О геометрических задачах теории шарнирных конструкций

•Ковалёв Михаил Дмитриевич

•МГУ им. М.В.Ломоносова
• mdkovalev@mtu-net.ru

У инженеров

- Механизм – конструкция, допускающая непрерывное движение. Служит для передачи и преобразования движений. Теория механизмов.
- В противном случае конструкция называется фермой. Фермы мостов. Строительная механика.

Структура конструкции, граф $G(V, E)$

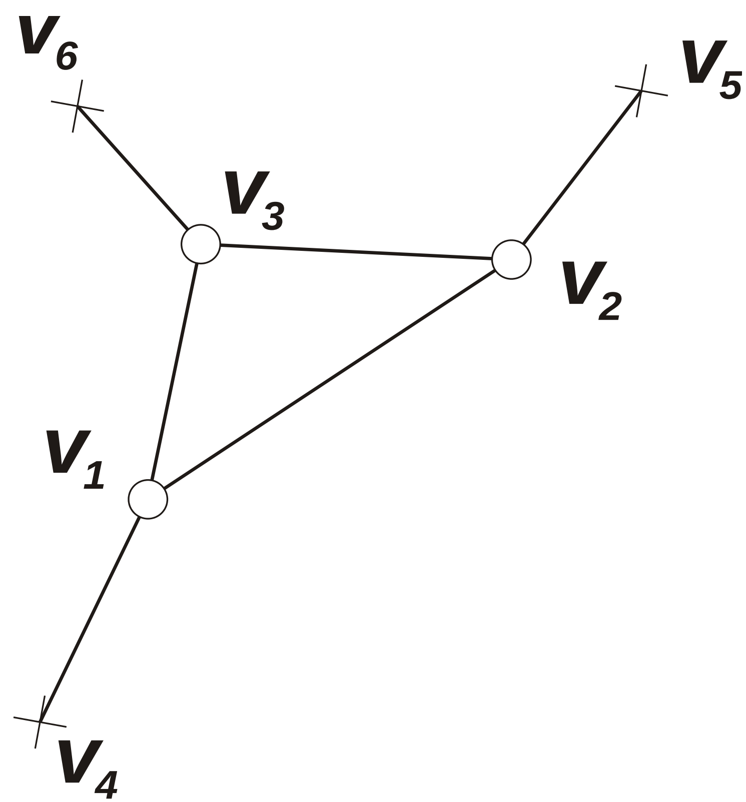
- Конструкция состоит из рычагов (прямолинейных стержней), имеющих на концах шарниры, и соединённых между собой и с некоторыми точками плоскости этими шарнирами.
- Шарниры могут быть двух сортов: свободные (кружочки) и закреплённые (крестики).
- Шарнир допускает все возможные вращения смежных ему рычагов в плоскости.

.

Шарнирная структурная схема (ШСС)

- а) G(V,E) конечный связный граф без петель и кратных рёбер
- б) вершины крестики смежны лишь вершинам кружочкам,
- в) подграф графа G(V,E) на вершинах кружочках связен,

.



В теории механизмов

- "57. Кинематическая схема механизма: структурная схема механизма с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа механизма"

Формализация основных понятий

- Закреплённая шарнирная схема (ЗШС)

это ШСС, для которой заданы положения закреплённых шарниров в плоскости, причём разным закреплённым шарнирам отвечают различные точки плоскости.

- Кинематическая шарнирная схема (КШС): это ЗШС плюс набор *d* квадратов длин рычагов.

Задание ЗШС определяет

- Два многомерных пространства параметров: R^{2m} и R^r, m – число свободных шарниров, r – число рычагов.

