УДК 517+550.34

М. Л. Гервер, Е. А. Кудрявцева

Универсальная последовательность в классической задаче обращения годографа

Обращение годографа – фундаментальная задача математической геофизики: на (и вблизи) поверхности Земли происходят взрывы и землетрясения, приборы регистрируют сигналы от них, и по временам пробега сигналов от источников до приемников (по годографу) нужно найти скорость упругих волн внутри Земли. После пионерских работ начала века и детальных исследований 60-х годов трудно было ожидать появления принципиально новых результатов в этой задаче в ее классической постановке, когда скорость волн предполагается зависящей только от глубины. Оказалось однако, что считать эту постановку исчерпанной преждевременно. Доказанные в статье теоремы об универсальной последовательности и экстремальных свойствах дискретных мер, вероятно, удивят специалистов по обратным задачам и заинтересуют знатоков и любителей экстремальных задач.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

Недавно были установлены неожиданные связи между задачей обращения годографа и, на первый взгляд, далекими от нее областями: геометрией устойчивых многочленов, рациональными аппроксимациями, чебышёвскими системами и вполне положительными ядрами. Обнаружение и изучение этих связей и, особенно, работы [1]–[3] привели к существенному продвижению в задаче обращения годографа [4], [5]. В статье после обзора установленных ранее фактов доказаны теоремы, сформулированные в заметках [4], [5] и докладах [6], [7], а также ряд новых теорем.

§ 2. Какого типа задачи решаются в статье?

Прежде чем приступить к систематическому изложению результатов (оно начнется в § 3), расскажем, какого типа задачи решаются в статье.

Начнем с простого примера. Возьмем три табличных интеграла:

$$\int_0^1 ds = 1, \qquad \int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}\,, \qquad \int_0^1 s^2\,ds = \frac{1}{3}\,.$$

Рассмотрим стилтьесовские меры $da(s) \geqslant 0$ на $[0,1]$, для которых

$$I_0 = \int_0^1 da(s) = 1, \qquad I_1 = \int_0^1 s\,da(s) = \frac{1}{2}\,,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01852).

и найдем максимум и минимум интеграла $I_2 = \int_0^1 s^2\,da(s)$ по всем таким мерам. Нетрудно проверить⟨1⟩ (здесь и далее ссылка вида ⟨k⟩ отсылает к комментарию с номером k в конце статьи), что искомые экстремумы достигаются на *дискретных мерах*

$$da_1(s) = \frac{\delta(s)+\delta(s-1)}{2}\,ds, \qquad da_2(s) = \delta\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\,ds,$$
$$\max I_2 = \int_0^1 s^2\,da_1(s) = \frac{1}{2}\,, \qquad \min I_2 = \int_0^1 s^2\,da_2(s) = \frac{1}{4}\,.$$

Этот несложный результат (легко обобщаемый с помощью теории *канонических представлений* Маркова–Крейна [8]) сродни основным теоремам нашей статьи. Теоремы сформулированы в § 5 и доказаны в §§ 6–10. Необходимые для их понимания геофизические сведения собраны в подготовительных § 3 и § 4.

Математическая ситуация такова. Некоторое правило

$$da \;\mapsto\; g = g(da,t), \quad h = h(da,t), \qquad t \in \Delta \tag{$*$}$$

(точнее оно описано чуть ниже), сопоставляет каждой неотрицательной мере Стилтьеса

$$da = da(s), \qquad s > 0, \quad \int_0^\infty da(s) = 1,$$

две функции (g и h) на отрезке Δ. Меры da пропускаются через своеобразный *фильтр*, а именно: фиксируется некоторая положительная функция (*мажоранта*) $M(t)$, $t \in \Delta$, и da считается прошедшей через фильтр, если

$$g(da,t) \leqslant M(t) \quad \text{при всех} \quad t \in \Delta. \tag{$**$}$$

На множестве ($**$) мер da рассматривается однопараметрическое (зависящее от параметра t) семейство экстремальных задач:

$$\textit{найти} \;\; \max h(da,t), \;\; t \in \Delta. \tag{$***$}$$

Правило ($*$) состоит в следующем. Рассматривается некоторый класс $\mathbb{K}$ функций (*ядер*) $K(s,t)$, $s > 0$, $-\infty < \alpha \leqslant t \leqslant \beta \leqslant \infty$, со свойствами, аналогичными свойствам ядра Коши

$$C(s,t) = \frac{1}{s+t}, \qquad s > 0, \quad t \geqslant 0.$$

Фиксируются ядро $K(s,t) \in \mathbb{K}$, число $\gamma \in (\alpha,\beta)$ и такая неотрицательная мера Стилтьеса $d\theta$ на $[\alpha,\beta)$, что следующие интегралы сходятся:

$$\kappa(s,t) = \int_t^\beta K(s,x)\,d\theta(x) < \infty, \qquad s > 0, \quad t \in \Delta = [\alpha,\gamma].$$

Функции g и h в $(*)$ определяются следующим образом:

$$g(da,t)=\int_0^\infty K(s,t)\,da(s),\qquad h(da,t)=\int_0^\infty \kappa(s,t)\,da(s)=\int_t^\beta g(da,x)\,d\theta(x).$$

Оказывается тогда, как и в рассмотренном в начале § 2 примере, искомые максимумы $(***)$ достигаются на *дискретных мерах.* Подробнее: при некоторых условиях на $K, d\theta$ и $M(t)$ *для каждого* $t\in(\alpha,\gamma]$ *существуют и однозначно определяются* $n=n(t)$ *и такой набор чисел* $\{a_1,\dots,a_n,s_1,\dots,s_n\}$,

$$a_j=a_j(t)>0,\quad \sum a_j=1,\quad s_1=s_1(t)>\dots>s_n=s_n(t)>0,$$

что максимум $h(da,t)$ *достигается на мере*

$$da=da(s)=\sum a_j\delta(s-s_j)\,ds,\qquad 1\leqslant j\leqslant n=n(t).$$

Более того, существует такая *универсальная* (определяемая ядром K и мерой $d\theta$ и *не зависящая от выбора мажоранты* $M(t)$) невозрастающая и сходящаяся к α последовательность $t_k\in[\alpha,\gamma]$, $k\geqslant 1$, что для функции $n(t)$ выполняется неравенство

$$n(t)\leqslant k\quad\text{при}\quad t\in[t_k,\gamma].$$

Интересный, не решенный пока полностью вопрос: *монотонна ли* $n(t)$? Положительный ответ на него дан в § 11 при дополнительных ограничениях.

В геофизических приложениях важны ядро Коши $C(s,x)=1/(s+x)$ и мера $d\theta(x)=(2/\pi)\,d\sqrt{x}$, $0<x<\infty$; для них (при $\alpha=0$, $\gamma=1$ и $\beta=\infty$)

$$\kappa(s,t)=\frac{2}{\pi}\int_t^\infty\frac{d\sqrt{x}}{s+x}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/t}}{\sqrt{s}}\,,\quad t\in(0,1];\qquad \kappa(s,0)=\frac{1}{\sqrt{s}}\,.$$

В этом случае, которому и посвящена настоящая статья и который, оказывается, тесно связан с *полиномами Лежандра*

$$L_0(t)=1,\quad L_1(t)=t,\quad L_n(t)=\Bigl(2-\frac{1}{n}\Bigr)tL_{n-1}(t)-\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr)L_{n-2}(t)$$

и *квадратурами Гаусса*⟨2⟩, универсальная последовательность $\{t_k\}$ в задаче о $\max h(da,t)$ определяется так: t_k – *квадрат наименьшего положительного корня полинома Лежандра* $L_{2k+1}(t)$, $k\geqslant 1$.

Этот результат позволяет построить универсальную последовательность $U=\{U_k\}$ в задаче обращения годографа более простым способом, чем в [4], [5], положив $U_k=1/\sqrt{1-t_k}$ (см. § 5).

§ 3. Классическая задача обращения годографа. Ключевые слова

Перейдем к систематическому изложению результатов. Начнем с краткой исторической справки и объяснения ключевых слов *годограф* и *волновод* (хорошо знакомых геофизикам, но, возможно, неизвестных математикам).

В начале века задача обращения годографа была решена Герглотцем [9] и Бейтменом [10] в предположении, что Земля – шар (радиуса R), скорость волн зависит *только от глубины*: $v = v(r)$, $r \in [0, R]$, причем⟨3⟩

$$\frac{v(r)}{r} \text{ \textit{не возрастает} на } [0, R] \text{ и } \frac{v(r)}{r} \to \infty \text{ при } r \to 0. \tag{1}$$

Задача была сделана в лучевом приближении. При $v = v(r)$ распространяющиеся по принципу Ферма сейсмические лучи (геодезические) – *плоские* кривые, так что задачу можно рассматривать не в шаре, а в круге. Заменим круг римановой поверхностью Z, склеенной из счетного множества кругов с разрезом вдоль радиуса: совершив оборот вокруг центра круга, луч переходит на следующий лист. Конформное отображение $w = \ln(R/z)$ поверхности Z на полуплоскость упрощает задачу⟨4⟩. Теперь лучи распространяются в полуплоскости x, y ($y \geqslant 0$) со скоростью $u(y)$, равной $v(r)/r$, и условие (1) означает, что

$$u(y) \text{ \textit{не убывает при} } y \geqslant 0 \text{ и } u(y) \to \infty \text{ при } y \to \infty. \tag{2}$$

Сформулируем точно задачу обращения годографа в полуплоскости и приведем сводку полученных ранее результатов.

Нормировка. Выберем масштаб на оси u так, чтобы

$$u(0) = 1. \tag{3}$$

Годограф. Из точки 0 плоскости x, y в (нижнюю) полуплоскость $y \geqslant 0$ выходят сейсмические лучи, по которым импульс, возникший в момент $t = 0$, распространяется со скоростью $u(y)$, зависящей *только от* y. Пусть L – луч, образующий в точке 0 угол α с осью y, $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 1). Число $p = \sin\alpha$ называется *лучевым параметром*. Пусть $X(p), Y(p)$ – координаты самой глубокой точки луча L, а $T(p)$ – время распространения импульса до нее вдоль L. Пусть $X(p)$ конечно (это верно для почти всех $p \in (0,1)$), тогда луч L состоит из двух дуг (нисходящей и восходящей), симметричных относительно прямой $x = X(p)$, луч L возвращается на прямую $y = 0$ в точке $x = 2X(p)$, и время движения импульса по L равно $2T(p)$.

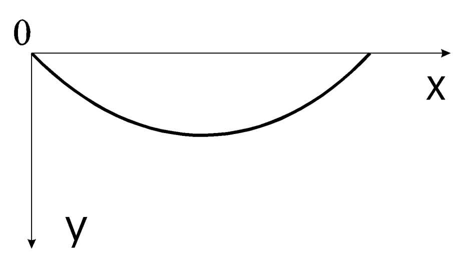

Рис. 1

Определение. Кривую

$$x = 2X(p), \quad t = 2T(p), \qquad p \in (0,1), \tag{4}$$

на плоскости x, t обозначим Γ и назовем *годографом*.

Годограф Γ *считается известным, а* $u(y)$ *нужно найти.*

Формула Бендорфа. Уравнение Абеля. По закону Снелла в любой своей точке (x, y) нисходящая дуга L образует с осью y угол $\alpha(y)$ такой, что

$$\sin\alpha(y) = pu(y). \tag{5}$$

Вследствие (5) в самой нижней точке $(X(p), Y(p))$ луча L, где $\sin\alpha(y) = 1$, выполняется равенство $u(Y(p)) = 1/p$, т.е. $u(y)$ и $Y(1/u)$ – взаимно обратные функции (участкам постоянства одной соответствуют разрывы другой).

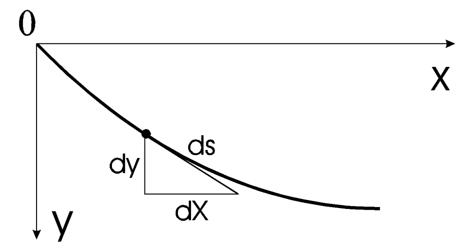

Рис. 2

Поскольку (рис. 2) в точке (x, y) нисходящей дуги луча L

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg}\alpha(y), \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\alpha(y), \qquad \frac{dy}{dt} = u(y)\cos\alpha(y),$$

то $X(p)$ и $T(p)$ равны интегралам от 0 до $Y(p)$ от функций

$$\operatorname{tg}\alpha(y), \qquad \frac{1}{u(y)\cos\alpha(y)}\,,$$

соответственно, т.е. ввиду (5)

$$X(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{pu(y)\,dy}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}}\,, \qquad T(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{dy}{u(y)\sqrt{1-p^2u^2(y)}}\,. \tag{6}$$

Так как

$$dT(p) = p\,dX(p) \tag{7}$$

(формула Бендорфа), то задающие кривую (4) функции $X(p)$ и $T(p)$, как правило, определяются по годографу⟨5⟩, и обращение годографа сводится тогда к решению уравнений (6).

Первое из них – это интегральное уравнение Абеля

$$X(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{pu(y)dy}{\sqrt{1-p^2u^2(y)}}\,, \qquad p \in (0,1).$$

При выполнении условия (2) оно однозначно разрешимо:

$$Y(p) = \frac{2}{\pi}\int_p^1 \frac{X(q)\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}\,, \qquad p \in (0,1). \tag{8}$$

Это и есть результат Герглотца–Бейтмена: $Y(p)$, а значит, и обратная к $Y(1/u)$ функция $u(y)$ однозначно определяются по $X(p)$ с помощью явной формулы (8).

Волноводы. Существенна ли *монотонность* $u(y)$ для однозначной разрешимости задачи обращения годографа? Пусть, например, график $u(y)$ имеет такой вид, как на рис. 3. Можно ли определить тогда $u(y)$ по годографу?

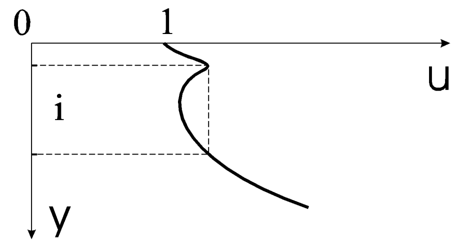

Рис. 3

Интервал i оси y на рис. 3 (так же, как и полоса $y \in i$ на плоскости x, y) называется *волноводом*⟨6⟩. Если заменить $u(y)$ функцией, равной $u(y)$ вне i и *равноизмеримой* с ней⟨7⟩ внутри i, то лучи *вне волновода* i и время движения импульса по каждому из них, а значит, и годограф *не изменятся* [11]⟨8⟩.

До середины 60-х годов среди геофизиков было распространено убеждение: *неоднозначность в определении скорости* $u(y)$ *по годографу этим и исчерпывается.* Оказалось, однако, что это *не так* [12], [13]. В [14] подробно исследована неединственность в задаче обращения годографа при наличии n волноводов. Кратко опишем результаты этого исследования для $n = 1$.

§ 4. Неоднозначность в определении скорости по годографу

Относительно любой из рассматриваемых скоростей $u(y)$, $y \geqslant 0$, предположим следующее.

Предположения об $u(y)$. Будем считать $u(y)$ *кусочно дважды гладкой* на каждом конечном отрезке полуоси $y \geqslant 0$ (иными словами, сама $u(y)$ имеет конечное число разрывов 1-го рода на каждом таком отрезке, и первые две производные $u(y)$ могут не существовать или быть разрывными в конечном числе точек такого отрезка); в точках разрыва $u(y) = \max\{u(y-0), u(y+0)\}$. Каждая скорость $u(y)$ имеет *один волновод* $(0, Y)$; по определению это означает (рис. 4), что

$$u(y) \leqslant u(0) = 1, \qquad u(y) \not\equiv 1 \text{ при } 0 < y < Y,$$
$$u(y) > 1 \text{ при } y > Y, \qquad u(y) \text{ не убывает при } y \geqslant Y,$$
$$u(y) \to \infty \text{ при } y \to \infty.$$

Замечание. Тем самым предполагается, что волновод начинается *сразу у поверхности* (при $y = 0$); случай, когда он начинается глубже (при $y > 0$), легко сводится к рассматриваемому. *Ширина волновода* Y может быть *разной* для разных $u(y)$, в то время, как мера $m = \operatorname{mes}\{y \in (0, Y), u(y) = 1\}$ – *одна и та же* для всех $u(y)$ с одним и тем же годографом Γ. Эта мера равна пределу $\Phi(1-0)$ при $p \to 1$ определяемой ниже (см. (12)) функции $\Phi(p)$, $p \in (0, 1)$.

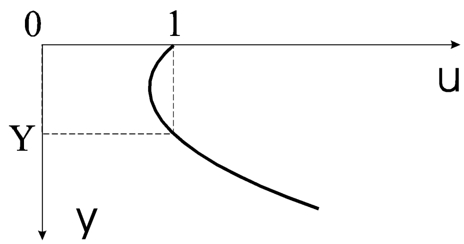

Рис. 4

Преобразование Лежандра годографа Г. Вместо пары функций $X(p)$ и $T(p)$ (см. (4), (6)) удобно рассматривать функцию

$$\tau(p) = \int_0^{Y(p)} \sqrt{u^{-2}(y) - p^2}\, dy, \qquad p \in (0,1). \tag{9}$$

Это – непрерывная в интервале $(0,1)$ убывающая функция; ввиду (6), (7) она связана с $X(p)$ и $T(p)$ следующими формулами⟨9⟩:

$$\tau(p) = T(p) - pX(p), \qquad \tau'(p) = -X(p). \tag{10}$$

Согласно (7) и (10), если в точке $(x = 2X(p), t = 2T(p)) \in \Gamma$ кривая Γ имеет касательную $k(p)$, то, во-первых, $k(p)$ образует с осью x угол, тангенс которого равен p, и, во-вторых, $k(p)$ пересекает ось t в точке $2\tau(p)$. Таким образом, $2\tau(p)$ является *преобразованием Лежандра годографа* Г. Функцию $\tau(p)$ будем считать известной (ср. с ⟨5⟩).

Допустимые функции. Полоса G**.** Масштаб на оси y выберем так (ср. с (3)), чтобы выполнялось *нормировочное условие*

$$\tau(1-0) = \int_0^{Y} \sqrt{u^{-2}(y) - 1}\, dy = 1. \tag{11}$$

Функции $u(y)$, удовлетворяющие перечисленным в начале §4 предположениям и условию (11), будем называть *допустимыми*.

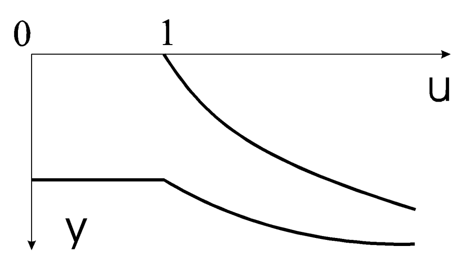

Рис. 5

Система уравнений (6) эквивалентна интегральному уравнению (9), так что задача обращения годографа сводится в основном к нахождению всех допустимых функций $u(y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Согласно [12]–[14] графики всех таких функций заметают полосу G на плоскости y, u (рис. 5).

Формула-фильтр. Расстояние от оси u до верхней границы полосы G вдоль прямой $u = 1/p$, $p \in (0,1)$, обозначим $\Phi(p)$. Согласно [12]–[14] $\Phi(p)$ однозначно определяется по $\tau(p)^{\langle 10\rangle}$:

$$\Phi(p) = -\frac{2}{\pi}\int_p^1 \frac{d\tau(q)}{\sqrt{q^2-p^2}}, \qquad p \in (0,1), \tag{12}$$

и для любого допустимого решения $u(y)$ уравнения (9)

$$Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p), \tag{13}$$

где $\Psi(p)$ выражается через $u(y)$ в волноводе $(0, Y)$

$$\Psi(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^Y \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u^{-2}(y)-1}{1-p^2}}\,dy, \qquad p \in (0,1). \tag{14}$$

В формуле $Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p)$ заключен следующий способ построения всех допустимых решений уравнения (9).

Возьмем произвольное $Y > 0$ и зададим любую допустимую функцию $u(y)$ *в волноводе* $0 < y < Y$. Применив к ней (13), (14), определим $Y(p)$. Если $Y(p)$ *не возрастает*, получаем $u(y)$ *вне волновода* (при $y \geqslant Y$) как функцию, обратную к $Y(1/u)$; согласно [12]–[14] полученная $u(y)$, $y \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (9). Если $Y(p)$ не является невозрастающей функцией, то $u(y)$ *нельзя продолжить* на полуось $y \geqslant Y$ до решения уравнения (9).

