УДК 517+550.34

М. Л. Гервер, Е. А. Кудрявцева

Теорема об отношениях предшествования, генерируемых вполне положительными ядрами

Работа является итогом осмысления одной теоремы о суммах гипербол, понадобившейся в математической геофизике. И сама эта теорема, и ряд неожиданных следствий из нее, на первый взгляд, не слишком правдоподобны. Первое доказательство теоремы не снимало такого впечатления: оставалось непонятным, *почему* она верна. Объяснение обнаружилось в свойствах ядра Коши $C(s,x)=1/(s+x)$ – исходная теорема о гиперболах получена в статье как частный случай общего утверждения, верного для некоторого класса $\mathbb{G}$ вполне положительных ядер, включающего $C(s,x)$.

Библиография: 14 названий.

Из восьми параграфов статьи первые три содержат формулировки результатов и определения, следующие четыре – доказательства, последний – комментарии; ссылки на них имеют вид $^{\langle k\rangle}$, где k – номер комментария.

§ 1. Формулировка теоремы о гиперболах и ее обобщение

Обозначим через $\mathbb{N}_n$ множество наборов $\mathscr{N}=\{a_1,\dots,a_n,\,s_1,\dots,s_n\}$ из $2n$ чисел a_j, s_j $(1\leqslant j\leqslant n)$, удовлетворяющих условиям:

$$a_j>0\quad (j=1,\dots,n),\qquad \sum_{j=1}^{n}a_j=1,\qquad s_1>\dots>s_n>0.$$

Индекс n назовем *рангом* набора $\mathscr{N}$ и обозначим $\operatorname{rank}\mathscr{N}$. Объединение всех $\mathbb{N}_n$ $(n\geqslant 1)$ обозначим $\mathbb{N}$. Каждому $\mathscr{N}\in\mathbb{N}$ сопоставим *генерирующую функцию* – сумму гипербол

$$g(x)=g(\mathscr{N},x)=\sum\frac{a_j}{s_j+x},\qquad x\in\mathbb{R},\quad 1\leqslant j\leqslant\operatorname{rank}\mathscr{N},$$

и введем два отношения частичной упорядоченности на множестве $\mathbb{N}$: для наборов $\mathscr{M},\mathscr{N},\mathscr{P}\in\mathbb{N}$ по определению

$$\mathscr{M}\prec\mathscr{N},\ \text{ если } g(\mathscr{M},x)\leqslant g(\mathscr{N},x) \text{ при } x\in[0,1],$$

и

$$\mathscr{P}\prec\!<\mathscr{M},\ \text{ если } g(\mathscr{P},x)\leqslant g(\mathscr{M},x) \text{ при всех } x\geqslant 0;$$

выбор обозначения $\prec\!<$ будет объяснен в § 2 при обсуждении следствий, которые влечет за собой

Теорема 1. *Для любых наборов $\mathscr{P},\mathscr{N}\in\mathbb{N}$, связанных соотношением $\mathscr{P}\prec\mathscr{N}$, найдется такой набор $\mathscr{M}\in\mathbb{N}$, что*

$$\operatorname{rank}\mathscr{M}\leqslant\operatorname{rank}\mathscr{N}\quad \text{и}\quad \mathscr{P}\prec\!<\mathscr{M}\prec\mathscr{N}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01350).

Замечание. Если $p = \operatorname{rank} \mathscr{P} \leqslant n = \operatorname{rank} \mathscr{N}$, теорема 1 очевидна: можно взять $\mathscr{M} = \mathscr{P}$; поэтому будем считать, что $p > n$.

Итак, теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1′. *Пусть генерирующие функции $g_n(x)$ и $g_p(x)$ являются суммами n и p гипербол, $p > n$ и $g_p(x) \leqslant g_n(x)$ при $x \in [0,1]$. Тогда существует генерирующая функция $g_m(x)$ (сумма m гипербол с числом слагаемых $m \leqslant n$) такая, что*

$$g_m(x) \leqslant g_n(x) \text{ на } [0,1] \quad \text{и} \quad g_m(x) \geqslant g_p(x) \text{ при всех } x \geqslant 0.$$

Теорема о гиперболах является частным случаем формулируемой ниже теоремы 2. В § 3 будет введен класс $\mathbb{G}$ ядер $G(s,x)$ в полуполосе

$$s > 0, \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \beta \leqslant +\infty.$$

Ядро Коши $1/(s+x)$, $s > 0$, $x \geqslant 0$, – пример такого ядра; обозначая его $C(s,x)$, можем представить генерирующую функцию $g(\mathscr{N},x)$ в виде

$$g(\mathscr{N},x) = \sum a_j C(s_j,x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \operatorname{rank} \mathscr{N}.$$

В §§ 4–7 будет доказана

Теорема 2. *Фиксируем число $\gamma \in (\alpha,\beta)$ и ядро $G \in \mathbb{G}$, сопоставим каждому набору $\mathscr{N} \in \mathrm{N}$ генерирующую функцию*

$$g(\mathscr{N},x) = \sum a_j G(s_j,x), \qquad x \in [\alpha,\beta], \quad 1 \leqslant j \leqslant \operatorname{rank} \mathscr{N},$$

и введем два отношения предшествования на N:

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \prec \mathscr{N}, &\quad \text{если} \quad g(\mathscr{M},x) \leqslant g(\mathscr{N},x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha,\gamma], \\ \mathscr{P} \prec\!\!< \mathscr{M}, &\quad \text{если} \quad g(\mathscr{P},x) \leqslant g(\mathscr{M},x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha,\beta]. \end{aligned}$$

При таком толковании знаков $\prec$ и $\prec\!\!<$ теорема 1 остается верной: для любых наборов $\mathscr{P},\mathscr{N} \in \mathrm{N}$, $\mathscr{P} \prec \mathscr{N}$, найдется такой набор $\mathscr{M} \in \mathrm{N}$, что

$$\operatorname{rank} \mathscr{M} \leqslant \operatorname{rank} \mathscr{N} \quad \text{и} \quad \mathscr{P} \prec\!\!< \mathscr{M} \prec \mathscr{N}.$$

Замечание. Для конкретности ядра G класса $\mathbb{G}$ предполагаются заданными в *канонической* области – полуполосе $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$. Иногда естественнее задавать ядра в других областях, сводя эти случаи к каноническому с помощью простых преобразований. Например, ядро

$$x^t, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leqslant x \leqslant \beta = 1,$$

переходит в ядро из класса $\mathbb{G}$, если положить $t = \ln s$, $s > 0$.

§ 2. Теорема о числе ступенек и другие следствия

Теорема о гиперболах была придумана для обоснования новых алгоритмов в задаче *обращения годографа* – классической обратной задаче математической геофизики, состоящей в определении скорости распространения сейсмических волн в Земле по временам пробега. При наличии *волновода* (зоны пониженной скорости) решение этой задачи неединственно [1]–[3]: имеется бесконечно много различных моделей Земли, неразличимых *по годографу* (кривой времен пробега). Требуется описать все эти модели; в частности, нужно найти модель *с самым широким волноводом*. Эта задача теоретической сейсмологии приводит [4]–[7] к следующей математической.

2.1. Задача о самой широкой лесенке. Рассмотрим множество $\mathbb{F}$ заданных на полуоси невозрастающих неотрицательных ступенчатых функций с конечным числом ступенек и с интегралом 1. Каждой функции $f \in \mathbb{F}$ сопоставим число $h(f)$ – сумму длин ступенек, где $f > 0$. Введем на $\mathbb{F}$ отношение частичной упорядоченности $f^* \prec f$ (его определение 2.1 дано ниже).

Для любой $f \in \mathbb{F}$ среди всех $f^* \prec f$ требуется найти f^0 с максимальной суммой длин ступенек $h(f^0)$.

Для $f \in \mathbb{F}$, принимающей положительные значения f_j на ступеньках длины h_j, введем координаты a_j, s_j: $a_j = f_j h_j$ – интеграл под j-й ступенькой, $s_j = f_j^2$ – квадрат j-го значения, и тем самым установим биективное соответствие между функциями f из $\mathbb{F}$, наборами $\mathcal{N}$ из N и генерирующими функциями $g(\mathcal{N}, x)$:

$$f \in \mathbb{F} \iff \mathcal{N} \in \mathrm{N} \iff g(\mathcal{N}, x) = \sum \frac{a_j}{s_j + x}, \quad 1 \leqslant j \leqslant \operatorname{rank} \mathcal{N}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.

$$f^* \prec f \iff \mathcal{N}^* \prec \mathcal{N} \iff g(\mathcal{N}^*, x) \leqslant g(\mathcal{N}, x), \ x \in [0, 1].$$

Функционал $h(f) = \sum h_j$, сопоставляющий функции $f \in \mathbb{F}$ сумму длин ступенек h_j, равен

$$h(\mathcal{N}) = \sum \frac{a_j}{\sqrt{s_j}} \qquad (\mathcal{N} \in \mathrm{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant \operatorname{rank} \mathcal{N}),$$

так что задачу о самой широкой лесенке можно переформулировать следующим образом:

Для любого набора $\mathcal{N} \in \mathrm{N}$ найти $\sup h(\mathcal{N}^*)$ по всем $\mathcal{N}^* \prec \mathcal{N}$.

Верна [7], [8] следующая теорема существования и единственности.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого набора $\mathcal{N} \in \mathrm{N}$ существует такой набор $\mathcal{N}^0 \prec \mathcal{N}$, что для всех $\mathcal{N}^* \prec \mathcal{N}$ $(\mathcal{N}^* \neq \mathcal{N}^0)$*

$$h(\mathcal{N}^*) < h(\mathcal{N}^0).$$

Иными словами, *для любой функции $f \in \mathbb{F}$ среди всех $f^* \prec f$ существует ровно одна функция f^0 $(f^0 \iff \mathcal{N}^0)$, на которой достигается* $\max h(f^*)$.

Теорема о гиперболах играет важную роль в доказательстве, уточнении и обобщении теоремы 2.1 (см. 2.2–2.4).

2.2. Теорема о числе ступенек. Непосредственным следствием теоремы о гиперболах является

ТЕОРЕМА 2.2. *Функция f^0, на которой достигается* $\max h(f^*)$ *по всем $f^* \prec f$, имеет не больше ступенек, чем f.* ⟨1⟩

Чтобы убедиться в этом, введем на $\mathbb{F}$ еще одно отношение частичной упорядоченности $f^* \prec\prec f$ и докажем теорему 2.3, объясняющую выбор обозначения $\prec\prec$.

Определение 2.2.

$$f^* \prec\!\!< f \iff \mathscr{N}^* \prec\!\!< \mathscr{N} \iff g(\mathscr{N}^*, x) \leqslant g(\mathscr{N}, x), \ x \geqslant 0.$$

Теорема 2.3. *Если* $\mathscr{P} \prec\!\!< \mathscr{M}$ *и* $\mathscr{P} \neq \mathscr{M}$, *то* $h(\mathscr{P}) < h(\mathscr{M})$.

Доказательство. Чтобы доказать теорему 2.3, достаточно заметить, что

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (s+x)^{-1}\,d\sqrt{x}, \text{ так что } h(\mathscr{N}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(\mathscr{N}, x)\,d\sqrt{x}.$$

Сопоставляя теоремы 1 и 2.3, видим, что теорема 2.2 действительно следует из теоремы о гиперболах, а верхнюю грань

$$\sup h(\mathscr{M}), \qquad \mathscr{M} \prec \mathscr{N},$$

следует искать лишь среди наборов $\mathscr{M} \prec \mathscr{N}$ с рангом $\operatorname{rank}\mathscr{M} \leqslant \operatorname{rank}\mathscr{N}$.

