УДК 517

М. Л. Гервер, Е. А. Кудрявцева

Экстремальные свойства дискретных мер, универсальная последовательность и принцип двойственности

Дается новое, опирающееся на принцип двойственности доказательство теорем об универсальной последовательности и экстремальных свойствах дискретных мер. Эти теоремы ранее были получены авторами другим способом при решении некоторых задач на максимум, возникших в математической геофизике. Переход к двойственным задачам на минимум раскрывает геометрический смысл теорем и позволяет получить их обобщения.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Основные результаты

В статье доказаны и обобщены теоремы, анонсированные в [1], [2].

1.1. Задачи о верхней грани. Универсальная последовательность. На полуоси $s \geqslant 0$ рассмотрим неотрицательные меры Стилтьеса $da = da(s)$ с интегралом равным 1. Каждой такой мере сопоставим функцию

$$g(da,t) = \int_0^\infty \frac{da(s)}{s+t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Фиксируем неотрицательную меру Стилтьеса $d\theta(t)$, $t \geqslant 0$, и положим

$$h(da,x) = \int_x^\infty g(da,t)\,d\theta(t), \qquad x \in [0,1].$$

Фиксируем положительную функцию (*мажоранту*) $M = M(t)$, $t \in [0,1]$. Меру da отнесем к множеству $\mathscr{A} = \mathscr{A}_M$, если $g(da,t) \leqslant M(t)$ при всех $t \in [0,1]$.

На $\mathscr{A}$ рассмотрим 1-параметрическое (зависящее от параметра $x \in [0,1]$) семейство экстремальных задач:

$$\boxed{\textit{найти } \sup h(da,x) \textit{ по всем } da \in \mathscr{A}.} \tag{A}$$

Физическая трактовка задач (A) дана в [2], [3]. При некоторых ограничениях на $d\theta(t)$ и $M(t)$ в [4] доказано, что при всех $x \in (0,1]$ искомые экстремумы в задачах (A) достигаются на *дискретных мерах.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01852).

Сформулируем подробнее этот результат. Перепишем формулу для $h(da,x)$:

$$h(da,x)=\int_0^\infty I(s,x)\,da(s),\quad I(s,x)=\int_x^\infty \frac{d\theta(t)}{s+t}\,,\qquad s\geqslant 0,\quad x\in[0,1]. \tag{1.1}$$

В физических приложениях важна мера $d\theta(t)=\dfrac{2}{\pi}\,d\sqrt{t}$. В этом случае

$$I(s,x)=\frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{d\sqrt{t}}{s+t}\,, \tag{1.2}$$

т.е. $I(s,x)=\dfrac{2\operatorname{arctg}\sqrt{s/x}}{\pi\sqrt{s}}\,,\quad s>0,\ x>0;\quad I(0,x)=\dfrac{2}{\pi\sqrt{x}}\,;\quad I(s,0)=\dfrac{1}{\sqrt{s}}\,.$

Случаю (1.2) посвящены §§1–4, общий случай рассмотрен в §5.

В приложениях мажоранту $M(t)$ нельзя считать непрерывной. Физически оправдано (см. [2], [4]) предположение: $M(t)$ *полунепрерывна снизу* в каждой точке $t\in[0,1]$. Всюду далее оно считается выполненным. При этом предположении и дополнительном, тоже физически оправданном, условии

$$\varliminf_{t\to 0} tM(t)=0 \tag{1.3}$$

в [4] для меры $d\theta(t)=\dfrac{2}{\pi}\,d\sqrt{t}$ доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 (существования и единственности). *Для каждого $x\in(0,1]$ существуют и однозначно определяются такое $n=n(x)$ и такой набор чисел*

$$\{a_1,\dots,a_n,s_1,\dots,s_n\}\,,$$

$$a_j=a_j(x)>0,\quad 1\leqslant j\leqslant n,\quad \sum_{j=1}^n a_j=1,\quad s_1=s_1(x)>\dots>s_n=s_n(x)>0,$$