Таким образом, формула $Y(p) = \Phi(p) + \Psi(p)$ действует как *фильтр*: некоторые допустимые $u(y)$ однозначно продолжаются из волновода $0 < y < Y$ на полуось (*множество таких функций* $u(y)$ *обозначим* $\mathscr{U}$), другие $u(y)$ не допускают такого продолжения.

§ 5. Новое в классической задаче обращения годографа

Универсальная последовательность U. Через фильтр (13), (14) можно, в частности, пропускать *ступенчатые* функции $u(y)$, $0 < y < Y$, удовлетворяющие условиям (3), (11) и принимающие значения $u \in (0,1]$, причем (по замечанию в начале § 4) $\operatorname{mes}\{y \in (0,Y),\ u(y) = 1\} = \Phi(1-0)$. Отнесем такую функцию к $\mathscr{U}_k$, если она принадлежит множеству $\mathscr{U}$ (определенному в конце § 4) и принимает в интервале $(0, Y)$ *не более* k *значений, не равных* 1.

Сформулируем несколько теорем, раскрывающих роль функций из $\mathscr{U}_k$ в описании нижней границы полосы G (рис. 5)$^{\langle 11\rangle}$. Их доказательства будут даны в следующих параграфах.

Первые две теоремы содержат определение и алгоритм построения *универсальной последовательности* U.

Обозначим через $H(p)$ расстояние между верхней и нижней границами полосы G вдоль прямой $u = 1/p$, $p \in (0,1)$. По определению множества $\mathscr{U}$ (ср. с (15) в теореме 1, см. ниже)

$$H(p) = \sup \Psi(p) \quad \text{по всем} \quad u(y) \in \mathscr{U}.$$

Теорема 1. *Существует последовательность* $U = \{U_k\}$,

$$U_0 = +\infty > U_1 > U_2 > \cdots > U_k > \cdots, \qquad U_k \to 1,$$

обладающая следующим свойством: при $u = 1/p \in [U_k, U_{k-1})$, $k \geqslant 1$,

$$H(p) = \sup \Psi(p) \quad \textit{по} \quad u(y) \in \mathcal{U}_k. \tag{15}$$

Теорема 2. *Последовательность* U *универсальна, т.е. не зависит от* $\tau(p)$, *и вычисляется по следующему алгоритму*⟨12⟩. *Пусть* t_k – *квадрат наименьшего положительного корня полинома Лежандра* L_{2k+1}. *Тогда*

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{1 - t_k}}\,. \tag{16}$$

Ввиду (16) числа U_k больше 1 и *убывают* (это следует из чередования положительных корней полиномов Лежандра L_{2k-1} и L_{2k+1}). Легко доказать⟨13⟩, что $U_k \to 1$ при $k \to \infty$, причем

$$U_k - 1 = O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{17}$$

Чтобы представить себе, *насколько быстро убывают разности* $U_k - 1$, умножим их на 10^4 и с помощью таблиц А. С. Кронрода [15] вычислим (по алгоритму теоремы 2) ближайшие к $(U_k - 1)10^4$ целые числа, $1 \leqslant k \leqslant 19$:

$$\begin{gathered} 5811,\ 1867,\ 942,\ 571,\ 384,\ 277,\ 209,\ 163,\ 131,\ 108, \\ 90,\ 76,\ 66,\ 57,\ 50,\ 44,\ 39,\ 35,\ 32. \end{gathered} \tag{18}$$

В соответствии с (18) числа U_k выписываются в дальнейшем с точностью до $5 \cdot 10^{-5}$:

$$1.5811,\ 1.1867,\ 1.0942,\ 1.0571,\ 1.0384,\ 1.0277 \ \text{и т. д.}$$

Однопараметрическое семейство $u_P(y)$. В следующих теоремах вводится семейство функций $u_P(y)$, для которых нижняя граница полосы G является огибающей.

Теорема 3. *Для любой точки* $P = (y, u)$, $u > 1$, *нижней границы полосы* G *существует скоростная функция* $u_P(y)$ *с годографом* Γ, *график которой содержит* P.

Теорема 4. *Вне волновода функция* $u_P(y)$ *определена однозначно, а в волноводе – с точностью до равноизмеримости.*

Теорема 5. *Если кордината* u *точки* $P = (y, u)$ *принадлежит* $[U_k, U_{k-1})$, *то в волноводе* $u_P(y) \in \mathcal{U}_k$.

Обозначение. При нормировке (3) значения функции $u_P(y)$ в волноводе не превосходят 1; число ее значений, *меньших* 1, обозначим через n_P.

Теорему 5 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 5′. *Справедливо неравенство $n_P \leqslant k$, где $k = k(u)$ убывает при возрастании координаты u точки $P = (y, u)$:*

$$\begin{aligned}
&k = 10 \ \text{при}\ 1.0108 \leqslant u < 1.0131, \quad && k = 9 \ \text{при}\ 1.0131 \leqslant u < 1.0163,\\
&k = 8 \ \text{при}\ 1.0163 \leqslant u < 1.0209, \quad && k = 7 \ \text{при}\ 1.0209 \leqslant u < 1.0277,\\
&k = 6 \ \text{при}\ 1.0277 \leqslant u < 1.0384, \quad && k = 5 \ \text{при}\ 1.0384 \leqslant u < 1.0571,\\
&k = 4 \ \text{при}\ 1.0571 \leqslant u < 1.0942, \quad && k = 3 \ \text{при}\ 1.0942 \leqslant u < 1.1867,\\
&k = 2 \ \text{при}\ 1.1867 \leqslant u < 1.5811, \quad && k = 1 \ \text{при}\ 1.5811 \leqslant u < +\infty.
\end{aligned} \tag{19}$$

Пояснение. Функция $u_P(y)$ в теоремах 3–5 определена в волноводе *с точностью до равноизмеримости*: скоростные функции с одним и тем же годографом, равноизмеримые в волноводе $(0, Y)$, совпадают при $y > Y$. Поэтому можно считать, что модель Земли, соответствующая $u_P(y)$, имеет в волноводе ровно n_P слоев, в которых скорость постоянна и – при нормировке (3) – меньше 1. Согласно (19), если пренебречь участком $1 \leqslant u < 1.0108$, то для описания нижней границы полосы G достаточно рассматривать модели, имеющие в волноводе *не более десяти таких слоев*. При этом для $u \geqslant 1.5811$ нижняя граница полосы G *совпадает* с графиком скоростной функции $u_P(y)$, принимающей в волноводе *лишь одно значение, меньшее* 1, и имеющей среди всех таких функций *самый широкий волновод*; участком $1.1867 \leqslant u < 1.5811$ нижней границы G "заведуют" модели с $n_P \leqslant 2$ (т.е. модели с волноводами, содержащими не более *двух слоев*, в которых скорость меньше 1); участком $1.0942 \leqslant u < 1.1867$ – модели с $n_P \leqslant 3$ и т. д.

Преобразование функций $Y(p)$, $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$. Мера da. Цель последующих преобразований – дать определение *мажоранты* $M(t)$ и, получив критерий принадлежности допустимой скорости $u(y)$ к множеству $\mathscr{U}$ (введенному в конце § 4), переформулировать теоремы 1–5 в терминах § 2. Положим

$$q = \sqrt{1 - p^2}, \qquad p \in [0, 1],$$

заменим $Y(p)$, $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ в (12)–(14) на $y(q)$, $\phi(q)$ и $\psi(q)$ и перепишем (13) в виде

$$y(q) = \phi(q) + \psi(q), \qquad q \in (0, 1). \tag{20}$$

Кроме того, положим $\sqrt{u^{-2}(y) - 1} = f(y)$, $y \in (0, Y)$, тогда

$$\psi(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^Y \operatorname{arctg} \frac{f(y)}{q}\, dy, \qquad q \in (0, 1). \tag{21}$$

Функцию, стоящую под знаком интеграла в (21), продифференцируем по q

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{f(y)}{q} \right)' = \frac{-f(y)}{f^2(y) + q^2}\,. \tag{22}$$

Для $f^2(y)$ и q^2 введем специальные обозначения:

$$s(y) = f^2(y) = u^{-2}(y) - 1, \quad y \in (0, Y); \qquad t = q^2 = 1 - p^2. \tag{23}$$

Замечание. В дальнейшем t и x уже не будут обозначать *время* и *эпицентральное расстояние*, а будут использоваться как в § 2.

Согласно (21), (22) и (23)

$$\psi(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^Y \operatorname{arctg}\frac{f(y)}{q}\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^Y \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{s(y)}{t}}\,dy, \tag{24}$$

$$-\frac{\pi}{2}\psi'(q) = \int_0^Y \frac{f(y)\,dy}{f^2(y)+q^2} = \int_0^Y \frac{\sqrt{s(y)}\,dy}{s(y)+t}\,. \tag{25}$$

При этом ввиду нормировочного условия (11)

$$\int_0^Y f(y)\,dy = \int_0^Y \sqrt{s(y)}\,dy = 1. \tag{26}$$

Положим $\mu(s) = \operatorname{mes}\{y \in (0,Y) \mid s(y) \leqslant s \Leftrightarrow u(y) \geqslant 1/\sqrt{s+1}\,\}$,

$$da(s) = \sqrt{s}\,d\mu(s), \tag{27}$$

т.е. будем понимать под $a(s)$, $s>0$, неубывающую функцию, равную интегралу от $f(y)$ по множеству тех $y \in (0,Y)$, где $s(y) \leqslant s$, введем функцию

$$\kappa(s,t) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/t}}{\sqrt{s}}\,, \quad t>0; \qquad \kappa(s,0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \tag{28}$$

и перепишем (24), (25) и (26) в виде

$$\psi(\sqrt{t}\,) = \int_0^\infty \kappa(s,t)\,da(s), \quad -\frac{\pi}{2}\psi'(\sqrt{t}\,) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+t}\,, \quad \int_0^\infty da(s) = 1. \tag{29}$$

Мажоранта. Положим

$$m(q) = \phi'(q) \tag{30}$$

в точках q множества $\mathscr{C}$ непрерывности производной $\phi'(q)$ и

$$m(q) = \varliminf \phi'(s) \quad \text{при} \quad s \to q, \quad s \in \mathscr{C}, \tag{31}$$

в остальных $q \in [0,1]$ (согласно § 4 их конечное число вне любой окрестности точки $q=1$). Ввиду (30) и (31) функция $m(q)$ *полунепрерывна снизу в каждой точке* $q \in [0,1]$. Согласно (20)

$$y'(q) = \phi'(q) + \psi'(q), \qquad q \in \mathscr{C} \subseteq [0,1],$$

а так как $y(q)$ – *неубывающая* функция, то

$$-\psi'(q) \leqslant m(q), \qquad q \in [0,1]. \tag{32}$$

Определение. Назовем *мажорантой* функцию

$$M(t) = \frac{\pi}{2}\, m(\sqrt{t}\,), \qquad t \in [0,1]. \tag{33}$$

Мажоранту $M(t)$ считаем *известной*, поскольку она однозначно определяется по $\Phi(p)$. Ввиду (29), (32) и (33) получаем

Критерий принадлежности к множеству $\mathscr{U}$. *Допустимая функция* $u(y)$, $y \in (0,Y)$, *тогда и только тогда принадлежит множеству* $\mathscr{U}$ (см. конец §4), *когда соответствующая ей мера* $da(s)$ *из* (27) *удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^\infty \frac{da(s)}{s+t} \leqslant M(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{34}$$

Левую часть (34) обозначим через $g(da,t)$:

$$g(da,t) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+t}\,. \tag{35}$$

Для дискретных мер $da(s) = \sum a_j \delta(s-s_j)\, ds$ имеем $g(da,t) = \sum a_j/(s_j+t)$, так что ступенчатая функция $u(y)$, $y \in (0,Y)$, *тогда и только тогда принадлежит множеству* $\mathscr{U}_k$, *когда*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{s_j+t} \leqslant M(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{36}$$

Множество $\mathscr{A}_k$. Соответствующее функциям из $\mathscr{U}_k$ множество дискретных неотрицательных мер

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j \delta(s-s_j) ds \;\middle|\; a_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant k;\ \sum_{j=1}^{k} a_j = 1;\ s_1 > \dots > s_k > 0 \right\},$$

сосредоточенных не более чем в k точках на полуоси $s > 0$ и удовлетворяющих неравенству (36), обозначим через $\mathscr{A}_k$.

Семейство задач о верхней грани функционала $h(da,t)$. Представим функцию $\kappa(s,t)$ из (28) (как в §2) в виде

$$\kappa(s,t) = \frac{2}{\pi} \int_t^\infty \frac{d\sqrt{x}}{s+x}\,, \qquad s>0, \quad t \geqslant 0. \tag{37}$$

Для функций $u(y) \in \mathscr{U}$ или, что то же, на множестве $\mathscr{A}$ тех неотрицательных мер $da = da(s)$, для которых (см. (29), (34) и (35))

$$\int_0^\infty da = 1 \quad \text{и} \quad g(da,x) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+x} \leqslant M(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,1], \tag{38}$$

рассмотрим однопараметрическое (зависящее от t) семейство экстремальных задач: *найти верхнюю грань функционала*

$$h(da,t) = \int_0^\infty \kappa(s,t)\, da(s) = \frac{2}{\pi} \int_t^\infty g(da,x)\, d\sqrt{x}, \qquad 0<t<1. \tag{39}$$

Ввиду (23) и (29) $\sup h(da,t)$ по множеству (38) – это ширина полосы G вдоль прямой $u = 1/p = 1/\sqrt{1-t}$, так что теоремы 1–5 будут доказаны, если проверить, что верны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть* $\sqrt{t_k}$ – *наименьший положительный корень полинома Лежандра* L_{2k+1}, $k \geqslant 1$. *Тогда при любом* $t \geqslant t_k$ $\sup h(da,t)$ *по множеству* $\mathscr{A}$ *мер* (38) *совпадает с* $\sup h(da,t)$ *по* $\mathscr{A}_k$.

Утверждение 2. *При любом* $t^0 \geqslant t_k$ *существуют такая мера* $da^0 \in \mathscr{A}_k$, *что при* $da = da^0$ *функционал* $h(da,t^0)$ *достигает своего максимального значения* h^0 *на множестве* $\mathscr{A}$ *мер* (38). *Для любой меры* da *из* $\mathscr{A}$, *отличной от* da^0, $h(da,t^0)$ *строго меньше* h^0.

Мы докажем утверждение 1 в § 6 и § 7 и утверждение 2 – в § 8 и § 9, а в заключение этого параграфа сформулируем еще две теоремы о функциях $u_P(y)$ (которые докажем в § 9 и § 10).

Теорема 6. *При любом* $\varepsilon > 0$, *если координата* u *точки* $P = (y,u)$ *нижней границы полосы* G *больше* $1+\varepsilon$, *то либо* $n_P = 1$ (*т.е. функция* $u_P(y)$ *принимает в волноводе лишь одно значение, не равное* 1), *либо значения* $u_P(y)$ *отделены от нуля константой порядка* $\sqrt{\varepsilon}$, *не зависящей от* $\tau(p)$.

Определение. Для каждой скоростной функции $u(y) \in \mathscr{U}$ (или, что то же, для каждой меры $da \in \mathscr{A}$) точки $q \in [0,1]$, в которых $-\psi'(q) = m(q)$, и, соответственно, точки $t \in [0,1]$, в которых $g(da,t) = M(t)$, назовем *особыми точками* $u(y)$ (или *особыми точками* da).

С учетом (30), (31) геометрический смысл данного определения таков: для особых точек $q \in \mathscr{C}$ из *интервала* $(0,1)$ касательная к графику $u(y)$ в точке $(y, u = 1/\sqrt{1-q^2})$ *параллельна оси* u.

Теорема 7. *Функция* $u_P(y)$ *имеет минимум* n_P *особых точек* (*т.е. число особых точек не меньше числа не равных* 1 *значений* $u_P(y)$ *в волноводе*).

Теоремы 1–7 – шаг к решению задачи, не поддававшейся старым методам: *для произвольно заданной скоростной функции* $u(y)$ *построить с заданной точностью множество* G, *заметаемое графиками всех скоростных функций, которые имеют тот же годограф, что и* $u(y)$.

§ 6. Что используется в доказательстве теорем об универсальной последовательности?

Две задачи. При проверке утверждения 1, эквивалентного теоремам 1, 2 об универсальной последовательности, перед нами возникнут (вспомним⟨2⟩) следующие две задачи:

Задача 1. *Найти* $c_1,\dots,c_n$ *и* $\zeta_1,\dots,\zeta_n$, *удовлетворяющие нелинейной системе уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\zeta_j^k = \frac{1}{2k+3}\,, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2n-1.$$

Задача 2. *Найти такие $2n$ чисел $c_1, \dots, c_n$ и $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, чтобы для любого многочлена $\mathscr{P}(t)$ степени $k \leqslant 2n-1$ и для функции $\nu(t) = t^{3/2}/3$ выполнялись равенства*

$$\int_0^1 \mathscr{P}(t)\, d\nu(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathscr{P}(\zeta_j).$$

Рассуждая в духе [15], нетрудно доказать$^{\langle 14\rangle}$, что верна следующая

Теорема 8. *Задачи 1 и 2 эквивалентны друг другу. Их решение существует и единственно, причем $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ – это квадраты ненулевых корней полинома Лежандра $L_{2n+1}(x)$, а $c_1, \dots, c_n$ определяются из системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^n c_j \zeta_j^k = \frac{1}{2k+3}\,, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Наряду с теоремой 8 при проверке утверждения 1 используются некоторые (приводимые ниже) результаты, полученные в [2].

Рациональные аппроксимации $r(\mathscr{S}, s)$. Произвольно фиксируем в (37) какое-нибудь $t > 0$ и положим $\varphi(s) = \kappa(s,t)$.

В соответствии с [2] сопоставим каждому набору точек

$$\mathscr{S} = \{s_1, \dots, s_{m+1}\}, \qquad s_1 > \dots > s_{m+1} > 0, \tag{40}$$

такую рациональную аппроксимацию

$$r(\mathscr{S}, s) = d_0 + \sum_{k=1}^m \frac{d_k}{s + w_k} + \frac{d_{m+1}}{s} \tag{41}$$

функции $\varphi(s)$, что

$$r(\mathscr{S}, s_j) = \varphi(s_j), \quad r'(\mathscr{S}, s_j) = \varphi'(s_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m+1. \tag{42}$$

Согласно [8] такая рациональная аппроксимация *существует, однозначно (с точностью до нумерации слагаемых) определяется условиями* (42) *и обладает следующими свойствами*:

1) *все полюсы w_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, в* (41) *различны и положительны, так что $r(\mathscr{S}, s)$ можно записать в виде*

$$d_0 + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{d_k}{s + w_k} \tag{43}$$

и считать, что

$$w_1 > w_2 > \dots > w_{m+1} = 0; \tag{44}$$

2) *все коэффициенты d_k положительны*: $d_k > 0$, $0 \leqslant k \leqslant m+1$;
3) *при всех $s > 0$, $s \neq s_1, \dots, s_{m+1}$ выполняется строгое неравенство*

$$r(\mathscr{S}, s) > \varphi(s). \tag{45}$$

Согласно [2] рациональные аппроксимации $r(\mathscr{S}, s)$ позволяют следующим образом классифицировать дискретные меры da.

Классификация дискретных мер. Произвольно фиксируем $n \geqslant 1$ и дискретную меру

$$da^0 = da^0(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j^0 \delta(s - s_j^0)\, ds,$$

сосредоточенную в n точках:

$$a_j^0 > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j^0 = 1; \qquad s_1^0 > \cdots > s_n^0 > 0.$$

При всевозможных натуральных k возьмем все дискретные меры

$$da = da(s) = \sum_{j=1}^{k} a_j \delta(s - s_j)\, ds,$$

$$a_j > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k; \qquad \sum_{j=1}^{k} a_j = 1; \qquad s_1 > \cdots > s_k > 0,$$

для которых (ср. с (36))

$$g(da, t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{s_j + t} \leqslant g(da^0, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^0}{s_j^0 + t}\,, \qquad t \in [0, 1], \tag{46}$$

и рассмотрим вспомогательную задачу: *найти максимум функционала* $h(da, t)$ *из* (39) *по всем таким мерам.* В [2] доказано, что решение этой задачи *существует и единственно*: на некоторой мере da из (46) $h(da, t)$ достигает *строгого максимума.* При этом, если указанная мера

$$da = da(s) = \sum_{j=1}^{m+1} a_j \delta(s - s_j)\, ds,$$

$$a_j > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m+1; \qquad \sum_{j=1}^{m+1} a_j = 1; \qquad s_1 > \cdots > s_{m+1} > 0,$$

сосредоточена в точках набора $\mathscr{S}$ (см. (40), (41)), то согласно [2] *для полюса* w_1 *рациональной аппроксимации* $r(\mathscr{S}, s)$ *выполняется неравенство* $w_1 \leqslant 1$.