Запись $1/\sqrt{s}$ в виде интеграла Стилтьеса подготавливает

2.3. Расширение класса функционалов. Введем на N функционалы

$$h(\mathscr{N}) = \sum a_j \varphi(s_j), \qquad \varphi(s) = \int_0^\infty (s+x)^{-1}\,d\theta(x)$$

с произвольной неотрицательной (и такой, что интеграл $\varphi(s)$ сходится) мерой Стилтьеса $d\theta$. Обобщение $(2/\pi)\,d\sqrt{x} \to d\theta(x)$ не является самоцелью, а позволяет продвинуться в задаче на максимум, где $1/\sqrt{s}$ включается в однопараметрическое семейство $\psi(s,t)$, $t \in [0,1)$:

$$\psi(s,t) = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/t}}{\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi}\int_t^\infty \frac{d\sqrt{x}}{s+x} \quad \text{при} \quad t \in (0,1);$$
$$\psi(s,0) = 1/\sqrt{s}$$

(эта задача тоже возникает при обращении годографа и является ключевой для построения границы множества всех решений [9], [10]).

Сопоставление с теоремой 2 приводит к дальнейшим обобщениям.

Фиксируем ядро $G(s,x) \in \mathbb{G}$, $s > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$, и положим

$$\varphi(s) = \int_\alpha^\beta G(s,x)\,d\theta(x), \qquad h(\mathscr{N}) = \sum a_j\varphi(s_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant \operatorname{rank}\mathscr{N}.$$

Меру Стилтьеса $d\theta(x)$, функцию $\varphi(s)$ и функционал $h(\mathscr{N})$ назовем *невырожденными*, если $d\theta(x)$ не сосредоточена в конечном числе точек $x \in [\alpha,\beta]$.

Класс невырожденных функционалов $h(\mathscr{N})$ на N обозначим $\mathbb{H} = \mathbb{H}(G)$; каждый функционал $h \in \mathbb{H}(G)$ определяется заданием неотрицательной невырожденной меры $d\theta(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$, и связан с генерирующей функцией

$$g(\mathscr{N}, x) = \sum a_j G(s_j, x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \operatorname{rank}\mathscr{N},$$

формулой

$$h(\mathscr{N}) = \int_\alpha^\beta g(\mathscr{N}, x)\,d\theta(x). \qquad (*)$$

2.4. Теорема о ранге. Трактуя знаки $\prec$ и $\prec\!<$ как в теореме 2, получаем класс K экстремальных задач, зависящих от G, h и $\mathscr{N}$:

Для произвольных $G \in \mathbb{G}$, $h \in \mathbb{H}(G)$ *и* $\mathscr{N} \in \mathrm{N}$ *найти* $\sup h(\mathscr{N}^*)$, $\mathscr{N}^* \prec \mathscr{N}$.

Ввиду (*) и с учетом 3.3 (см. § 3) теорема 2.3 верна для любого функционала $h \in \mathbb{H}$. ⟨2⟩ Поэтому из теоремы 2 следует теорема о ранге (аналог теоремы 2.2).

ТЕОРЕМА 2.4. *Для любой экстремальной задачи класса* K *верхнюю грань*

$$\sup h(\mathscr{M}), \qquad \mathscr{M} \prec \mathscr{N},$$

нужно искать лишь среди наборов $\mathscr{M} \prec \mathscr{N}$ *с рангом* $\operatorname{rank}\mathscr{M} \leqslant \operatorname{rank}\mathscr{N}$.

Условия существования и единственности набора $\mathscr{M}^0$, на котором эта верхняя грань достигается, установлены в [10].

§ 3. Класс $\mathbb{G}$ ядер $G(s,x)$

В § 3 дается определение *вполне положительных ядер*, или, короче, TP-*ядер* [11] (от английского *totally positive*) и вводится класс $\mathbb{G}$ ядер $G(s,x)$; проверяется, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2.

3.1. TP-ядра. Ниже предполагается, что $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $G(s,x)$, определенная при

$$s > 0, \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$

называется *вполне положительным ядром* (или TP-*ядром*), если для любого n и любых s_j и x_k $(1 \leqslant j,\, k \leqslant n)$ таких, что

$$s_1 > \cdots > s_n > 0 \quad \text{и} \quad \beta \geqslant x_1 > \cdots > x_n \geqslant \alpha,$$

определитель $|G(s_j,x_k)|$ *положителен*:

$$\begin{vmatrix} G(s_1,x_1) & \dots & G(s_1,x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ G(s_n,x_1) & \dots & G(s_n,x_n) \end{vmatrix} > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Данное определение эквивалентно стандартному [11], [12], отличаясь от него порядком нумерации строк и столбцов.

ПРИМЕР 3.1. При любых $\alpha \geqslant 0$ и $\beta > \alpha$ ядро Коши $C(s,x) = 1/(s+x)$ является TP-ядром в полуполосе $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$, поскольку [13, с. 110, 320]

$$|C(s_j,x_k)| = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (s_j - s_k)(x_j - x_k) \Big/ \prod_{1 \leqslant j,k \leqslant n} (s_j + x_k).$$

3.2. Тождество $G(s,\beta) \equiv 1$. В класс $\mathbb{G}$ будут включены TP-ядра, удовлетворяющие некоторым дополнительным ограничениям. Одно из них – *тождество* $G(s,\beta) \equiv 1$, $s > 0$. Следующий пример показывает, что оно не противоречит включению в класс $\mathbb{G}$ ядра Коши $C(s,x)$.

ПРИМЕР 3.2. Положим $C(s,+\infty) \equiv 1$. Так доопределенное ядро $C(s,x)$ вполне положительно при $s > 0$ и $x \geqslant 0$, т.е. определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1/(s_1+x_2) & \dots & 1/(s_1+x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1/(s_n+x_2) & \dots & 1/(s_n+x_n) \end{vmatrix}$$

положителен при любых s_j, x_k $(1 \leqslant j \leqslant n,\, 2 \leqslant k \leqslant n)$ таких, что

$$s_1 > \cdots > s_n > 0, \qquad x_2 > \cdots > x_n \geqslant 0. \qquad (*)$$

Доказательство. Определитель Δ получится, если $|C(s_j, x_k)|$ умножить на x_1 и устремить x_1 к $+\infty$. Так как

$$x_1 \prod_{2\leqslant k\leqslant n} (x_1 - x_k) \Big/ \prod_{1\leqslant j\leqslant n} (s_j + x_1) \to 1 \quad \text{при} \quad x_1 \to +\infty,$$

то по формуле из примера 3.1

$$\Delta = \prod_{1\leqslant j<k\leqslant n} (s_j - s_k) \prod_{2\leqslant j<k\leqslant n} (x_j - x_k) \Big/ \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 2\leqslant k\leqslant n}} (s_j + x_k),$$

т.е. $\Delta > 0$ при ограничениях $(*)$.

3.3. Связь с T-системами. Напомним, как TP-ядра связаны с чебышевскими системами [11], [12].

Определение 3.2. Функции $\tau_j(x)$, $0 \leqslant j \leqslant q$, $x \in [\alpha, \beta]$, образуют *систему Чебышёва* (или T-*систему*) *порядка* q, если любой многочлен

$$P(x) = \sum_{0\leqslant j\leqslant q} p_j \tau_j(x) \qquad \Bigl(p_j \in \mathbb{R}, \quad \sum_{0\leqslant j\leqslant q} p_j^2 > 0\Bigr)$$

имеет при $x \in [\alpha, \beta]$ не более q корней.

Простейший пример T-системы $\tau_j(x) = x^j$ объясняет, почему и в общем случае $P(x)$ именуется многочленом.

Легко понять: функции $\{\tau_j(x)\}_0^q$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, тогда и только тогда образуют T-систему порядка q, когда определитель

$$\begin{vmatrix} \tau_0(x_0) & \tau_0(x_1) & \dots & \tau_0(x_q) \\ \tau_1(x_0) & \tau_1(x_1) & \dots & \tau_1(x_q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_q(x_0) & \tau_q(x_1) & \dots & \tau_q(x_q) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при любых x_k $(0 \leqslant k \leqslant q)$, $\beta \geqslant x_0 > x_1 > \dots > x_q \geqslant \alpha$.

Доказательство следует из рассмотрения однородной системы $q+1$ уравнений

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant q} p_j \tau_j(x_k) = 0$$

относительно $p_0, p_1, \dots, p_q$.

Таким образом, для любого TP-ядра $G(s,x)$ $(s > 0, x \in [\alpha, \beta])$ и любых различных $s_j > 0$ $(0 \leqslant j \leqslant q)$ функции $\tau_j(x) = G(s_j, x)$ образуют T-систему порядка q при $x \in [\alpha, \beta]$. Аналогично, при

$$\beta \geqslant x_0 > x_1 > \dots > x_n \geqslant \alpha$$

система функций $\xi_0(s) = G(s, x_0)$, $\xi_1(s) = G(s, x_1), \dots, \xi_n(s) = G(s, x_n)$ является T-системой порядка n на любом отрезке оси $s > 0$. Функции $\xi_j(s)$, $0 \leqslant j \leqslant n$, задают кривую $\mathscr{V}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Если $x_0 = \beta$ и $G \in \mathbb{G}$, то (ввиду тождества $G(s, \beta) \equiv 1$) $\mathscr{V}$ лежит в гиперплоскости $\xi_0 = 1$. [(3)]

3.4. Определение класса $\mathbb{G}$. Фиксируем число $\gamma \in (\alpha,\beta)$. ТР-ядро $G(s,x)$ ($s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$), $G(s,\beta) \equiv 1$, включается в класс $\mathbb{G}$, если оно непрерывно в полуполосе $s > 0$, $x \in [\alpha,\gamma]$, непрерывно по s при $x \in [\alpha,\beta]$ [4] и при $s \to 0$ удовлетворяет условиям

$$G(s,\alpha) \to +\infty, \quad \frac{G(s,x)}{G(s,\alpha)} \to 0 \text{ для любого } x \in (\alpha,\gamma].$$

Для ядра Коши $C(s,x)$ ($s > 0, x \geqslant 0$) эти условия выполняются:

$$\frac{1}{s} \to +\infty, \quad \frac{1/(s+x)}{1/s} = \frac{s}{s+x} \to 0 \text{ при } s \to 0.$$

Тем самым, с учетом примеров 3.1 и 3.2, $C(s,x) \in \mathbb{G}$, так что теорема 1 является частным случаем теоремы 2.

Остается доказать эту более общую теорему. Сначала сделаем это для наборов $\mathscr{N}$ ранга 1 и 2.

§ 4. Доказательство теоремы для наборов $\mathscr{N}$ ранга 1

В случае, когда $\operatorname{rank}\mathscr{N} = 1$, теорема 2 допускает значительное усиление:

(1) достаточно считать, что $G(s,x)$ является ТР-ядром в полуполосе $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$, *непрерывным по s при $x = \alpha$* и удовлетворяющим тождеству $G(s,\beta) \equiv 1$.

(2) не нужны никакие ограничения на $G(s,x)$ при $s \to 0$;

(3) условие $\mathscr{P} \prec \mathscr{N}$ можно заменить неравенством $g(\mathscr{P},\alpha) \leqslant g(\mathscr{N},\alpha)$;

(4) в рассматриваемом случае утверждается, что при любом $x \in (\alpha,\beta)$ выполняется строгое неравенство $g(\mathscr{P},x) < g(\mathscr{N},x)$.