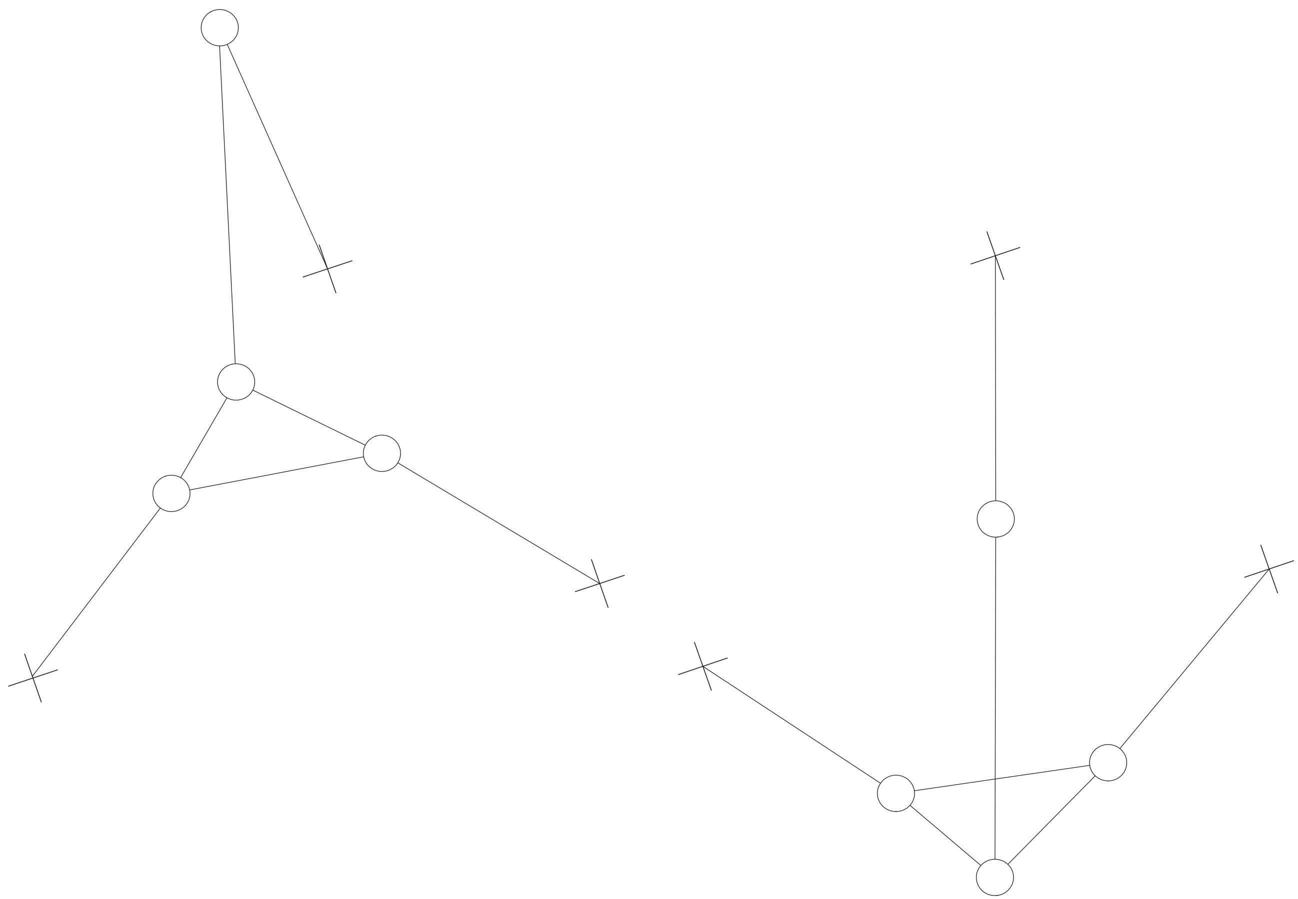
  И отображение F одного из них в другое, называемое рычажным. Оно сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов.

$$F: R^{2m} \to R^r, \quad d_{ij} = (p_i - p_j)^2, \quad ij \in E.$$

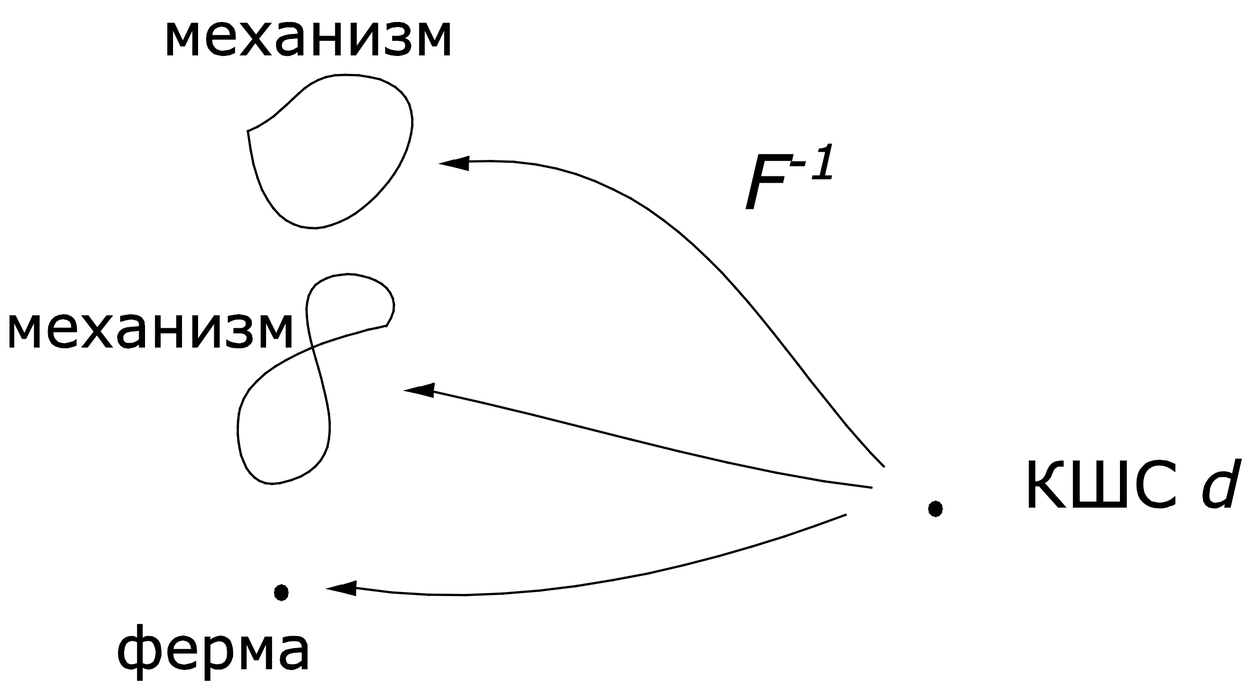
Определение механизма

- Конфигурационное пространство механизма – есть неодноточечная компонента связности полного прообраза $F^{-1}(d)$.
- Одноточечным компонентам связности $F^{-1}(d)$ отвечают фермы
- Точку $p \in R^{2m}$ называем шарнирником. Это либо ферма, либо определённое положение механизма.