Сформулируем этот важный для дальнейшего результат в виде леммы. Отнесем меру, сосредоточенную в точках (40) набора $\mathscr{S}$, к множествам $\mathscr{L}$, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{G}$ (по первым буквам английских слов *less*, *equal* и *greater*), если *для полюса* w_1 *аппроксимации* $r(\mathscr{S}, s)$ *выполняется*, соответственно, *неравенство*

$$w_1 < 1, \qquad w_1 = 1, \qquad w_1 > 1.$$

Для мер da из (46) введем обозначение $da \prec da^0$ (это – отношение *частичной упорядоченности* на дискретных мерах).

Лемма 1. *Максимум $h(da,t)$ по всем $da \prec da^0$ не может достигаться на мере $da \in \mathscr{G}$. Он достигается на мере $da \in \mathscr{M} = \mathscr{L} \cup \mathscr{E}$.*

Чтобы использовать эту (доказанную в [2]) лемму для проверки утверждения 1, введем еще один класс аппроксимаций функции $\varphi(s)$.

Рациональные аппроксимации $r_0(s)$. Определим аппроксимацию

$$r_0(s) = d_{00} + \sum_{k=1}^{m} \frac{d_{0k}}{s + w_{0k}} \tag{47}$$

функции $\varphi(s)$ (ср. с (42), (43)) условиями

$$r_0^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(0), \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2m^{\langle 15\rangle}. \tag{48}$$

Нумерацию слагаемых в (47) выберем так, чтобы

$$w_{01} = \max w_{0k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{49}$$

Опираясь на (45), нетрудно доказать$^{\langle 16\rangle}$, что верна

Лемма 2. *Полюс w_1 в (44) больше, чем w_{01} в (49):*

$$w_1 > w_{01}. \tag{50}$$

Таким образом$^{\langle 17\rangle}$, остается проверить

Утверждение 3. *Пусть $\sqrt{t_m}$ – наименьший положительный корень полинома Лежандра L_{2m+1}, $m \geqslant 1$. Тогда при $t \geqslant t_m$ полюс w_{01} аппроксимации $r_0(s)$ функции $\varphi(s) = \kappa(s,t)$ не меньше 1:*

$$w_{01} \geqslant 1. \tag{51}$$

§ 7. Доказательство теорем об универсальной последовательности

Возьмем $t = 1$ в (28) и (37) и положим $\widehat{\varphi}(s) = \kappa(s,1)$,

$$\widehat{\varphi}(s) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s}}{\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\sqrt{x}}{s+x}\,, \qquad s \geqslant 0. \tag{52}$$

Пусть $\widehat{r}_0(s)$ – рациональная аппроксимация функции $\widehat{\varphi}(s)$, аналогичная (47),

$$\widehat{r}_0(s) = \widehat{d}_{00} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\widehat{d}_{0k}}{s + \widehat{w}_{0k}}\,, \tag{53}$$

$$\widehat{r}_0^{(j)}(0) = \widehat{\varphi}^{(j)}(0), \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2m. \tag{54}$$

Из (52) и (53) следует, что

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{2}{\pi}, \qquad \widehat{r}_0(0) = \widehat{d}_{00} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\widehat{d}_{0k}}{\widehat{w}_{0k}}$$

и что при $1 \leqslant j \leqslant 2m$

$$\frac{(-1)^j}{j!}\widehat{\varphi}^{(j)}(0) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\sqrt{x}}{x^{j+1}}\,, \qquad \frac{(-1)^j}{j!}\widehat{r}^{(j)}(0) = \sum_{k=1}^m \frac{\widehat{d}_{0k}}{\widehat{w}_{0k}^{j+1}}\,.$$

Поэтому условия (54) эквивалентны системе уравнений

$$\widehat{d}_{00} + \sum_{k=1}^m \frac{\widehat{d}_{0k}}{\widehat{w}_{0k}} = \frac{2}{\pi}\,,$$
$$\sum_{k=1}^m \frac{\widehat{d}_{0k}}{\widehat{w}_{0k}^{j+1}} = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\sqrt{x}}{x^{j+1}}\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2m.$$

Для доказательства утверждения 3 достаточно рассмотреть последние $2m$ из этих уравнений. Если сделать замену

$$\zeta_k = \frac{1}{\widehat{w}_{0k}}, \quad c_k = \frac{\pi}{2}\frac{\widehat{d}_{0k}}{\widehat{w}_{0k}^2}\,, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m; \qquad t = \frac{1}{x}$$

и ввести функцию $\nu(t) = t^{3/2}/3$, они принимают вид

$$\sum_{k=1}^m c_k\zeta_k^p = \int_0^1 t^p\,d\nu(t), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2m-1.$$

Вычислив интегралы, получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^m c_k\zeta_k^p = \frac{1}{2p+3}\,, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2m-1,$$

т.е. оказываемся в условиях теоремы 8 из §6. Занумеруем ζ_k в соответствии с (49) так, что $0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_m$, тогда (по теореме 8) $\zeta_1 = t_m$ – квадрат наименьшего положительного корня полинома Лежандра L_{2m+1}, т.е.

$$\widehat{w}_{01} = \frac{1}{t_m}\,. \tag{55}$$

Сравнивая (28) и (52), видим, что $\varphi(s) = \widehat{\varphi}(s/t)/\sqrt{t}$, и, значит, рациональные аппроксимации $r_0(s)$ и $\widehat{r}_0(s)$ из (47) и (53) связаны соотношением

$$r_0(s) = \frac{\widehat{r}_0(s/t)}{\sqrt{t}}\,,$$

т.е.

$$r_0(s) = \frac{\widehat{d}_{00} + \sum_{k=1}^m \widehat{d}_{0k}/(s/t + \widehat{w}_{0k})}{\sqrt{t}} = \frac{\widehat{d}_{00}}{\sqrt{t}} + \sum_{k=1}^m \frac{\widehat{d}_{0k}\sqrt{t}}{s + \widehat{w}_{0k}t}$$

и $w_{0k} = \widehat{w}_{0k}t$, $1 \leqslant k \leqslant m$, откуда с учетом (55) $w_{01} = t/t_m$. Итак, $w_{01} \geqslant 1$ при $t \geqslant t_m$ и утверждение 3 доказано, а вместе с ним доказаны утверждение 1 и теоремы 1 и 2.

§ 8. Доказательство теоремы существования

В этом параграфе будет доказана теорема 3 – существование скоростной функции $u_P(y)$, график которой проходит через произвольно заданную точку $P = (y, u)$, $u > 1$, нижней границы полосы G. Вернее, будет доказана уточняющая ее первая часть утверждения 2 из § 5 – *существование такой меры $da^0 \in \mathscr{A}_k$, что при $da = da^0$ функционал $h(da, t^0)$ достигает своего максимального значения h^0 на множестве $\mathscr{A}$ мер* (38).

Множество $\widetilde{\mathscr{A}}_k$. Множество дискретных неотрицательных мер

$$\biggl\{\sum_{j=1}^{k} a_j\delta(s-s_j)\,ds \biggm| a_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant k;\ \sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant 1;\ s_1 > \dots > s_k > 0\biggr\},$$

сосредоточенных не более чем в k точках на полуоси $s > 0$ и удовлетворяющих неравенству (36), обозначим через $\widetilde{\mathscr{A}}_k$.

Замечание. Определение $\widetilde{\mathscr{A}}_k$ почти совпадает с определением $\mathscr{A}_k$ в § 5, только в $\mathscr{A}_k$ включаются меры, для которых $\sum a_j = 1$, а в $\widetilde{\mathscr{A}}_k$ – меры, для которых $\sum a_j \leqslant 1$.

Верхнюю грань $h(da, t)$ по всем $da \in \widetilde{\mathscr{A}}_k$ обозначим через $\tilde{h}_k(t)$, а $\sup h(da, t)$ по всем $da \in \mathscr{A}_k$ – через $h_k(t)$, $t \in [0, 1]$.

Лемма 3. *При $t \geqslant t_k$ справедливо равенство $\tilde{h}_k(t) = h_k(t)$.*

Доказательство. Так как $\widetilde{\mathscr{A}}_k \supset \mathscr{A}_k$, то $\tilde{h}_k(t) \geqslant h_k(t)$ при любом t. С другой стороны, для любой меры $d\tilde{a} \in \widetilde{\mathscr{A}}_k$ и любого $\varepsilon > 0$ нетрудно найти такую меру $da \in \mathscr{A}_{k+1}$, что $h(da, t) > h(d\tilde{a}, t) - \varepsilon^{\langle 18\rangle}$, т.е. $h_{k+1}(t) \geqslant \tilde{h}_k(t)$. Но по утверждению 1 из § 5 $h_k(t) = h_{k+1}(t)$, если $t \geqslant t_k$. Лемма доказана.

Мера da^0. Пусть $t^0 \geqslant t_k$. Возьмем последовательность мер

$$da_n \in \mathscr{A}_k, \qquad da_n = da_n(s) = \sum_{j=1}^{k} a_{nj}\delta(s - s_{nj})\,ds, \tag{56}$$

для которой

$$h(da_n, t^0) \to h_k(t^0).$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что в (56) все a_{nj} сходятся и все s_{nj} имеют предел – конечный или бесконечный: при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$a_{nj} \to a_j^0 \geqslant 0, \qquad s_{nj} \to s_j^0 \geqslant 0 \ \text{ или } \ s_{nj} \to +\infty.$$

Все индексы j, $1 \leqslant j \leqslant k$, разобьем на три множества – J_0, J и J_∞:

$$j \in J_0 \text{ при } s_{nj} \to 0, \qquad j \in J \text{ при } s_{nj} \to s_j^0 > 0, \qquad j \in J_\infty \text{ при } s_{nj} \to +\infty.$$

Суммируя $a_j^0\delta(s-s_j^0)\,ds$ по $j\in J$, получаем меру

$$da^0=\sum a_j^0\delta(s-s_j^0)\,ds\in\widetilde{\mathscr{A}}_k, \tag{57}$$

на которой[19] $h(da^0,t^0)=h_k(t^0)=\sup h(da,t^0)$ по всем $da\in\mathscr{A}_k$. Докажем, что, *на самом деле, построенная мера принадлежит* $\mathscr{A}_k$. Пусть в (57) m коэффициентов положительны. Изменим их нумерацию и обозначим их через

$$a_1^0,\ \dots,\ a_m^0.$$

Лемма 4. *Сумма* $a_1^0+\dots+a_m^0$ *равна* 1.

Доказательство. Допустив, что для меры da^0

$$a_1^0+\dots+a_m^0=a<1, \tag{58}$$

приведем это допущение к противоречию с тем, что по лемме 3

$$h(da^0,t^0)=\tilde h_k(t^0)=\tilde h_{k+1}(t^0). \tag{59}$$

Распространим на $\widetilde{\mathscr{A}}_k$ отношение *частичной упорядоченности*

$$da\prec da^0, \tag{60}$$

введенное в §6 для мер из $\mathscr{A}_k$; пусть в соответствии с (46) для мер da и da^0 из $\widetilde{\mathscr{A}}_k$ обозначение (60) означает, что

$$g(da,t)=\sum\frac{a_j}{s_j+t}\leqslant g(da^0,t)=\sum\frac{a_j^0}{s_j^0+t},\qquad t\in[0,1].$$

Докажем, что при выполнении (58) можно построить принадлежащую $\widetilde{\mathscr{A}}_k$ или $\widetilde{\mathscr{A}}_{k+1}$ меру $da\prec da^0$, для которой вопреки (59)

$$h(da,t^0)>h(da^0,t^0). \tag{61}$$

Если $s_1^0\geqslant1$, то $da\in\widetilde{\mathscr{A}}_k$ строится совсем просто[20]. При $s_1^0<1$ построение $da\in\widetilde{\mathscr{A}}_{k+1}$ чуть сложнее (оно годится и для $s_1^0\geqslant1$): сохраняя a_j^0, s_j^0, $2\leqslant j\leqslant m$, заменим пару $\{a_1^0,s_1^0\}$ в da^0 четверкой $\{\delta,a_1^0-\varepsilon,S,s=s_1^0\}$ в da, где $S>s$ и δ выбираются так, что

$$(S+1)\varphi(S)>(s+1)\varphi(s),\qquad \delta=\varepsilon\frac{S+1}{s+1}\,,$$

а $\varepsilon\in(0,a_1^0)$ столь мало, что

$$\delta-\varepsilon=\varepsilon\biggl(\frac{S+1}{s+1}-1\biggr)\leqslant1-a.$$

Тогда

1) сумма коэффициентов в da равна $a+\delta-\varepsilon\leqslant1$;

2) $da\prec da^0$, так как на отрезке $0\leqslant x\leqslant1$

$$g(da^0,x)-g(da,x)=\frac{\varepsilon}{s+x}-\frac{\delta}{S+x}=\frac{\varepsilon}{s+1}\biggl(\frac{s+1}{s+x}-\frac{S+1}{S+x}\biggr)\geqslant0;$$

3) $h(da,t^0)-h(da^0,t^0)=\delta\varphi(S)-\varepsilon\varphi(s)=\dfrac{\varepsilon}{s+1}\bigl((S+1)\varphi(S)-(s+1)\varphi(s)\bigr)>0.$

Итак, неравенство (61), противоречащее (59), доказано, т.е. *для меры* da^0 *в* (57) *сумма* $a_1^0+\dots+a_m^0$ *равна* 1, и, значит, $da^0\in\mathscr{A}_k$, что и требовалось установить[21].

§ 9. Доказательство теоремы о строгом максимуме

В § 8 было доказано, что существует такая мера

$$da^0 = da^0(s) = \sum_{j=1}^{m} a_j^0 \delta(s - s_j^0)\, ds, \qquad a_j^0 > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

что при $da = da^0$ функционал

$$h(da, t^0) = \int_0^\infty \kappa(s, t^0)\, da(s) = \int_0^\infty \varphi(s)\, da(s) \tag{62}$$

достигает своего максимального значения h^0 на множестве $\mathscr{A}$ неотрицательных мер $da = da(s)$, для которых

$$\int_0^\infty da = 1, \qquad g(da, x) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+x} \leqslant M(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,1]. \tag{63}$$

Докажем, что для любой меры $da \in \mathscr{A}$ ($da \neq da^0$) выполняется строгое неравенство

$$h = h(da, t^0) < h^0 = h(da^0, t^0), \tag{64}$$

и тем самым докажем вторую часть утверждения 2 (о строгом максимуме), а вместе с ней – и теоремы 4 и 5. Попутно будет также доказана теорема 7 об особых точках.

Дополнительное предположение. Вначале допустим (потом мы обоснуем это допущение), что множество особых точек меры da^0

$$\bigl\{x \in [0,1] \mid g^0(x) = M(x)\bigr\}, \tag{65}$$

где функция

$$g^0(x) = g(da^0, x) = \int_0^\infty \frac{da^0(s)}{s+x} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^0}{s_j^0 + x}$$

совпадает с мажорантой $M(x)$, состоит менее, чем из $2m$ точек, и докажем неравенство (64) при этом дополнительном предположении.

Примем на веру одно утверждение, которое проверим позже.

Утверждение 4. *Пусть мера $da = da^0(s) = \sum_{j=1}^m a_j^0 \delta(s - s_j^0)\, ds$, на которой функционал*

$$h(da, t^0) = \int_0^\infty \kappa(s, t^0)\, da(s) = \int_0^\infty \varphi(s)\, da(s)$$

достигает своего максимального значения h^0 на множестве $\mathscr{A}$ мер (63), имеет менее $2m$ особых точек. Обозначим их

$$x_1, \dots, x_p, \qquad p < 2m. \tag{66}$$

Тогда существуют такие неотрицательные числа d_k, $0 \leqslant k \leqslant p$, что функция $r(s) = d_0 + \sum_{k=1}^p d_k/(s + x_k)$ совпадает с $\varphi(s)$ при $s = s_j^0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, а в остальных $s > 0$ не меньше $\varphi(s)$.

Замечание 1. Из утверждения 4 легко следует⟨22⟩, что

1) $r(s) = \varphi(s)$ в конечном числе точек $s_1^0, \dots, s_q^0$, где $m \leqslant q \leqslant p$,
2) среди коэффициентов $d_1, \dots, d_p$ имеется не менее q положительных; пусть для определенности $d_1, \dots, d_q > 0$, $d_{q+1}, \dots, d_p \geqslant 0$.

Замечание 2. Из неравенства $p \geqslant m$ (см. замечание 1), очевидно, вытекает, что теорема 7 об особых точках является следствием утверждения 4.

Доказательство (64) начнем с того, что в соответствии с (62), (63) и утверждением 4 преобразуем $h^0 = h(da^0, t^0)$, а затем оценим $h = h(da, t^0)$ сверху

$$h^0 = \int_0^\infty \varphi(s)\, da^0(s) = \sum_{j=1}^m a_j^0 \varphi(s_j^0) = \sum_{j=1}^m a_j^0 r(s_j^0) = \sum_{j=1}^m a_j^0 \left(d_0 + \sum_{k=1}^p \frac{d_k}{s_j^0 + x_k} \right)$$
$$= d_0 + \sum_{k=1}^p d_k \sum_{j=1}^m \frac{a_j^0}{s_j^0 + x_k} = d_0 + \sum_{k=1}^p d_k g(da^0, x_k) = d_0 + \sum_{k=1}^p d_k g^0(x_k), \quad (67)$$
$$h = \int_0^\infty \varphi(s)\, da(s) \leqslant \int_0^\infty r(s)\, da(s) = \int_0^\infty \left(d_0 + \sum_{k=1}^p \frac{d_k}{s + x_k} \right) da(s)$$
$$= d_0 + \sum_{k=1}^p d_k \int_0^\infty \frac{da(s)}{s + x_k} = d_0 + \sum_{k=1}^p d_k g(da, x_k) \leqslant d_0 + \sum_{k=1}^p d_k M(x_k). \quad (68)$$

Ввиду (65) и (66) из (67) и (68) следует, что

$$h(da, t^0) \leqslant d_0 + \sum_{k=1}^p d_k M(x_k) = d_0 + \sum_{k=1}^p d_k g^0(x_k) = h(da^0, t^0), \quad (69)$$

причем равенство $h(da, t^0) = h(da^0, t^0)$ в (69) достигается только в том случае, когда

$$\int_0^\infty \big(\varphi(s) - r(s)\big)\, da(s) = 0 \quad (70)$$

и когда (см. замечание 1 к утверждению 4)

$$g(da, x_k) = M(x_k) = g^0(x_k) \text{ при всех } k,\ \ 1 \leqslant k \leqslant q. \quad (71)$$

Равенство (70) означает, что мера da сосредоточена в точках, где $\varphi(s) = r(s)$, т.е. при $s = s_j^0$, $1 \leqslant j \leqslant q$, так что

$$da(s) = \sum_{j=1}^q a_j \delta(s - s_j^0)\, ds, \qquad g(da, x) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s + x} = \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s_j^0 + x},$$

а ввиду (71) разность $g(da, x) - g^0(x)$ имеет не менее q корней

$$g(da, x_k) - g^0(x_k) = \sum_{j=1}^q \frac{a_j - a_j^0}{s_j^0 + x_k} = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant q^{\langle 23 \rangle}.$$

Однако, так как $da \neq da^0$,

$$g(da,x) - g^0(x) = \sum_{j=1}^{q} \frac{a_j - a_j^0}{s_j^0 + x}$$

не может иметь более $q-1$ корней (поскольку функции $1/(s_j^0+x)$, $1 \leqslant j \leqslant q$, образуют чебышёвскую систему).

Итак, для завершения доказательства остается проверить утверждение 4 и обосновать допущение о том, что в (66) $p < 2m$.

Доказательство утверждения 4. Каждой мере $da = da(s) \in \mathscr{A}_k$,

$$da(s) = \sum_{j=1}^{k} a_j \delta(s - s_j)\, ds,$$

$$a_j \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k; \qquad \sum_{j=1}^{k} a_j = 1; \qquad s_1 > \cdots > s_k > 0,$$

сопоставим набор

$$\mathscr{N} = \{a_j, s_j\}, \qquad a_j \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \quad s_1 > \cdots > s_k > 0, \tag{72}$$

и наряду с обозначениями $g(da,x)$ и $h(da,t^0)$ будем использовать обозначения $g(\mathscr{N},x)$ и $h(\mathscr{N})$.

