varpi_i = 0 \Rightarrow \varpi_i = dH_i$$




$$\boxed{u_t = u_{xx} - 2u^3 + 1}$$

$$\phi = y_2 - 2y_0^3 + 1$$

Динамика:
$y'' + 3yy' + y^3 - \frac{1}{2} = 0$

$$y(x) = \frac{C_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\chi} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\left(\sqrt{3}C_2 + 1\right)\cos\chi + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\left(C_2 - \sqrt{3}\right)\sin\chi}{\sqrt[3]{2}\left(C_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\chi} - C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\sin\chi + e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi}\cos\chi\right)}$$

$\chi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{16}}x.$

# Уравнение реакции–диффузии с конвективным членом

$$\boxed{u_t + H(u)_x = u_{xx} + f(u)}$$

$$u_t = u_{xx} - (u+1)u_x + \frac{1}{8}u^3$$

Динамика: $F = y_2 - \frac{3}{4}y_0y_1 + \frac{1}{16}y_0^3$

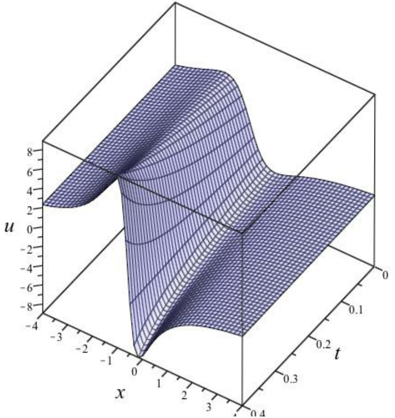
$$y(x) = -\frac{8(C_1x + C_2)}{C_1x^2 + 2C_2x + 2}$$

$$S = \left(-\frac{1}{4}y_0y_1 + \frac{1}{16}y_0^3 - y_1\right)\frac{\partial}{\partial y_0} + \left(-\frac{1}{4}y_1^2 - \frac{3}{4}y_0y_1 + \frac{1}{64}y_0^4 + \frac{1}{16}y_0^3\right)\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Сдвиг вдоль $S$:

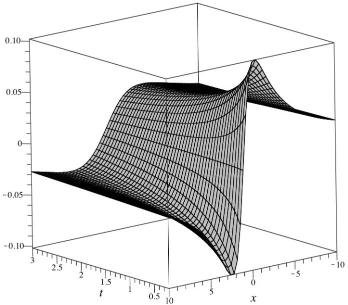
$$y_0 \mapsto \frac{8(ty_0^2 - 4y_1t + 4y_0)}{(t^2-2t)y_0^2 + 8ty_0 + 32 + (8t-4t^2)y_1},$$

$$y_1 \mapsto \frac{8((2t+t^2)y_0^4 + 8ty_0^3 - 8ty_1(2+t)y_0^2 - 32ty_0y_1 + 128y_1 + 16t^2y_1^2 + 32ty_1^2)}{((t^2-2t)y_0^2 + 8ty_0 - 4t^2y_1 + 8y_1t + 32)^2}$$




$$u(t,x) = -\frac{8(C_1(x-t)+C_2)}{2+((x-t)^2-2t)C_1+(2(x-t))C_2}$$

$$\boxed{u_t + uu_x = u_{xx} + f(u)}$$




$$u_t + uu_x = u_{xx} + \frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{3}bu^2$$