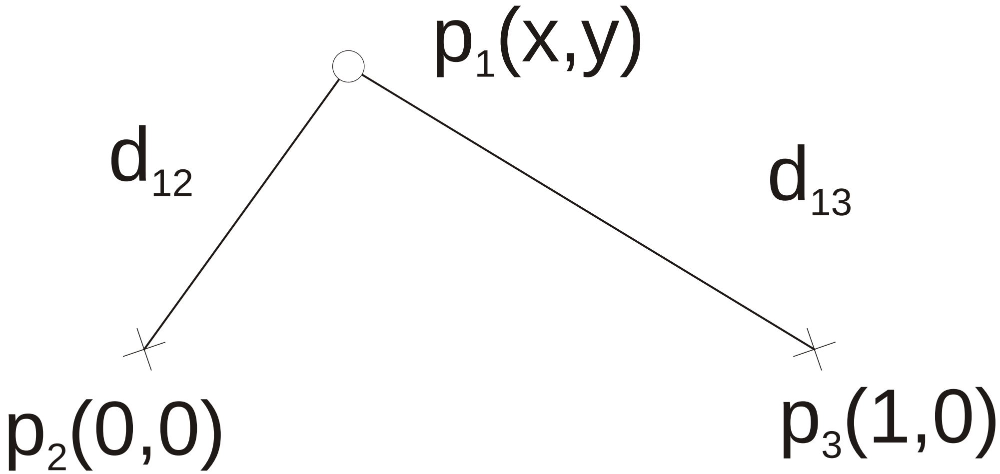
Левая сборка - механизм, правая - ферма.



Прообразы при рычажном отображении



Простейший пример рычажного отображения



$$d:\ \begin{cases} d_{12}=x^2+y^2 \\ d_{13}=(x-1)^2+y^2 \end{cases}$$

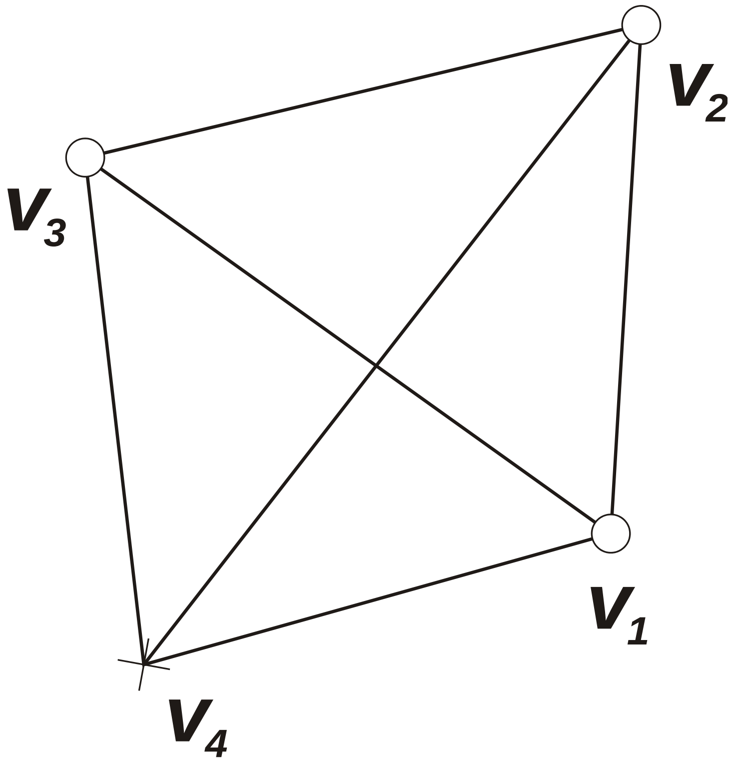
$$|dF|=2^2\begin{vmatrix} x & y \\ x-1 & y \end{vmatrix}=4y.$$

У отвлечённых математиков

- Конструкция предыдущего примера называется шарнирным механизмом, а его конфигурационное пространство состоит, вообще говоря, из двух точек.
- Удобство этого для математиков состоит в том, что конфигурационное пространство КШС всегда является алгебраическим множеством, в отличии от его компоненты связности.

Правильные и изостатические ЗШС и ШСС.

- Пусть ***m*** – число свободных шарниров, ***n –*** число закреплённых шарниров, ***r*** – число рычагов ШСС.
- Если $\max Rank\left(dF(\mathbf{p})\right) = r$ ШСС, то ЗШС и её ШСС называется правильной.
- Если вдобавок ***r = 2m,*** то ЗШС и ШСС –изостатические.
- На рисунке ***r = 6, m =3, n = 1, r = 2m. ШСС не изостатическая.*** $\max Rank\left(dF(\mathbf{p})\right) = 5$



ВОПРОС 1.

- Рассматриваем ЗШС в R^2, и отвечающее ей рычажное отображение F. Пусть ранг дифференциала $dF(p)$ равен l на множестве $M_l \subset R^{2m}$. В известных примерах множество M_l в случае его положительной размерности является неограниченным.

- Всегда ли это так?