Итак, в § 4 будет доказано следующее

Утверждение 1. *Пусть $G(s,x)$ – вполне положительное ядро в полуполосе $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$, непрерывное по s при $x = \alpha$ и тождественно равное 1 при $x = \beta$, и пусть для наборов $\mathscr{N} \in \mathrm{N}_1$ и $\mathscr{P} \in \mathrm{N}_p$ ($\mathscr{P} \neq \mathscr{N}$) выполняется неравенство $g(\mathscr{P},\alpha) \leqslant g(\mathscr{N},\alpha)$. Тогда $g(\mathscr{P},x) < g(\mathscr{N},x)$ при всех $x \in (\alpha,\beta)$.*

Доказательство использует три леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $G(s,x)$ – вполне положительное ядро в полуполосе $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$, тождественно равное 1 при $x = \beta$. Тогда $G(s,x)$ убывает по s при любом $x \in [\alpha,\beta)$.*

Доказательство. Так как G является ТР-ядром, то при $t > s > 0$ определитель

$$\begin{vmatrix} G(t,\beta)=1 & G(t,x) \\ G(s,\beta)=1 & G(s,x) \end{vmatrix} = G(s,x) - G(t,x)$$

положителен, т.е. $G(t,x) < G(s,x)$ при $t > s$.

Лемма 4.2. *Пусть $g(\mathscr{P},x)$ – генерирующая функция, соответствующая набору $\mathscr{P} = \{a_1,a_2,s_1,s_2\} \in \mathrm{N}_2$ и ТР-ядру $G(s,x)$, $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$:*

$$g(\mathscr{P},x) = a_1G(s_1,x) + a_2G(s_2,x), \qquad x \in [\alpha,\beta].$$

Пусть G непрерывно по s при $x = \alpha$ и $G(s,\beta) \equiv 1$. Тогда существует такое значение s_0, что $G(s_0,\alpha) = g(\mathscr{P},\alpha)$. Это значение определяется однозначно, оно принадлежит интервалу (s_2,s_1) и $G(s_0,x) > g(\mathscr{P},x)$ при всех $x \in (\alpha,\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.1, примененной к $x = \alpha$, и условий $a_{1,2} > 0$, $a_1 + a_2 = 1$ следует, что $G(s,\alpha) > g(\mathscr{P},\alpha)$ при $s \leqslant s_2$, $G(s,\alpha) < g(\mathscr{P},\alpha)$ при $s \geqslant s_1$ и $G(s,\alpha) = g(\mathscr{P},\alpha)$ ровно при одном $s = s_0 \in (s_2, s_1)$.

Чтобы доказать, что $G(s_0,x) > g(\mathscr{P},x)$ при любом $x \in (\alpha,\beta)$, рассмотрим определитель

$$D(x) = \begin{vmatrix} G(s_1,\beta)=1 & G(s_1,x) & G(s_1,\alpha) \\ G(s_0,\beta)=1 & G(s_0,x) & G(s_0,\alpha) \\ G(s_2,\beta)=1 & G(s_2,x) & G(s_2,\alpha) \end{vmatrix}.$$

Вычитая из второй строки первую, умноженную на a_1, и третью, умноженную на a_2, получаем:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & G(s_1,x) & G(s_1,\alpha) \\ 0 & G(s_0,x) - g(\mathscr{P},x) & 0 \\ 1 & G(s_2,x) & G(s_2,\alpha) \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$D(x) = [G(s_0,x) - g(\mathscr{P},x)][G(s_2,\alpha) - G(s_1,\alpha)].$$

Так как $D(x) > 0$ и $G(s_2,\alpha) > G(s_1,\alpha)$, то $G(s_0,x) > g(\mathscr{P},x)$.

Индукцией по $p \geqslant 2$ из леммы 4.2 получается

ЛЕММА 4.3. *Пусть $g(\mathscr{P},x)$ – генерирующая функция, соответствующая набору $\mathscr{P} = \{a_1,\dots,a_p,s_1,\dots,s_p\} \in \mathrm{N}_p$ и ТР-ядру $G(s,x)$, $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$:*

$$g(\mathscr{P},x) = a_1 G(s_1,x) + \dots + a_p G(s_p,x), \qquad x \in [\alpha,\beta].$$

Пусть G непрерывно по s при $x = \alpha$ и $G(s,\beta) \equiv 1$. Тогда существует и единственно такое s_0, что $G(s_0,\alpha) = g(\mathscr{P},\alpha)$; это s_0 лежит в интервале (s_p,s_1) и $G(s_0,x) > g(\mathscr{P},x)$ при всех $x \in (\alpha,\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукционный переход от $p-1$ к p получается заменой $\mathscr{P}$ набором

$$\{a_1,\dots,a_{p-2},a_{p-1}+a_p,s_1,\dots,s_{p-2},t_{p-1}\} \in \mathrm{N}_{p-1},$$

в котором $t_{p-1} \in (s_p,s_{p-1})$ однозначно определяется из условия

$$a_{p-1}G(s_{p-1},\alpha) + a_p G(s_p,\alpha) = (a_{p-1}+a_p)G(t_{p-1},\alpha).$$

Утверждение 1 сразу следует из лемм 4.1 и 4.3.

§ 5. Доказательство теоремы для наборов $\mathscr{N}$ ранга 2

Подробно разберем в § 5 случай $\operatorname{rank}\mathscr{N} = 2$; общий случай $\mathscr{N} \in \mathrm{N}_n$ будет рассмотрен в §§ 6, 7. Докажем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть $G(s,x) \in \mathbb{G}$ при $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$ и $\gamma \in (\alpha,\beta)$; $\mathscr{N} \in \mathrm{N}_2$, $p > 2$ и $\mathscr{P} \in \mathrm{N}_p$. Пусть $\mathscr{P} \prec \mathscr{N}$, т.е. генерирующие функции $g(\mathscr{N},x)$ и $g(\mathscr{P},x)$ связаны неравенством*

$$g(\mathscr{P},x) \leqslant g(\mathscr{N},x), \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \gamma.$$

Тогда найдется набор $\mathscr{M}$, $\operatorname{rank}\mathscr{M} \leqslant 2$, для которого $\mathscr{P} \prec\prec \mathscr{M} \prec \mathscr{N}$, т.е.

$$g(\mathscr{M},x) \leqslant g(\mathscr{N},x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha,\gamma] \quad \text{и} \quad g(\mathscr{P},x) \leqslant g(\mathscr{M},x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha,\beta].$$

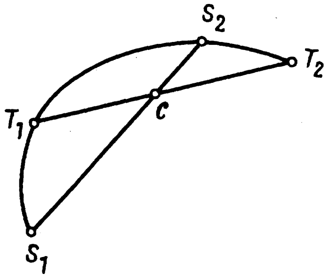

Рис. 1

Доказательство опирается на четыре леммы. Утверждение 2 почти в точности совпадает с последней из них и легко следует из нее предельным переходом.

С первыми двумя леммами связана следующая *геометрическая конструкция*. Положим (как в 3.3)

$$\xi_0(s) = G(s,\beta) \equiv 1, \quad \xi_1(s) = G(s,\gamma), \quad \xi_2(s) = G(s,\alpha).$$

Вектор-функция $\xi(s) = \{\xi_0(s) \equiv 1,\ \xi_1(s),\ \xi_2(s)\}$ задает кривую $\mathscr{V}$ в $\mathbb{R}^3$, лежащую в плоскости $\xi_0 = 1$. Так как $\xi_k(s)$, $0 \leqslant k \leqslant 2$, образуют Т-систему порядка 2, то $\mathscr{V}$ *выпукла* (никакие три точки $\mathscr{V}$ не лежат на одной прямой ⟨5⟩). Возьмем открытый отрезок $S = (S_1, S_2)$ с концами $S_{1,2} \in \mathscr{V}$ и точку $T_2 \in \mathscr{V}$ так, что

$$S_{1,2} = \xi(s_{1,2}), \quad T_2 = \xi(t_2), \qquad s_1 > s_2 > t_2 > 0.$$

Тогда (рис. 1) *для любой точки* $\mathscr{C} \in S$ *существует и единственна такая точка* $T_1 = \xi(t_1) \in \mathscr{V}$, *что открытый отрезок* $T = (T_1, T_2)$ *пересекает* S *в точке* $\mathscr{C}$; *точка* T_1 *лежит на дуге* S_1S_2 *кривой* $\mathscr{V}$, *т.е.* $s_1 > t_1 > s_2$. Этот очевидный факт равносилен пункту 1 следующей леммы.

Лемма 5.1. *Пусть* $G(s,x)$ *– вполне положительное ядро в полуполосе* $s > 0$, $x \in [\alpha,\beta]$, *тождественно равное* 1 *при* $x = \beta$ *и непрерывное по* s *при* $x = \alpha$ *и при* $x = \gamma \in (\alpha,\beta)$; $\mathscr{N} = \{a_1, a_2, s_1, s_2\}$ *– произвольный набор из* N_2, *и* t_2 *– произвольное число в интервале* $(0, s_2)$. *Тогда*

1) *существует ровно один набор* $\mathscr{M} = \{b_1, b_2, t_1, t_2\}$, *для которого генерирующие функции*

$$g(\mathscr{N},x) = a_1G(s_1,x) + a_2G(s_2,x), \qquad g(\mathscr{M},x) = b_1G(t_1,x) + b_2G(t_2,x)$$

совпадают при $x = \alpha$, β *и* γ; *при этом* $s_1 > t_1 > s_2$;

2) $g(\mathscr{N},x) > g(\mathscr{M},x)$ *на* (α,γ), *т.е.* $\mathscr{M} \prec \mathscr{N}$.

Доказательство. Равносильность пункта 1 приведенному выше факту становится очевидной, если трактовать наборы

$$\mathscr{N} = \{a_1, a_2, s_1, s_2\}, \quad \mathscr{M} = \{b_1, b_2, t_1, t_2\} \in \mathrm{N}_2$$

как точки отрезков $S = (S_1, S_2)$ и $T = (T_1, T_2)$ на рис. 1: $\mathscr{N}$ – центр масс $a_{1,2}$, помещенных в точки $S_{1,2} = \xi(s_{1,2})$, $\mathscr{M}$ – центр масс $b_{1,2}$ в точках $T_{1,2} = \xi(t_{1,2})$. Пересечение S и T в точке $\mathscr{C}$, изображающей $\mathscr{N}$ и $\mathscr{M}$, означает, что

$$a_1\xi(s_1) + a_2\xi(s_2) = b_1\xi(t_1) + b_2\xi(t_2),$$

или подробнее:

$$a_1G(s_1,x) + a_2G(s_2,x) = b_1G(t_1,x) + b_2G(t_2,x) \quad \text{при} \quad x = \alpha, \beta, \gamma.$$

Чтобы доказать пункт 2, рассмотрим определитель

$$P(x) = \begin{vmatrix} G(s_1,\beta)=1 & G(s_1,\gamma) & G(s_1,x) & G(s_1,\alpha) \\ G(t_1,\beta)=1 & G(t_1,\gamma) & G(t_1,x) & G(t_1,\alpha) \\ G(s_2,\beta)=1 & G(s_2,\gamma) & G(s_2,x) & G(s_2,\alpha) \\ G(t_2,\beta)=1 & G(t_2,\gamma) & G(t_2,x) & G(t_2,\alpha) \end{vmatrix}$$
$$= A_1G(s_1,x) + A_2G(s_2,x) - B_1G(t_1,x) - B_2G(t_2,x).$$

Очевидно, $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$. Так как G является ТР-ядром, то $P(x) > 0$ на (α,γ) и коэффициенты $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ положительны. Поэтому разность $\rho(x)$ генерирующих функций $g(\mathscr{N},x)$ и $g(\mathscr{M},x)$, равная

$$a_1G(s_1,x) + a_2G(s_2,x) - b_1G(t_1,x) - b_2G(t_2,x),$$

совпадает с $P(x)$ с точностью до положительного множителя ⟨6⟩, и значит (рис. 2), $g(\mathscr{N},x) > g(\mathscr{M},x)$ на (α,γ), т.е. $\mathscr{M} \prec \mathscr{N}$.