Динамика:
$$y'' - yy' + \tfrac{1}{9}y^3 + \tfrac{1}{3}by^2 = 0$$

$$y(x) = -\frac{3C_2 + 3b\exp(bx)}{C_1 + C_2x + \exp(bx)}.$$

$$u(t,x) = -\frac{3(b\exp(b(bt+x)) + C_2)}{C_1 + C_2bt + \exp(b(bt+x)) + C_2x}$$

# Уравнение Блэка–Шоулза

$$\boxed{u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} - rxu_x + ru}$$

$$F = y_1 - A(x)y_0 - B(x).$$

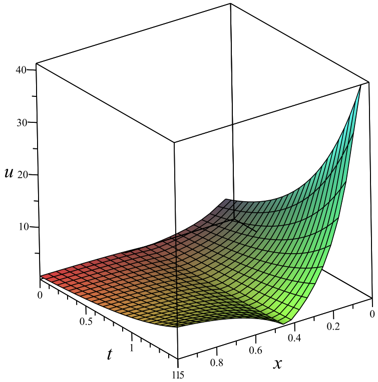
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}A''\sigma^2 x^2 + (A\sigma^2 x + \sigma^2 + r)xA' + A^2\sigma^2 x + Ar = 0, \\ \dfrac{1}{2}B''\sigma^2 x + (\sigma^2 + r)B' + \sigma^2(xA' + A)B = 0. \end{cases}$$

$$F = y_1 - \frac{1}{2\sigma^2 x}(\sigma^2 - 2r)y_0 - C_3 x^{-\frac{\sigma^2+2r}{\sigma^2}} - C_4$$

$$y(x) = C_5 x^{\frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}} - \frac{2\sigma^2(C_3 x^{-\frac{2r}{\sigma^2}} - C_4 x)}{\sigma^2 + 2r},$$

$$F = y_1 - \frac{1}{2\sigma^2 x}\left(\sigma^2 - 2r - C_1 \tan\left(\frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2}\right)\right) y_0.$$

$$y(x) = C_3 x^{\frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}} \cos\left(\frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2}\right).$$




$$u(t,x) = C_3 x^{\frac{\sigma^2 - 2r}{2\sigma^2}} \cos\left(\frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{C_1^2 + (\sigma^2 + 2r)^2}{8\sigma^2} t}.$$

$$\sigma = r = 1:$$

$$u(t,x) = \frac{e^{\frac{3}{2}t}}{\sqrt{2x}} \sqrt{\sin(\sqrt{3}\ln x) + 1}$$

# Обобщенное уравнение Рапопорта – Лиса

$$\boxed{u_t = A(u)_x + B(u)_{xx}}$$

- Движение грунтовых вод.
- Распределение тепла излучением на начальной фазе ядерного взрыва.
- Фильтрация политропного газа.
- Фильтрация двухфазной жидкости без учета капилярных сил $(B(u) = 0)$.
- Фильтрация двухфазной жидкости с учетом капилярных сил $(B(u) \neq 0)$.

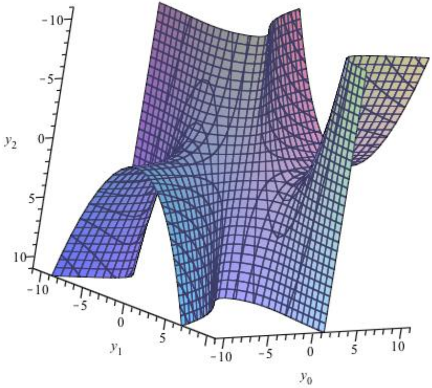
$$\phi = A'(y_0)y_1 + B''(y_0)y_1^2 + B'(y_0)y_2.$$

### Теорема

*Пусть* $B'(u) \neq 0$*, тогда уравнение Рапопорта – Лиса имеет следующие конечномерные динамики:*

- *порядка 1:* $y_1$ *и* $B'(y_0)y_1 + A(y_0) + \alpha y_0 + \beta$;
- *порядка 2:* $B'(y_0)y_2 + B''(y_0)y_1^2 + (A'(y_0) + \alpha)y_1$;
- *порядка 3:*
  $B'(y_0)y_1y_3 - B'(y_0)y_2^2 + B'''(y_0)y_1^4 + 2B''(y_0)y_1^2y_2 + A''(y_0)y_1^3.$

*Здесь* $\alpha$ *и* $\beta$ *— произвольные постоянные.*




Динамика второго порядка при $A(y) = y^2$, $B(y) = y^3$ и $\alpha = -90$.