Один случай

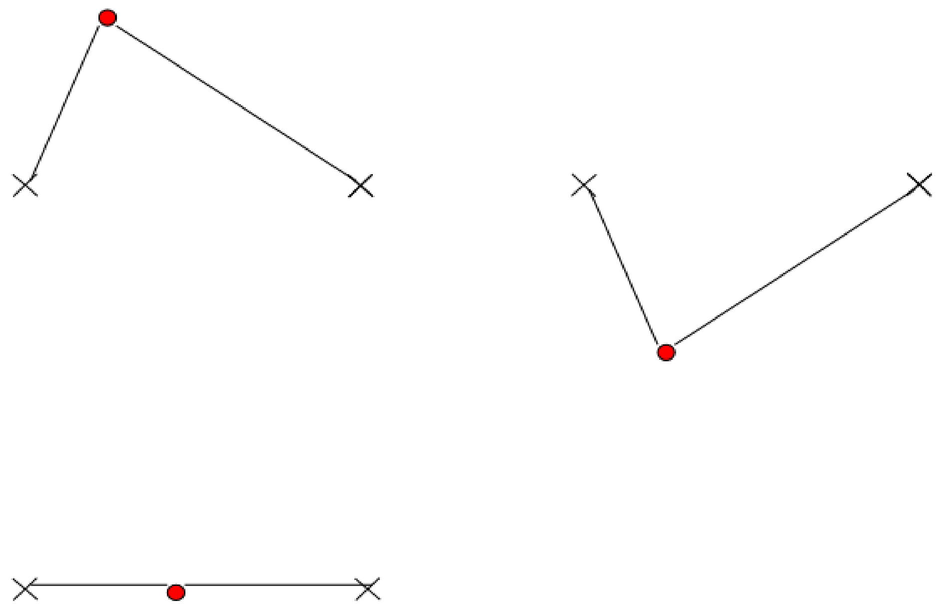
- Теорема. *Если ЗШС в* R^d *имеет не более d+1 закрепленных шарниров, находящихся в общем положении, то множество* M_l *неограничено тогда и только тогда, когда его размерность положительна.*

Вопрос 2

- Непременно ли в множестве минимального ранга рычажного отображения есть шарнирник с хотя бы одним рычагом нулевой длины?
- Для правильных ЗШС в плоскости это так. Хотя в этом множестве могут быть и шарнирники со всеми рычагами ненулевой длины.

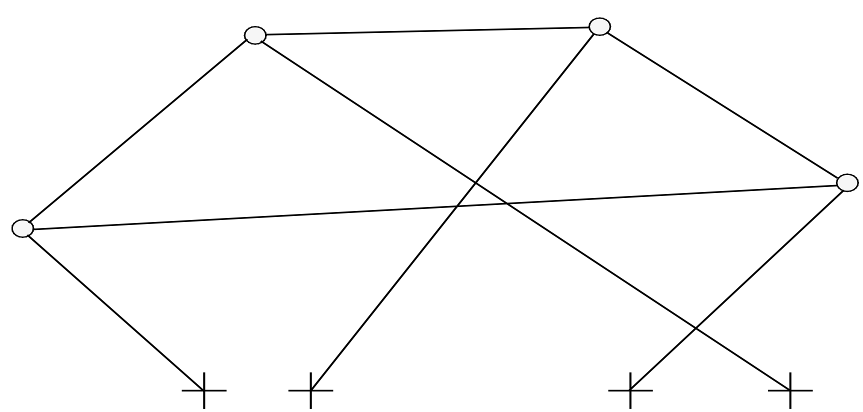
Вопрос 3

- Существует ли геометрически устойчивая ферма, собираемая единственным способом?
- Есть ли внутри образа $F(R^{2m})$ однократные
- точки?



Два результата автора

- Построен пример устойчивой распрямлённой шарнирной фермы.
- Обнаружена неустойчивая шарнирная ферма, устойчивая по «шевелению» длины каждого рычага в отдельности.



- Наш вопрос связан с топологическим вопросом о существовании квадратичного отображения «на» всё пространство, имеющего степень 0. Этот вопрос в настоящее время решён, причём отрицательно, лишь в размерностях 1,2 и 3. И положительно в размерностях больших 4.

Геометрическая устойчивость КШС и шарнирников

- КШС $\mathbf{d}$ устойчива, если $\mathrm{d} \in \operatorname{Int} F(R^{2m}) = C.$
- Шарнирник p устойчив, если для любой $W(p) \subset R^{2m}$