что строгий максимум $h(da,x)$ на множестве $\mathscr{A}$ достигается на мере

$$da=da(s)=\sum_{j=1}^n a_j\delta(s-s_j)\,ds.$$

Теорема 2 (об универсальной последовательности). *Существует такая универсальная (не зависящая от выбора мажоранты $M(t)$) невозрастающая и сходящаяся к нулю последовательность $X_k\in[0,1]$, $k\geqslant 1$, что*

$$n(x)\leqslant k\quad \textit{при}\quad x\in[X_k,1]. \tag{1.4}$$

В случае (1.2) определение X_k, данное в [4], связано с *полиномами Лежандра*

$$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=x,\quad L_n(x)=\left(2-\frac{1}{n}\right)xL_{n-1}(x)-\left(1-\frac{1}{n}\right)L_{n-2}(x),$$

а именно: *X_k – квадрат наименьшего положительного корня $L_{2k+1}(x)$*, $k\geqslant 1$, т.е. последовательность X_k в этом случае *убывает* и, ввиду [5], с точностью до $5\cdot 10^{-6}$

$$\begin{aligned} &X_1=0.60000,\quad X_2=0.28995,\quad X_3=0.16471,\quad X_4=0.10514,\\ &X_5=0.07265,\quad X_6=0.05311,\quad X_7=0.04048,\quad X_8=0.03186,\\ &X_9=0.02572,\ X_{10}=0.02119,\ X_{11}=0.01776,\ X_{12}=0.01510,\ \dots. \end{aligned} \tag{1.5}$$

В общем случае ограничения на $d\theta(t)$ и определение X_k см. в §5.

1.2. Двойственные экстремальные задачи. В статье будет дано новое, опирающееся на принцип двойственности доказательство теорем 1, 2.

Рассмотрим пары $(b_0, db = db(t))$, где b_0 – неотрицательные числа, а $db(t)$ – неотрицательные меры Стилтьеса на отрезке [0,1]. Множество всех таких пар обозначим через $\mathscr{P}$.

Каждой паре из $\mathscr{P}$ сопоставим функцию $r(b_0, db, s)$, $s \geqslant 0$, и число $H(b_0, db)$:

$$r(b_0, db, s) = b_0 + \int_0^1 \frac{db(t)}{s+t}, \qquad H(b_0, db) = b_0 + \int_0^1 M(t)\, db(t). \tag{1.6}$$

На полуоси $s \geqslant 0$ фиксируем 1-параметрическое (зависящее от параметра x) *семейство минорант* $I(s, x)$ (см. (1.2)). Зафиксируем $x \in [0, 1]$ в (1.1) и (1.2), положим $h(da) = h(da, x)$, $I(s) = I(s, x)$, $s \geqslant 0$, и отнесем к множеству $\mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ пары $(b_0, db) \in \mathscr{P}$, для которых $r(b_0, db, s) \geqslant I(s)$ при всех $s \geqslant 0$.

Задача, двойственная к (A), формулируется так:

$$\boxed{\textit{найти } \inf H(b_0, db) \textit{ по всем } (b_0, db) \in \mathscr{B}(x).} \tag{B}$$

Теорема 3 (принцип двойственности). *В задачах* (A) *и* (B) *верхняя и нижняя грани достигаются и равны друг другу при любом* $x \in (0, 1]$:

$$\max_{\mathscr{A}} h(da, x) = \min_{\mathscr{B}(x)} H(b_0, db), \qquad x \in (0, 1]. \tag{1.7}$$

Доказательство теоремы 3 (приведенное в § 3) базируется на следующей – совершенно прозрачной – геометрической конструкции.