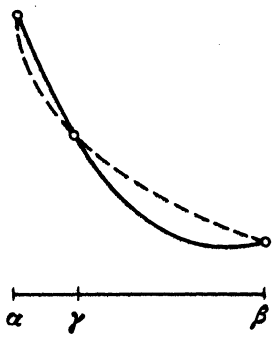

Рис. 2

При фиксированном наборе $\mathscr{N} \in \mathrm{N}_2$ и меняющемся $t_2 \in (0,s_2)$ построенный набор $\mathscr{M}$ является функцией t_2:

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}(t_2) = \{b_1(t_2), b_2(t_2), t_1(t_2), t_2\}.$$

Пусть (рис. 3) $t_2 < t_2^* < s_2$, тогда по лемме 5.1 $\mathscr{M}(t_2) \prec \mathscr{M}(t_2^*) \prec \mathscr{N}$, т.е. графики $g(\mathscr{M}(t_2),x)$, $t_2 \in (0,s_2)$, образуют *однопараметрическое семейство сталактитов на* (α,γ): при $x=\alpha$ и $x=\gamma$ функции $g(\mathscr{M}(t_2),x)$ не зависят от t_2, а при любом $x \in (\alpha,\gamma)$ *монотонно убывают при уменьшении* t_2. Как они ведут себя при $t_2 \to 0$?

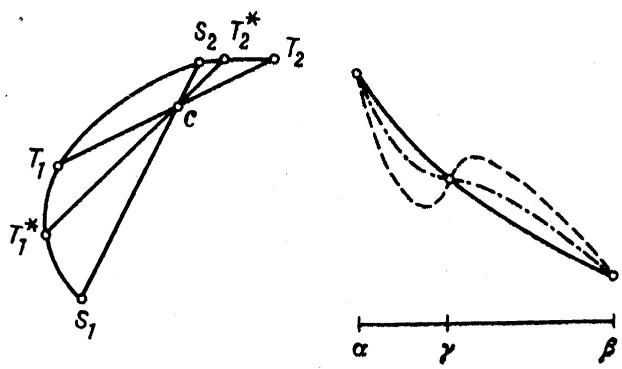

Рис. 3

Лемма 5.2. *Если $G \in \mathbb{G}$, то при $t_2 \to 0$ в наборе $\mathscr{M} = \mathscr{M}(t_2)$*

$$b_1(t_2) \to 1, \qquad b_2(t_2) \to 0, \qquad t_1(t_2) \to t_0 \in (s_2, s_1)$$

и $g(\mathscr{M}, x) \to G(t_0, x)$ для всех $x \in (\alpha, \gamma]$.

Доказательство. Из рис. 3 видно: $t_1(t_2)$ убывает при уменьшении t_2. Так как к тому же $t_1(t_2) \in (s_2, s_1)$, то существует

$$\lim_{t_2 \to 0} t_1(t_2) = t_0 \in [s_2, s_1).$$

Из тождества $g(\mathscr{M}, \alpha) = b_1 G(t_1, \alpha) + b_2 G(t_2, \alpha) \equiv g(\mathscr{N}, \alpha)$ следует, что

$$b_2(t_2) G(t_2, \alpha) < g(\mathscr{N}, \alpha).$$

Воспользуемся этим неравенством и тем, что при $t \to 0$ (см. 3.4)

$$G(t, \alpha) \to \infty \quad \text{и} \quad \frac{G(t, x)}{G(t, \alpha)} \to 0 \text{ для любого } x \in (\alpha, \gamma].$$

Пусть $t_2 \to 0$. Тогда

$$b_2(t_2) = b_2(t_2) \frac{G(t_2, \alpha)}{G(t_2, \alpha)} < \frac{g(\mathscr{N}, \alpha)}{G(t_2, \alpha)},$$

т.е.

$$b_2(t_2) \to 0, \qquad b_1(t_2) = 1 - b_2(t_2) \to 1.$$

Значит, для любого $x \in (\alpha, \gamma]$ в сумме

$$g(\mathscr{M}(t_2), x) = b_1(t_2) G(t_1(t_2), x) + b_2(t_2) G(t_2, x)$$

первое слагаемое стремится к $G(t_0, x)$; второе слагаемое стремится к нулю, поскольку

$$b_2(t_2) G(t_2, x) = b_2(t_2) G(t_2, \alpha) \frac{G(t_2, x)}{G(t_2, \alpha)} < g(\mathscr{N}, \alpha) \frac{G(t_2, x)}{G(t_2, \alpha)}.$$

Следовательно, $g(\mathscr{M}(t_2), x) \to G(t_0, x)$ для всех $x \in (\alpha, \gamma]$.

Остается заметить, что $t_0 \neq s_2$ ⟨7⟩, значит, $t_0 \in (s_2, s_1)$, и все утверждения леммы доказаны.

Следующая лемма утверждает, что для наборов $\mathscr{P} \in \mathrm{N}_p$ $(p > 2)$ и $\mathscr{M} \in \mathrm{N}_2$, связанных соотношением $\mathscr{P} \prec \mathscr{M}$, разность генерирующих функций $g(\mathscr{M}, x)$ и $g(\mathscr{P}, x)$ не может быть такой, как на рис. 4a.

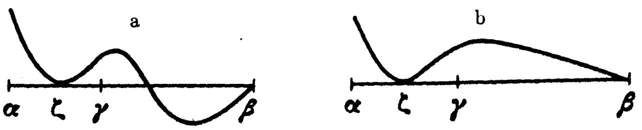

Рис. 4

ЛЕММА 5.3. *Пусть* TP-*ядро* $G(s,x)$ *определено в полуполосе* $s>0$, $x\in[\alpha,\beta]$ *и непрерывно при* $\alpha\leqslant x\leqslant\gamma<\beta$, *и пусть для наборов*

$$\mathscr{M}\in\mathbb{N}_2,\qquad \mathscr{P}\in\mathbb{N}_p,\quad p>2,\quad \mathscr{P}\prec\mathscr{M},$$

разность генерирующих функций $g(\mathscr{M},x)-g(\mathscr{P},x)$ *имеет корни*

$$x=\beta\quad\text{и}\quad x=\zeta\in(\alpha,\gamma).$$

Тогда (рис. 4b) $g(\mathscr{M},x)>g(\mathscr{P},x)$ *на* $[\gamma,\beta)$, *т.е.* $\mathscr{P}\prec\!\!<\mathscr{M}$.

Эта лемма будет доказана в более общем виде в § 7.

Леммы 5.1–5.3 используются при доказательстве следующей леммы.

ЛЕММА 5.4. *Пусть* $G\in\mathbb{G}$, $\mathscr{N}=\{a_1,a_2,s_1,s_2\}\in\mathbb{N}_2$, $p>2$ *и* $\mathscr{P}\in\mathbb{N}_p$. *Предположим, что для генерирующих функций* $g(\mathscr{N},x)$ *и* $g(\mathscr{P},x)$ *выполняется строгое неравенство* $g(\mathscr{P},x)<g(\mathscr{N},x)$, $x\in[\alpha,\gamma]$, $\gamma\in(\alpha,\beta)$. *Тогда найдется набор* $\mathscr{M}$, $\operatorname{rank}\mathscr{M}\leqslant 2$, *для которого* $g(\mathscr{M},x)\leqslant g(\mathscr{N},x)$ *при* $x\in[\alpha,\gamma]$ *и* $g(\mathscr{P},x)\leqslant g(\mathscr{M},x)$ *при* $x\in[\alpha,\beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\mathscr{P}\prec\mathscr{N}$. Если существует такой набор $\mathscr{M}\in\mathbb{N}_1$, что $\mathscr{P}\prec\mathscr{M}\prec\mathscr{N}$, то по утверждению 1 (см. § 4) $\mathscr{P}\prec\!\!<\mathscr{M}$, и лемма 5.4 доказана. Поэтому *предположим, что такого набора не существует.*

Применим к набору $\mathscr{N}$ лемму 5.1 и для каждого $t_2\in(0,s_2)$ построим набор $\mathscr{M}=\mathscr{M}(t_2)=\{b_1(t_2),b_2(t_2),t_1(t_2),t_2\}\prec\mathscr{N}$. Если бы для любого $t_2\in(0,s_2)$ выполнялось неравенство

$$g(\mathscr{P},x)<g(\mathscr{M}(t_2),x),\qquad x\in[\alpha,\gamma],$$

то по лемме 5.2 отсюда следовало бы, что

$$g(\mathscr{P},x)\leqslant G(t_0,x)\leqslant g(\mathscr{N},x),\qquad x\in[\alpha,\gamma],$$

т.е. вопреки предположению существовал бы такой набор $\mathscr{M}_0\in\mathbb{N}_1$, для которого $\mathscr{P}\prec\mathscr{M}_0\prec\mathscr{N}$. Значит, для некоторых $t_2^0\in(0,s_2)$ и $\zeta\in(\alpha,\gamma)$

$$g(\mathscr{P},\zeta)=g(\mathscr{M}(t_2^0),\zeta)\quad\text{и}\quad g(\mathscr{P},x)\leqslant g(\mathscr{M}(t_2^0),x)\quad\text{при}\quad x\in[\alpha,\gamma].$$

По лемме 5.3 последнее неравенство выполняется на всем отрезке $[\alpha,\beta]$. Тем самым лемма 5.4 доказана. Как уже было сказано, утверждение 2 следует из нее предельным переходом.

§ 6. Лемма о сталактитах

Для наборов $\mathscr{N}$ ранга $n>2$ теорема 2 доказывается по той же схеме, что и при $n=2$, но доказательство сложнее. Начнем с обобщения геометрической конструкции из § 5.

6.1. Симплексы с вершинами на выпуклой кривой. Пусть $G(s,x)$ – вполне положительное ядро в полуполосе $s>0$, $x\in[\alpha,\beta]$, непрерывное при $\alpha\leqslant x\leqslant\gamma<\beta$ и тождественно равное 1 при $x=\beta$. Положим $\eta_0=\beta$, $\eta_1=\gamma$, $\eta_n=\alpha$. Произвольно фиксируем такие точки η_j на (α,γ) и такое $\varepsilon>0$, что $\eta_{j-1}>\eta_j+\varepsilon$ $(1<j<n)$, и положим

$$\xi(s)=\{\xi_0=G(s,\beta)\equiv1,G(s,\gamma),\dots,G(s,\eta_j+\varepsilon),G(s,\eta_j),\dots,G(s,\alpha)\}.$$

Вектор-функция $\xi(s)$, $s>0$, задает кривую $\mathscr{V}$ в $\mathbb{R}^{2n-1}$, лежащую в гиперплоскости $\xi_0=1$. Так как компоненты $\xi(s)$ образуют T-систему порядка $2n-2$, то

$\mathscr{V}$ *выпукла* (по определению это означает, что любое аффинное пространство размерности $2n-3$ имеет самое большее $2n-2$ общих точек с $\mathscr{V}$).