$$\exists U(d), \quad \text{что} \quad F(W(p)) \supset U(d)$$

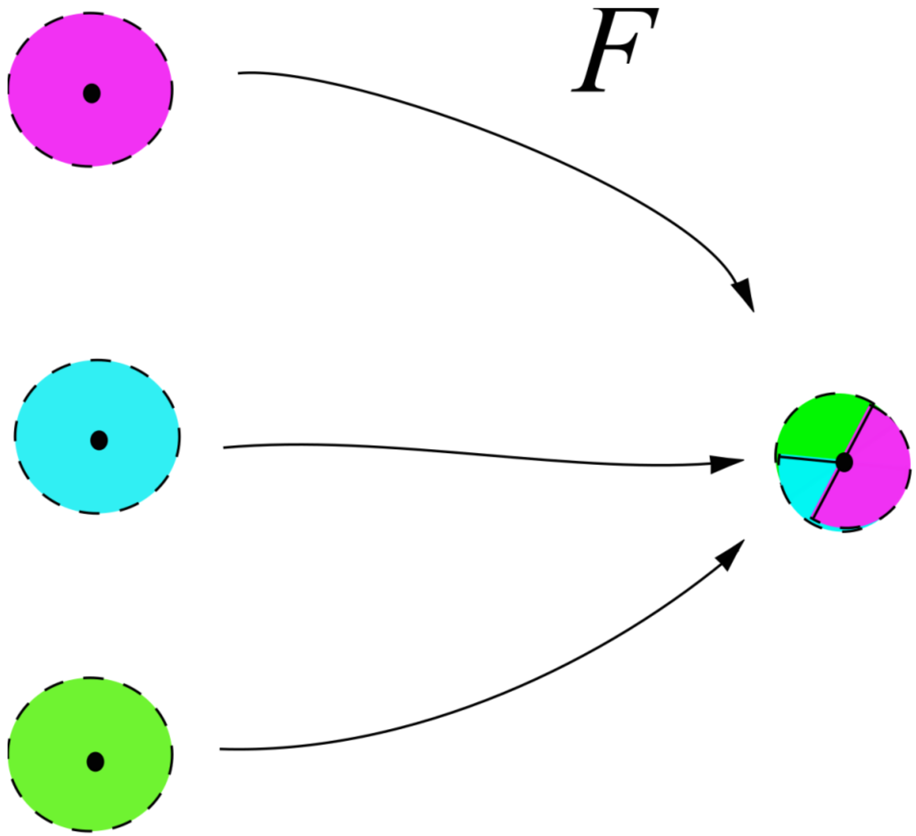
- Здесь

$$F(p) = d.$$

Вопрос 4

- *Существует ли геометрически устойчивая КШС, которой не отвечает геометрически устойчивых шарнирников?*

Геометрия вопроса 4



Вопрос 5

- *Если шарнирная ферма устойчива при неизменных точках закрепления, то непременно ли она будет устойчива и относительно малых "шевелений" точек её закрепления?*

Основной комбинаторный вопрос в трёхмерном случае

- Реализации графа G без закреплённых вершин в плоскости.
- Если для какого-либо шарнирника $p \in R^{2m}$ строки матрицы $dF(p)$ дифференциала рычажного отображения, отвечающие некоторому набору рёбер графа G (рычагов), линейно независимы, то этот набор рёбер называем независимым в графе G .

Теорема(Поллячек-Гейрингер, Ламан)

- Рёбра графа G в R^2 независимы тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условию: для любой непустой совокупности E рёбер графа G, с числом рёбер в ней $| E |$, число $|V|$ инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству $|E| \leq 2|V| - 3$.

Вопрос 6

- Найти критерий независимости рёбер графа в R^3.

Вопрос 7

- Является ли произвольное связное компактное полуалгебраическое множество плоскости множеством положений некоторого шарнира плоского шарнирного механизма?

Связанные популярные вопросы

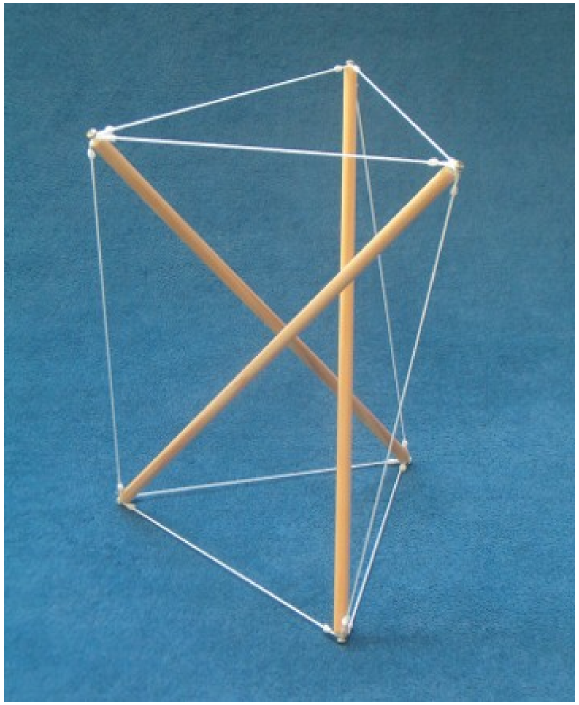
- Задача о «складном метре». Решена в 2004, Г.Рот, Р.Коннелли, Э.Демайн. Усовершенствование решения Илеаной Стрейню.
- Задача об однозначной определённости (global rigidity) незакреплённого шарнирника с точностью до изометрий пространства.
- Задача о сверхопределённости (universal rigidity).

Эти вопросы решают для типичных шарнирников

- Типичным называют шарнирник (generic framework) , координаты шарниров которого не удовлетворяют никакому алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами.
- В одномерном случае типичный циклический шарнирник определён. Шарнирник, у которого попарно совпадают длины смежных рычагов, не определён однозначно.