Замечание. Мы *не включаем в* (72) *равенство* $\sum_{j=1}^{k} a_j = 1$, чтобы можно было рассматривать и такие наборы $\mathscr{N}$, в которых $\sum_{j=1}^{k} a_j \neq 1$.

Если в (66) $p < 2m-1$, добавим к $x_1,\ldots,x_p$ точки $x_{p+1},\ldots,x_{2m-1}$. При $p = 2m-1$ добавочные точки не нужны – хватает имеющихся. Положим

$$r(s) = d_0 + \sum\nolimits_{k=1}^{2m-1} \frac{d_k}{s + x_k}\,,$$

определив $d_0,\ldots,d_{2m-1}$ из невырожденной[24] системы линейных уравнений

$$\varphi(s_j^0) = r(s_j^0), \quad \varphi'(s_j^0) = r'(s_j^0), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{73}$$

Чтобы проверить утверждение 4, достаточно доказать, что

$$d_1,\ldots,d_p \geqslant 0, \tag{74}$$

$$d_{p+1},\ldots,d_{2m-1} = 0, \tag{75}$$

$$\varphi(s) \leqslant r(s), \qquad s > 0. \tag{76}$$

Замечание. Неотрицательность d_0 следует из (76): так как $r(s) \geqslant \varphi(s) \geqslant 0$ при $s > 0$, то и $d_0 = \lim_{s\to\infty} r(s) \geqslant 0$.

Соотношения (74)–(76) будут доказаны по одной схеме: допуская поочередно, что они неверны, мы каждый раз сумеем тогда сместиться из набора $\mathscr{N}^0 = \{a_j^0, s_j^0\}$ (соответствующего мере $da^0 \in \mathscr{A}_m$) в такой набор $\mathscr{N}^* = \{a_j^*, s_j^*\}$ (соответствующий мере da^* из $\mathscr{A}_m$ или из $\mathscr{A}_{m+1}$), что $h(\mathscr{N}^*) > h(\mathscr{N}^0)$, и тем самым придем к противоречию с тем, что

$$h(\mathscr{N}^0) = h(da^0, t^0) = \max h(da, t^0) \quad \text{по всем} \quad da \in \mathscr{A}. \tag{77}$$

Проверка неравенств (74)**.** При $k = m$ для наборов $\mathscr{N}$ в (72) числа

$$a(\mathscr{N}) = \sum_{j=1}^{m} a_j, \qquad g(\mathscr{N}, x_1),\ \ldots,\ g(\mathscr{N}, x_{2m-1}) \tag{78}$$

являются локальными координатами в окрестности $\mathscr{N}^{0}$<25>.

Допустив, что хоть один коэффициент в (74) *отрицателен*, произвольно фиксируем такие $\xi_1, \ldots, \xi_p > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k d_k = -1, \tag{79}$$

и для малых $\lambda > 0$ рассмотрим такие наборы $\mathscr{N}^* = \mathscr{N}^*(\lambda)$, что

$$a(\mathscr{N}^*) = a(\mathscr{N}^0) = 1, \qquad g(\mathscr{N}^0, x_k) - g(\mathscr{N}^*, x_k) = \lambda \xi_k \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant p, \tag{80}$$

$$g(\mathscr{N}^0, x_k) = g(\mathscr{N}^*, x_k) \quad \text{при} \quad p < k \leqslant 2m-1. \tag{81}$$

Иными словами, мы сдвигаемся из $\mathscr{N}^0$ по лучу

$$\mathscr{N}^* = \mathscr{N}^*(\lambda) = \mathscr{N}^0 - \lambda \sum_{k=1}^{p} \xi_k \mathscr{E}_k, \qquad \lambda > 0, \tag{82}$$

где $\mathscr{E}_k$, $0 \leqslant k \leqslant 2m-1$, – орты в координатах (78).

Нетрудно проверить⟨26⟩, что *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и для достаточно малых* λ *при всех* $x \in [0,1]$, *принадлежащих* ε-*окрестности*

$$V = (x_1 - \varepsilon,\, x_1 + \varepsilon) \cup \cdots \cup (x_p - \varepsilon,\, x_p + \varepsilon) \tag{83}$$

множества точек $x_1, \ldots, x_p$, *выполняется неравенство* $g(\mathscr{N}^*, x) < g(\mathscr{N}^0, x)$.

Отсюда следует⟨27⟩, что *при малых* λ на луче (82) верна

Лемма 5. *При всех* $x \in [0,1]$ $\;g(\mathscr{N}^*, x) < M(x)$, *так что набор* $\mathscr{N}^*$ *соответствует мере* $da^* \in \mathscr{A}_m$.

При малых λ на луче (82) верна также⟨28⟩

Лемма 6. *Справедливо неравенство* $h(\mathscr{N}^*) > h(\mathscr{N}^0)$.

Полученное противоречие с (77) доказывает неравенства (74).

Проверка равенств (75)**.** Если хоть один коэффициент d_k в (75) не равен нулю, рассмотрим такие $\xi_1, \dots, \xi_p > 0$ и такое ξ_k, что

$$\xi_1 d_1 + \dots + \xi_p d_p + \xi_k d_k = -1,$$

и сдвинемся из $\mathscr{N}^0$ по лучу

$$\mathscr{N}^* = \mathscr{N}^*(\lambda) = \mathscr{N}^0 - \lambda(\xi_1 \mathscr{E}_1 + \dots + \xi_p \mathscr{E}_p + \xi_k \mathscr{E}_k), \qquad \lambda > 0. \tag{84}$$

Рассуждая далее так же, как при проверке (74), приходим к выводу: *при малых* λ *на луче* (84), *как и на луче* (82), *набор* $\mathscr{N}^*(\lambda)$ *соответствует мере* $da^* \in \mathscr{A}_m$ *и* $h(\mathscr{N}^*) > h(\mathscr{N}^0)$, т.е. снова приходим к противоречию с (77).

Проверка неравенства (76)**.** Допустим, что (76) не выполняется: пусть

$$\varphi(s) > r(s) \quad \text{при} \quad s = \overline{s} > 0.$$

Положим $\overline{a} = 0$, перепишем da^0 в виде

$$da^0(s) = \sum_{j=1}^{m} a_j^0 \delta(s - s_j^0)\, ds + \overline{a}\delta(s - \overline{s})\, ds$$

и в окрестности соответствующего da^0 набора

$$\mathscr{N}^0 = \{a_1, \dots, a_m, \overline{a} = 0, s_1, \dots, s_m, \overline{s}\}$$

рассмотрим новые локальные координаты, добавив к (78) $\overline{a}$ и $\overline{s}$. Пусть $\overline{\mathscr{E}}$ – орт в этих координатах, соответствующий координате $\overline{a}$, и пусть положительные числа $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k d_k - \xi_0\big(\varphi(\overline{s}) - r(\overline{s})\big) = -1.$$

Тогда при малых λ на луче

$$\mathscr{N}^* = \mathscr{N}^*(\lambda) = \mathscr{N}^0 - \lambda\bigg(\sum_{k=0}^{p} \xi_k \mathscr{E}_k - \xi_0 \overline{\mathscr{E}}\bigg), \qquad \lambda > 0,$$

верны модификация леммы 5 и лемма 6: $g(\mathscr{N}^*, x) < M(x)$ при всех $x \in [0,1]$, так что набор $\mathscr{N}^*$ соответствует мере $da^* \in \mathscr{A}_{m+1}$, и (вопреки (77)) $h(\mathscr{N}^*) > h(\mathscr{N}^0)$.

Проверка утверждения 4 закончена, и, чтобы завершить доказательство теоремы о строгом максимуме, остается обосновать допущение о том, что в (66) $p < 2m$.

Обоснование дополнительного предположения. Разумеется, множество $\{x \in [0,1] \mid g^0(x) = M(x)\}$, где функция

$$g^0(x) = g(da^0, x) = \int_0^\infty \frac{da^0(s)}{s+x} = \sum_{j=1}^m \frac{a_j^0}{s_j^0 + x}$$

совпадает с мажорантой $M(x)$, может содержать более, чем $2m$ точек, и даже может совпадать со всем отрезком $[0,1]$.

Почему же достаточно доказать (64) при дополнительном предположении, что это множество состоит из точек $x_1, \dots, x_p$, где $p < 2m$?

Объяснение заключается в следующем. Допустим, что максимум h^0 функционала $h(da, t^0)$ на множестве $\mathscr{A}$ (см. (63)) достигается не только на мере

$$da^0(s) = \sum_{j=1}^m a_j^0 \delta(s - s_j^0)\, ds \in \mathscr{A},$$

но еще и на некоторой другой мере $da^1 \in \mathscr{A}$,

$$\int_0^\infty da^1 = 1, \qquad g^1(x) = g(da^1, x) = \int_0^\infty \frac{da^1(s)}{s+x} \leqslant M(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,1].$$

Воспользуемся следующей очевидной леммой *о выпуклости*:

Лемма 7. *Пусть меры da^0 и da^1 принадлежат множеству $\mathscr{A}$ и*

$$h(da^0, t^0) = h(da^1, t^0) = h^0,$$

тогда при любых $\alpha^0 \geqslant 0$, $\alpha^1 \geqslant 0$, $\alpha^0 + \alpha^1 = 1$, мера $da = \alpha^0 da^0 + \alpha^1 da^1$ тоже принадлежит множеству $\mathscr{A}$ и $h(da, t^0) = h^0$.

Положим $da^* = \frac{1}{2}(da^0 + da^1)$, $g^*(x) = \frac{1}{2}(g^0(x) + g^1(x))$. Функция

$$g^*(x) = g(da^*, x) = \frac{1}{2}\biggl(\sum_{j=1}^m \frac{a_j^0}{s_j^0 + x} + \int_0^\infty \frac{da^1(s)}{s+x}\biggr)$$

совпадает с мажорантой $M(x)$ в тех и только тех точках, где

$$g^0(x) = g^1(x) = M(x),$$

т.е. на подмножестве множества

$$\biggl\{x \in [0,1] \biggm| \sum_{j=1}^m \frac{a_j^0}{s_j^0 + x} = \int_0^\infty \frac{da^1(s)}{s+x}\biggr\}. \tag{85}$$

Но в множестве (85), очевидно, меньше, чем $2m$ точек$^{\langle 29\rangle}$. Назовем точки

$$\bigl\{x \in [0,1] \mid g^0(x) = g^1(x) = M(x)\bigr\}$$

так же, как в (66),

$$x_1, \ldots, x_p, \qquad p < 2m,$$

и перепишем неравенство

$$g^*(x) = \frac{g^0(x) + g^1(x)}{2} < M(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,1], \quad x \neq x_1, \ldots, x_p,$$

в виде

$$g^0(x) < 2M(x) - g^1(x) = M^*(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,1], \quad x \neq x_1, \ldots, x_p.$$

Функцию $M^*(x) = 2M(x) - g^1(x)$ объявим *новой мажорантой*. Через $\mathscr{A}^*$ обозначим множество тех мер $da = da(s)$, для которых

$$\int_0^\infty da = 1 \quad \text{и} \quad g(da, x) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+x} \leqslant M^*(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,1]. \tag{86}$$

Сравнивая (86) и (63), легко получаем, что максимум функционала $h(da, t^0)$ на множестве мер $da \in \mathscr{A}^*$ равен h^0 и достигается на мерах da^0 и da^1.

Но по построению $g^0(x) = g(da^0, x) = M^*(x)$ только в точках

$$x_1, \ldots, x_p, \qquad p < 2m,$$

т.е. допущение о том, что $p < 2m$, выполняется. Итак, теорему о строгом максимуме, действительно, достаточно было доказать при этом дополнительном предположении.

Таким образом, если максимум функционала $h(da, t^0)$ достигается на мерах da^0 и $da^1 \in \mathscr{A}$, то $da^1 \equiv da^0$.

Доказательство теоремы о строгом максимуме завершено. Одновременно доказаны теоремы 4, 5, а еще раньше – вместе с утверждением 4 – доказана (ввиду замечания 2 к этому утверждению) и теорема 7.

§ 10. Доказательство теоремы о минимуме скорости в волноводе

Теперь докажем теорему 6 (см. конец § 5) о минимуме скоростной функции $u_P(y)$, график которой проходит через точку

$$P = (y, u), \qquad u > 1 + \varepsilon,$$

нижней границы полосы G. Пусть $n_P > 1$ (т.е. $u_P(y)$ принимает в волноводе хотя бы два значения, не равных 1); проверим, что тогда

$$\min u_P(y) \geqslant \sqrt{C\varepsilon}, \tag{87}$$

где C – положительная константа, не зависящая от $\tau(p)$.

Ввиду (23), чтобы проверить (87) достаточно установить, что для соответствующей $u_P(y)$ меры

$$da = da(s) = \sum_{j=1}^{m+1} a_j \delta(s - s_j)\, ds, \tag{88}$$

сосредоточенной в точках $s_1 > \cdots > s_{m+1} > 0$ (и такой, что все $a_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, $\sum_{j=1}^{m+1} a_j = 1$), *максимальное из* s_j *не может быть слишком большим*, а именно,

$$s_1 \leqslant \frac{1}{C\varepsilon} - 1. \tag{89}$$

Вначале рассмотрим случай, когда в (88) $m = 1$:

$$da(s) = a_1\delta(s - s_1)\,ds + a_2\delta(s - s_2)\,ds, \qquad s_1 > s_2 > 0, \quad a_{1,2} > 0, \quad a_1 + a_2 = 1.$$

В соответствии с § 6 (см. (40), (41)) сопоставим набору точек $\mathscr{S} = \{s_1, s_2\}$ такую рациональную аппроксимацию

$$r(\mathscr{S}, s) = d_0 + \frac{d_1}{s + w_1} + \frac{d_2}{s} \tag{90}$$

функции $\varphi(s)$, что $r(\mathscr{S}, s_j) = \varphi(s_j)$, $r'(\mathscr{S}, s_j) = \varphi'(s_j)$, $j = 1, 2$. Кроме того (ср. с (47), (48)), рассмотрим такую рациональную аппроксимацию

$$r_1(s) = d_{10} + \frac{d_{11}}{s + w_{11}} \tag{91}$$

функции $\varphi(s)$, что

$$r_1(0) = \varphi(0), \qquad r_1(s_1) = \varphi(s_1), \qquad r_1'(s_1) = \varphi'(s_1). \tag{92}$$

Нетрудно доказать⟨30⟩, что верна аналогичная лемме 2 из § 6

Лемма 8. *Полюс* w_{11} *аппроксимации* $r_1(s)$ *меньше, чем полюс* w_1 *аппроксимации* $r(\mathscr{S}, s)$: $w_{11} < w_1$.

А так как (по лемме 1) $w_1 \leqslant 1$, то отсюда следует, что

$$w_{11} < 1, \tag{93}$$

и для установления (89) в случае $m = 1$ остается доказать (это проверяется прямым подсчетом⟨31⟩), что верна следующая

Лемма 9. *Пусть*

$$\varphi(s) = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/t}}{\sqrt{s}}$$

и пусть полюс w_{11} *аппроксимации* $r_1(s)$ *(см. (91), (92)) меньше 1. Тогда для некоторого* $c > 0$

$$s_1 \leqslant \frac{c}{t}\,. \tag{94}$$

Замечание. Так как ввиду (23) координата u точки P равна $1/\sqrt{1-t}$, неравенство (94) эквивалентно (89).

В общем случае (для произвольного $m \geqslant 1$) вместо (90) нужно рассмотреть, как в (42)–(44), рациональную аппроксимацию

$$r(\mathscr{S}, s) = d_0 + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{d_k}{s + w_k}, \qquad w_1 > w_2 > \dots > w_{m+1} = 0,$$
$$r(\mathscr{S}, s_j) = \varphi(s_j), \quad r'(\mathscr{S}, s_j) = \varphi'(s_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m+1,$$

а вместо (91), (92) – рациональную аппроксимацию

$$r_m(s) = d_{m0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{d_{mk}}{s + w_{mk}}, \qquad w_{m1} > w_{m2} > \dots > w_{mm} > 0,$$
$$r_m^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2m-2, \qquad r_m(s_1) = \varphi(s_1), \qquad r'_m(s_1) = \varphi'(s_1).$$

Для этих аппроксимаций выполняется⟨32⟩ следующий аналог леммы 8. *Полюс* w_{m1} *аппроксимации* $r_m(s)$ *меньше, чем полюс* w_1 *аппроксимации* $r(\mathscr{S}, s)$:

$$w_{m1} < w_1.$$

Следовательно, так как (по лемме 1) $w_1 \leqslant 1$,

$$w_{m1} < 1, \tag{95}$$

и для завершения доказательства теоремы 6 остается заметить, что⟨33⟩ w_{m1} в (95) при $m > 1$ и w_{11} в (93) связаны неравенством $w_{11} < w_{m1}$, позволяющим и при $m > 1$ применить лемму 9.

§ 11. Теорема о монотонности – формулировка и доказательство

Теперь, выполняя данное в § 2 обещание, докажем (при некоторых дополнительных ограничениях) *монотонность функции* $n(t)$. А именно, докажем монотонность $n(t)$ для функционала (39) на множестве мер (38) в случае, детально исследованном в [2]: когда *мажоранта* $M(x)$, $x \in [0,1]$, *совпадает с функцией* $g(d\hat{a}, x)$ *для некоторой дискретной меры* $d\hat{a}$. Подробнее: пусть

$$d\hat{a} = d\hat{a}(s) = \sum_{j=1}^{\widehat{n}} \hat{a}_j \delta(s - \widehat{s}_j)\, ds,$$
$$\hat{a}_j > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant \widehat{n}; \qquad \sum_{j=1}^{\widehat{n}} \hat{a}_j = 1; \qquad \widehat{s}_1 > \dots > \widehat{s}_{\widehat{n}} > 0,$$

тогда относительно мажоранты $M(x)$ предполагается, что

$$M(x) = g(d\hat{a}, x) = \int_0^\infty \frac{d\hat{a}(s)}{s+x} = \sum_{j=1}^{\widehat{n}} \frac{\hat{a}_j}{\widehat{s}_j + x}, \qquad x \in [0,1]^{\langle 34\rangle}. \tag{96}$$

С учетом [1]–[3] в случае (96) при

$$\kappa(s,t)=\frac{2}{\pi}\int_t^\infty \frac{d\sqrt{x}}{s+x}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/t}}{\sqrt{s}}\,,\quad t\in(0,1];\qquad \kappa(s,0)=\frac{1}{\sqrt{s}}\,, \tag{97}$$

функционал

$$h(da,t)=\int_0^\infty \kappa(s,t)\,da(s)=\frac{2}{\pi}\int_t^\infty g(da,x)\,d\sqrt{x},\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

достигает максимума при каждом $t\in[0,1]$ *на некоторой (зависящей от* t) *дискретной мере* $da\prec d\hat{a}$, *сосредоточенной в* $n(t)\leqslant\widehat{n}$ *точках*, т.е. $\max h(da,t)$ достаточно искать на мерах

$$da\in\mathscr{A}_k,\qquad k\leqslant\widehat{n}. \tag{98}$$

Рассмотрим два случая: *основной*, когда при любом $t\in[0,1]$ максимум $h(da,t)$ достигается не на мере $d\hat{a}$, и *исключительный*, когда (при некоторых $t\in[0,1]$) $\max h(da,t)=h(d\hat{a},t)$.

Основной случай. Согласно [2] в этом случае (ср. с леммой 1 в § 6 и утверждением 4 в § 9) верно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Для каждого* $t\in[0,1]$ *существуют и однозначно определяются такое* $n=n(t)\leqslant\widehat{n}$, *такой набор чисел*

$$\begin{gathered}\{a_1,\dots,a_n,s_1,\dots,s_n\},\qquad a_j=a_j(t)>0,\quad 1\leqslant j\leqslant n,\quad \sum_{j=1}^n a_j=1,\\ s_1=s_1(t)>\dots>s_n=s_n(t)>0,\end{gathered} \tag{99}$$

и такой набор чисел

$$\begin{gathered}\{b_0,b_1,\dots,b_n,x_1,\dots,x_n\},\qquad b_k=b_k(t)>0,\quad 0\leqslant k\leqslant n,\\ 1=x_1=x_1(t)>\dots>x_n=x_n(t)\geqslant 0,\end{gathered} \tag{100}$$

что

1) *строгий максимум функционала* $h(da,t)$ *достигается на мере*

$$da=da(s,t)=\sum_{j=1}^n a_j(t)\delta(s-s_j(t))\,ds,\qquad 1\leqslant j\leqslant n=n(t); \tag{101}$$

2) *функция*

$$g(da,x)=\sum_{j=1}^n \frac{a_j(t)}{s_j(t)+x}$$

совпадает с мажорантой $M(x)=g(d\hat{a},x)$ *в точках* (100) *и только в них, т.е.* $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$ *– это множество особых точек меры* (101);

3) *функция*

$$r(s,t)=b_0(t)+\sum_{k=1}^n \frac{b_k(t)}{s+x_k(t)}$$

совпадает с $\kappa(s,t)$ *из* (97) *в точках* (99), *а в остальных* $s>0$ *больше* $\kappa(s,t)$.