Пусть функция $G$ определена на пространстве $J^n(\mathbb{R})$, т.е. $G = G(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Обозначим

$$G[u] = G\left(x, u(t,x), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial x^n}\right).$$

**Определение**

*Скажем, что динамика $\mathcal{E}$ является аттрактором для решения $u(t,x)$ эволюционного уравнения $u_t = \phi(u, u_x, u_{xx})$, если*

$$\lim_{t \to +\infty} F[u] = 0.$$

$$e := \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + a, \quad p := \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + b, \quad q := \frac{\partial \phi}{\partial y_2}.$$

## Теорема

*Пусть* $u(t,x)$ *— решение эволюционного уравнения и* $e[u], p[u], q[u]$ *— ограниченные функции. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:*

$$e[u] \leq -\beta < 0 \quad \text{и} \quad q[u] \geq \alpha > 0 \tag{1}$$

*при некоторых постоянных* $\alpha$ *и* $\beta$*. Тогда динамика* $\mathcal{E}$ *является аттракторм для решения* $u(t,x)$*.*

## Следствие

*При выполнении условий теоремы справедливо неравенство*

$$|F[u]| \leq Ce^{-\beta t},$$

*где* $C$ *— некоторая положительная постоянная.*

# Глубокая фильтрация: поток суспензии в пористой среде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = h(v)u. \end{cases}$$

Производящая вектор-функция $(u^1 = u, u^2 = v)$:

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1^1 - h(y_0^2)y_0^1 \\ h(y_0^2)y_0^1 \end{pmatrix}.$$

Динамики первого порядка:

$$\begin{cases} y_1^1 = f^1(y_0^1, y_0^2), \\ y_1^2 = f^2(y_0^1, y_0^2). \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + f^1(y_0^1, y_0^2)\frac{\partial}{\partial y_0^1} + f^2(y_0^1, y_0^2)\frac{\partial}{\partial y_0^2}$$

$$
\begin{aligned}
S =&\varphi^1 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \varphi^2 \frac{\partial}{\partial y_0^2} \\
&= \left(-y_1^1 - h(y_0^2) y_0^1\right) \frac{\partial}{\partial y_0^1} + f(y_0^2) y_0^1 \frac{\partial}{\partial y_0^2} \\
&= \left(-f^1(y_0^1, y_0^2) - h(y_0^2) y_0^1\right) \frac{\partial}{\partial y_0^1} + h(y_0^2) y_0^1 \frac{\partial}{\partial y_0^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
y_0^1 h(y_0^2) \dfrac{\partial f^1}{\partial y_0^1} - \left(f^2 + y_0^1 h(y_0^2)\right) \dfrac{\partial f^1}{\partial y_0^2} - h(y_0^2) f^1 - y_0^1 h'(y_0^2) f^2 = 0, \\
\left(f^1 + y_0^1 h(y_0^2)\right) \dfrac{\partial f^2}{\partial y_0^1} - y_0^1 h(y_0^2) \dfrac{\partial f^2}{\partial y_0^2} + h(y_0^2) f^1 + y_0^1 h'(y_0^2) f^2 = 0.
\end{cases}
$$

Случай линейной функции $h$: $h(y_0^2) = \alpha y_0^2 + \beta$.

$$
\begin{cases}
f^1 = (\delta - \alpha(y_0^1 + y_0^2))y_0^1, \\
f^2 = \dfrac{1}{\beta + \xi - \alpha y_0^1}\left((\beta + \xi - \alpha y_0^1)^2 H\left(\dfrac{\alpha y_0^2 + \beta}{\alpha(\beta + \xi - \alpha y_0^1)}\right)\right. \\
\qquad \left. - y_0^1(\alpha y_0^2 + \beta)(\xi - \alpha(y_0^1 + y_0^2))\right)
\end{cases}
\tag{2}
$$