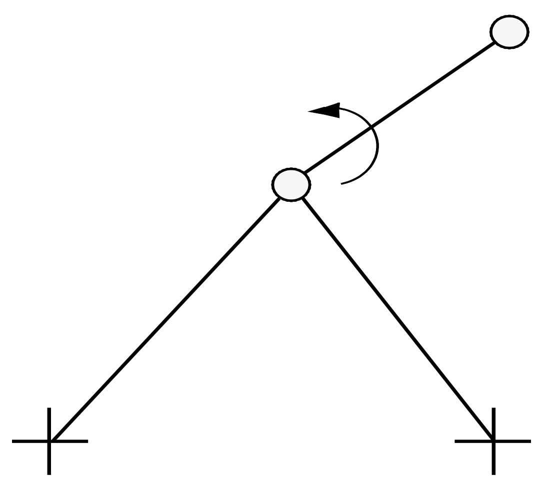
Более общее направление

- Исследование тех же вопросов длянапряжённосвязанных конструкций (tensegrity frameworks).

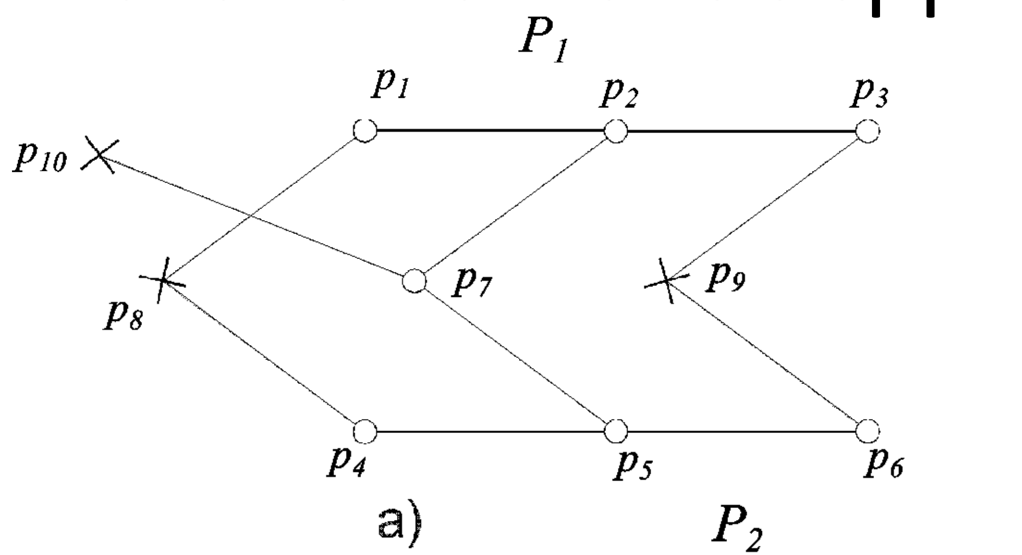


Шарнирная структурная схема (ШСС) механизма

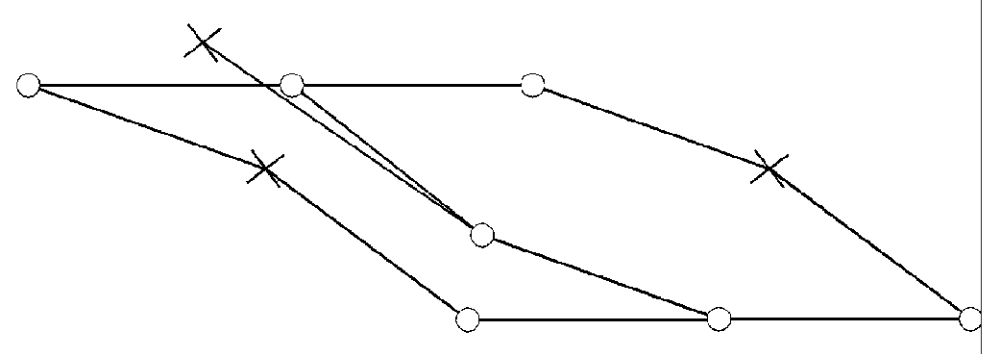
- г) условие, вытекающее из подвижности свободных шарниров, из него следует, например, что каждый кружочек смежен не более чем одному крестику



Механизм с переменным числом степеней свободы



а)



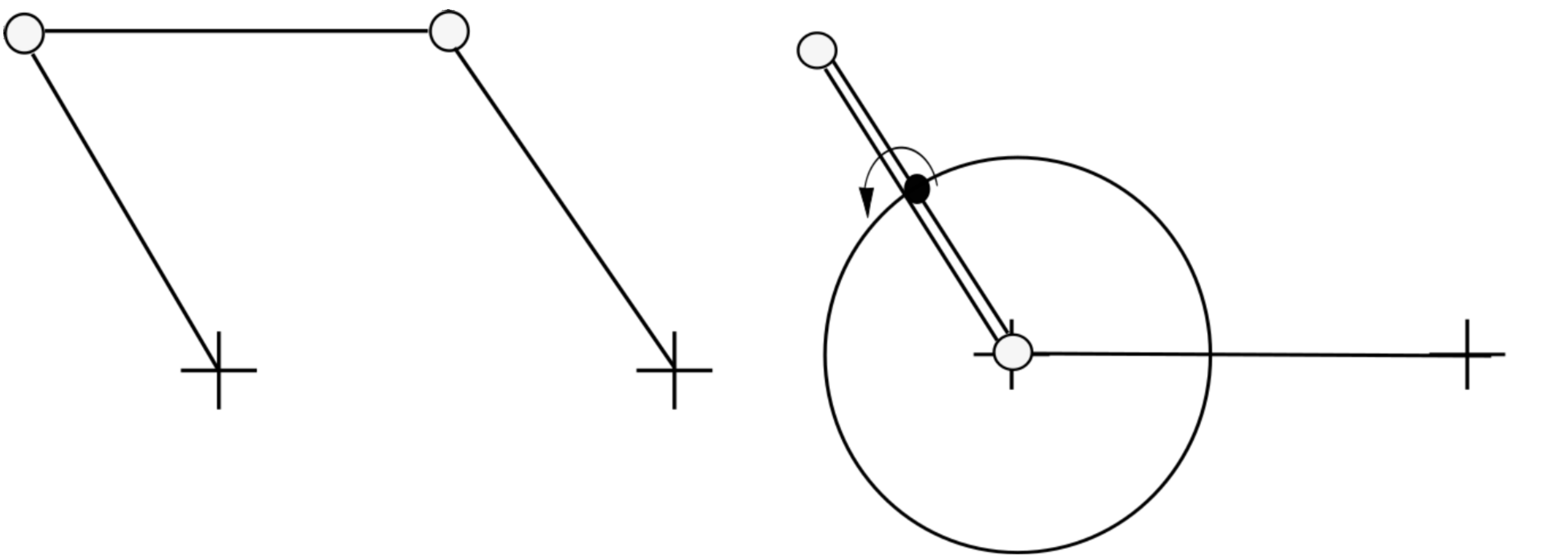
б)