Возьмем такой открытый симплекс $S = (S_1, \ldots, S_n)$ с вершинами $S_j \in \mathscr{V}$ и такую точку $T_n \in \mathscr{V}$, что

$$S_j = \xi(s_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad T_n = \xi(t_n), \qquad s_1 > \cdots > s_n > t_n > 0.$$

Тогда (рис. 5) *для любой точки* $\mathscr{C} \in S$ *существует ровно один открытый симплекс* $T = (T_1, \ldots, T_n)$ *с вершинами* $T_j \in \mathscr{V}$, *пересекающий* S *в точке* $\mathscr{C}$. При этом вершины T *чередуются* с вершинами S на $\mathscr{V}$:

$$T_j = \xi(t_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \qquad s_1 > t_1 > \cdots > s_n > t_n > 0.$$

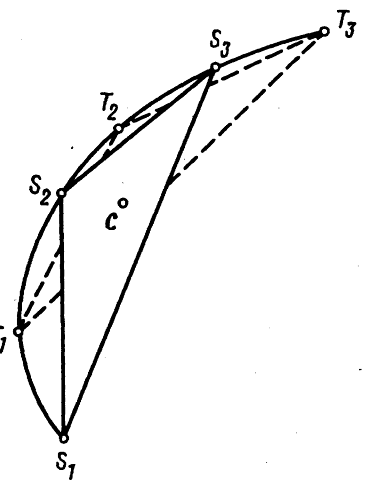

Рис. 5

Это – известный факт из теории *канонических представлений* Маркова–Крейна [12]; для полноты изложения мы докажем его в § 8 ⟨8⟩, а пока будем им пользоваться: он равносилен первой части леммы 6.1, формулируемой в 6.2.

6.2. Лемма о наборе $\mathscr{M}$. Будем трактовать наборы

$$\mathscr{N} = \{a_1, \ldots, a_n, s_1, \ldots, s_n\}, \quad \mathscr{M} = \{b_1, \ldots, b_n, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathrm{N}_n$$

как точки симплексов S и T из 6.1: $\mathscr{N}$ – центр масс a_j, помещенных в вершины S_j, $\mathscr{M}$ – центр масс b_j в вершинах T_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пересечение S и T в точке $\mathscr{C}$, изображающей $\mathscr{N}$ и $\mathscr{M}$, означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi(s_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \xi(t_j),$$

т.е. что генерирующие функции

$$g(\mathscr{N}, x) = \sum_{j=1}^{n} a_j G(s_j, x), \qquad g(\mathscr{M}, x) = \sum_{j=1}^{n} b_j G(t_j, x)$$

совпадают при $x = \eta_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и при $x = \eta_j + \varepsilon$ $(1 < j < n)$.

Разность $g(\mathcal{N},x)-g(\mathcal{M},x)$ с точностью до положительного множителя равна определителю

$$\begin{vmatrix} G(s_1,x) & G(s_1,\beta) & G(s_1,\gamma) & \dots & G(s_1,\eta_j+\varepsilon) & G(s_1,\eta_j) & \dots & G(s_1,\alpha) \\ G(t_1,x) & G(t_1,\beta) & G(t_1,\gamma) & \dots & G(t_1,\eta_j+\varepsilon) & G(t_1,\eta_j) & \dots & G(t_1,\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(s_n,x) & G(s_n,\beta) & G(s_n,\gamma) & \dots & G(s_n,\eta_j+\varepsilon) & G(s_n,\eta_j) & \dots & G(s_n,\alpha) \\ G(t_n,x) & G(t_n,\beta) & G(t_n,\gamma) & \dots & G(t_n,\eta_j+\varepsilon) & G(t_n,\eta_j) & \dots & G(t_n,\alpha) \end{vmatrix}.$$

Поэтому (рис. 6) она отрицательна при $\beta > x > \gamma$, а на (α,γ) принимает отрицательные значения в интервалах $(\eta_j,\eta_j+\varepsilon)$, $1<j<n$, и положительна при всех $x\in(\alpha,\gamma)$ вне отрезков $[\eta_j,\eta_j+\varepsilon]$.

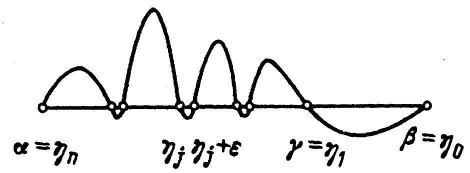

Рис. 6

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 6.1. *Пусть* TP*-ядро $G(s,x)$ определено в полуполосе $s>0$, $x\in[\alpha,\beta]$, непрерывно при $\alpha\leqslant x\leqslant\gamma<\beta$ и тождественно равно* 1 *при $x=\beta$: $G(s,\beta)\equiv 1$; $\mathcal{N}=\{a_1,\dots,a_n,s_1,\dots,s_n\}$ – произвольный набор из $\mathbb{N}_n$, t_n – произвольное число в интервале $(0,s_n)$. Тогда, каковы бы ни были точки η_j $(1<j<n)$ и число $\varepsilon>0$ такие, что*

$$\eta_0=\beta>\eta_1=\gamma>\eta_2>\dots>\eta_n=\alpha,\quad \eta_{j-1}>\eta_j+\varepsilon\quad(1<j<n),$$

существует ровно один набор $\mathcal{M}=\{b_1,\dots,b_n,t_1,\dots,t_n\}$, для которого разность $g(\mathcal{N},x)-g(\mathcal{M},x)$ генерирующих функций

$$g(\mathcal{N},x)=\sum_{j=1}^{n}a_jG(s_j,x),\qquad g(\mathcal{M},x)=\sum_{j=1}^{n}b_jG(t_j,x)$$

имеет $2n-1$ корней

$$x=\eta_j\quad(0\leqslant j\leqslant n)\quad\text{и}\quad x=\eta_j+\varepsilon\quad(1<j<n);$$

при этом $t_k\in(s_{k+1},s_k)$, $1\leqslant k<n$, и

$$g(\mathcal{N},x)-g(\mathcal{M},x)>0$$

всюду на (α,γ) вне отрезков $[\eta_j,\eta_j+\varepsilon]$, $1<j<n$.

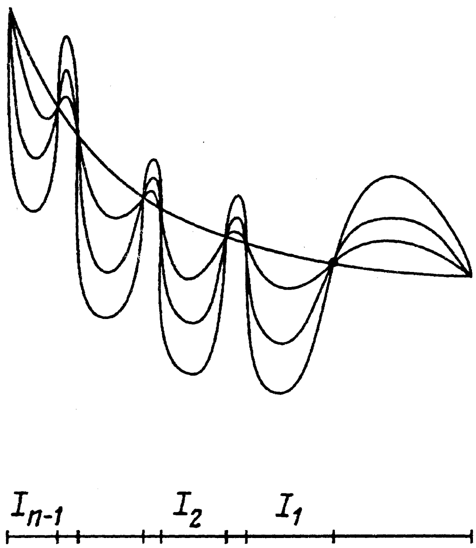

Рис. 7

6.3. Семейство $\mathscr{M}(t)$. Сталактиты. Если фиксировать набор $\mathscr{N} \in \mathbb{N}_n$, точки η_j $(0 \leqslant j \leqslant n)$ и число ε и менять $t_n = t \in (0, s_n)$, то набор $\mathscr{M}$ в лемме 6.1 окажется функцией t:

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}(t) = \{b_1(t), \dots, b_n(t),\ t_1(t), \dots, t_{n-1}(t),\ t_n = t\}.$$

Если $s_n > t^* > t > 0$, то по лемме 6.1 числа

$$s_j, \quad t_j^* = t_j(t^*) \quad \text{и} \quad t_j = t_j(t), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

чередуются: $s_1 > t_1^* > t_1 > \dots > t_{n-1}^* > t_{n-1} > s_n$, и

$$g(\mathscr{N}, x) > g(\mathscr{M}(t^*), x) > g(\mathscr{M}(t), x)$$

для любого x на (α, γ) вне отрезков $[\eta_j, \eta_j + \varepsilon]$, $1 < j < n$, так что на интервалах $I_k \subseteq (\eta_{k+1}, \eta_k) \subset (\alpha, \beta)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, разделяющих эти отрезки, графики $g(\mathscr{M}(t), x)$, $t \in (0, s_n)$, образуют *однопараметрическое семейство сталактитов* (рис. 7, сравним со случаем $n = 2$ в § 5).

Пусть ядро $G \in \mathbb{G}$. Предположим, что наборы

$$\mathscr{N} \in \mathbb{N}_n, \quad \mathscr{P} \in \mathbb{N}_p \quad (p > n, \quad \mathscr{P} \prec \mathscr{N})$$

удовлетворяют *условию минимальности*: не существует набора $\mathscr{M}$ ранга *меньше* n, для которого $\mathscr{P} \prec \mathscr{M} \prec \mathscr{N}$. Предположим также, что для генерирующих функций $g(\mathscr{P}, x)$ и $g(\mathscr{N}, x)$ выполняется *строгое неравенство*

$$g(\mathscr{P}, x) < g(\mathscr{N}, x), \qquad x \in [\alpha, \gamma],$$

так что при t, близких к s_n,

$$g(\mathscr{P}, x) < g(\mathscr{M}(t), x), \qquad x \in [\alpha, \gamma].$$

При уменьшении t последнее неравенство может нарушиться на одном или нескольких интервалах I_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$; цель, которую мы ставим перед собой в § 6, –

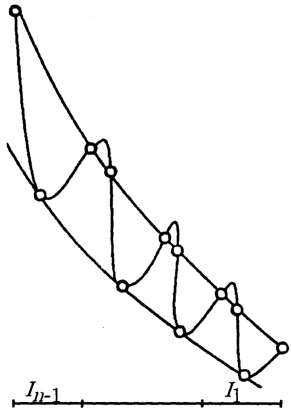

Рис. 8

доказать, что при фиксированном $\mathscr{N}$ и любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ можно подобрать такие

$$\eta_j \in (\alpha, \gamma) = (\eta_n, \eta_1), \quad \eta_{j-1} > \eta_j + \varepsilon, \qquad 1 < j < n,$$

что при уменьшении t сталактиты $g(\mathscr{M}(t), x)$ достигнут графика $g(\mathscr{P}, x)$ *одновременно* на всех интервалах $I_1, \ldots, I_{n-1}$ (рис. 8).

В § 7 мы выведем из этого факта теорему 2.

6.4. Предельные соотношения при $t \to 0$ и множества $\mathbb{M}_k(\varepsilon)$.

Лемма 6.2. *Если $G \in \mathbb{G}$, то при $t \to 0$ в наборе $\mathscr{M} = \mathscr{M}(t)$*

$$b_n(t) \to 0, \quad b_j(t) \to b_j^0 > 0, \quad t_j(t) \to t_j^0 \in (s_{j+1}, s_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1)$$

и $g(\mathscr{M}, x) \to g(\mathscr{M}^0, x)$ для всех $x \in (\alpha, \gamma]$, где

$$\mathscr{M}^0 = \{b_1^0, \ldots, b_{n-1}^0, t_1^0, \ldots, t_{n-1}^0\} \in \mathbb{N}_{n-1}.$$

Доказательство. Так же, как в лемме 5.2, доказывается, что при $t \to 0$

$$t_j(t) \to t_j^0 \in [s_{j+1}, s_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1), \quad b_n(t) \to 0, \quad b_n(t)G(t, x) \to 0$$

для любого $x \in (\alpha, \gamma]$. Так как $0 < b_j(t) < 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то при $t \to 0$ множество значений, принимаемых каждым коэффициентом $b_j(t)$, имеет предельную точку $b_j^0 \in [0, 1]$. Значит, для некоторой последовательности значений $t \to 0$

$$g(\mathscr{M}(t), x) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t) G(t_j(t), x) \to \sum_{j=1}^{n-1} b_j^0 G(t_j^0, x) = g(\mathscr{M}^0, x)$$

при всех $x \in (\alpha, \gamma]$ и при $x = \beta$ (отсюда $\sum_{j=1}^{n-1} b_j^0 = 1$). По построению

$$g(\mathscr{M}^0, x) = g(\mathscr{N}, x) \quad \text{при} \quad x = \eta_k \ (0 \leqslant k \leqslant n-1) \quad \text{и} \quad x = \eta_k + \varepsilon \ (1 < k < n).$$

Этими условиями $\mathscr{M}^0$ определяется однозначно: не существует набора

$$\mathscr{M}^* = \{b_1^*, \ldots, b_{n-1}^*, t_1^*, \ldots, t_{n-1}^*\} \neq \mathscr{M}^0,$$

для которого разность

$$g(\mathscr{M}^*, x) - g(\mathscr{M}^0, x) = \sum_{j=1}^{n-1} \left[b_j^* G(t_j^*, x) - b_j^0 G(t_j^0, x)\right]$$

имела бы $2n-2$ нуля. Поэтому $b_j(t)$ не имеет ни одной предельной точки $b_j^* \neq b_j^0$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$, т.е. $g(\mathscr{M}(t), x)$ сходится к $g(\mathscr{M}^0, x)$ на $(\alpha, \gamma]$ при $t \to 0$.