Пусть V – выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, расположенное *над* некоторой гиперплоскостью. Пусть ориентированная (направленная *вверх*) прямая L пересекает V. Обозначим через H нижнюю грань точек множества V на L и через h – верхнюю грань точек прямой L, принадлежащих всевозможным гиперплоскостям, трансверсальным к L и лежащим *под* V. Пусть *гиперплоскость, опорная к* V *в точке* H, *трансверсальна к* L (если таких гиперплоскостей более одной, пусть указанным свойством обладает хоть одна из них). Тогда, очевидно,

$$h = H.$$

1.3. Особые точки. План доказательства теорем 1, 2. При проверке неравенств (1.4) используется

Определение. *Особыми точками меры* $da \in \mathscr{A}$ назовем точки $t \in [0, 1]$, в которых $g(da, t) = M(t)$, а *особыми точками пары* $(b_0, db) \in \mathscr{B}$ – точки $s \geqslant 0$, в которых $r(b_0, db, s) = I(s)$.

В § 2 будут доказаны следующие утверждения.

Критерий совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$. *Для любой меры* $da \in \mathscr{A}$ *и любой пары* $(b_0, db) \in \mathscr{B}$ *выполняется неравенство* $h(da) \leqslant H(b_0, db)$. *Для совпадения* $h(da)$ *и* $H(b_0, db)$ *необходимо и достаточно, чтобы мера* da *была сосредоточена в особых точках* (b_0, db), *а мера* db – *в особых точках* da.

Основное утверждение об особых точках. *Пусть $x \geqslant X_k$ из* (1.5) *и*

$$s_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad s_1 > \dots > s_m \geqslant 0,$$

являются особыми точками пары $(b_0, db) \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$. Тогда $m \leqslant k$.

Из последнего неравенства, принципа двойственности и критерия совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$ следует, что мера da°, на которой достигается $\max_{\mathscr{A}} h(da, x)$, дискретна при $x \in (0,1]$ и сосредоточена максимум в k точках при $x \geqslant X_k$:

Теорема 4 (о дискретности da°). *Пусть $x \geqslant X_k$ из* (1.5) *и $\max_{\mathscr{A}} h(da, x)$ достигается на мере da°. Тогда da° сосредоточена в конечном числе точек $s_1^\circ > \dots > s_n^\circ \geqslant 0$ и $n = n(x) \leqslant k$.*

В § 4 будет доказана

Теорема 5 (о строгом максимуме). *Для любой меры $da \in \mathscr{A}$, не равной da°, выполняется строгое неравенство $h(da) < h(da^\circ)$.*

Нетрудно проверить, что при условии (1.3) s_n° в теореме 4 положительно: $s_n^\circ > 0$. Тем самым, теоремы 1 и 2 являются следствиями теорем 3–5.

§ 2. Основное утверждение об особых точках

2.1. Реализацию плана, намеченного в п. 1.3, начнем с доказательства леммы, эквивалентной критерию совпадения $h(da)$ и $H(b_0, db)$. В ней

$$h(da) = h(da, x), \qquad I(s) = I(s, x), \qquad \mathscr{B} = \mathscr{B}(x),$$

где $x \in [0,1]$ – произвольно фиксированное значение параметра x.

Лемма 1. *Для любой меры $da \in \mathscr{A}$ и любой пары $(b_0, db) \in \mathscr{B}$*

$$h(da) \leqslant H(b_0, db), \tag{2.1}$$

причем равенство достигается в том и только том случае, когда

$$\int_0^\infty [r(b_0, db, s) - I(s)]\, da(s) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 [M(t) - g(da, t)]\, db(t) = 0.$$

Доказательство. Согласно (1.1)

$$h(da) = \int_0^\infty I(s)\, da(s). \tag{2.2}$$

Поэтому с учетом (1.6) лемма 1 вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} h(da) &= \int_0^\infty I(s)\, da(s) \leqslant \int_0^\infty r(b_0, db, s)\, da(s) \\ &= \int_0^\infty \left[b_0 + \int_0^1 \frac{db(t)}{s+t} \right] da(s) = b_0 + \int_0^1 \int_0^\infty \frac{da(s)\, db(t)}{s+t} \\ &= b_0 + \int_0^1 g(da, t)\, db(t) \leqslant b_0 + \int_0^1 M(t)\, db(t) = H(b_0, db). \end{aligned}$$