Механизм с переменным числом степеней свободы

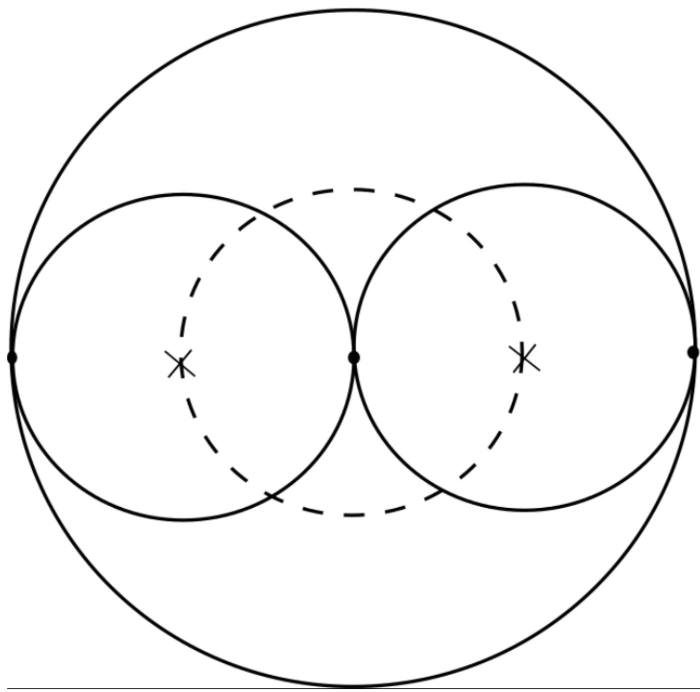
Замирающие шарниры

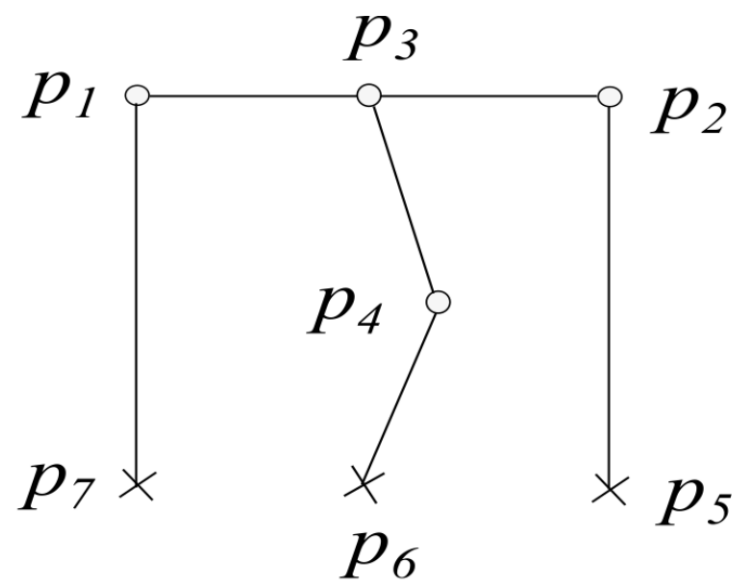
- Механизмы класса Q_1 – множество положений каждого свободного шарнира одномерно.
- В механизме из класса Q_1 назовём шарнир p_i *замерающим*, если возможно непрерывное движение механизма, когда шарнир p_i покоится.

Шарнирный ромб. Замирающие шарниры.