Из совпадения $g(\mathscr{M}_0, x)$ и $g(\mathscr{N}, x)$ в $2n-2$ точках следует также ⟨9⟩, что для каждого j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$, во-первых, $t_j^0 \neq s_{j+1}$, т.е. $t_j^0 \in (s_{j+1}, s_j)$, и во-вторых, $0 < b_j^0 < 1$, т.е. $\mathscr{M}^0 \in \mathbb{N}_{n-1}$.

Если $G \in \mathbb{G}$ и наборы $\mathscr{N} \in \mathbb{N}_n$, $\mathscr{P} \in \mathbb{N}_p$ $(p > n,\ \mathscr{P} \prec \mathscr{N})$ удовлетворяют *условию минимальности* (см. 6.3), то из леммы 6.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Неравенство $g(\mathscr{P}, x) < g(\mathscr{M}(t), x)$, $x \in (\alpha, \gamma]$, не может выполняться при всех $t \in (0, s_n)$.*

Подробнее: пусть (см. 6.3) при t, близких к s_n,

$$g(\mathscr{P}, x) < g(\mathscr{M}(t), x), \qquad x \in [\alpha, \gamma],$$

тогда при уменьшении t это неравенство *обязательно нарушится*: для некоторого числа $t_0 \in (0, s_n)$ и некоторой точки $\zeta \in (\alpha, \gamma)$ окажутся выполненными условия

$$g(\mathscr{P}, \zeta) = g(\mathscr{M}(t_0), \zeta) \quad \text{и} \quad g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{M}(t_0), x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha, \gamma].$$

Эти t_0 и ζ зависят от выбора точек η_j, $1 < j < n$, которые (вместе с набором $\mathscr{N}$ и числом $\varepsilon > 0$) определяют семейство $\mathscr{M}(t)$. Точка ζ заведомо не принадлежит отрезкам $[\eta_j, \eta_j + \varepsilon]$, $1 < j < n$ (где $g(\mathscr{M}(t), x) \geqslant g(\mathscr{N}, x) > g(\mathscr{P}, x)$) и, следовательно, лежит в одном из интервалов $I_1, \ldots, I_{n-1} \subset (\alpha, \gamma)$, разделяющих эти отрезки.

Введем следующее обозначение: отнесем $\eta = \{\eta_j\}_{j=2}^{n-1}$ к множеству $\mathbb{M}_k(\varepsilon)$, если уравнение

$$g(\mathscr{P}, x) = g(\mathscr{M}(t_0), x)$$

имеет корень

$$x = \zeta \in I_k \subseteq (\eta_{k+1}, \eta_k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

и $g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{M}(t_0), x)$ при всех $x \in [\alpha, \gamma]$.

6.5. Лемма о сталактитах. Из леммы Шпернера [14] следует ⟨10⟩: пересечение $\mathbb{M}_1(\varepsilon) \cap \cdots \cap \mathbb{M}_{n-1}(\varepsilon) = \mathbb{M}(\varepsilon)$ не пусто, т.е. доказана

ЛЕММА 6.3. *Пусть $G \in \mathbb{G}$, наборы $\mathscr{N} \in \mathbb{N}_n$, $\mathscr{P} \in \mathbb{N}_p$ $(p > n,\ \mathscr{P} \prec \mathscr{N})$ удовлетворяют условию минимальности (не существует набора $\mathscr{M}$ ранга меньше n, для которого $\mathscr{P} \prec \mathscr{M} \prec \mathscr{N}$) и выполняется строгое неравенство $g(\mathscr{P}, x) < g(\mathscr{N}, x)$, $x \in [\alpha, \gamma]$.*

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют такие η_j,

$$\eta_0 = \beta > \eta_1 = \gamma > \eta_2 > \cdots > \eta_n = \alpha, \qquad \eta_{j-1} > \eta_j + \varepsilon \quad (1 < j < n),$$

что построенные по ним сталактиты $g(\mathscr{M}(t), x)$ достигают графика $g(\mathscr{P}, x)$ одновременно на всех интервалах $I_1, \ldots, I_{n-1} \subset (\alpha, \gamma)$, разделяющих отрезки $[\eta_j, \eta_j + \varepsilon]$, $1 < j < n$.

Иначе говоря, найдутся $t_0 \in (0, s_n)$ и такие $\zeta_k \in I_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, что

$$g(\mathscr{P}, \zeta_k) = g(\mathscr{M}(t_0), \zeta_k) \quad \text{и} \quad g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{M}(t_0), x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha, \gamma].$$

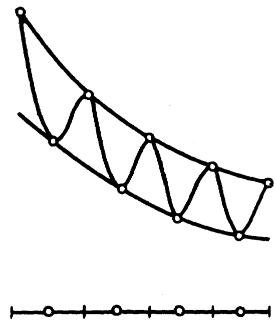

Рис. 9

§7. Доказательство теоремы об отношениях предшествования

Устремляя ε к нулю, получаем (рис. 9), что верна

Лемма 7.1. *В условиях леммы 6.3 существуют такие чередующиеся точки*

$$\eta_1 = \gamma > \zeta_1 > \eta_2 > \dots > \zeta_{n-1} > \eta_n = \alpha \qquad (*)$$

и такой набор $\mathscr{M} \in \mathrm{N}_n$, что график $g(\mathscr{M}, x)$, $x \in [\alpha, \gamma]$, располагается между графиками $g(\mathscr{N}, x)$ и $g(\mathscr{P}, x)$, попеременно совпадая с ними в точках $(*)$:

$$g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{M}, x) \leqslant g(\mathscr{N}, x), \qquad x \in [\alpha, \gamma];$$
$$g(\mathscr{M}, \eta_j) = g(\mathscr{N}, \eta_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \qquad g(\mathscr{M}, \zeta_k) = g(\mathscr{P}, \zeta_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Докажем, что $g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{M}, x)$ на всем отрезке $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, и выведем отсюда теорему 2.

Лемма 7.2. *Пусть* TP*-ядро $G(s, x)$ определено в полуполосе $s > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ и непрерывно при $\alpha \leqslant x \leqslant \gamma < \beta$, и пусть для наборов*

$$\mathscr{M} \in \mathrm{N}_n, \quad \mathscr{P} \in \mathrm{N}_p \qquad (2 \leqslant n < p, \quad \mathscr{P} \prec \mathscr{M})$$

разность генерирующих функций $g(\mathscr{M}, x) - g(\mathscr{P}, x)$ имеет n корней:

$$x = \beta \quad \text{и} \quad x = \zeta_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1), \qquad \gamma > \zeta_1 > \dots > \zeta_{n-1} > \alpha.$$

Тогда $g(\mathscr{M}, x) > g(\mathscr{P}, x)$ на $[\gamma, \beta)$, т.е. $\mathscr{P} \prec\!\!< \mathscr{M}$.

Доказательство. Пусть

$$\mathscr{M} = \{b_1, \dots, b_n, t_1, \dots, t_n\}, \qquad \mathscr{P} = \{c_1, \dots, c_p, u_1, \dots, u_p\}.$$

Для малого $\varepsilon > 0$ положим

$$Q = Q(x, \varepsilon) = g(\mathscr{M}, x) - g(\mathscr{P}, x) - \varepsilon \begin{vmatrix} G(t_1, \beta) & G(t_1, x) \\ G(t_2, \beta) & G(t_2, x) \end{vmatrix}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k(t) G(t_k, x) - \sum_{k=1}^{p} c_k G(u_k, x),$$

где $\bar{b}_1 = b_1 + \varepsilon G(t_2, \beta)$, $\bar{b}_2 = b_2 - \varepsilon G(t_1, \beta)$, $\bar{b}_k = b_k$ при $3 \leqslant k \leqslant n$. Определитель в формуле для Q (множитель при ε) положителен при $x \in [\alpha, \beta)$ и равен нулю при $x = \beta$. Поэтому для некоторых

$$\zeta_k^+ = \zeta_k^+(\varepsilon), \quad \zeta_k^- = \zeta_k^-(\varepsilon), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

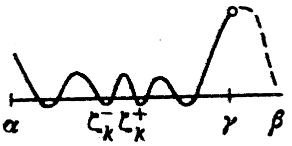

Рис. 10

стремящихся к ζ_k при $\varepsilon \to 0$ (рис. 10),

$$Q = 0 \text{ при } x = \beta, \quad x = \zeta_k^+ \text{ и } x = \zeta_k^- \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1),$$
$$Q > 0 \text{ при } x \in [\alpha, \gamma] \text{ вне отрезков } [\zeta_k^-, \zeta_k^+], \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Все k, $1 \leqslant k \leqslant p$, для которых $u_k \neq t_1, \ldots, t_n$, разобьем на $n+1$ классов $K_j = \{k \mid t_{j-1} > u_k > t_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1, t_0 = +\infty, t_{n+1} = 0)$. Просуммируем $c_k G(u_k, x)$ по всем $k \in K_j$:

$$e_j(x) = \sum c_k G(u_k, x), \qquad k \in K_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1,$$

и представим Q в виде

$$Q = \sum_{k=1}^{n} b_k^0 G(t_k, x) - \sum_{j=1}^{n+1} e_j(x), \tag{$*$}$$

где $b_k^0 = \bar{b}_k$, если среди $u_1, \ldots, u_p$ нет числа t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, и $b_k^0 = \bar{b}_k - c_j$, если $u_j = t_k$.

Замечание. Можно считать, что ни один из классов K_j $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$ не пуст (все $e_j \not\equiv 0$). Иначе число нулей Q лишь на 1 меньше числа слагаемых в $(*)$, и Q однозначно с точностью до множителя $q > 0$ записывается в виде определителя, не меняющего знак на $[\gamma, \beta)$, что доказывает лемму 7.2; например, если $e_{n+1}(x) \equiv 0$, то $Q = q\Delta$, где определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_1(\beta) & \ldots & e_1(\zeta_k^+) & e_1(\zeta_k^-) & \ldots & e_1(x) \\ G(t_1, \beta) & \ldots & G(t_1, \zeta_k^+) & G(t_1, \zeta_k^-) & \ldots & G(t_1, x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_n(\beta) & \ldots & e_n(\zeta_k^+) & e_n(\zeta_k^-) & \ldots & e_n(x) \\ G(t_n, \beta) & \ldots & G(t_n, \zeta_k^+) & G(t_n, \zeta_k^-) & \ldots & G(t_n, x) \end{vmatrix}$$

положителен на $[\gamma, \beta)$, поскольку G является ТР-ядром.