Положим $\alpha = -1, \beta = 1, \delta = \xi = 0.$

$$
\begin{cases}
y^1(x) = \dfrac{C_2}{\exp(C_1 \exp x - x - 1) - C_2}, \\
\\
y^2(x) = \dfrac{(C_1 \exp x - 1)\exp(C_1 \exp x - 1) + C_2 \exp x}{C_2 \exp x - \exp(C_1 \exp x - 1)},
\end{cases}
$$

$$
S = -y_0^1(1 + y_0^1)\frac{\partial}{\partial y_0^1} + y_0^1(1 - y_0^2)\frac{\partial}{\partial y_0^2}
$$

$$
\Phi_t : (x, y_0^1, y_0^2) \longmapsto \left(x, \frac{y_0^1}{e^t(1 + y_0^1) - y_0^1}, -\frac{e^t((e^{-t} - 1)y_0^1 - y_0^2)}{e^t(1 + y_0^1) - y_0^1}\right)
$$

$$\begin{cases} u(t,x) = \dfrac{C_2 e^{x+1}}{e^{C_1 x+t} - C_2 e^{x+1}}, \\[2ex] v(t,x) = -\dfrac{C_2 e^{x+1} + (C_1 e^x - 1) e^{C_1 e^x + t}}{e^{C_1 x+t} - C_2 e^{x+1}}. \end{cases}$$

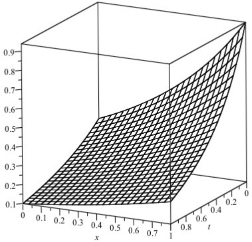



Рис. : График функции $u$.

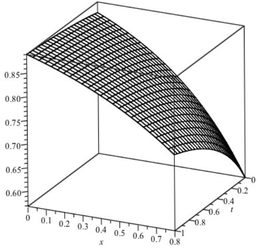



Рис. : График функции $u$.

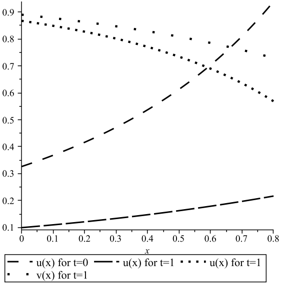



Рис. : Эволюция насыщенности $u(x)$ и осадка $v(x)$ при изменении времени от $t = 0$ до $t = 1$

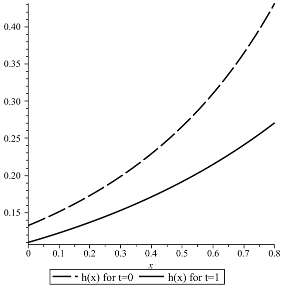



Рис. : Эволюция коэффициента фильтрации $h$ от $t = 0$ до $t = 1$.

$$\boxed{u_{tt} = f(x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, u_{txx}, u_{xxx}, \dots)}$$

$$\boxed{u_{tt} + 2b(x)u_{tx} + c(x)u_{xx} + h(x)u_t + g(x)u_x + f(x) = 0}$$

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = -2b(x)v_x - c(x)u_{xx} - h(x)v - g(x)u_x - f(y). \end{cases}$$

Производящая вектор-функция:

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^2 \\ -2b(x)y_1^2 - c(x)y_2^1 - h(x)y_0^2 - g(x)y_1^1 - f(x) \end{pmatrix}$$

Телеграфное уравнение:

$$\boxed{u_{tt} - u_{xx} = au + bu_t + c}$$

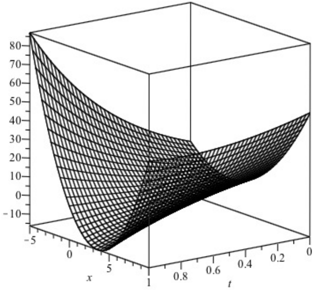
Динамика:

$$\begin{cases} y_2^1 = \dfrac{2b\alpha - (x+\beta)\alpha^2}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^1 - \dfrac{4\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^2, \\ y_2^2 = -\dfrac{4a\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^1 - \dfrac{2b\alpha + \alpha^2(x+\beta)}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = \dfrac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \\ y^2(x) = \dfrac{1}{8\alpha} \left( x(C_2\beta - C_3)(2\beta + x)\alpha^2 + (8C_1 + 2bx^2 C_2 + 4bC_3 x)\alpha - 32 \left( a + \dfrac{b^2}{4} \right) C_2 x \right) . \end{cases}$$

