УДК 514.745.82

НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

М. М. Жданова

1. Введение. Основные понятия. Рассматриваются полиномы $f : \mathfrak{G}^* \to \mathbb{R}$ на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Множество таких полиномов со стандартной скобкой Пуассона $\{;\}$ образует алгебру Ли, называемую алгеброй Ли–Пуассона [1]. Говорят, что полиномы f и g находятся в инволюции, если их скобка Пуассона равна нулю: $\{f, g\} = 0$. Коммутативный набор полиномов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ называется полным, если $k = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{G} + \operatorname{ind} \mathfrak{G})$.

Согласно доказанной С. Т. Садэтовым [2] гипотезе Мищенко–Фоменко [3], *на двойственном пространстве к любой конечномерной вещественной алгебре Ли существует полный инволютивный набор полиномов.* Для случая редуктивной алгебры Ли эта гипотеза была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [3]. Исходя из этой теоремы они доказали, что на компактных многообразиях некоммутативная интегрируемость эквивалентна коммутативной. Более наглядное и геометрическое доказательство теоремы С. Т. Садэтова получено А. В. Болсиновым в [1].

Цель работы — найти полные инволютивные наборы полиномов для алгебр Ли вида полупрямой суммы $\mathfrak{G} = \mathrm{su}(n) +_\rho \mathbb{C}^n$, где $\rho : \mathrm{su}(n) \to \mathrm{gl}(\mathbb{C}, n)$ — представление минимальной размерности.

Набор полиномов для алгебр вида $\mathrm{so}(n) + \mathbb{R}^n$ (где полупрямая сумма берется по представлению минимальной размерности) был получен А. В. Болсиновым в [1].

Теорема 1 (А.В. Болсинов). *Функции*

$$v_1, \ldots, v_n \quad \textit{и} \quad f_{k,\lambda}(M, v) = \mathrm{Tr}(|v|^2 \mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)}(M + \lambda B))^k, \quad k = 2, 4, \ldots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

где B — произвольный элемент $\mathrm{so}(n)$, а проекция задается формулой

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)}(M) = M - \frac{1}{|v|^2}(vv^T M^T - Mvv^T),$$

образуют полный инволютивный набор полиномов в алгебре $\mathrm{so}(n) + \mathbb{R}^n$.

Напомним, что коммутатор в алгебрах вида

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{C} +_\rho V \quad (\rho : \mathfrak{C} \to \mathrm{gl}(V)), \tag{1}$$

где $\mathfrak{C}$ — алгебра Ли с коммутатором $[;]_\mathfrak{C}$, задается формулой

$$[c_1 + v_1; c_2 + v_2] = [c_1; c_2]_\mathfrak{C} + \rho(c_1)v_2 - \rho(c_2)v_1.$$

2. Общая схема построения полных инволютивных наборов на конечномерных алгебрах Ли. В любой алгебре вида (1) есть коммутативный идеал $\mathfrak{H} = V$. Поэтому, следуя алгоритму, описанному в [1], рассматриваем $\mathrm{ad}^*_\mathfrak{H} : \mathfrak{G} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{H}^*)$ — представление, двойственное ограничению присоединенного представления на идеал. Далее рассматриваем рациональные сечения $\psi \colon \mathfrak{H}^* \to \mathfrak{G}$, где для любого $a \in \mathfrak{H}^*$ имеем $\psi(a) \in \mathrm{St}(a)$ ($\mathrm{St}(a)$ — стабилизатор элемента $a \in \mathfrak{H}^*$ в смысле представления $\mathrm{ad}^*_\mathfrak{H}$: $\mathrm{St}(a) = \{g \in \mathfrak{G} | (\mathrm{ad}^*_\mathfrak{H})_g a = 0\}$).

Лемма 1. *Уравнение стабилизатора элемента $a \in \mathfrak{H}^*$ имеет вид*

$$\mathrm{St}(a) = \{(N, u) \mid u \in \mathfrak{H}, \rho^*(N)a = 0\},$$

где $\rho^* : \mathfrak{C} \to \mathrm{gl}(V^*)$ — представление, двойственное представлению ρ.