Пример механизма, имеющего в каждом своём положении замерший шарнир





Приводимость конфигурационного пространства

- Подмножество $M \subset R^n$ называем *неприводимым*, если его алгебраическое замыкание неприводимо, и *приводимым*, если его алгебраическое замыкание приводимо.
- Множество V приводимо тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены f и g, что произведение fg=0 на V, но ни один из этих многочленов не обладает таким

Две теоремы

- **Теорема 1.** *Если для механизма из класса* $\boldsymbol{Q_1}$ *имеется замирающий шарнир, то его конфигурационное пространство приводимо.*
- **Теорема 2.** *Если конфигурационное пространство шарнирного механизма неприводимо и размерностно однородно (то есть имеет одинаковую местную размерность в каждой своей точке), то и множество положений каждого шарнира механизма размерностно однородно.*

Связь размерностей конфигурационного пространства механизма и его проекций

- **Теорема 3.** *Конфигурационное пространство шарнирного механизма класса* $\boldsymbol{Q_1}$ *, у которого имеется множество замерших шарниров, разбивающее множество свободных шарниров на k компонент связности, и нет множества замерших шарниров, разбивающих множество свободных шарниров на более чем k компонент связности, имеет размерность равную k.*

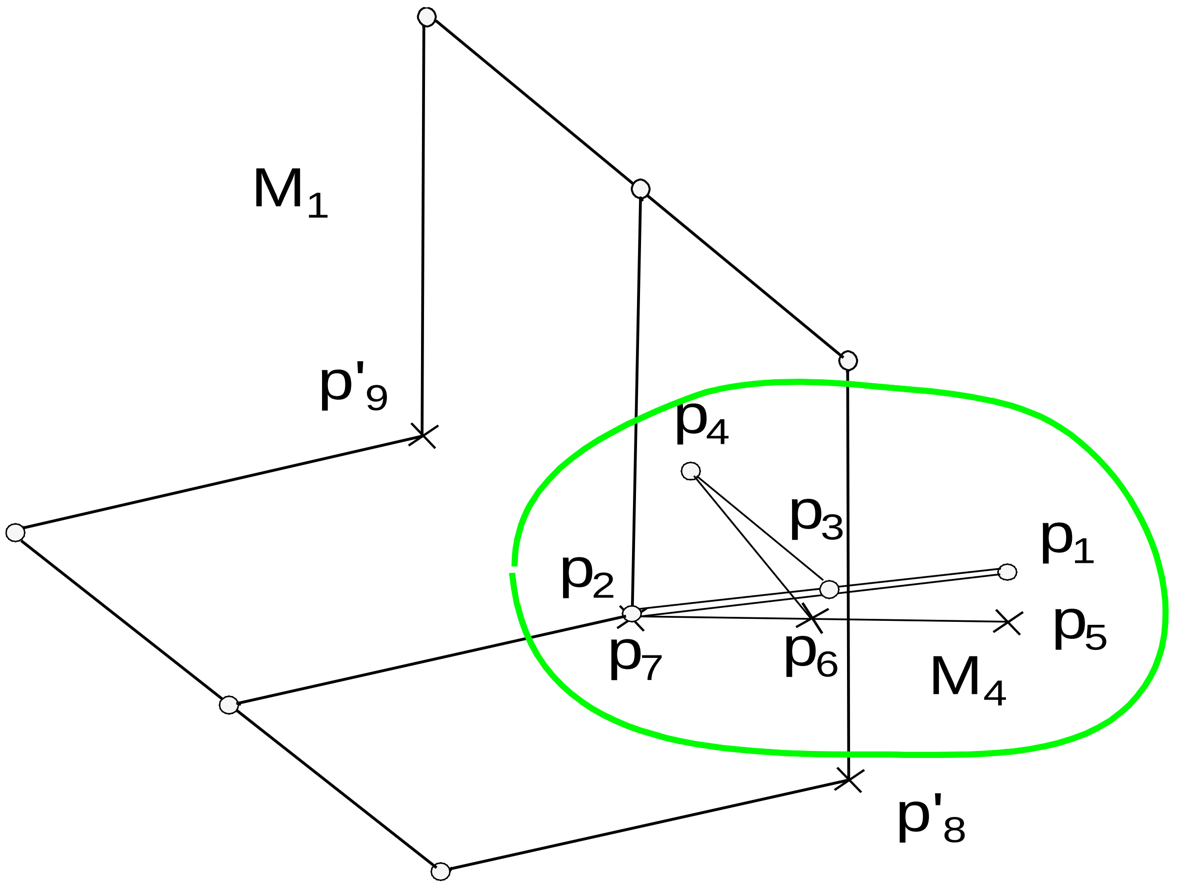
Связь размерностей конфигурационного пространства механизма и его проекций

- **Теорема 4.** *Конфигурационное пространство механизма класса* $\boldsymbol{Q_1}$ *одномерно в том и только том случае, когда у механизма либо нет замирающих шарниров, либо ни одно из множеств замерших шарниров не разбивает множества подвижных шарниров на несколько компонент связности.*

Теорема о передаче движения

- ***Теорема 5.*** *У механизма класса* $\mathbf{Q_1}$ *без замирающих шарниров, в каждом за исключением конечного числа своих положений ведущий шарнир осуществляет однозначную передачу движения ведомому шарниру. В конечном числе положений, передача движения может происходить не единственным, но конечным числом способов.*

Пример механизма класса Q_1 с конфигурационным пространством размерности три и четыре.



Вопрос

- *Возможен ли плоский шарнирный механизм с двумерным в любой своей части конфигурационным пространством, каждый шарнир которого движется с одной степенью свободы?*

Пример, дающий положительный ответ на вопрос

- Он получается отбрасыванием двух параллелограммов из механизма предыдущего примера – по одному параллелограмму из механизмов M_1 и M_2 .
- Этот механизм имеет две степени свободы в каждом своём положении: и когда имеется один замерший шарнир, и когда замерших шарнира два.

Подробнее ознакомиться с этим кругом вопросов можно по вышедшей в прошлом году моей книге