$$S = y_0^2 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \frac{(x^2-20)(y_0^1+y_0^2)+(x+2)y_1^1+x^2-20+4y_1^2}{x^2-20} \frac{\partial}{\partial y_0^2} + y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1^1} + (y_1^1+y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_1^2}.$$

$$u(t,x) = -1 + \frac{1}{10}\left(\frac{5}{2}x^2 + 5 + (10x+1-t)\sqrt{5}\right) e^{-\frac{t}{2}(\sqrt{5}-1)} +$$
$$+ \frac{1}{10}\left(\frac{5}{2}x^2 + 5 + (-10x-1+t)\sqrt{5}\right) e^{\frac{t}{2}(\sqrt{5}+1)}$$



Уравнение Гельмгольца

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = ku + g(x)}$$

$$g(x) = g_2 x^2 + g_1 x + g_0$$

Динамика 1:

$$\begin{cases} y_2^1 = \dfrac{y_1^1}{x+\alpha} + \dfrac{2g_2\alpha - g_1}{k(x+\alpha)}, \\ y_2^2 = \dfrac{y_1^2}{x+\alpha} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = \dfrac{1}{2k}\left((C_3x^2 + 2C_3x\alpha + 2C_4)k + 2x(-2g_2\alpha + g_1)\right), \\ y^2(x) = C_1 + C_2(x+\alpha)^2. \end{cases} \tag{4}$$

Динамика 2:

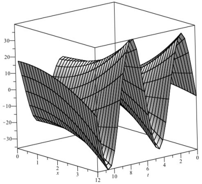
$$\begin{cases} y^1_2 - \dfrac{\beta^2(x+\alpha)y_1 + 4\beta y_1^2 + 32g_2}{(x+\alpha)^2\beta^2 + 16k} - \dfrac{(2g_2\alpha - g_1)(x+\alpha)\beta^2}{k((x+\alpha)^2\beta^2 + 16k)} = 0, \\ y^2_2 + \dfrac{4\beta k y_1 - \beta^2(x+\alpha)y_1^2 - \beta(8g_2 x + 4g_1)}{(x+\alpha)^2\beta^2 + 16k} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = & \dfrac{1}{2}C_4 x^2 + C_5 x + C_6, \\ y^2(x) = & \dfrac{1}{8k\beta}\left(x((C_4\alpha - C_5)k - 2\alpha g_2 + g_1)(x+2\alpha)\beta^2 \right. \\ & \left. +8C_3\beta k + 32kx(C_4 k - 2g_2)\right), \end{cases}$$

$$u_{tt} + u_{xx} = -u + x.$$

$$S = y_0^2 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \frac{x^2 - x y_0^1 - y_1^1 + 1}{x} \frac{\partial}{\partial y_0^1} + y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1^1} + (1 - y_1^1) \frac{\partial}{\partial y_1^2}$$

$$u(t,x) = \left( \frac{1}{2x} \left(2x^2 \sin^2 t + (4x^3 + xt) \sin t \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2 \cos t \left( x^2 \cos t - \frac{1}{2} x^3 + (2t+1)x \right)\right)\right).$$

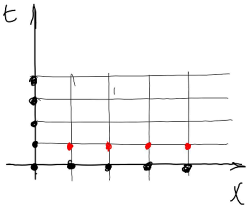


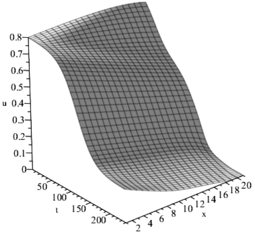
$$\boxed{u_t = A(u)_x + B(u)_{xx}}$$

Начально-краевая задача: $u|_{t=0} = h(x), \qquad u|_{x=0} = g(t)$

Динамика 3-го порядка:

$B'(y_0)y_1y_3 - B'(y_0)y_2^2 + B'''(y_0)y_1^4 + 2B''(y_0)y_1^2y_2 + A''(y_0)y_1^3 = 0$



- Ахметзянов А.В.
- Горинов А.А.
- Дужин С.В.
- Кругликов Б.С.
- Лычагина О.В.
- Лычагин В.В.
- Матвийчук Р.И.