Верны также следующие два утверждения⟨35⟩.

Утверждение 6. *Если* $t_i \in [0,1]$ *сходятся к* t, *то* $n(t_i) \geqslant n(t)$, *начиная с некоторого* i, *и* (*см.* (99) *и* (100))

$$s_k(t_i) \to s_k(t) \text{ при } k \leqslant n(t), \qquad s_k(t_i) \to 0 \text{ при } k > n(t);$$
$$x_k(t_i) \to x_k(t) \text{ при } k \leqslant n(t), \qquad x_k(t_i) \to 0 \text{ при } k > n(t).$$

Утверждение 7. *Пусть* $t > 0$ – *точка разрыва* $n(t)$. *Тогда*

$$0 < t < x_n(t). \tag{102}$$

Монотонность функции $n(t)$ является следствием этих утверждений: верна

Теорема 9. *При условии* (96) $n(t)$ *не возрастает на* $(0,1]$.

Доказательство. Пусть $t > 0$ – точка разрыва функции $n(t)$. Тогда (с учетом утверждения 6) в любой ее окрестности есть точка t^*, в которой $n(t^*) > n(t)$. Положим (см. (101))

$$da = da(s,t), \quad da^* = da(s,t^*), \qquad g(x) = g(da,x), \quad g^*(x) = g(da^*,x).$$

Пусть точка t^* настолько близка к t, что в соответствии с утверждениями 6 и 7 выполняются условия

$$0 \leqslant x_{n+1}(t^*) < \min(t,t^*), \qquad \max(t,t^*) < \min\bigl(x_n(t), x_n(t^*)\bigr), \tag{103}$$
$$0 < s_{n+1}(t^*) < s_n(t). \tag{104}$$

Выведем из (103) и (104), что

$$t^* < t, \tag{105}$$

а значит, $n(t)$ *не возрастает*$^{\langle 36\rangle}$.

Проверка неравенства (105)**.** Введем две функции:

$$P_1(x) = g^*(x) - g(x) = \sum_{j=1}^{n(t^*)} \frac{a_j^*}{s_j^* + x} - \sum_{j=1}^{n(t)} \frac{a_j}{s_j + x}\,,$$

$$P_2(s) = \bigl(r(s,t^*) - \kappa(s,t^*)\bigr) - \bigl(r(s,t) - \kappa(s,t)\bigr) = r(s,t^*) - r(s,t) + \frac{2}{\pi}\int_t^{t^*} \frac{d\sqrt{x}}{s+x}$$
$$= b_0(t^*) - b_0(t) + \sum_{j=1}^{n(t^*)} \frac{b_k(t^*)}{s + x_k(t^*)} - \sum_{j=1}^{n(t)} \frac{b_k(t)}{s + x_k(t)} + \frac{2}{\pi}\int_t^{t^*} \frac{d\sqrt{x}}{s+x}\,.$$

Приведя подобные члены, запишем $P_1(x)$ и $P_2(s)$ в виде

$$P_1(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j}{S_j + x}, \qquad P_2(s) = B_0 + \sum_{k=1}^{Q} \frac{B_k}{s + X_k} + \frac{2}{\pi}\int_t^{t^*} \frac{d\sqrt{x}}{s+x}\,,$$

где $S_1 > \cdots > S_N$, $X_1 > \cdots > X_Q$.

Так же, как в [3, с. 23, 24], доопределим ядро Коши $C(s,x) = 1/(s+x)$ при $x = X_0 = +\infty$, положив $C(s,X_0) = C(s,+\infty) = 1$. Тогда формулы для $P_1(x)$ и $P_2(s)$ примут вид

$$P_1(x) = \sum_{j=1}^{N} A_j C(S_j, x), \qquad P_2(s) = \sum_{k=0}^{Q} B_k C(s, X_k) + \frac{2}{\pi}\int_t^{t^*} C(s,x)\, d\sqrt{x},$$

причем (вследствие равенств $\sum a_j = \sum a_j^* = 1$)

$$P_1(X_0) = P_1(+\infty) = 0.$$

Выберем индекс q так, чтобы $x_{n+1}(t^*) = X_{q+1}$, и рассмотрим следующие три последовательности:

$$\begin{gathered} \bigl\{P_1(X_Q),\dots,P_1(X_1),P_1(X_0)\bigr\}, \qquad \bigl\{P_2(S_N),\dots,P_2(S_1)\bigr\}, \\ \bigl\{P_1(X_Q),\dots,P_1(X_{q+1}),t^*-t,P_1(X_q),\dots,P_1(X_1),P_1(X_0)\bigr\}. \end{gathered} \tag{106}$$

Сосчитаем число перемен знака в каждой из них, применяя следующее

Правило замены нулей. *Нули в последовательностях заменяются положительными или отрицательными числами так, чтобы число перемен знака стало максимально возможным.*

Пусть Π_1, Π_2 и Π_1' – сосчитанные по этому правилу числа перемен знака в последовательностях (106), а K_1 и K_2 – суммы кратностей корней $P_1(x)$ и $P_2(s)$, причем в число корней $P_1(x)$ включается корень $X_0 = +\infty$ *кратности* 1. Тогда верна

Лемма 10. *Выполняется цепочка неравенств*

$$\Pi_1 \overset{\text{(I)}}{\leqslant} K_1 \overset{\text{(II)}}{\leqslant} \Pi_2 \overset{\text{(III)}}{\leqslant} K_2 \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} \Pi_1', \tag{107}$$

причем не может случиться, чтобы все они превратились в равенства.

Неравенство (105) является следствием леммы 10. Действительно, числа $P_1(X_Q),\dots,P_1(X_{q+1})$ *положительны*$^{\langle 37\rangle}$. Значит, если разность t^*-t *тоже положительна*, то $\Pi_1 = \Pi_1'$ и все неравенства (107) превращаются в равенства.

Итак, остается привести

Доказательство леммы 10. Начнем с проверки неравенств (II) и (IV). Оба следуют из теоремы Гантмахера–Крейна (используемой также в $^{\langle 16\rangle}$, $^{\langle 22\rangle}$ и в других комментариях).

По этой теореме сумма K_1 кратностей корней

$$P_1(x) = \sum_{j=1}^{N} A_j C(S_j, x)$$

не больше числа Π перемен знака в последовательности коэффициентов $\{A_j\}$. Поэтому для проверки (II) достаточно сравнить последовательности

$$\{A_N, \dots, A_1\} \quad \text{и} \quad \{P_2(S_N), \dots, P_2(S_1)\}$$

и установить⟨38⟩, что $\Pi \leqslant \Pi_2$. Отсюда $K_1 \leqslant \Pi \leqslant \Pi_2$.

Неравенство (IV) доказывается аналогично. Сумма K_2 кратностей корней

$$P_2(s) = \sum_{k=0}^{Q} B_k C(s, X_k) + (t^* - t) I(s),$$

где

$$I(s) = \frac{2}{\pi(t^* - t)} \int_t^{t^*} C(s, x)\, d\sqrt{x},$$

не больше числа Π' перемен знака в последовательности коэффициентов

$$\{B_Q, \dots, B_{q+1}, t^* - t, B_q, \dots, B_1, B_0\}. \tag{108}$$

Замечание. Коэффициент $t^* - t$ располагается между B_{q+1} и B_q, так как согласно (103) t и t^* лежат между X_{q+1} и X_q.

Сравним (108) с последовательностью

$$\{P_1(X_Q), \dots, P_1(X_{q+1}), t^* - t, P_1(X_q), \dots, P_1(X_1), P_1(X_0)\}$$

из (106). Так же, как в ⟨38⟩, проверяется, что $\Pi' \leqslant \Pi_1'$ ⟨39⟩. Отсюда

$$K_2 \leqslant \Pi' \leqslant \Pi_1'. \tag{109}$$

Проверим теперь неравенство (III). Каждая перемена знака в последовательности $\{P_2(S_N), \dots, P_2(S_1)\}$ дает (по теореме о промежуточном значении) нуль $P_2(s)$, а любой нуль в этой последовательности является *кратным нулем* $P_2(s)$⟨40⟩. Поэтому число Π_2 перемен знака (сосчитанное с применением правила замены нулей) не превосходит K_2.

Неравенство (I) доказывается аналогично⟨41⟩.

Чтобы доказать, что неравенства (III) и (IV) в (107) не могут оба превратиться в равенства, используем следующее

Уточнение теоремы Гантмахера–Крейна. Сформулируем его и следствие из него применительно к неравенствам (III) и (IV).

A) Пусть (см. (IV) и (109)) сумма K_2 кратностей корней

$$P_2(s) = \sum_{k=0}^{Q} B_k C(s, X_k) + (t^* - t) I(s)$$

равна числу Π' перемен знака в последовательности (108). Тогда *при малых $s > 0$ (левее минимального корня $P_2(s)$) знак $P_2(s)$ совпадает со знаком B_Q*. Следовательно, с учетом (103), $P_2(s) > 0$ при этих s.

В) Пусть (см. (III)) сумма K_2 кратностей корней $P_2(s)$ *равна* числу Π_2 перемен знака в последовательности

$$\{P_2(S_N), \ldots, P_2(S_1)\}.$$

Тогда левее S_N нет ни одного корня $P_2(s)$. Поэтому, если бы оба неравенства – и (IV), и (III) – превратились в равенства, то $P_2(S_N)$ оказалось бы неотрицательным.

Но, учитывая (104), $S_N = s_{n(t^*)}(t^*)$ и (ввиду ⟨38⟩) $P_2(S_N) < 0$. Значит, неравенства (107) не могут *все сразу* превратиться в равенства. Доказательство леммы 10 и теоремы 9 завершено⟨42⟩.

Исключительный случай. В этом случае верна⟨43⟩

Теорема 10. *Если $\widehat{n} = 1$, т.е. $d\hat{a} = d\hat{a}(s) = \delta(s - \widehat{s})\,ds$, то*

$$\max h(da, t) \equiv h(d\hat{a}, t), \ \text{ и, значит, } n(t) \equiv 1 \text{ при всех } t \geqslant 0.$$

Если $\widehat{n} > 1$, то для некоторого $t^0 \in [0, \frac{3}{5})$

$$\max h(da, t) = h(d\hat{a}, t) \text{ при всех } t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^0,$$

так что $n(t) \equiv \widehat{n}$ при $t \leqslant t^0$; при любом $t > t^0$ (как и в основном случае) максимум $h(da, t)$ достигается не на мере $d\hat{a}$:

$$\max h(da, t) \neq h(d\hat{a}, t).$$

Монотонность $n(t)$ при $t > t^0$ проверяется так же, как и в основном случае, а поскольку (см. (98)) $\max h(da, t)$ достигается на мерах da, сосредоточенных не более, чем в $\widehat{n}$ точках, *функция $n(t)$ не возрастает на всем отрезке* $[0, 1]$.

§ 12. Комментарии

1. Рассмотрим кривую $x_0 = 1$, $x_1 = s$, $x_2 = s^2$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, т.е. попросту дугу $\mathscr{D}$ параболы $x_2 = x_1^2$, $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, лежащую в плоскости $x_0 = 1$. Ее замкнутую выпуклую оболочку обозначим через $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ (рис. 6). По теореме Рисса [8, с. 30] $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ совпадает с множеством центров масс, расположенных на дуге $\mathscr{D}$. Иначе говоря, $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ – это множество точек

$$(x_1, x_2) = (I_1, I_2), \qquad I_1 = \int_0^1 s\,da(s), \quad I_2 = \int_0^1 s^2\,da(s),$$

где интегралы $I_{1,2}$ берутся по таким мерам Стилтьеса $da(s) \geqslant 0$ на $[0, 1]$, для которых $\int_0^1 da(s) = 1$. Нам нужно найти максимум и минимум интеграла I_2 по всем таким мерам при дополнительном условии $I_1 = \frac{1}{2}$. Это условие выделяет

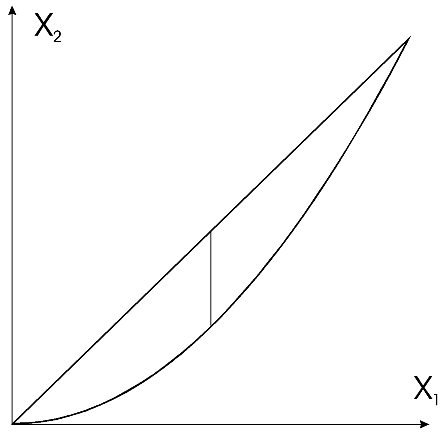

Рис. 6

из $\mathscr{R}$ ($\mathscr{D}$) отрезок, в концах которого и достигаются искомые экстремумы. Итак, максимум и минимум интеграла I_2 достигаются на *дискретных мерах*

$$da_1(s) = \frac{\delta(s) + \delta(s-1)}{2}\,ds, \qquad da_2(s) = \delta\Big(s - \frac{1}{2}\Big)\,ds,$$

так что

$$\max I_2 = \int_0^1 s^2\,da_1(s) = \frac{1}{2}\,, \qquad \min I_2 = \int_0^1 s^2\,da_2(s) = \frac{1}{4}\,.$$

2. *Квадратурами Гаусса* для вычисления интеграла $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ называются формулы вида $A(f) = \sum_{j=1}^n V_j f(\Lambda_j)$ с таким выбором *весов* V_j и *узлов* Λ_j, чтобы (при заданном n) *для многочленов* $\mathscr{P}(t)$ *возможно более высокой степени* получались *точные равенства*

$$\int_{-1}^1 \mathscr{P}(t)\,dt = \sum_{j=1}^n V_j\,\mathscr{P}(\Lambda_j).$$

В квадратурных формулах Гаусса в качестве *узлов* $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ берутся *корни полинома Лежандра* $L_n(t), t \in (-1,1)$, – тогда существуют и единственны такие *веса* $V_1, \dots, V_n$, что *точно интегрируются все многочлены* $\mathscr{P}(t)$ *до* $(2n-1)$*-й степени.*

При доказательстве теорем об универсальной последовательности перед нами возникнет

Задача. *Найти такие узлы* $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ *и веса* $c_1, \dots, c_n$*, чтобы для любого многочлена* $\mathscr{P}(t)$ *степени* $k \leqslant 2n-1$ *и для функции* $\nu(t) = t^{3/2}/3$ *выполнялись равенства*

$$\int_0^1 \mathscr{P}(t)\,d\nu(t) = \sum_{j=1}^n c_j\,\mathscr{P}(\zeta_j).$$

Мы увидим, что *решение этой задачи существует и единственно, причем* $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ *– это квадраты ненулевых корней полинома Лежандра* $L_{2n+1}(x)$, *а* $c_1,\dots,c_n$ *определяются из системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\zeta_j^k = \frac{1}{2k+3}\,, \qquad 0\leqslant k\leqslant n-1.$$

3. Фактически задача была сделана при более сильных ограничениях.

4. Упрощение состоит в том, что сейсмические лучи с общим началом A и общим концом B (A и B – точки на окружности), совершившие *разное* число оборотов вокруг центра круга, при переходе к задаче в полуплоскости, отображаются в лучи с *разными* концами.

5. Если в точке (x,t) годограф Γ имеет касательную с тангенсом угла наклона p, то $2X(p)=x$, $2T(p)=t$.

В [14, с. 44] приводится пример *двухточечного* годографа Γ, по которому $X(p)$ и $T(p)$ определяются *неоднозначно*.

6. Лучи, начинающиеся в точке $A\in i$ и выходящие из A под малым углом к оси x, *не выходят из полосы* i. Механический аналог – траектория шарика в желобе.

7. Функции $u_1(y)$ и $u_2(y)$, $y\in i$, *равноизмеримы*, если

$$\operatorname{mes}\bigl\{y\in i,\ u_1(y)<t\bigr\}=\operatorname{mes}\bigl\{y\in i,\ u_2(y)<t\bigr\}\quad \text{при всех}\quad t.$$

8. В [11] дается образное описание *не изменяющего* Γ преобразования $u(y)$: говорится, что *слои в волноводе можно тасовать*.

9. Монотонная функция $\tau(p)$ дифференцируема *почти всюду* и на множестве *полной меры* $\tau'(p)=-X(p)$. Можно доказать, что $\tau(p)$ абсолютно непрерывна при $p\in(0,1)$ и имеет скачок при $p=1$, так что

$$\tau(p)=\tau(1-0)+\int_p^1 X(q)\,dq.$$

10. Формула (12) – это иначе записанная формула (8).

11. Основные, не поддававшиеся старым методам и остающиеся пока нерешенными проблемы в классической задаче обращения годографа – это *построение нижней границы полосы* G (в случае, когда волновод один) и аналогичное более общее построение в случае двух или нескольких волноводов.

12. В [5] предлагался более сложный алгоритм:

а) *Рассмотрим бесконечную вправо и вниз матрицу*

$$M(t)=\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & \dots\\ 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/9 & \dots\\ 1/5 & 1/7 & 1/9 & 1/11 & \dots\\ 1/7 & 1/9 & 1/11 & 1/13 & \dots\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\end{pmatrix}$$

и ее части $M_k(t)$, $k\geqslant 1$, *содержащие* $k+1$ *строк и* $k+1$ *столбцов*:

$$M_1(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 1/3 & 1/5\end{pmatrix},\quad M_2(t)=\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ 1/3 & 1/5 & 1/7\\ 1/5 & 1/7 & 1/9\end{pmatrix},\quad \dots .$$

б) *Обозначим через* t_k *наименьший корень уравнения* $\det M_k(t) = 0$; *отметим, что* $t_k \in (0, t_{k-1})$, *это облегчает вычисление* t_k.

в) *Положим* $U_k = 1/\sqrt{1-t_k}$.

13. Известно, что при $k \to \infty$ наименьший положительный корень λ_k многочлена Лежандра $L_{2k+1}(x)$ убывает как $O(1/k)$:

$$\lambda_k = O\Big(\frac{1}{k}\Big). \tag{110}$$

Поэтому для универсальной последовательности

$$U_k = (1-\lambda_k^2)^{-1/2}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots,$$

выполняется оценка $U_k - 1 = O(1/k^2)$. Приведем простое доказательство (110). Согласно [16, часть 2, отдел VI, задача 93, с. 104, 311] $L_{2k+1}(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом вида

$$c_0 \cos x + c_1 \cos 3x + \dots + c_k \cos(2k+1)x \tag{111}$$

с коэффициентами, вычисляемыми по формулам

$$c_0 = 2g_k g_{k+1}, \quad c_1 = 2g_{k-1}g_{k+2}, \quad \dots, \quad c_{k-1} = 2g_1 g_{2k}, \quad c_k = 2g_0 g_{2k+1},$$

где

$$g_0 = 1, \qquad g_k = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Значит, коэффициенты в (111) *положительны и возрастают*:

$$0 < c_0 < c_1 < \dots < c_k. \tag{112}$$

Рассмотрим множество тригонометрических многочленов вида (111), удовлетворяющих условию (112). Из принадлежности $L_{2k+1}(\cos x)$ этому множеству следует (см. [17]), что расстояния между соседними корнями $L_{2k+1}(\cos x)$ убывают с ростом k как $O(1/k)$, т.е. следует оценка (110).