Доказательство. Действительно, согласно явным формулам для коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$ [4, с. 253], а также ввиду того что $\mathfrak{H}$ — идеал, имеем $\mathrm{ad}^*_{(N,u)}(0, a) = \rho^*(N)a$. Таким образом, все рациональные сечения образуют алгебру, которая распадается в прямую сумму подалгебр

$$\Phi = \{\varphi \colon \mathfrak{H}^* \to \mathfrak{C} \mid \rho^*(\varphi(a))a = 0 \, \forall a \in \mathfrak{H}\} \quad \text{и} \quad S = \{s \colon \mathfrak{H}^* \to \mathfrak{H}\}.$$

Рассмотрим функции $f_\psi(x) = \langle x, \psi(\mathrm{pr}_{\mathfrak{H}^*} x)\rangle$ и отображение α: $\alpha(\psi) = f_\psi$. Согласно [1], функции $f_\psi(x)$ образуют подалгебру в $\mathrm{Ann}\,\mathfrak{H}$, и задача сводится к нахождению набора полиномов на образе $L_\psi = \mathrm{Im}(\alpha)$ гомоморфизма α, являющемся конечномерной алгеброй Ли над полем Fract $P(\mathfrak{H})$ рациональных функций в $\mathfrak{H}$.

Однако из того, что алгебра сечений распадается в прямую сумму подалгебр, следует, что и для алгебр функций $L_\psi = \{f_\psi\}$, $L_\varphi = \{f_\varphi\}$ и $L_s = \{f_s\}$ справедливо тождество

$$L_\psi \doteq L_\varphi \oplus L_s. \tag{2}$$

Действительно, если $f_{\psi_1} = (f_{\varphi_1}, f_{s_1})$ и $f_{\psi_2} = (f_{\varphi_2}, f_{s_2})$ — две функции из L_ψ, то $\{f_{\psi_1}, f_{\psi_2}\} = f_{[\psi_1,\psi_2]} = f_{([\varphi_1,\varphi_2],[s_1,s_2])} = (\{f_{\varphi_1}, f_{\varphi_2}\}, \{f_{s_1}, f_{s_2}\})$.

Лемма 2. *Полупростота подалгебры* St(a) *для регулярного a влечет за собой полупростоту подалгебры L_φ.*

Это утверждение очевидно вытекает из того, что полупростота $\mathrm{St}(a)$ влечет полупростоту алгебры сечений Φ, а α — гомоморфизм алгебр Ли.

Для алгебр Ли $\mathfrak{G}$ первая подалгебра оказывается полупростой, а вторая — изоморфной полю $P(\mathfrak{H})$. Поэтому полный набор полиномов в алгебре L_ψ может быть получен с помощью метода сдвига аргумента.

3. Индекс и размерность алгебр $\mathfrak{G}$. Для рассматриваемых (вещественных) алгебр найдем их размерности и индексы. Имеем

$$\dim \mathfrak{G} = \dim(\mathrm{su}(n)) + \dim \mathbb{C}^n = n^2 - 1 + 2n = n^2 + 2n - 1.$$

Индекс алгебр типа (1), согласно формуле Раиса [5], вычисляется по формуле

$$\mathrm{ind}\,\mathfrak{G} = \mathrm{ind}\,\mathrm{St}_0(x) + \mathrm{ind}\,\rho^*,$$

где $\mathrm{St}_0(x)$ — стационарная подалгебра регулярного элемента $x \in \mathfrak{C}^*$ в $\mathfrak{C}$ относительно представления ρ^*: $\mathrm{St}_0(x) = \{g \in \mathfrak{C} | \rho^*(g)x = 0\}$.

Пространство $\mathbb{C}^n$ естественным образом отождествляется с $(\mathbb{C}^n)^*$ при помощи эрмитова скалярного произведения. Это позволяет нам отождествить ρ^* с ρ. Действительно, пусть $\tilde{u} \in V^*$ — двойственный элементу $u \in V$ в смысле отождествления, $v \in V$, $N \in \mathrm{su}(n)$. Тогда

$$\langle \rho^*(N)\tilde{u},\ v\rangle = -\langle \tilde{u}, \rho_1(N)v\rangle = -\langle u,\ Nv\rangle = \langle -\bar{N}^T u,\ v\rangle = \langle Nu,\ v\rangle$$

(черта обозначает комплексное сопряжение, ^{T} — транспонирование матрицы).

Поэтому, во-первых, справедлива формула $\mathrm{ind}\,\rho^* = \mathrm{ind}\,\rho = 1$, так как, действуя на регулярный элемент v всеми матрицами из $\mathrm{SU}(n)$, мы получаем подмножество $\mathbb{C}^n$ коразмерности 1, выделяемое условием $|v| = \mathrm{const}$. Во-вторых, имеет место

Лемма 3. *Для регулярного элемента v стационарная подалгебра в смысле представления ρ^** $(\mathrm{St}_0(v) = \{N \in \mathrm{su}(n) \mid Nv = 0\})$ *изоморфна* $\mathrm{su}(n-1)$.