Замечание. Из (2.1) следует (ср. с (1.7)), что

$$\sup_{\mathscr{A}} h(da) \leqslant \inf_{\mathscr{B}} H(b_0, db). \tag{2.3}$$

2.2. Теперь докажем

Основное утверждение об особых точках. *При $x \geqslant X_k$ из (1.5) любая пара $(b_0, db) \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ имеет максимум k особых точек.*

Доказательство. Допустим, что это утверждение неверно: что, хотя $x \geqslant X_k$, существует пара $(b_0, db) \in \mathscr{B}(x)$, имеющая по крайней мере $k+1$ особых точек:

$$r(b_0, db, s_j) = I(s_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant k+1, \quad s_1 > \dots > s_{k+1} \geqslant 0,$$

и приведем это допущение к противоречию. Предложим сначала набросок доказательства, отметив значками $^{\langle n \rangle}$, $1 \leqslant n \leqslant 5$, утверждения, требующие более подробных пояснений, а потом дадим такие пояснения.

Напомним определение $I(s)$: мы зафиксировали $x \in [0,1]$ и положили $I(s) = I(s,x)$, $s \geqslant 0$, таким образом:

$$I(s) = \int_x^\infty \frac{d\theta(t)}{s+t}, \qquad d\theta(t) = \frac{2}{\pi}\, d\sqrt{t}, \quad 0 < t < \infty. \tag{2.4}$$

Согласно [6] при любом $x > 0$ существуют и единственны такие положительные числа

$$p_0, p_1, \dots, p_k, \qquad t_1, \dots, t_k, \quad t_1 > \dots > t_k > x > 0, \tag{2.5}$$

что функция

$$p(s) = p_0 + \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{s+t_i} \tag{2.6}$$

вместе с производной $p'(s)$ совпадает с $I(s)$ (соответственно $I'(s)$) в точках s_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, а также при $s = 0$ $^{\langle 1 \rangle}$:

$$p(s_j) = I(s_j), \quad p'(s_j) = I'(s_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \qquad p(0) = I(0). \tag{2.7}$$

Сравнивая $p(s)$ с $r(b_0, db, s)$, нетрудно доказать, что $t_1 < 1$ $^{\langle 2 \rangle}$.

Однако из условия $x \geqslant X_k$ согласно [4] следует, что $t_1 > 1$. Это противоречие доказывает основное утверждение об особых точках.

Доказательство неравенства $t_1 > 1$ основывается на следующем характеристическом свойстве последовательности X_k. При любом $x > 0$ существует и единственна пара

$$(b_{00}, db_0) \in \mathscr{B}(x), \qquad db_0 = \sum_{i=1}^k b_{0i}\delta(t - t_{0i})\, dt, \quad t_{01} > \dots > t_{0k} > 0, \tag{2.8}$$

для которой при $s = 0$ функция

$$r_0(s) = r(b_{00}, db_0, s) = b_{00} + \sum_{i=1}^{k} \frac{b_{0i}}{s + t_{0i}}$$

совпадает с $I(s) = I(s, x)$ вместе с $2k$ производными $\langle 3 \rangle$:

$$r_0^{(j)}(0) = I^{(j)}(0), \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2k; \tag{2.9}$$

при этом соотношения $t_{01} < 1$, $t_{01} = 1$ и $t_{01} > 1$ эквивалентны (соответственно) соотношениям $x < X_k$, $x = X_k$ и $x > X_k$ $\langle 4 \rangle$.

Таким образом, достаточно проверить, что t_1 в (2.5), (2.6) и t_{01} в (2.8) связаны неравенством $t_1 > t_{01}$ $\langle 5 \rangle$. Тогда $t_1 > t_{01} \geqslant 1$ при $x \geqslant X_k$.

Пояснения к § 2

Пояснение 1. Существование и единственность функции $p(s)$ вида (2.6), определяемой параметрами (2.5) и связанной с $I(s)$ равенствами (2.7), допускает красивую геометрическую интерпретацию, опирающуюся на теорему Ф. Рисса о замкнутой выпуклой оболочке кривой в $\mathbb{R}^n$ и центрах масс [6; гл. 1, теорема 3.5].