С помощью приема, предложенного в [17], можно оценить λ_k и более точно:

$$\sin\alpha_k < \lambda_k < \sin\beta_k, \quad \text{где} \quad \alpha_k = \frac{\pi}{4k}, \quad \beta_k = \frac{3\pi}{4(k+1)}, \quad k \geqslant 1;$$

для U_k отсюда следует, что $1/(\cos\alpha_k) < U_k < 1/(\cos\beta_k)$, $k \geqslant 1$, а значит,

$$1 + \frac{0.3}{k^2} < U_k < 1 + \frac{2.8}{k^2}, \qquad k \geqslant 1.$$

14. Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_n(x) = \Big(2 - \frac{1}{n}\Big)xL_{n-1}(x) - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)L_{n-2}(x)$$

показывают, что $L_n(x)$ содержит степени x только той же четности, какова четность n. Поэтому функция $P_n(t)$, определяемая равенством

$$xP_n(x^2) = L_{2n+1}(x),$$

– полином степени n. Так как $L_{2n+1}(x)/x$ имеет n пар корней $\pm\alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, на $[-1,1]$, то $P_n(t)$ имеет n корней α_j^2, $1 \leqslant j \leqslant n$, на $[0,1]$.

Как известно, полином Лежандра $L_n(x)$ степени n ортогонален на $[-1,1]$ всем полиномам степени $k < n$:

$$\int_{-1}^{1} x^k L_n(x)\,dx = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Поэтому

$$\int_0^1 x^{2k+1} L_{2n+1}(x)\,dx = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Отсюда (ввиду равенства $d\nu(t) = \frac{1}{2}t^{1/2}\,dt$) при $0 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^k P_n(t)\,d\nu(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{k+1/2} P_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2k+1} P_n(x^2)\,d(x^2) \\ &= \int_0^1 x^{2k+1} L_{2n+1}(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Любой многочлен $\mathscr{P}(t)$ степени $s \leqslant 2n-1$ можно (разделив с остатком на $P_n(t)$) представить в виде

$$\mathscr{P}(t) = \mathscr{A}(t) + \mathscr{B}(t), \qquad \mathscr{A}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k P_n(t), \quad \mathscr{B}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k t^k.$$

По доказанному

$$\int_0^1 \mathscr{A}(t)\,d\nu(t) = 0.$$

Корни $\zeta_j = \alpha_j^2$ полинома $P_n(t)$ являются также корнями $\mathscr{A}(t)$. Поэтому

$$\int_0^1 \mathscr{A}(t)\,d\nu(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathscr{A}(\zeta_j)$$

при любых $c_1, \ldots, c_n$, в частности, и при таких, которые определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \zeta_j^k = \frac{1}{2k+3}\,, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Правые части этих уравнений – интегралы от t^k по $d\nu(t)$:

$$\int_0^1 t^k\,d\nu(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{k+1/2}\,dt = \frac{1}{2k+3}\,, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Следовательно, для так определенных $c_1,\dots,c_n$

$$\int_0^1 \mathscr{B}(t)\,d\nu(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathscr{B}(\zeta_j),$$

а значит, и

$$\int_0^1 \mathscr{P}(t)\,d\nu(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathscr{P}(\zeta_j).$$

Из приведенного доказательства следует, что задачи 1 и 2 эквивалентны и их решение существует.

Остается доказать единственность найденного решения. Допустим, что существует еще одно решение c_j^*, ζ_j^*, $1 \leqslant j \leqslant n$. Объединим ζ_j и ζ_j^*, $1 \leqslant j \leqslant n$, и обозначим все попарно различные точки этого объединения через $\xi_1,\dots,\xi_q$, где $q \leqslant 2n$. Решая систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^q e_j \xi_j^k = \frac{1}{2k+3}\,, \qquad 0 \leqslant k \leqslant q-1,$$

получаем *единственный* набор чисел $e_1,\dots,e_q$, удовлетворяющих (вместе с $\xi_1,\dots,\xi_q$) этой системе. Однако $e_1,\dots,e_q$, равные $c_1,\dots,c_n$ в точках ξ_j, совпадающих с $\zeta_1,\dots,\zeta_n$, и равные нулю в остальных точках ξ_j, – это *один такой набор чисел*, а $e_1,\dots,e_q$, равные $c_1^*,\dots,c_n^*$ в точках ξ_j^*, совпадающих с $\zeta_1^*,\dots,\zeta_n^*$, и равные нулю в остальных точках ξ_j, – это *другой такой набор*. Полученное противоречие доказывает теорему 8.

15. Нетрудно проверить (действуя, как в §7), что *при любом* $m \geqslant 1$ *и любом* $t > 0$ *аппроксимация* $r_0(s)$ *функции* $\varphi(s) = \kappa(s,t)$ *существует и однозначно* (*с точностью до нумерации слагаемых*) *определяется условиями* (48).

16. Разобьем доказательство леммы 2 на три части.

A) Пусть (см. (40)–(45)) точки наборов $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}^*$ *чередуются*:

$$s_1 \geqslant s_1^* \geqslant \dots \geqslant s_m \geqslant s_m^* \geqslant s_{m+1} > s_{m+1}^* > 0. \tag{113}$$

Докажем, что тогда полюсы w_k и w_k^*, $1 \leqslant k \leqslant m$, аппроксимаций $r(\mathscr{S},s)$ и $r(\mathscr{S}^*,s)$ тоже *чередуются*, причем неравенства *строгие*:

$$w_1 > w_1^* > \dots > w_m > w_m^* > w_{m+1} = w_{m+1}^* = 0. \tag{114}$$

Согласно (42) и (45) при всех j, $1 \leqslant j \leqslant m+1$,

$$r(\mathscr{S},s_j) = \varphi(s_j) \leqslant r(\mathscr{S}^*,s_j), \qquad r(\mathscr{S}^*,s_j^*) = \varphi(s_j^*) \leqslant r(\mathscr{S},s_j^*).$$

Поэтому для функции

$$\rho(s) = r(\mathscr{S}, s) - r(\mathscr{S}^*, s) = d_0 - d_0^* + \sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{d_k}{s + w_k} - \frac{d_k^*}{s + w_k^*} \right) \tag{115}$$

сумма K *кратностей корней на полуоси* $s > 0$ и даже *сумма* K' *кратностей корней на отрезке* $[s_{m+1}^*, s_1]$ *не меньше* $2m+1$: $K \geqslant K' \geqslant 2m+1$. Приведем в (115) подобные члены, упорядочим полюсы по убыванию и запишем (115) в виде

$$\rho(s) = c_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{s + x_k}, \qquad x_1 > \dots > x_p = 0, \quad p \leqslant 2m+1.$$

По теореме Гантмахера–Крейна (см. [8, с. 62], [18, с. 36–38] либо [19]) *число* Π *перемен знака в последовательности коэффициентов* $c_0, \dots, c_p$ *не меньше* K. Так как $\Pi \leqslant p$, отсюда следует, что $p = \Pi = K = K' = 2m+1$. Поэтому $\rho(s) \neq 0$ при $0 < s < s_{m+1}^*$ и, поскольку $s_{m+1}^* < s_{m+1}$ (см. (113)), $\rho(s) > 0$ на $(0, s_{m+1}^*]$. Значит, $c_p = c_{2m+1} = d_{m+1} - d_{m+1}^* > 0$ и (114) доказано: если полюсы w_k и w_k^* располагаются в любом другом порядке, то $\Pi < 2m+1$.

B) Взяв малое $\varepsilon > 0$, рассмотрим последовательность наборов

$$\mathscr{S}_n = \{s_{n,1}, \dots, s_{n,m+1}\}, \qquad s_{n,1} > \dots > s_{n,m+1} > 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

обладающую тремя свойствами: а) $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}$, б) $s_{N,1} < \varepsilon$, в) точки наборов $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{S}_{n+1}$ $(1 \leqslant n < N)$ *чередуются*:

$$s_{n,1} > s_{n+1,1} > \dots > s_{n,m+1} > s_{n+1,m+1} > 0.$$

Согласно A) для аппроксимаций $r(\mathscr{S}_n, s)$ и $r(\mathscr{S}_{n+1}, s)$

$$w_{n,1} > w_{n+1,1} > \dots > w_{n,m+1} = w_{n+1,m+1} = 0.$$

Отсюда (ср. с (50))

$$w_1 = w_{1,1} > w_{N,1}. \tag{116}$$

C) При $\varepsilon \to 0$ аппроксимация $r(\mathscr{S}_N, s)$, очевидно, стремится к аппроксимации $r_0(s)$ (см. (47), (48)). Отсюда ввиду (116) следует (50), что и доказывает лемму 2.

17. Докажем, что утверждение 1 следует из утверждения 3.

Ясно (см. определение $H(p)$ в начале § 5), что

$$H(p) = \sup \Psi(p) \text{ по всем } \textit{ступенчатым } u(y) \in \mathscr{U}.$$

Эквивалентное утверждение: пусть

$$h(t) = H(\sqrt{1-t}\,) = \sup h(da, t) \text{ по } \textit{всем} \text{ мерам (38)},$$

тогда $h(t)$ совпадает с $\sup h(da, t)$ *по объединению* $\mathscr{A}_n$, $n \geqslant 1$.

Значит, если положить $h_k(t) = \sup h(da, t)$ по $\mathscr{A}_k$ и допустить, что (вопреки утверждению 1)) $h_k(t)$ *строго меньше* $h(t)$, хотя $t \geqslant t_k$, то найдутся такое n и такая *дискретная мера* da^0 *из* $\mathscr{A}_n$, что $h(da^0, t) > h_k(t)$.

Найдем $\max h(da, t)$ по всем $da \prec da^0$. С одной стороны, этот максимум *не меньше* $h(da^0, t)$ и, значит, *больше* $h_k(t)$; следовательно, согласно [2] он достигается на некоторой мере $da \in \mathscr{A}_{m+1}$, где $m \geqslant k$; с другой стороны, по утверждению 3 при $t \geqslant t_k \geqslant t_m$ выполняется неравенство (51), и лемма 2 приводит нас к противоречию с леммой 1.

18. При $\sum_{j=1}^{k} a_j = a < 1$ добавим к мере $d\tilde{a} \in \widetilde{\mathscr{A}}_k$ слагаемое

$$(\alpha + 1 - a)\delta(s - S)\, ds - \alpha\delta(s - s_1)\, ds,$$

выбрав $\alpha \in (0, a_1)$ столь малым, а S столь большим, что

$$\alpha\varphi(s_1) < \varepsilon, \qquad \frac{\alpha + 1 - a}{S + x} < \frac{\alpha}{s_1 + x} \quad \text{при} \quad x \in [0, 1].$$

Тогда

$$g(da, x) = g(d\tilde{a}, x) - \frac{\alpha}{s_1 + x} + \frac{\alpha + 1 - a}{S + x} < M(x) \quad \text{на} \quad [0, 1],$$

так что $da = d\tilde{a} - \alpha\delta(s - s_1)\, ds + (\alpha + 1 - a)\delta(s - S)\, ds \in \mathscr{A}_{k+1}$, и при этом

$$h(da, t) = h(d\tilde{a}, t) - \alpha\varphi(s_1) + (\alpha + 1 - a)\varphi(S) > h(d\tilde{a}, t) - \varepsilon.$$

19. В последовательности (56) мер $da_n(s) = \sum_{j=1}^{k} a_{nj}\delta(s - s_{nj})\, ds$ коэффициенты a_{nj} неотрицательны и в сумме равны 1, а следовательно, ограничены. Функция

$$\varphi(s) = \kappa(s, t^0) = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/t^0}}{\sqrt{s}} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to +\infty.$$

Значит, сумма

$$\sum a_{nj}\varphi(s_{nj}) \quad \text{по} \quad j \in J_\infty$$

сходится к нулю при $n \to +\infty$. То же верно и для суммы

$$\sum a_{nj}\varphi(s_{nj}) \quad \text{по} \quad j \in J_0,$$

так как $\varphi(s)$ ограничена и (как нетрудно проверить)

$$a_{nj} \to 0 \quad \text{при} \quad s_{nj} \to 0. \tag{117}$$

Докажем (117). Ширина волновода, соответствующего мере da_n, равна $h_n = \sum_{j=1}^{k} a_{nj}\kappa(s_{nj}, 0) = \sum_{j=1}^{k} a_{nj}/\sqrt{s_{nj}}$. Числа h_n, очевидно, ограничены: $h_n \leqslant \inf T(p)$, $0 < p < 1$. Действительно, каждый сейсмический луч $L(p)$ с параметром p, $0 < p < 1$, пересекает волновод *насквозь*. Значит, путь, который сейсмический импульс проходит в волноводе по нисходящей дуге луча $L(p)$, больше h_n и не превосходит $T(p)$ (так как скорость импульса в волноводе не больше 1). Поэтому $a_{nj} = O(\sqrt{s_{nj}}\,)$ при $s_{nj} \to 0$.

Итак, $\sum a_{nj}\varphi(s_{nj})$ по $j \in J_\infty \cup J_0$ сходится к нулю при $n \to +\infty$, и, значит, $\sum a_{nj}\varphi(s_{nj})$ по $j \in J$ сходится к $h_k(t^0)$, т.е. $h(da^0, t^0) = h_k(t^0)$.

20. При $s_1^0 \geqslant 1$ возьмем $0 < \varepsilon \leqslant (1-a)/a_1^0$, положим

$$k = 1 + \varepsilon, \qquad a_1 = ka_1^0, \qquad s_1 = ks_1^0 + \varepsilon$$

и заменим $\{a_1^0,\, s_1^0\}$ в da^0 на $\{a_1,\, s_1\}$ в da, не меняя остальные a_j^0, s_j^0, $2 \leqslant j \leqslant m$.

Тогда

а) сумма коэффициентов в da равна $a + \varepsilon a_1^0 \leqslant 1$;

б) $da \prec da^0$, так как

$$g(da^0, x) - g(da, x) = \frac{a_1^0}{s_1^0 + x} - \frac{ka_1^0}{ks_1^0 + \varepsilon + x} > 0 \quad \text{на} \quad [0, 1),$$

поскольку с точностью до положительного множителя эта разность равна

$$ks_1^0 + \varepsilon + x - k(s_1^0 + x) = \varepsilon + x(1-k) = \varepsilon(1-x);$$

в) $h(da, t^0) - h(da^0, t^0) = a_1\varphi(s_1) - a_1^0\varphi(s_1^0)$, где

$$\varphi(s) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/t^0}}{\sqrt{s}}\,,$$

так что (ввиду неравенства $s_1^0 \geqslant 1$) выполняется (61).

Действительно, $k^2 = (1+\varepsilon)^2 > 1 + 2\varepsilon = k + \varepsilon > k + \varepsilon/s_1^0$. Значит,

$$k > \sqrt{\frac{ks_1^0 + \varepsilon}{s_1^0}}\,.$$

Отсюда (с учетом равенств $a_1 = ka_1^0$, $s_1 = ks_1^0 + \varepsilon$)

$$a_1\varphi(s_1) - a_1^0\varphi(s_1^0) > \frac{2a_1^0}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{s_1^0}{t^0}}\left(\frac{k}{\sqrt{ks_1^0 + \varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{s_1^0}}\right) > 0.$$

21. Доказано даже больше, а именно, *что при $da = da^0$ функционал $h(da, t^0)$ достигает своего максимального значения h^0 на* включающем $\mathscr{A}$ *множестве* $\widetilde{\mathscr{A}}$ *мер $da \geqslant 0$, для которых*

$$\int_0^\infty da \leqslant 1, \qquad g(da, x) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s + x} \leqslant M(x) \quad \textit{при} \quad x \in [0, 1].$$

22. Пусть для определенности $t^0 < x_p < \cdots < x_1$. Положим

$$d\theta(x) = \frac{2}{\pi}\,d\sqrt{x},$$

тогда

$$\varphi(s) = \int_{t^0}^\infty \frac{d\theta(x)}{s + x} = \varphi_0(s) + \varphi_1(s) + \cdots + \varphi_p(s),$$

где

$$\varphi_p(s) = \int_{t^0}^{x_p} \frac{d\theta(x)}{s+x}, \quad \ldots, \quad \varphi_1(s) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{d\theta(x)}{s+x}, \quad \varphi_0(s) = \int_{x_1}^{\infty} \frac{d\theta(x)}{s+x}.$$

По теореме Гантмахера–Крейна (ср. с $\langle 16 \rangle$) сумма кратностей корней $r(s) - \varphi(s)$ не больше числа Π перемен знака в разложении

$$r(s) - \varphi(s) = d_0 - \varphi_0(s) + \frac{d_1}{s+x_1} - \varphi_1(s) + \cdots + \frac{d_p}{s+x_p} - \varphi_p(s). \tag{118}$$

Так как $\Pi \leqslant 2p+1$ ($\Pi = 2p+1$, если все $d_k > 0$, $0 \leqslant k \leqslant p$) и так как все корни $r(s) - \varphi(s)$ минимум двукратные (поскольку $r \geqslant \varphi$), то число q корней $r(s) - \varphi(s)$ не больше p. По условию $r(s) - \varphi(s)$ имеет не менее m корней. Значит, $m \leqslant q \leqslant p$.

Если среди коэффициентов $d_1, \ldots, d_p$ лишь n положительных, то число Π перемен знака в разложении (118) не больше $2n+1$. Снова применяя теорему Гантмахера–Крейна, получаем $n \geqslant q$.

23. Коэффициенты a_j^0 при $m < j \leqslant q$ (которые до сих пор не были определены) считаются равными нулю.

24. Выпишем определитель Δ_m системы (73). При $m = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1/(s_1^0 + x_1) & 1/(s_1^0 + x_2) & 1/(s_1^0 + x_3) \\ 1 & 1/(s_2^0 + x_1) & 1/(s_2^0 + x_2) & 1/(s_2^0 + x_3) \\ 0 & -1/(s_1^0 + x_1)^2 & -1/(s_1^0 + x_2)^2 & -1/(s_1^0 + x_3)^2 \\ 0 & -1/(s_2^0 + x_1)^2 & -1/(s_2^0 + x_2)^2 & -1/(s_2^0 + x_3)^2 \end{vmatrix},$$

в общем случае формулы для Δ_m аналогичны.

Так как ядро Коши $C(s,x) = 1/(s+x)$ является обобщенным вполне положительным ядром (ЕТР-ядром) [18] и остается ЕТР-ядром, если доопределить его при $x = \infty$, положив $C(s, \infty) = 1$ для всех $s > 0$ [3], то $\Delta_m \neq 0$. Отметим, что, используя [3, с. 23, 24], нетрудно доказать, что $\Delta_m \neq 0$, вычислив $|\Delta_m|$ в явном виде

$$|\Delta_m| = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant m} (s_j - s_k)^4 \prod_{1 \leqslant j < k < 2m} (x_j - x_k) \Bigg/ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m, \\ 1 \leqslant k < 2m}} (s_j + x_k)^2.$$

25. Легко выписать якобиан J_m перехода от координат $\{a_j, s_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, к координатам (78). Например, при $m = 2$ это – определитель

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/(s_1 + x_1) & 1/(s_2 + x_1) & -a_1/(s_1 + x_1)^2 & -a_2/(s_2 + x_1)^2 \\ 1/(s_1 + x_2) & 1/(s_2 + x_2) & -a_1/(s_1 + x_2)^2 & -a_2/(s_2 + x_2)^2 \\ 1/(s_1 + x_3) & 1/(s_2 + x_3) & -a_1/(s_1 + x_3)^2 & -a_2/(s_2 + x_3)^2 \end{vmatrix}.$$

В общем случае формулы для J_m аналогичны, так что $J_m \neq 0$: с точностью до замены s_j на s_j^0 (см. $\langle 24 \rangle$)

$$J_m = a_1 \cdots a_m \Delta_m.$$

26. По построению (см. (80)) разность $g(\mathcal{N}^0, x) - g(\mathcal{N}^*(\lambda), x)$ положительна при любом $x = x_k$ и равна $\lambda\xi_k$, $k = 1, \dots, p$.

При достаточно большом $C > 0$ для производной этой разности по x на всем отрезке $[0, 1]$, с учетом $\langle 25 \rangle$, выполняется неравенство

$$|g'(\mathcal{N}^0, x) - g'(\mathcal{N}^*(\lambda), x)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{a_j^*}{(s_j^* + x)^2} - \frac{a_j^0}{(s_j^0 + x)^2} \right| \leqslant C\lambda.$$

Значит, если в (83) положить $\varepsilon = \min(\xi_1/C, \dots, \xi_p/C)$, то

$$g(\mathcal{N}^0, x) - g(\mathcal{N}^*(\lambda), x) > 0$$

при всех $x \in V$, что и требовалось доказать.

27. Согласно $\langle 26 \rangle$

$$g(\mathcal{N}^*(\lambda), x) < g(\mathcal{N}^0, x) \leqslant M(x) \quad \text{при} \quad x \in V.$$

Дополнение к V пересечем с отрезком $[0, 1]$ и полученное замкнутое множество обозначим через F. Докажем, что на F

$$g(\mathcal{N}^*(\lambda), x) < M(x),$$

если λ достаточно мало.