Доказательство. Найдем такую подалгебру для вектора $v = (1, 0, \dots, 0)^T$: $Nv = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ -a_{12} & \dots\dots\dots \\ \vdots & \dots\dots\dots \\ -a_{1n} & \dots\dots\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$N = \begin{pmatrix} 0\,0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Таким образом, подалгебра матриц изоморфна $\mathrm{su}(n-1)$ и $\mathrm{ind}\,\mathrm{St}_0(v) = \mathrm{ind}\,\mathrm{su}(n-1) = n - 2$. Следовательно, $\mathrm{ind}(\mathrm{su}(n) +_\rho \mathbb{C}^n) = n - 1$.

4. Полный инволютивный набор функций на алгебре $\mathfrak{G} = \mathrm{su}(n) +_\rho \mathbb{C}^n$. Двойственное пространство к этой алгебре отождествляется с самой алгеброй посредством скалярного произведения

$$\langle (M_1, v_1); (M_2, v_2) \rangle = \mathrm{Tr}\ M_1 M_2 + \mathrm{Re}\langle v_1; v_2 \rangle_{\mathbb{C}},$$

где $\mathrm{Re}\langle\ ;\ \rangle_{\mathbb{C}}$ — вещественная часть эрмитова произведения в $\mathbb{C}^n$, т.е. скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$ овеществленных векторов из $\mathbb{C}^n$.

Коммутативный идеал $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^n$ имеет размерность $2n$. Следуя алгоритму, описанному в п. 2, рассмотрим вторую компоненту прямой суммы (2)

$$L_s = \{f_s \mid s \in \mathrm{Fract}\, P(\mathbb{C}^n)\}.$$

Гомоморфизм $s \to f_s$ линеен над полем $\mathrm{Fract}\, P(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, подалгебра L_s определяется одним элементом f_1, где 1 — нейтральный элемент по умножению в поле $\mathrm{Fract} P(\mathbb{C}^n)$: $f_s \to s \cdot f_1$.

Рассмотрим теперь первую компоненту прямой суммы L_φ. Из леммы 3 следует, что стабилизатор регулярного элемента v является полупростой алгеброй, что, согласно лемме 2, влечет полупростоту алгебры L_φ.

В алгебре L_φ функции записываются в виде $f(M, v) = \mathrm{Tr} M\varphi(v)$. В частности, можно взять $\varphi(v) = \varphi_A(v) = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)} A$, где A — некоторый фиксированный элемент $\mathrm{su}(n)$, а $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)} A$ — стандартная ортогональная проекция, для которой можно привести рациональную по v формулу. Тогда

$$f(M, v) = \mathrm{Tr}\ M\, \mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)} A = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)} M\right) A = \mathrm{Tr}\, A \left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)} M\right).$$

Формула для проекции имеет вид

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)} A = A - \frac{1}{|v|^2}\left(A\bar{v}v^T + \bar{v}v^T A\right) + \frac{v^T A \bar{v}}{|v|^4}\frac{n-2}{n-1}\bar{v}v^T + \frac{v^T A\bar{v}}{(n-1)|v|^2}E,$$

где E — единичная матрица. В алгебре сечений функции $\mathrm{Tr}_\rho \varphi(v)^k$ принадлежат центру пуассоновой алгебры, поэтому в алгебре L_φ соответствующие функции будут записываться следующим образом:

$$f_k(M, v) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)} M)^k, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Их сдвиги имеют вид $f_{k,\lambda} = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)}(M + \lambda B)\right)^k$. Если мы домножим формулу на $|v|^4$, то получим искомые полиномы $f_{k,\lambda} = \mathrm{Tr}\,(|v|^4 \mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v)}(M + \lambda B))^k$.

Теорема 2. *Функции $v_1, \ldots, v_{2n}$ и $f_{k,\lambda}, k = 0, \ldots, n$, где B — произвольный элемент $\mathrm{su}(n)$, образуют полное коммутативное семейство в $P(\mathfrak{G})$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болсинов А.В.* Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. Вып. 26. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, **2005**. 87–109.
2. *Садэтов С.Т.* Доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко // Докл. РАН. 2004. **397**, № 6. 751–754.
3. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. **42**, № 2. 396–415.
4. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: Факториал и изд-во "Просперус" Удмуртского гос. ун-та, 1995.
5. *Rais M.* L'indice des produits semi-directs $E \times_\rho \mathfrak{G}$ // C. rend. Acad. sci. Paris. 1978. **287**, N 4. 195–197.

Поступила в редакцию
15.12.2005