Перепишем (2.4) в виде

$$I(s) = \int_x^\infty \frac{t\, d\rho(t)}{s + t}, \quad d\rho(t) = \frac{d\theta(t)}{t} = \frac{1}{\pi}\, d\left(\frac{-1}{\sqrt{t}}\right), \qquad 0 < x \leqslant t < \infty,$$

и положим $J(s) = \pi\sqrt{x}\, I(s)$; множитель $\pi\sqrt{x}$ выбран так, чтобы в формуле

$$J(s) = \int_x^\infty \frac{t\, d\mu(t)}{s + t}, \quad d\mu(t) = \pi\sqrt{x}\, d\rho(t) = d\left(-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}}\right), \qquad 0 < x \leqslant t < \infty,$$

для меры $d\mu(t)$ выполнялось равенство:

$$\int_x^\infty d\mu(t) = 1.$$

Пусть

$$\xi(t) = \left\{\xi_0 = 1,\ \frac{t}{s_1 + t},\ \frac{-t}{(s_1 + t)^2},\ \dots,\ \frac{t}{s_k + t},\ \frac{-t}{(s_k + t)^2}\right\},$$

так что точка $C = \{J(0),\ J(s_1),\ J'(s_1),\ \dots,\ J(s_k),\ J'(s_k)\} \in \mathbb{R}^{2k+1}$ представима в виде

$$C = \bigl\{J(0),\ J(s_1),\ J'(s_1),\ \dots,\ J(s_k),\ J'(s_k)\bigr\} = \int_x^\infty \xi(t)\, d\mu(t).$$

Вектор-функция $\xi(t)$, $t \in [x, \infty]$, задает дугу $\mathscr{D}$ в $\mathbb{R}^{2k+1}$, лежащую в гиперплоскости $\xi_0 = 1$ и содержащую точку $B = \xi(\infty) = \{\xi_0 = 1,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 1,\ 0\}$.

Замкнутую выпуклую оболочку дуги $\mathscr{D}$ обозначим через $\mathscr{R}(\mathscr{D})$. По теореме Ф. Рисса $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ совпадает с множеством точек P, допускающих представление

$$P = \int_x^\infty \xi(t)\, dm(t), \qquad \int_x^\infty dm(t) = 1,$$

т.е. совпадает с множеством центров масс для всевозможных распределений $m(t)$ неотрицательных масс на дуге $\mathscr{D}$.

В частности, можно взять $m(t) = \mu(t) = 1 - \sqrt{x/t}$. Тем самым,

$$C = \bigl\{J(0),\, J(s_1),\, J'(s_1),\, \dots,\, J(s_k),\, J'(s_k)\bigr\} \in \mathscr{R}(\mathscr{D}).$$

Спрашивается: *можно ли так подобрать* $t_1, \dots, t_k$, $t_1 > \dots > t_k > x > 0$, *и поместить в точку* $\xi(\infty)$ *и в точки* $\xi(t_i)$ *такие положительные массы* m_∞ *и* m_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $m_\infty + m_1 + \dots + m_k = 1$, *чтобы центр этой системы масс совпал с* C? Утвердительный ответ на этот вопрос означает, что

$$\bigl\{J(0),\, J(s_1),\, J'(s_1),\, \dots,\, J(s_k),\, J'(s_k)\bigr\} = m_\infty \xi(\infty) + m_1 \xi(t_1) + \dots + m_k \xi(t_k);$$

последнее соотношение, как нетрудно проверить, эквивалентно равенствам

$$\begin{gathered}
J(0) = m_\infty + m_1 + \dots + m_k = 1, \\
J(s_j) = m_\infty + \frac{m_1 t_1}{s_j + t_1} + \dots + \frac{m_k t_k}{s_j + t_k}\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k, \\
J'(s_j) = \frac{-m_1 t_1}{(s_j + t_1)^2} + \dots + \frac{-m_k t_k}{(s_j + t_k)^2}\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k,
\end{gathered}$$

и равенства (2.7) следуют из них, если положить

$$p_0 = \frac{m_\infty}{\pi\sqrt{x}}\,, \qquad p_i = \frac{m_i t_i}{\pi\sqrt{x}}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Расположить на дуге $\mathscr{D}$ *конечное число масс с центром в заданной точке* $C \in \mathscr{R}(\mathscr{D})$ не представляет труда. Тонкость состоит в том, что масс должно быть *всего* $k+1$, причем одна из них должна располагаться в точке $B = \xi(\infty)$.