Мажоранта $M(x)$, а значит, и разность

$$\rho(x) = M(x) - g(\mathcal{N}^0, x)$$

полунепрерывны снизу в любой точке отрезка $[0, 1]$. Поэтому [20, с. 103] $\rho(x)$ достигает минимума на замкнутом множестве F в некоторой точке $x_0 \in F$:

$$\rho_0 = \rho(x_0) = \min \rho(x) \quad \text{по всем} \quad x \in F,$$

причем $\rho_0 > 0$, так как $\rho(x) > 0$ на F. Остается взять λ столь малым, что $g(\mathcal{N}^*(\lambda), x) - g(\mathcal{N}^0, x) < \rho_0$ при всех $x \in [0, 1]$. Тогда

$$g(\mathcal{N}^*(\lambda), x) < g(\mathcal{N}^0, x) + \rho_0 \leqslant M(x) \quad \text{при всех} \quad x \in F,$$

т.е. $g(\mathcal{N}^*(\lambda), x) < M(x)$ при всех $x \in [0, 1]$.

28. Так как (см. (73)) $\varphi(s_j^0) = r(s_j^0)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, то

$$h(\mathcal{N}^0) = \int_0^\infty \varphi(s)\, da^0(s) = \int_0^\infty r(s)\, da^0(s).$$

Отсюда (ср. с (67))

$$h(\mathcal{N}^0) = d_0 + \sum_{k=1}^{2m-1} d_k g(\mathcal{N}^0, x_k).$$

В сумме
$$h(\mathscr{N})=\int_0^\infty r(s)\,da(s)+\int_0^\infty\big(\varphi(s)-r(s)\big)\,da(s) \tag{119}$$
первое слагаемое (ср. с (68)) равно $d_0+\sum_{k=1}^{2m-1}d_k g(\mathscr{N},x_k)$. Значит, ввиду (79), (80) и (81) на луче (82) оно равно
$$h(\mathscr{N}^0)+\sum_{k=1}^{2m-1}d_k\big(g(\mathscr{N}^*,x_k)-g(\mathscr{N}^0,x_k)\big)=h(\mathscr{N}^0)-\lambda\sum_{k=1}^{p}d_k\xi_k=h(\mathscr{N}^0)+\lambda.$$
Оценим второе слагаемое в (119). Так как $da(s)=\sum_{j=1}^m a_j\delta(s-s_j)\,ds$, то
$$\int_0^\infty\big(\varphi(s)-r(s)\big)\,da(s)=\sum_{j=1}^m a_j\big(\varphi(s_j)-r(s_j)\big).$$
Согласно (73) $\varphi(s_j)-r(s_j)=o(s_j-s_j^0)$. Значит, с учетом $^{\langle 25\rangle}$, на луче (82) второе слагаемое в (119) равно $o(\lambda)$. Итак, $h(\mathscr{N}^*(\lambda))-h(\mathscr{N}^0)=\lambda+o(\lambda)>0$.

29. Докажем, что в множестве (85) менее $2m$ точек.

В соответствии с неравенствами $0<s_m^0<\dots<s_1^0$ представим $g(da^1,x)$ в виде суммы $2m+1$ неотрицательных слагаемых:
$$g(da^1,x)=\int_0^\infty\frac{da^1(s)}{s+x}=g_0(x)+g_1(x)+\dots+g_m(x)+\sum_{j=1}^m\frac{a_j}{s_j^0+x}\,,$$
положив
$$g_m(x)=\int_0^{s_m^0-0}\frac{da^1(s)}{s+x}\,,\quad\dots,\quad g_1(x)=\int_{s_2^0+0}^{s_1^0-0}\frac{da^1(s)}{s+x}\,,\quad g_0(x)=\int_{s_1^0+0}^\infty\frac{da^1(s)}{s+x}\,,$$
$$\frac{a_j}{s_j^0+x}=\int_{s_j^0-0}^{s_j^0+0}\frac{da^1(s)}{s+x}\,,\qquad 1\leqslant j\leqslant m.$$
Разность
$$g(da^1,x)-g(da^0,x)=\int_0^\infty\frac{da^1(s)}{s+x}-\sum_{j=1}^m\frac{a_j^0}{s_j^0+x}$$
запишем в виде
$$g_0(x)-\frac{a_1^0-a_1}{s_1^0+x}+g_1(x)-\frac{a_2^0-a_2}{s_2^0+x}+\dots+g_{m-1}(x)-\frac{a_m^0-a_m}{s_m^0+x}+g_m(x).$$

Пусть Π – число перемен знака в этом разложении. Чтобы получить нужную нам оценку для числа корней $g(da^1,x)-g(da^0,x)$, доопределим ядро Коши $C(s,x)=1/(s+x)$ при $x=\infty$, положив $C(s,\infty)=1$ (ср. с [3, с. 23, 24] и с §11). Тогда $x=\infty$ является корнем $g(da^1,x)-g(da^0,x)$, поскольку
$$g(da^1,\infty)-g(da^0,\infty)=\int_0^\infty da^1(s)-\sum_{j=1}^m a_j^0=0.$$

Так как $\Pi \leqslant 2m$ ($\Pi = 2m$, если $g_0(x), \dots, g_m(x)$ положительны и $a_j^0 - a_j > 0$ при всех $j, 1 \leqslant j \leqslant m$), то по теореме Гантмахера–Крейна число корней функции $g(da^1, x) - g(da^0, x)$, $0 \leqslant x \leqslant \infty$, не превосходит $2m$, т.е. множество

$$\left\{x \in [0,1] \,\Big|\, \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^0}{s_j^0 + x} = \int_0^\infty \frac{da^1(s)}{s+x}\right\}$$

содержит меньше, чем $2m$ точек.

30. В ⟨32⟩ рассказано, как доказать более общую лемму.

31. Оценим $r_1(s) = d_{10} + d_{11}/(s + w_{11})$ сверху при условии, что $0 < w_{11} < 1$. Так как $d_{10} < r_1(s_1) = \varphi(s_1) < 1/\sqrt{s_1}$ и $d_{11} < r(0) = \varphi(0) = 2/(\pi\sqrt{t}\,)$, то

$$r_1(s) = d_{10} + \frac{d_{11}}{s + w_{11}} < d_{10} + \frac{d_{11}}{s} < \frac{1}{\sqrt{s_1}} + \frac{2}{\pi s\sqrt{t}}\,.$$

Теперь оценим $r_1(s)$ снизу. При $s > 1$ и $0 < t \leqslant 1$

$$r_1(s) \geqslant \varphi(s) > \frac{2 \operatorname{arctg} 1}{\pi\sqrt{s}} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,.$$

Полученное неравенство $1/(2\sqrt{s}\,) < 1/\sqrt{s_1} + 2/(\pi s\sqrt{t}\,)$ дает искомую оценку для s_1. Действительно, функция $1/(2\sqrt{s}\,) - 2/(\pi s\sqrt{t}\,)$ достигает своего максимума при $s \geqslant 1$ в точке

$$s = s_0 = \frac{(8/\pi)^2}{t}\,.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{s_1}} > \left(\frac{1}{2\sqrt{s_0}} - \frac{2}{\pi s_0\sqrt{t}}\right) = \frac{\pi\sqrt{t}}{32}\,, \quad \text{где} \quad s_1 < \frac{c}{t}\,,$$

где $c = (32/\pi)^2$, что и требовалось доказать.

32. Неравенство $w_{m1} < w_1$ доказывается по той же схеме, что лемма 2 в ⟨16⟩. Снова разобьем доказательство на три части: A′) совпадает с A) в ⟨16⟩, B′) и C′) являются модификациями B) и C) из ⟨16⟩.

B′) Взяв малое $\varepsilon > 0$, рассмотрим последовательность наборов

$$\mathscr{S}_n = \{s_{n,1}, \dots, s_{n,m+1}\}, \quad s_{n,1} > \dots > s_{n,m+1} > 0, \qquad n = 1, \dots, N,$$

обладающую следующими тремя свойствами (ср. с ⟨16⟩):

а) $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}$, б) $s_{N,2} < \varepsilon$, в) точки наборов $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{S}_{n+1}$ *чередуются*:

$$s_1 = s_{n,1} = s_{n+1,1} > \dots > s_{n,m+1} > s_{n+1,m+1} > 0, \qquad 1 \leqslant n < N.$$

Согласно A) (см. ⟨16⟩) для аппроксимаций $r(\mathscr{S}_n, s)$ и $r(\mathscr{S}_{n+1}, s)$

$$w_{n,1} > w_{n+1,1} > \dots > w_{n,m+1} = w_{n+1,m+1} = 0.$$

В частности,

$$w_1 = w_{1,1} > w_{N,1}. \tag{120}$$

C$'$) При $\varepsilon \to 0$ аппроксимация $r(\mathscr{S}_N, s)$, очевидно, стремится к аппроксимации $r_m(s)$. Отсюда ввиду (120) следует искомое неравенство $w_{m1} < w_1$.

33. Неравенство $w_{11} < w_{m1}$ следует из цепочки неравенств

$$w_{11} < w_{21} < \cdots < w_{m-1,1} < w_{m1},$$

которые доказываются так же, как в A) в ⟨16⟩.

Например, неравенство $w_{m-1,1} < w_{m1}$ проверяется следующим образом.

Разность

$$r_m(s) - r_{m-1}(s) = d_{m,0} - d_{m-1,0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{d_{m,k}}{s + w_{m,k}} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{d_{m-1,k}}{s + w_{m-1,k}}$$

запишем в виде

$$c_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{s + x_k}, \qquad x_1 > \cdots > x_p > 0, \quad p \leqslant 2m - 1.$$

Ввиду условий

$$r_m^{(k)}(0) = r_{m-1}^{(k)}(0), \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2m - 4,$$
$$r_m(s_1) = r_{m-1}(s_1), \qquad r'_m(s_1) = r'_{m-1}(s_1)$$

сумма K кратностей корней рассматриваемой разности на полуоси $s \geqslant 0$ не меньше $2m - 1$. Значит, число Π перемен знака в последовательности коэффициентов $\{c_0, \dots, c_p\}$ не меньше $2m - 1$. Отсюда следует, что

$$p = \Pi = 2m - 1,$$

а значит, полюсы $w_{m-1,k}$ и $w_{m,k}$ чередуются:

$$w_{m,1} > w_{m-1,1} > \cdots > w_{m,m-1} > w_{m-1,m-1} > w_{m,m},$$

при любом другом их порядке $\Pi < 2m - 1$.

34. В геофизике нередко рассматривают *кусочно-постоянные* скоростные функции $u(y)$. Нетрудно проверить, что условие (96) означает, что годограф Γ соответствует именно такой скоростной функции (кусочно-постоянной на каждом конечном отрезке оси $y > 0$ и принимающей в волноводе $\widehat{n}$ значений).

35. Докажем поочередно утверждения 6 и 7, используя следующие обозначения. Пусть последовательность $t_i \in [0, 1]$ сходится к t° при $i \to \infty$. Положим

$$n_i = n(t_i), \qquad n^\circ = n(t^\circ);$$
$$a_j^i = a_j(t_i), \ s_j^i = s_j(t_i), \quad 1 \leqslant j \leqslant n_i; \quad a_j^\circ = a_j(t^\circ), \ s_j^\circ = s_j(t^\circ), \quad 1 \leqslant j \leqslant n^\circ;$$
$$da_i = da(s, t_i) = \sum a_j^i \delta(s - s_j^i)\, ds, \ g_i(x) = g(da_i, x) = \sum \frac{a_j^i}{s_j^i + x}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_i;$$
$$da^\circ = da(s, t^\circ) = \sum a_j^\circ \delta(s - s_j^\circ)\, ds, \ g^\circ(x) = g(da^\circ, x) = \sum \frac{a_j^\circ}{s_j^\circ + x}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n^\circ.$$

Коэффициенты $b_k(t_i)$ и полюсы $x_k(t_i)$ функций $r(s, t_i)$ (см. (100)) обозначим через b_k^i, $0 \leqslant k \leqslant n_i$, и x_k^i, $1 \leqslant k \leqslant n_i$, для коэффициентов $b_k(t^\circ)$ и полюсов $x_k(t^\circ)$ функции $r(s, t^\circ)$ введем обозначения b_k°, $0 \leqslant k \leqslant n^\circ$, и x_k°, $1 \leqslant k \leqslant n^\circ$, и, наконец, саму функцию $r(s, t^\circ)$ обозначим через $r^\circ(s)$.

Доказательство утверждения 6. Разобьем доказательство на три части.

1°) Проверим, что

A) *для* $x \in (0,1]$ *при* $i \to \infty$ *функции* $g_i(x)$ *сходятся к* $g^\circ(x)$ *вместе со всеми производными*;

B) $n_i \geqslant n^\circ$, *начиная с некоторого* i.

Согласно (98) $n_i \leqslant \widehat{n}$. Числа a^i_j ограничены: $0 < a^i_j \leqslant 1$ и $\sum_{j=1}^{n_i} a^i_j = 1$. При условии (96) согласно [2] числа s^i_j тоже ограничены:

$$0 < s^i_{n_i} < \cdots < s^i_1 < \widehat{s}_1. \tag{121}$$

Замечание. Если $t^\circ > 0$, то n_i, a^i_j и s^i_1 ограничены (по теоремам 1 и 6) и без предположения о том, что мажоранта удовлетворяет условию (96).

Ввиду ограниченности n_i, a^i_j и s^i_j будем считать (перейдя, если нужно, к подпоследовательности), что n_i не зависят от i: $n_i \equiv n$, и существуют пределы

$$s^*_j = \lim_{i\to\infty} s^i_j, \quad a^*_j = \lim_{i\to\infty} a^i_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Для этих пределов вследствие (121) при некотором $m \leqslant n$

$$0 < s^*_m \leqslant \cdots \leqslant s^*_1, \qquad s^*_j = 0 \quad \text{при} \quad j > m$$

и (это доказывается так же, как (117), см. ⟨19⟩)

$$a^*_j \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad a^*_j = 0 \quad \text{при} \quad j > m, \quad \text{причем} \quad \sum_{j=1}^m a^*_j = 1.$$

Положим

$$da^* = da^*(s) = \sum_{j=1}^m a^*_j \delta(s - s^*_j)\, ds, \qquad g^*(x) = g(da^*, x), \qquad \widehat{g}(x) = g(d\hat{a}, x).$$

При $i \to \infty$ функции $g_i(x)$ сходятся к $g^*(x)$ вместе со всеми производными и $g_i(x) \leqslant \widehat{g}(x)$ на $(0,1]$. Поэтому и $g^*(x) \leqslant \widehat{g}(x)$ на $[0,1]$, т.е. (см. §6 от (46) до леммы 1) $da^* \prec d\hat{a}$. Так как $g_i(0) = \sum_{j=1}^{n_i} a^i_j / s^i_j \leqslant \widehat{g}(0)$, а значит, $a^i_j \leqslant \widehat{g}(0) s^i_j$, и так как $\kappa(s, t_i) \leqslant 1/\sqrt{s}$, то $h(da_i, t_i) = \sum_{j=1}^{n_i} a^i_j \kappa(s^i_j, t_i)$ сходятся при $i \to \infty$ к $h(da^*, t^\circ)$. Выведем отсюда, что $da^* \equiv da^\circ$.

По определению мер da_i и da°

$$h(da_i, t_i) = \max h(da, t_i) \quad \text{по всем} \quad da \prec d\hat{a},$$
$$h(da^\circ, t^\circ) = \max h(da, t^\circ) \quad \text{по всем} \quad da \prec d\hat{a}.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется столь большое $i_\circ$, что при $i > i_\circ$ выполняется неравенство $h(da_i, t_i) \geqslant h(da^\circ, t_i) > h(da^\circ, t^\circ) - \varepsilon$. Следовательно,

$$h(da^*, t^\circ) = \lim_{i\to\infty} h(da_i, t_i) \geqslant h(da^\circ, t^\circ),$$

так что $h(da^*, t^\circ) = \max\, h(da, t^\circ)$ по всем $da \prec d\hat{a}$ и (по утверждению 5)

$$da^\circ \equiv da^*. \tag{122}$$

Утверждения A) и B) следуют из (122); еще одно следствие:

$$\{s^\circ_1, \ldots, s^\circ_{n^\circ}\} \text{ – подпоследовательность } \{s^*_1, \ldots, s^*_m\}. \tag{123}$$

Пояснение. Вскоре мы докажем, что $n^\circ = m$ и последовательности s_j° и s_j^* в (123) совпадают, но пока мы утверждаем лишь, что $n^\circ \leqslant m$ и что s_j° является подпоследовательностью s_j^* (a priori могло бы оказаться, что при $1 \leqslant j \leqslant m$ и при $i \to \infty$ некоторые s_j^i сливаются друг с другом или некоторые $a_j^i \to 0$).

2°) Числа x_k^i ограничены: $0 \leqslant x_k^i \leqslant 1$. Отсюда и из совпадения $r(s,t_i)$ и $\kappa(s,t_i)$ при $s = s_1^i$ следует, что числа b_k^i тоже ограничены:

$$b_k^i > 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \sum_{k=0}^{n} b_k^i < (s_1^i + 1)\kappa(s_1^i, t_i).$$

Поэтому (снова перейдя к подпоследовательности) будем считать, что существуют пределы

$$x_k^* = \lim_{i\to\infty} x_k^i, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad b_k^* = \lim_{i\to\infty} b_k^i, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Вследствие (100) при некотором p, $1 \leqslant p \leqslant n$,

$$0 < x_p^* \leqslant \cdots \leqslant x_1^* = 1, \qquad x_k^* = 0 \quad \text{при} \quad k > p.$$

Докажем (ср. с (123)), что

$$\{x_1^*, \ldots, x_p^*\} \text{ – подпоследовательность } \{x_1^\circ, \ldots, x_{n^\circ}^\circ\}. \tag{124}$$

Из утверждения 5 следует, что разность $\widehat{g}(x) - g^\circ(x)$ имеет нули кратности 1 или 2 в особых точках x_k° меры da° и положительна в остальных точках $x \in [0,1]$. Разность $\widehat{g}(x) - g_i(x)$ неотрицательна на $[0,1]$ и равна нулю в особых точках x_k^i меры da_i. Поэтому (вследствие A)) $x_k^* \in \{x_1^\circ, \ldots, x_{n^\circ}^\circ\}$, $1 \leqslant k \leqslant p$, и $x_1^*, \ldots, x_p^*$ *все различны* (иначе у $\widehat{g}(x) - g^\circ(x)$ имелся бы нуль кратности $K > 2$), (124) доказано. Из (124) следует, что

$$p \leqslant n^\circ \quad \text{при} \quad x_{n^\circ}^\circ > 0, \qquad p \leqslant n^\circ - 1 \quad \text{при} \quad x_{n^\circ}^\circ = 0. \tag{125}$$

3°) Сравним

$$r^*(s) = b_0^* + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^*}{s + x_k^*} \quad \text{и} \quad r^\circ(s) = b_0^\circ + \sum_{k=1}^{n^\circ} \frac{b_k^\circ}{s + x_k^\circ}$$

с $\varphi(s) = \kappa(s, t^\circ)$. Из утверждения 5 следует, что разность $r^\circ(s) - \varphi(s)$ имеет двукратные нули в точках $s = s_{n^\circ}^\circ, \ldots, s_1^\circ$ и положительна в остальных точках $s > 0$. Значит, сумма K° кратностей корней $r^\circ(s) - \varphi(s)$ равна $2n^\circ$. Функции $r^*(s)$ и $\varphi(s)$, очевидно, совпадают в точках $s_m^*, \ldots, s_1^*$ вместе с производными, причем, если q из этих точек сливаются: $s_{j+q-1}^* = \cdots = s_j^*$, то корень s_j^* разности $r^*(s) - \varphi(s)$ имеет кратность $k_j \geqslant 2q$. Поэтому сумма K^* кратностей корней $r^*(s) - \varphi(s)$ не меньше $2m$ и, учитывая (123),

$$K^* \geqslant 2m \geqslant 2n^\circ = K^\circ. \tag{126}$$

Докажем, что верны следующие утверждения:

C) *если* $n^\circ > 1$, *то* $r^*(s) \equiv r^\circ(s)$;

D) $p = n^\circ$ *при* $x_{n^\circ}^\circ > 0$; $p = n^\circ - 1$ *при* $x_{n^\circ}^\circ = 0$; *в последовательностях* (124) x_k° *и* x_k^* *совпадают при* $1 \leqslant k \leqslant p$;

E) $m = n^\circ$ *и последовательности* s_j° *и* s_j^* *в* (123) *совпадают.*

Доказательство. Пусть $r^*(s) \not\equiv r^\circ(s)$, тогда ввиду (123) разность

$$\rho(s) = r^*(s) - r^\circ(s) = \big(r^*(s) - \varphi(s)\big) - \big(r^\circ(s) - \varphi(s)\big)$$

имеет n° кратных корней $s_1^\circ, \dots, s_{n^\circ}^\circ$ и, значит, сумма K кратностей корней $\rho(s)$ не меньше $2n^\circ$. Согласно (124)

$$\rho(s) = c_0 + \sum_{k=1}^{n^\circ} \frac{c_k}{s + x_k^\circ} \quad \text{при} \quad x_{n^\circ}^\circ = 0, \tag{127}$$

$$\rho(s) = c_0 + \sum_{k=1}^{n^\circ} \frac{c_k}{s + x_k^\circ} + \frac{c}{s} \quad \text{при} \quad x_{n^\circ}^\circ > 0, \quad \text{где} \quad c = \sum_{p<k\leqslant n} b_k^* \geqslant 0. \tag{128}$$

Число Π перемен знака в последовательности коэффициентов $\rho(s)$ не больше n° в случае (127) и $\Pi \leqslant n^\circ + 1$ в случае (128). По теореме Гантмахера–Крейна $K \leqslant \Pi$. Подставляя сюда найденные оценки для K и Π, получаем, что при $r^*(s) \not\equiv r^\circ(s)$

$$2n^\circ \leqslant K \leqslant \Pi \leqslant n^\circ + 1, \quad \text{т.е.} \quad n^\circ = 1, \tag{129}$$

и утверждение C) доказано. А из него, из (124) и (125) легко следует и утверждение D).