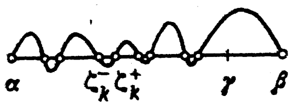

Рис. 11

Итак, предположим, что все $e_j \not\equiv 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$. По критерию из 3.3 функции $e_1(x), G(t_1, x), \ldots, e_n(x), G(t_n, x), e_{n+1}(x)$ образуют Т-систему на $[\alpha, \beta]$. Поэтому (рис. 11) однозначно строится функция

$$P = P(x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} b_k^* G(t_k, x) - \sum_{j=1}^{n} c_j^* e_j(x) - e_{n+1}(x)$$

с корнями β, ζ_k^+, ζ_k^- $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ и α, положительная всюду на (α, β) вне отрезков $[\zeta_k^-, \zeta_k^+]$ и отрицательная при $x \in (\zeta_k^-, \zeta_k^+)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$P = p \begin{vmatrix} e_1(\beta) & \ldots & e_1(\zeta_k^+) & e_1(\zeta_k^-) & \ldots & e_1(x) & e_1(\alpha) \\ G(t_1, \beta) & \ldots & G(t_1, \zeta_k^+) & G(t_1, \zeta_k^-) & \ldots & G(t_1, x) & G(t_1, \alpha) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_n(\beta) & \ldots & e_n(\zeta_k^+) & e_n(\zeta_k^-) & \ldots & e_n(x) & e_n(\alpha) \\ G(t_n, \beta) & \ldots & G(t_n, \zeta_k^+) & G(t_n, \zeta_k^-) & \ldots & G(t_n, x) & G(t_n, \alpha) \\ e_{n+1}(\beta) & \ldots & e_{n+1}(\zeta_k^+) & e_{n+1}(\zeta_k^-) & \ldots & e_{n+1}(x) & e_{n+1}(\alpha) \end{vmatrix},$$

множитель $p > 0$ выбирается так, чтобы коэффициент при $e_{n+1}(x)$ оказался равным -1.

Разность $R = Q - P$ является линейной комбинацией $2n$ функций

$$e_1(x), G(t_1, x), \ldots, e_n(x), G(t_n, x),$$

образующих Т-систему порядка $2n-1$. Разность R имеет $2n-1$ корней:

$$x = \beta, \quad x = \zeta_k^+, \quad x = \zeta_k^- \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Значит, $R = r\Delta$, где Δ – выписанный выше определитель (см. замечание). Так как $R > 0$ при $x = \alpha$, то $r > 0$. Поэтому $R > 0$ на $[\gamma, \beta)$. Поскольку и $P > 0$ на $[\gamma, \beta)$, то

$$Q = R + P > 0 \quad \text{на} \quad [\gamma, \beta).$$

Отсюда и $g(\mathscr{M}, x) - g(\mathscr{P}, x) > Q > 0$ на $[\gamma, \beta)$.

Лемма 7.3. *Пусть ядро $G(s, x) \in \mathbb{G}$ при $s > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ и $\gamma \in (\alpha, \beta)$, и пусть для наборов*

$$\mathscr{N} = \{a_1, \ldots, a_n, s_1, \ldots, s_n\} \in \mathrm{N}_n \quad \text{и} \quad \mathscr{P} \in \mathrm{N}_p \quad (p > n, \ \mathscr{P} \prec \mathscr{N})$$

выполняется строгое неравенство

$$g(\mathscr{P}, x) < g(\mathscr{N}, x), \qquad x \in [\alpha, \gamma].$$

Тогда найдется набор $\mathscr{M} = \{b_1, \ldots, b_m, t_1, \ldots, t_m\} \in \mathrm{N}_m$, $m \leqslant n$, с числами $t_j \in (0, s_1)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, для которого

$$g(\mathscr{M}, x) \leqslant g(\mathscr{N}, x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha, \gamma] \quad \text{и} \quad g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{M}, x) \quad \text{при} \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Замечание. Прежде, чем доказывать лемму 7.3, отметим, что из нее предельным переходом (использующим ограниченность b_j и t_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и непрерывность $G(s, x)$ по s при $x \in [\alpha, \beta]$) следует

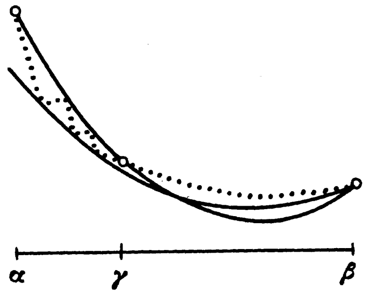

Рис. 12

Утверждение 3. *Пусть* $G \in \mathbb{G}$, $p > n$, $\mathscr{N} \in \mathrm{N}_n$ *и* $\mathscr{P} \in \mathrm{N}_p$, *и пусть* $\mathscr{P} \prec \mathscr{N}$, *т.е. для генерирующих функций* $g(\mathscr{N}, x)$ *и* $g(\mathscr{P}, x)$ *выполняется нестрогое неравенство*

$$g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{N}, x) \quad \textit{при} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \gamma < \beta.$$

Тогда найдется набор $\mathscr{M}$, $\operatorname{rank} \mathscr{M} \leqslant n$, *для которого* $\mathscr{P} \prec\prec \mathscr{M} \prec \mathscr{N}$, *т.е.*

$$g(\mathscr{M}, x) \leqslant g(\mathscr{N}, x) \;\; \textit{при} \;\; x \in [\alpha, \gamma] \quad \textit{и} \quad g(\mathscr{P}, x) \leqslant g(\mathscr{M}, x) \;\; \textit{при} \;\; x \in [\alpha, \beta].$$

Доказательство. Докажем лемму 7.3 индукцией по n. Для $n \leqslant 2$ она верна (см. лемму 5.4 и утверждение 1 в § 4). Допустим, что она, а значит, и утверждение 3 верны для наборов $\mathscr{N} = \mathscr{M}^0$ ранга меньше n, и докажем ее для наборов $\mathscr{N} \in \mathrm{N}_n$.

По условию $\mathscr{P} \prec \mathscr{N}$. Если существует такой набор $\mathscr{M}^0$, $\operatorname{rank} \mathscr{M}^0 = m^0 \leqslant n$, что $\mathscr{P} \prec \mathscr{M}^0 \prec \mathscr{N}$, то (по индукционному допущению) найдется $\mathscr{M} \in \mathrm{N}_m$, $m \leqslant m^0 \leqslant n$, для которого $\mathscr{P} \prec\prec \mathscr{M} \prec \mathscr{M}^0 \prec \mathscr{N}$, и лемма 7.3 доказана. Если такого набора $\mathscr{M}^0$ не существует, т.е. выполняется условие минимальности, то лемма 7.3 и утверждение 3 следуют из лемм 7.1, 7.2 (рис. 12).

Доказательство теоремы об отношениях предшествования закончено.

§ 8. Комментарии

1. Было бы неверно думать, что $h(f^*) < h(f)$, если $f^* \prec f$, а число ступенек f^* больше, чем у f. Тем неожиданнее теорема 2.2.

2. $h(\mathscr{M}) - h(\mathscr{P}) = \displaystyle\int_\alpha^\beta [g(\mathscr{M}, x) - g(\mathscr{P}, x)]\, d\theta(x)$.

Разность $g(\mathscr{M}, x) - g(\mathscr{P}, x)$ неотрицательна и имеет конечное число корней, а $d\theta(x) \geqslant 0$ и не сосредоточена в конечном числе точек. Значит, $h(\mathscr{M}) > h(\mathscr{P})$.

3. В доказательстве теоремы 2 мы будем трактовать наборы из N_n как точки симплексов с вершинами на $\mathscr{V}$.

4. При $x \in (\gamma, \beta]$ непрерывность по x не предполагается (в примере 3.2 ее нет при $x = \beta$).

5. Иначе нетривиальная линейная комбинация $\sum_{0 \leqslant k \leqslant 2} p_k \xi_k(s)$ имела бы три корня.

6. Линейная комбинация $A_1 \rho(x) - a_1 P(x)$ трех функций $G(t_1, x)$, $G(s_2, x)$, $G(t_2, x)$, образующих Т-систему порядка 2, имеет три корня (α, β и γ), и значит, тождественно равна нулю.

7. По построению $G(t_0, \gamma) = g(\mathscr{N}, \gamma) = a_1 G(s_1, \gamma) + a_2 G(s_2, \gamma)$, а при $t_0 = s_2$ это равенство невозможно, так как (по лемме 4.1) $G(s_2, \gamma) > G(s_1, \gamma)$, а коэффициенты $a_{1,2} > 0$ и в сумме равны 1.

8. Выделим на $\mathscr{V}$ дугу $\mathscr{D}$ с концами $S_1 = \xi(s_1)$, $T_n = \xi(t_n)$ (на рис. 13 индекс $n = 3$) и рассмотрим ее замкнутую выпуклую оболочку $\mathscr{R}(\mathscr{D})$. По теореме Рисса [12, с. 30] $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ совпадает с множеством центров масс, расположенных на дуге $\mathscr{D}$. Проведем луч $T_n\mathscr{C}$. Пусть $\mathscr{E}$ – точка, в которой он выходит из $\mathscr{R}(\mathscr{D})$, и Γ – опорная гиперплоскость к $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ в точке $\mathscr{E}$.

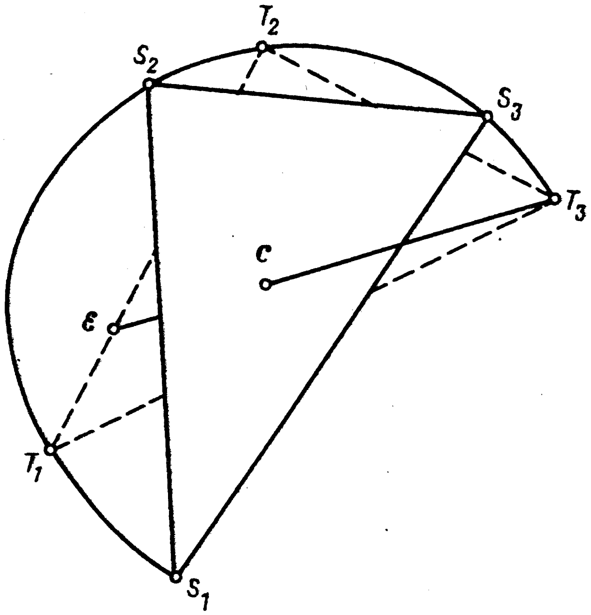

Рис. 13

До сих пор построение проводилось в аффинном подпространстве $\xi_0 = 1$ в $\mathbb{R}^{2n-1}$, так что $\dim\Gamma = 2n-3$. Теперь возьмем линейное подпространство Λ в $\mathbb{R}^{2n-1}$ ($\dim\Lambda = 2n-2$), содержащее Γ:

$$\lambda_0\xi_0 + \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_{2n-2}\xi_{2n-2} = 0,$$

ориентацию выберем так, чтобы для точек дуги $\mathscr{D}$

$$\xi(s) = \{\xi_j(s)\}_{j=0}^{2n-2}, \qquad t_n < s < s_1,$$

(лежащих по одну сторону от Λ) многочлен $\mu(s) = \sum_{j=0}^{2n-2}\lambda_j\xi_j(s)$ был неотрицателен (на $\mathscr{D}\cap\Gamma$ он равен нулю).

Представим $\mathscr{E}$ как центр масс на дуге $\mathscr{D}$. Так как $\mathscr{E}\in\mathscr{R}(\mathscr{D})\cap\Gamma$, то все эти массы расположены в точках $\mathscr{D}\cap\Gamma$. Таких точек – конечное число k (не больше, чем корней $\mu(s)$), т.е.

$$\mathscr{E} = \sum_{j=1}^{k} d_j\xi(t_j), \qquad \sum_{j=1}^{k} d_j = 1, \quad d > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \tag{$*$}$$
$$s_1 \geqslant t_1 > t_2 > \cdots > t_k \geqslant t_n.$$

Докажем, что последнее неравенство – строгое: $t_k > t_n$ и $k = n-1$.