Обойтись столь небольшим числом масс можно благодаря тому, что компоненты вектор-функции $\xi(t)$, задающей дугу $\mathscr{D}$,

$$\xi_0 = 1,\, \xi_1(t) = \frac{t}{s_1 + t},\, \xi_2(t) = \frac{-t}{(s_1 + t)^2},\, \dots,\, \xi_{2k-1}(t) = \frac{t}{s_k + t},\, \xi_{2k}(t) = \frac{-t}{(s_k + t)^2}$$

образуют *чебышёвскую систему* (или T-*систему*) *порядка* $2k$. По определению (см. [6]–[8]) это означает, что любая нетривиальная линейная комбинация (или, как принято говорить, любой нетривиальный *многочлен*) $\sum_{j=0}^{2k} c_j \xi_j(t)$ имеет на полуоси $t > 0$ самое большее $2k$ корней.

Итак, докажем *существование и единственность системы из* $k+1$ *масс на дуге* $\mathscr{D}$ *с одной из масс в точке* $B = \xi(\infty)$ *и с центром масс* C (ср. с аналогичными рассуждениями в [9; §6, п. 6.1, §8, комментарий 8]).

Проведем луч BC. Пусть E – точка, в которой он выходит из $\mathscr{R}(\mathscr{D})$, и Γ – опорная гиперплоскость к $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ в точке E.

До сих пор построение проводилось в аффинном подпространстве $\xi_0 = 1$ в $\mathbb{R}^{2k+1}$, так что $\dim \Gamma = 2k - 1$. Теперь возьмем линейное подпространство Λ

в $\mathbb{R}^{2k+1}$ ($\dim \Lambda = 2k$), содержащее Γ: $\lambda_0\xi_0 + \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_{2k}\xi_{2k} = 0$; ориентацию выберем так, чтобы для точек дуги $\mathscr{D}$

$$\xi(t) = \{\xi_j(t)\}_{j=0}^{2k}, \qquad t \in [x, \infty],$$

лежащих по одну сторону от Λ, многочлен $\lambda(t) = \sum_{j=0}^{2k} \lambda_j \xi_j(t)$ был неотрицателен (на $\mathscr{D} \cap \Gamma$ он равен нулю).

Представим E как центр масс на дуге $\mathscr{D}$. Так как $E \in \mathscr{R}(\mathscr{D}) \cap \Gamma$, то все эти массы расположены в точках $\mathscr{D} \cap \Gamma$.

Таких точек – конечное число q (не больше чем корней $\lambda(t)$), т.е.

$$E = \sum_{i=1}^{q} e_i \xi(t_i), \quad \sum_{i=1}^{q} e_i = 1,\ e_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant q,\ t_1 > \cdots > t_q \geqslant x > 0. \tag{2.10}$$

Докажем, что $q = k$. Неравенство $q > k$ невозможно, так как в этом случае число корней многочлена $\lambda(t) - \varepsilon$ (при малом $\varepsilon > 0$) больше чем $2k$.

Чтобы проверить, что неравенство $q < k$ тоже невозможно, воспользуемся теоремой, которая распространяет на случай *обобщенных чебышёвских систем* (или ET-*систем* [7]) классическое неравенство $K \leqslant \Pi$, связывающее *сумму K кратностей положительных корней многочлена с числом Π перемен знака в последовательности его коэффициентов.*

Будем называть ее теоремой Гантмахера–Крейна (хотя, если быть более точными, это – ее модификация (см. [6; гл. 2, §2, Д. 2.3], [7; гл. 1, теорема 4.4] или [8]).