Продолжая (129), получаем: если $r^*(s) \not\equiv r^\circ(s)$, то $\mathrm{K} = \Pi = 2$, так что в (128) $c > 0$ и $r^*(s) > r^\circ(s)$ при $s > 0$, $s \neq s_1^\circ$. Таким образом,

$$r^*(s) \geqslant r^\circ(s) > \varphi(s) \quad \text{при} \quad s > 0, \quad s \neq s_1^\circ, \dots, s_{n^\circ}^\circ. \tag{130}$$

Поэтому $K^* \leqslant K^\circ$ и, с учетом (126), $m = n^\circ$, т.е. ввиду (123) утверждение E) доказано.

А вместе с B), D) и E) доказано и утверждение 6.

Доказательство утверждения 7. Ввиду (130) из соотношений

$$r(s_n^i, t_i) = \kappa(s_n^i, t_i) < \kappa(0, t_i)$$

при $i \to \infty$ следует: *если $t^\circ > 0$ – точка разрыва функции $n(t)$ (так что $n \geqslant n^\circ + 1$ и $s_n^i \to 0$), то*

$$r^\circ(0) = \varphi(0). \tag{131}$$

Выведем из (131) утверждение 7. Допустим, что $x_{n^\circ}^\circ \leqslant t^\circ$ и, следовательно, $x_k^\circ \leqslant t^\circ < x_{k-1}^\circ$ для некоторого $k \leqslant n^\circ$. Положим $d\theta(x) = (2/\pi)d\sqrt{x}$. Тогда

$$\varphi(s) = \int_{t^\circ}^\infty \frac{d\theta(x)}{s+x} = \varphi_1(s) + \varphi_2(s) + \dots + \varphi_k(s),$$

где

$$\varphi_k(s) = \int_{t^\circ}^{x_{k-1}^\circ} \frac{d\theta(x)}{s+x}\,, \quad \dots, \quad \varphi_2(s) = \int_{x_2^\circ}^{x_1^\circ} \frac{d\theta(x)}{s+x}\,, \quad \varphi_1(s) = \int_{x_1^\circ}^{\infty} \frac{d\theta(x)}{s+x}\,.$$

По теореме Гантмахера–Крейна сумма K° кратностей корней разности $r^\circ(s) - \varphi(s)$ при $s \geqslant 0$ не больше числа Π° перемен знака в разложении

$$b_0^\circ - \varphi_1(s) + \frac{b_1^\circ}{s + x_1^\circ} - \varphi_2(s) + \dots + \frac{b_{k-1}^\circ}{s + x_{k-1}^\circ} - \varphi_k(s) + \left(\frac{b_k^\circ}{s + x_k^\circ} + \dots + \frac{b_{n^\circ}^\circ}{s + x_{n^\circ}^\circ}\right).$$

Так как $\Pi^\circ = 2k \leqslant 2n^\circ$ и так как ввиду (131) $K^\circ \geqslant 2n^\circ + 1$, то неравенство $K^\circ \leqslant \Pi^\circ$ *нарушается*. Значит, случай $x_{n^\circ}^\circ \leqslant t^\circ$ невозможен.

Итак, $0 < t^\circ < x_{n^\circ}^\circ$. Возвращаясь к обозначениям из § 11, получаем (102).

36. По утверждению 6 нарушение монотонности $n(t)$ означает существование такой точки $t \in [0, 1]$, что в любой ее окрестности есть точка $t^* > t$, в которой $n(t^*) > n(t)$.

37. По определению $P_1(x) = g^*(x) - g(x)$. По утверждению 5, если x_j^* не совпадает ни с одним x_k, $1 \leqslant k \leqslant n(t)$, то

$$g^*(x_j^*) = M(x_j^*) > g(x_j^*), \quad \text{так что} \quad P_1(x_j^*) > 0.$$

В частности, числа $P_1(X_Q), \dots, P_1(X_{q+1})$ *положительны*.

38. Неравенство $\Pi \leqslant \Pi_2$ для числа перемен знака в последовательностях $\{A_N, \dots, A_1\}$ и $\{P_2(S_N), \dots, P_2(S_1)\}$ вытекает из следующих двух фактов.

1°) Если S_i не принадлежит пересечению множеств

$$\{s_j\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n(t), \qquad \{s_j^*\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n(t^*),$$

то *знаки* A_i *и* $P_2(S_i)$ *противоположны*. Чтобы доказать это, достаточно вспомнить определение $P_2(s)$:

$$P_2(s) = \bigl(r(s, t^*) - \kappa(s, t^*)\bigr) - \bigl(r(s, t) - \kappa(s, t)\bigr),$$

и заметить, что (вследствие утверждения 5) *знаки* a_j^* *и* $-a_j$ *противоположны знакам* $P_2(s_j^*)$ *и* $P_2(s_j)$:

$$a_j^* > 0, \quad P_2(s_j^*) < 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n(t^*); \qquad -a_j < 0, \quad P_2(s_j) > 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n(t).$$

2°) Если же $S_i \in \{s_j\}_{j=1}^{n(t)} \cap \{s_j^*\}_{j=1}^{n(t^*)}$, то $P_2(S_i) = 0$.

Отсюда (по правилу замены нулей при подсчете Π_2) $\Pi \leqslant \Pi_2$.

39. Докажем, что *знаки* B_i *и* $P_1(X_i)$ *совпадают*, если X_i не принадлежит пересечению множеств

$$\{x_k\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n(t), \qquad \{x_k^*\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n(t^*).$$

Согласно $^{\langle 37 \rangle}$, если x_j^* не совпадает ни с одним x_k, $1 \leqslant k \leqslant n(t)$, то $P_1(x_j^*) > 0$. Аналогично, если x_j не совпадает ни с одним x_k^*, $1 \leqslant k \leqslant n^*(t)$, то

$$g(x_j) = M(x_j) > g^*(x_j), \quad \text{так что} \quad P_1(x_j) < 0.$$

Итак, при указанных условиях

$$b_j^* > 0, \quad P_1(x_j^*) > 0, \qquad -b_j < 0, \quad P_1(x_j) < 0.$$

Поскольку, кроме того,

$$P_1(X_i) = 0, \quad \text{если} \quad X_i \in \{x_k\}_{k=1}^{n(t)} \cap \{x_k^*\}_{k=1}^{n(t^*)},$$

то (по правилу замены нулей при подсчете Π_1') $\Pi' \leqslant \Pi_1'$.

40. Так как $P_2(s) = \big(r(s,t^*) - \kappa(s,t^*)\big) - \big(r(s,t) - \kappa(s,t)\big)$ и $r(s,t^*) \geqslant \kappa(s,t^*)$, а $r(s,t) \geqslant \kappa(s,t)$ при $s \geqslant 0$, то точки S_j в последовательности

$$\big\{P_2(S_N), \dots, P_2(S_1)\big\}$$

обладают важным свойством: в них либо $r(s,t) - \kappa(s,t)$, либо $r(s,t^*) - \kappa(s,t^*)$, либо *обе эти разности обращаются в нуль вместе с производной по s.*

Последнее выполняется, если S_j – корень $P_2(s)$. Поэтому, если $P_2(S_j) = 0$, то S_j – *кратный* корень $P_2(s)$.

41. Положим (см. (96)) $\widehat{g}(x) = g(d\hat{a}, x)$ и по аналогии с

$$P_2(s) = \big(r(s,t^*) - \kappa(s,t^*)\big) - \big(r(s,t) - \kappa(s,t)\big)$$

представим $P_1(x) = g^*(x) - g(x)$ в виде

$$P_1(x) = \big(\widehat{g}(x) - g(x)\big) - \big(\widehat{g}(x) - g^*(x)\big).$$

Так как $\widehat{g}(x) \geqslant g(x)$, $\widehat{g}(x) \geqslant g^*(x)$ при $x \in [0,1]$, то X_k, $1 < k < Q$, принадлежащие *интервалу* $(0,1)$, играют в последовательности

$$\big\{P_1(X_Q), \dots, P_1(X_k), \dots, P_1(X_1), P_1(X_0)\big\}$$

особую роль: в них $\widehat{g}(x)$ совпадает *вместе с производной* либо с $g(x)$, либо с $g^*(x)$, либо с обеими этими функциями.

Последнее выполняется, если X_k, $1 < k < Q$, – корень $P_1(x)$. Поэтому, если $P_1(X_k) = 0$, $1 < k < Q$, то X_k – *кратный* корень $P_1(x)$.

То же верно для X_Q, если $X_Q > 0$, и для X_1, если $X_1 < 1$.

При $X_Q = 0$ и $X_1 = 1$ корни X_Q и X_1, как правило, простые; поэтому обычно обращение в нуль $P_1(X_Q)$ и $P_1(X_1)$ добавляет к K_1 (каждое) *лишь по единице*; корню $X_0 = +\infty$ мы условились приписывать кратность 1; поэтому обращение в нуль $P_1(X_0)$ тоже добавляет к K_1 *лишь единицу*. Но и к Π_1 (при вычислении Π_1 по правилу замены нулей) обращение в нуль $P_1(X_Q)$, $P_1(X_1)$ и $P_1(X_0)$ тоже добавляет *лишь по единице*. Поэтому $\Pi_1 \leqslant K_1$.

42. Модифицируя приведенное доказательство теоремы 9, можно показать, что функция $n(t)$ непрерывна при $t = 0$ и, следовательно, не убывает не только на полуинтервале $(0,1]$, но и на отрезке $[0,1]$.

43. Для различения основного и исключительного случаев используем классификацию мер из [2], приведенную в §6: при любом $t \in [0,1]$ любая дискретная мера da принадлежит либо $\mathscr{G}(t)$, либо $\mathscr{M}(t) = \mathscr{E}(t) \cup \mathscr{L}(t)$. Согласно [2] (это доказывается так же, как (69)), *если $d\hat{a} \in \mathscr{M}(t)$, то $h(d\hat{a},t) = \max h(da,t)$ по всем $da \prec d\hat{a}$.*

Лемма 11. *Для любых* t *и* t^0, $0 \leqslant t^0 < t \leqslant 1$, *справедливо включение* $\mathscr{G}(t) \supseteq \mathscr{G}(t^0)$.

Следствие. *Возьмем разбиение дискретных мер на* $\mathscr{G}$ *и* $\mathscr{M}$ *при* $t = 0$, *тогда по лемме* 11 *основной и исключительный случаи характеризуются, соответственно, условиями* $d\hat{a} \in \mathscr{G}$ *и* $d\hat{a} \in \mathscr{M} = \mathscr{E} \cup \mathscr{L}$.

Доказательство леммы 11. Лемма вытекает из следующего легко проверяемого⟨44⟩ утверждения.

Положим $\varphi^0(s) = \kappa(s, t^0)$, $\varphi(s) = \kappa(s, t)$, $0 \leqslant t^0 < t \leqslant 1$. *Пусть* $r^0(s)$ *и* $r(s)$ *– рациональные аппроксимации* (41), (42) *функций* $\varphi^0(s)$ *и* $\varphi(s)$ *для одного и того же набора точек* $\mathscr{S}$ *в* (40), *и пусть точка* t *достаточно близка к* t^0. *Тогда полюсы* w_j *и* w_j^0 *аппроксимаций* $r(s)$ *и* $r^0(s)$ *чередуются*:

$$w_1 > w_1^0 > \dots > w_m > w_m^0 > w_{m+1} = w_{m+1}^0 = 0. \tag{132}$$

Доказательство теоремы 10. Так как $t_1 = \frac{3}{5}$ – первый член универсальной последовательности $\{t_k\}$ (квадрат положительного корня полинома Лежандра $L_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$), то по утверждению 1 из § 5 при $t \geqslant \frac{3}{5}$ и в основном, и в исключительном случае $n(t) \equiv 1$.

Следовательно, при $\widehat{n} > 1$ для некоторого $\widehat{t} \in [0, \frac{3}{5}]$ максимум $h(da, \widehat{t})$ достигается *не на мере* $d\hat{a}$, т.е. $d\hat{a} \in \mathscr{G}(\widehat{t})$. Положим $t^0 = \inf\{\widehat{t}, d\hat{a} \in \mathscr{G}(\widehat{t})\}$. Ясно, что тогда в (132) $w_1^0 = 1$ и, значит, $w_1 > 1$, т.е. $d\hat{a} \in \mathscr{M}(t^0)$ и $d\hat{a} \in \mathscr{G}(t)$ *при всех* $t > t^0$.

44. Чтобы закончить доказательство леммы 11 и теоремы 10, остается проверить (132). Сначала докажем, что

$$w_{m+1}^0 = 0 \leqslant t^0 < w_m^0. \tag{133}$$

Пусть (133) выполняется, тогда при $d\theta(x) = (2/\pi) d\sqrt{x}$

$$\varphi^0(s) = \int_{t^0}^{\infty} \frac{d\theta(x)}{s+x} = \varphi_0^0(s) + \varphi_1^0(s) + \dots + \varphi_m^0(s),$$

где

$$\varphi_m^0(s) = \int_{t^0}^{w_m^0} \frac{d\theta(x)}{s+x}, \quad \dots, \quad \varphi_1^0(s) = \int_{w_2^0}^{w_1^0} \frac{d\theta(x)}{s+x}, \quad \varphi_0^0(s) = \int_{w_1^0}^{\infty} \frac{d\theta(x)}{s+x}.$$

По теореме Гантмахера–Крейна сумма K^0 кратностей корней $r^0(s) - \varphi^0(s)$ не больше числа Π^0 перемен знака в разложении

$$r^0(s) - \varphi^0(s) = d_0^0 - \varphi_0(s) + \frac{d_1^0}{s + w_1^0} - \varphi_1(s) + \dots + \frac{d_m^0}{s + w_m^0} - \varphi_m(s) + \frac{d_{m+1}^0}{s}.$$

Так как $s_1^0 > \dots > s_m^0 > s_{m+1}^0$ – кратные корни $r^0(s) - \varphi^0(s)$, то в рассматриваемом случае неравенство $K^0 \leqslant \Pi^0$ обращается в равенство $K^0 = \Pi^0 = 2m + 2$, а при нарушении (133) Π^0 становится меньше K^0, т.е. случай $t^0 \geqslant w_m^0$ невозможен.

Теперь применим теорему Гантмахера–Крейна к разности

$$\Delta(s) = \bigl(r(s) - \varphi(s)\bigr) - \bigl(r^0(s) - \varphi^0(s)\bigr) = r(s) - r^0(s) + (t - t^0)I(s),$$

где

$$I(s) = \frac{1}{t - t^0} \int_{t^0}^{t} \frac{d\theta(x)}{s + x}\,,$$

а t столь близко к t^0, что $0 \leqslant t^0 < t < w_m^0$.

Приведем в $\Delta(s)$ подобные члены и положим

$$\Delta_0 = d_0 - d_0^0, \qquad \Delta_{m+1} = d_{m+1} - d_{m+1}^0, \qquad \Delta t = t - t^0.$$

Сумма K кратностей корней $\Delta(s)$ не больше числа Π перемен знака в последовательности коэффициентов $\Delta(s)$. Так как $\Delta(s)$ имеет $m+1$ кратных корней $s_1^0 > \dots > s_m^0 > s_{m+1}^0$, то $K \geqslant 2m+2$. При выполнении (132) Π равно числу перемен знака в разложении

$$\Delta(s) = \Delta_0 + \frac{d_1}{s + w_1} - \frac{d_1^0}{s + w_1^0} + \dots + \frac{d_m}{s + w_m} - \frac{d_m^0}{s + w_m^0} + \Delta t I(s) + \frac{\Delta_{m+1}}{s}\,,$$

т.е. (если Δ_0 и $\Delta_{m+1} < 0$) $\Pi = 2m + 2 = K$, а при нарушении (132) $\Pi < K$.

Доказательство леммы 11 и теоремы 10 закончено.

Список литературы

1. *Гервер М. Л.* Рациональные аппроксимации, устойчивые многочлены и расслоения в задаче поиска самого широкого волновода // Геодинамика и прогноз землетрясений (Вычислительная сейсмология: Вып. 26). М.: Наука, 1994. С. 176–201.
2. *Гервер М. Л.* Существование и единственность максимума и теоремы о конусах, 1-аппроксимациях и расслоениях для одного класса экстремальных задач // Препринт: МИТП РАН, 1994.
3. *Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А.* Теорема об отношениях предшествования, генерируемых вполне положительными ядрами // Матем. сб. 1995. Т. 186. №9. С. 19–44.
4. *Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А.* О границе множества решений в задаче обращения годографа // Докл. АН. 1996. Т. 346. №5. С. 672–674.
5. *Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А.* Об экстремальных свойствах волноводов с конечным числом слоев в задаче обращения годографа // Докл. АН. (в печати).
6. *Gerver M. L., Kudryavtseva E. A.* On the Boundary of the Set of Solutions in Travel Time Inversion and on Extremal Properties of Waveguides With a Finite Number of Layers // IUGG XXI General Assembly. Abstracts. Week B. Boulder, Colorado. July 2–14. 1995. P. B10 (UB31B-7).
7. *Kudryavtseva E. A., Gerver M. L.* An Algorithm Yielding the Universal Sequence U in Travel Time Inversion // IUGG XXI General Assembly. Abstracts. Week B. Boulder, Colorado. July 2–14. 1995. P. B11 (UB31B-13).
8. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
9. *Herglotz G.* Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen // Phys. Zeitschrift. Jahrgang 8. 1907. №5. P. 145–147.
10. *Bateman H.* The solution of the integral equation which connects the velocity of propagation of an earthquake wave in the interior of the Earth with the times which the disturbance takes to travel to different stations on the Earth's surface // Phil. Mag. Ser. 6. 1910. V. 19. P. 576–587.

11. *Slichter L. B.* The theory of interpretation of seismic travel-time curves in horizontal structures // Physics. 1932. V. 3. №6. P. 273–295.
12. *Гервер М. Л., Маркушевич В. М.* Исследование неоднозначности при определении по годографу скорости распространения сейсмической волны // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. №6. С. 1377–1380.
13. *Gerver M. L., Markushevich V. M.* Determination of seismic wave velocity from the travel-time curve // Geophys. J. Royal Astr. Soc. 1966. V. 11. P. 165–173.
14. *Гервер М. Л., Маркушевич В. М.* Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны // Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений (Вычислительная сейсмология: Вып. 3). М.: Наука, 1967. С. 3–51.
15. *Кронрод А. С.* Узлы и веса квадратурных формул. М.: Наука, 1964.
16. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
17. *Гервер М. Л.* Несколько простых теорем о расположении корней // УМН. 1996. Т. 51. №3. С. 191–192.
18. *Карлин С., Стадден В.* Чебышёвские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
19. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
20. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН;
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gerver@mitp.rssi.ru, m.l@gerver.mccme.ru

Поступила в редакцию
20.08.1996