Доказательство. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство Π, содержащее точки $S_1, \ldots, S_n, T_n$, и его $(n-1)$-мерное подпространство π, содержащее $S_1, \ldots, S_n$. Так как $\mathscr{C} \in \pi \subset \Pi$, то $T_n\mathscr{C} \subset \Pi$ и $\mathscr{E} \in \mathscr{R}(\mathscr{D}) \cap \Gamma \cap \Pi$. Аффинное пространство $\Gamma \cap \Pi$ является опорным к выпуклому множеству $\mathscr{R}(\mathscr{D}) \cap \Pi$ в точке $\mathscr{E}$. Это опорное пространство не содержит T_n (иначе точка T_n была бы видна из $\mathscr{E}$, а это – не так, поскольку луч $T_n\mathscr{E}$ пересекает симплекс $S = (S_1, \ldots, S_n) \subset \pi$ во внутренней точке $\mathscr{C}$ и, следовательно, S отгораживает T_n от $\mathscr{E}$ в Π). Значит, $T_n \notin \Gamma$ и ни одна из масс d_j в $(*)$ не сосредоточена в T_n, т.е. $t_k > t_n$.

Замечание. В приведенном рассуждении использовано, что Γ не содержит Π (и значит, $\Gamma \cap \Pi \neq \Pi$): если бы точки $S_1, \ldots, S_n, T_n$ принадлежали Γ, то у многочлена $\mu(s) - \varepsilon$ было не меньше, чем $2n$ корней.

Проверим теперь, что неравенства $k < n-1$ и $k > n-1$ невозможны и, следовательно, $k = n-1$.

Предположение $k < n-1$ противоречит выпуклости $\mathscr{V}$: считая, что $k = n-2$ (если $k < n-2$, нужно добавить в $(*)$ точки $t_j \in (t_n, s_1)$ с нулевыми массами d_j, $k+1 \leqslant j \leqslant n-2$), рассмотрим аффинное пространство $\mathscr{A}$, $\dim \mathscr{A} = 2n-3$, содержащее точки

$$\xi(s_1), \ldots, \xi(s_n), \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-2}); \qquad (**)$$

с одной стороны, по определению выпуклости, $\mathscr{A}$ не содержит ни одной точки $\mathscr{V}$, кроме точек $(**)$; с другой стороны, вместе с точками $\mathscr{C}, \mathscr{E} \in \mathscr{A}$ вся прямая $\mathscr{C}\mathscr{E}$ принадлежит $\mathscr{A}$ и, значит, $T_n \in \mathscr{C}\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$.

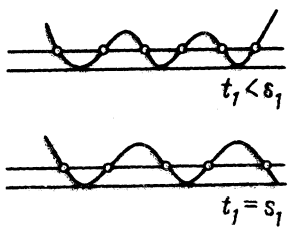

Рис. 14

Неравенство $k > n-1$ невозможно, так как в этом случае число корней многочлена $\mu(s) - \varepsilon$ (рис. 14) больше, чем $2n-2$.

Так как $\mathscr{C} = b_n T_n + (1-b_n)\mathscr{E}$, то, полагая

$$b_j = (1-b_n)d_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

ввиду $(*)$ получаем: $\mathscr{C} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j \xi(t_j)$. Так как, с другой стороны, $\mathscr{C} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \xi(s_j)$, то, по определению вектор-функции $\xi(s)$, многочлен

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \big[a_j G(s_j, x) - b_j G(t_j, x)\big] = 0$$

при $x = \eta_j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ и $x = \eta_j + \varepsilon$ $(1 < j < n)$. Числа b_j и точки t_j определяются этим условием однозначно: иначе линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^{n-1} \big[b_j^* G(t_j^*, x) - b_j G(t_j, x)\big] + (b_n^* - b_n) G(t_n, x)$$

функций Т-системы порядка не выше $2n-2$ имела бы $2n-1$ нулей.

Более того, из указанного условия следует, что точки s_j и t_j чередуются:

$$s_1 > t_1 > \cdots > s_n > t_n.$$

Доказательство. С точностью до положительного множителя многочлен $P(x)$ равен определителю

$$\begin{vmatrix} G(s_1,x) & G(s_1,\beta) & G(s_1,\gamma) & \dots & G(s_1,\eta_j+\varepsilon) & G(s_1,\eta_j) & \dots & G(s_1,\alpha) \\ G(t_1,x) & G(t_1,\beta) & G(t_1,\gamma) & \dots & G(t_1,\eta_j+\varepsilon) & G(t_1,\eta_j) & \dots & G(t_1,\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(s_n,x) & G(s_n,\beta) & G(s_n,\gamma) & \dots & G(s_n,\eta_j+\varepsilon) & G(s_n,\eta_j) & \dots & G(s_n,\alpha) \\ G(t_n,x) & G(t_n,\beta) & G(t_n,\gamma) & \dots & G(t_n,\eta_j+\varepsilon) & G(t_n,\eta_j) & \dots & G(t_n,\alpha) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_j G(s_j,x) - \sum_{j=1}^{n} B_j G(t_j,x),$$

и числа A_j, B_j, пропорциональные a_j, b_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, положительны только в том случае, когда $s_1 > t_1 > \cdots > s_n > t_n$.

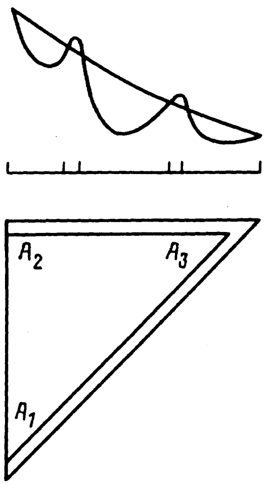

Рис. 15

9. Линейная комбинация

$$g(\mathscr{N},x) - g(\mathscr{M}^0,x) = \sum_{j=1}^{n} a_j G(s_j,x) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j^0 G(t_j^0,x)$$

нетривиальна (поскольку $a_1 \neq 0$) и имеет $2n-2$ нуля

$$x = \eta_k \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1), \qquad x = \eta_k + \varepsilon \quad (1 < k < n),$$

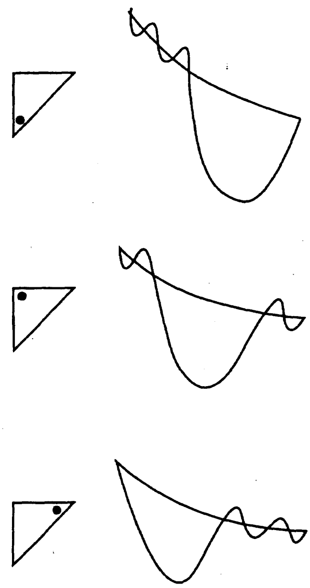

Рис. 16

поэтому все функции $G(s_j, x)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $G(t_j^0, x)$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ различны и все b_j^0 $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ отличны от нуля.

10. Пусть $n = 4$ (рис. 15). На плоскости η_3, η_2 неравенства

$$\eta_4 = \alpha < \eta_3 < \eta_3 + \varepsilon < \eta_2 < \eta_2 + \varepsilon < \eta_1 = \gamma$$

задают открытый треугольник с вершинами

$$A_1 = (\alpha, \alpha+\varepsilon), \quad A_2 = (\alpha, \gamma-\varepsilon), \quad A_3 = (\gamma - 2\varepsilon, \gamma - \varepsilon).$$

Каждая точка $A = (\eta_3, \eta_2) \in \Delta A_1 A_2 A_3$ отнесена хотя бы к одному из множеств $\mathbb{M}_{1,2,3}(\varepsilon)$ (см. обозначение в конце 6.4). Нумерация множеств $\mathbb{M}_k(\varepsilon)$ и вершин A_k согласована (рис. 16): точки, расположенные вблизи вершины A_k, принадлежат $\mathbb{M}_k(\varepsilon)$, $1 \leqslant k \leqslant 3$; более того, легко проверить, что точки вблизи стороны $A_j A_k$ принадлежат $\mathbb{M}_j(\varepsilon) \cup \mathbb{M}_k(\varepsilon)$, $1 \leqslant j < k \leqslant 3$. Это позволяет доказать с помощью леммы Шпернера, что

$$\mathbb{M}_1(\varepsilon) \cap \mathbb{M}_2(\varepsilon) \cap \mathbb{M}_3(\varepsilon) \neq 0.$$

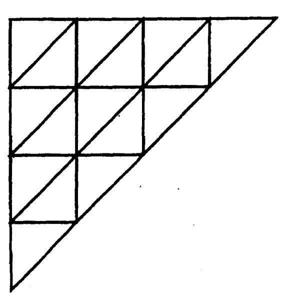

Рис. 17

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим три семейства прямых, параллельных сторонам треугольника $A_1A_2A_3$. Взяв в каждом семействе по $2^N - 1$ равноотстоящих прямых (рис. 17), получим *триангуляцию* $\mathscr{T}_N$. Каждой вершине V триангуляции присвоим номер, равный $\min\{j \mid \mathbb{M}_j(\varepsilon) \ni V\}$. При большом N вершины вблизи A_j получат номер j, а вершины вблизи A_jA_k – номера j или k.

По лемме Шпернера найдется треугольник Δ_N триангуляции $\mathscr{T}_N$ с вершинами, получившими номера $1, 2, 3$ (лемма Шпернера утверждает, что таких правильно занумерованных треугольников – нечетное число). Пусть A – предельная точка последовательности Δ_N $(N \to \infty)$. Тогда A принадлежит пересечению $\mathbb{M}(\varepsilon) = \mathbb{M}_1(\varepsilon) \cap \mathbb{M}_2(\varepsilon) \cap \mathbb{M}_3(\varepsilon)$, т.е. $\mathbb{M}(\varepsilon)$ не пусто.

В общем случае доказательство аналогично.

Список литературы

1. *Гервер М. Л., Маркушевич В. М.* Исследование неоднозначности при определении по годографу скорости распространения сейсмической волны // ДАН СССР. 1965. Т. 163. №6. С. 1377–1380.
2. *Gerver M. L., Markushevich V. M.* Determination of seismic wave velocity from the travel-time curve // Geophys. J. R. astr. Soc. 1966. V. 11. P. 165–173.
3. *Гервер М. Л., Маркушевич В. М.* Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны. Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений // Вычисл. сейсмология. Вып. 3. М.: Наука, 1967. С. 3–51.
4. *Гервер М. Л.* Теоремы сравнения в одномерной обратной кинематической задаче. Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных // Вычисл. сейсмология. Вып. 22. М.: Наука, 1989. С. 127–137.
5. *Гервер М. Л.* Волноводы и устойчивые многочлены. I. Компьютерный анализ геофизических полей // Вычисл. сейсмология. Вып. 23. М.: Наука, 1990. С. 182–205.
6. *Гервер М. Л.* Волноводы и устойчивые многочлены. II. Современные методы интерпретации сейсмологических данных // Вычисл. сейсмология. Вып. 24. М.: Наука, 1991. С. 102–148.
7. *Гервер М. Л.* Рациональные аппроксимации, устойчивые многочлены и расслоения в задаче поиска самого широкого волновода. Геодинамика и прогноз землетрясений // Вычисл. сейсмология. Вып. 26. М.: Наука, 1994. С. 176–201.
8. *Гервер М. Л.* Существование и единственность максимума и теоремы о конусах l-аппроксимациях и расслоениях для одного класса экстремальных задач // Препринт: МИТП РАН, 1994.
9. *Gerver M. L.* Hierarchy and Influence Zones for a Class of Extremum Problems: Theorems and Conjectures // Preprint, 1993.
10. *Gerver M. L.* Hierarchy and Influence Zones for a Class of Extremum Problems: with Applications in Travel-Time Inversion // Special Semester in Approximation Theory. Israel, 1994.
11. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
12. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
13. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
14. *Sperner E.* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes // Abh. Math. Sem. V. 6. Hamburg, 1928. P. 265–272.

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН
e-mail: mitpan@venus. mitp. rssi. ru
(with the indication in subject: *for Dr. M. Gerver*);
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mitpan@venus. mitp. rssi. ru
(with the indication in subject: *for M. Gerver and E. Kudryavtseva*)

Поступила в редакцию
29.12.1994