НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ МЕР

М. Л. Гервер, Е. А. Кудрявцева

В статье предложен новый, опирающийся на принцип двойственности способ доказательства теорем из [1], [2].

Двойственные экстремальные задачи. На полуоси $s \geqslant 0$ рассмотрим неотрицательные меры Стилтьеса $da = da(s)$ с интегралом, равным 1, и каждой такой мере сопоставим две функции:

$$g(da,t) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+t}\,, \quad t \geqslant 0, \qquad h(da,x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty g(da,t)\,d\sqrt{t}, \quad x \in [0,1].$$

Произвольно фиксируем положительную полунепрерывную снизу функцию (*мажоранту*) $M(t)$, $t \in [0,1]$. Отнесем da к множеству $\mathscr{A}$, если $g(da,t) \leqslant M(t)$ при всех $t \in [0,1]$. На $\mathscr{A}$ рассмотрим однопараметрическое (зависящее от параметра $x \in [0,1]$) семейство экстремальных задач:

$$\text{(1)} \qquad \textit{найти } \sup h(da,x) \textit{ по всем } da \in \mathscr{A}.$$

Физическую интерпретацию (1) можно найти в [1], [2].

Теперь рассмотрим пары $(b_0, db = db(t))$, где b_0 – неотрицательные числа, а $db(t)$ – неотрицательные меры Стилтьеса на отрезке [0,1], и каждой такой паре сопоставим функцию $r(b_0, db, s)$, $s \geqslant 0$, и число $H(b_0, db)$:

$$r(b_0,db,s) = b_0 + \int_0^1 \frac{db(t)}{s+t}\,, \qquad H(b_0,db) = b_0 + \int_0^1 M(t)\,db(t).$$

На полуоси $s \geqslant 0$ фиксируем однопараметрическое (зависящее от параметра x) семейство функций (*семейство минорант*)

$$I(s,x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{d\sqrt{t}}{s+t} = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s/x}}{\sqrt{s}}\,, \quad x \in (0,1]; \qquad I(s,0) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,.$$

Фиксируем $x > 0$ в (1), положим $h(da) = h(da,x)$, $I(s) = I(s,x)$, $s \geqslant 0$, и отнесем к множеству $\mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ пары (b_0, db), для которых $r(b_0,db,s) \geqslant I(s)$ при всех $s \geqslant 0$. Задача, двойственная к (1), формулируется так:

$$\text{(2)} \qquad \textit{найти } \inf H(b_0,db) \textit{ по всем } (b_0,db) \in \mathscr{B}(x).$$

Теорема 1 (принцип двойственности). *Верхняя и нижняя грани в* (1), (2) *достигаются и равны друг другу*: $\max_{\mathscr{A}} h(da,x) = \min_{\mathscr{B}(x)} H(b_0,db)$, $x \in (0,1]$.

Определение. *Особыми точками меры* $da \in \mathscr{A}$ назовем точки $t \in [0,1]$, в которых $g(da,t) = M(t)$, а *особыми точками пары* $(b_0,db) \in \mathscr{B}$ – точки $s \geqslant 0$, в которых $r(b_0,db,s) = I(s)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01852).

Критерий совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$. *Для любой меры* $da \in \mathscr{A}$ *и любой пары* $(b_0, db) \in \mathscr{B}$ *выполняется неравенство* $h(da) \leqslant H(b_0, db)$. *Для совпадения* $h(da)$ *и* $H(b_0, db)$ *необходимо и достаточно, чтобы мера* da *была сосредоточена в особых точках* (b_0, db), *а мера* db *– в особых точках* da.

В последующих формулировках участвует *универсальная* (не зависящая от выбора мажоранты $M(t)$) убывающая и сходящаяся к 0 последовательность $X_k \in [0,1]$, $k \geqslant 1$. Ее определение связано с *полиномами Лежандра*

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_n(x) = \Big(2 - \frac{1}{n}\Big) x L_{n-1}(x) - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) L_{n-2}(x),$$

а именно, X_k – *квадрат наименьшего положительного корня* $L_{2k+1}(x)$, $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} &X_1 = 0.60000,\ X_2 = 0.28995,\ X_3 = 0.16471,\ X_4 = 0.10514,\ X_5 = 0.07265,\\ &X_6 = 0.05311,\ X_7 = 0.04048,\ X_8 = 0.03186,\ X_9 = 0.02572,\ X_{10} = 0.02119, \dots . \end{aligned} \tag{3}$$

Основное утверждение об особых точках. *Пусть* $x \geqslant X_k$ *из* (3), *и пусть*

$$s_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad s_1 > \dots > s_m \geqslant 0,$$

являются особыми точками пары $(b_0, db) \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$. *Тогда* $m \leqslant k$.

Из последнего неравенства, принципа двойственности и критерия совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$ следует

Теорема 2 (о дискретности da°). *Пусть* $x \geqslant X_k$ *из* (3), *и пусть* $\max_{\mathscr{A}} h(da, x)$ *достигается на мере* da°. *Тогда* da° *сосредоточена в конечном числе точек* $s_1^\circ > \dots > s_n^\circ$ *и* $n = n(x) \leqslant k$.

Теорема 3 (о строгом максимуме). *Для любой меры* $da \in \mathscr{A}$, *не равной* da°, *выполняется строгое неравенство* $h(da) < h(da^\circ)$.

Предположим дополнительно, что $\varliminf_{t\to 0} tM(t) = 0$. Тогда (см. теорему 2) $s_n^\circ > 0$, и теоремы 2, 3 можно переформулировать следующим образом:

Для каждого $x \in (0,1]$ *существуют и единственны такое* $n = n(x)$ *и такие*

$$a_j = a_j(x) > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \sum a_j = 1, \qquad s_1 = s_1(x) > \dots > s_n = s_n(x) > 0,$$

что строгий максимум $h(da, x)$ *достигается на мере* $da = \sum_1^n a_j \delta(s - s_j) ds$, *причем* $n(x) \leqslant k$, *если* $x \in [X_k, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 4. С. 3–56. [**2**] Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А. // Докл. АН. 1997. Т. 356. № 1. С. 25–28.

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gerver@mitp.rssi.ru m.l@gerver.mccme.ru

Принято редколлегией
03.09.1997