Допустим, что $q < k$, и приведем это допущение к противоречию.

Представим C в виде $C = mB + (1-m)E$, $m \in [0,1]$ (из дальнейшего ясно, что $m \in (0,1)$). Полагая

$$m_\infty = m, \qquad m_i = (1-m)e_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant q,$$

ввиду (2.10) получаем: $C = m_\infty \xi(\infty) + m_1\xi(t_1) + \cdots + m_q\xi(t_q)$, т.е. вместо (2.6)

$$p(s) = p_0 + \sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{s + t_i}, \qquad q < k, \quad t_1 > \cdots > t_q \geqslant x > 0.$$

Пусть $t_q > x$ (случай $t_q = x$, как видно из последующего доказательства, невозможен даже при $q = k$). Функцию $I(s)$ (см. (2.4)) представим в виде суммы $q+1$ слагаемых: $I(s) = I_0(s) + I_1(s) + \cdots + I_q(s)$, где

$$I_q(s) = \int_x^{t_q} \frac{d\theta(t)}{s+t}\,,\ \ldots,\ I_1(s) = \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\theta(t)}{s+t}\,,\ I_0(s) = \int_{t_1}^{\infty} \frac{d\theta(t)}{s+t}\,,\ d\theta(t) = \frac{2}{\pi}\, d\sqrt{t}.$$

При $q \leqslant k-1$ число Π *перемен знака* в разложении разности

$$p(s) - I(s) = p_0 - I_0(s) + \frac{p_1}{s+t_1} - I_1(s) + \cdots + \frac{p_q}{s+t_q} - I_q(s)$$

может оказаться равным самое большее $2k-1$. Однако по теореме Гантмахера–Крейна *сумма* K *кратностей корней* $p(s)-I(s)$ *не больше* Π. При этом вследствие (2.7) $K \geqslant 2k+1$.

Полученное противоречие доказывает, что неравенство $q<k$ невозможно и, следовательно, $q=k$ (причем $t_1>\dots>t_k>x>0$).

Единственность найденной системы из $k+1$ масс *очевидна*: если бы две функции $p_1(s)$ и $p_2(s)$ вида (2.6) удовлетворяли (2.7), то их разность

$$p_1(s)-p_2(s)=p_{01}-p_{02}+\sum_{i=1}^{k}\frac{p_{i1}}{s+t_{i1}}-\sum_{i=1}^{k}\frac{p_{i2}}{s+t_{i2}} \tag{2.11}$$

имела бы *слишком много корней* – вследствие (2.7) сумма их кратностей не меньше $2k+1$, в то время как максимально возможное число корней (2.11) с учетом кратности – лишь $2k$.

Пояснение 2. Для проверки неравенства $t_1<1$ снова воспользуемся теоремой Гантмахера–Крейна. Если в (2.5) $t_1<1$, то функцию

$$r(s)=r(b_0,db,s)=b_0+\int_0^1\frac{db(t)}{s+t}\,, \qquad s\geqslant 0,$$

можно представить в виде суммы $2k+2$ слагаемых:

$$r(s)=\int_0^{t_k-0}\frac{db(t)}{s+t}+\frac{b_k}{s+t_k}+\dots+\int_{t_2+0}^{t_1-0}\frac{db(t)}{s+t}+\frac{b_1}{s+t_1}+\int_{t_1+0}^{1}\frac{db(t)}{s+t}+b_0,$$

где

$$\frac{b_i}{s+t_i}=\int_{t_i-0}^{t_i+0}\frac{db(t)}{s+t}\,, \qquad 1\leqslant i\leqslant k.$$

Тем самым число Π перемен знака в разложении разности $p(s)-r(s)$

$$(p_0-b_0)-\int_{t_1+0}^{1}\frac{db(t)}{s+t}+\frac{p_1-b_1}{s+t_1}-\int_{t_2+0}^{t_1-0}\frac{db(t)}{s+t}+\dots+\frac{p_k-b_k}{s+t_k}-\int_0^{t_k-0}\frac{db(t)}{s+t}$$

может оказаться равным самое большее $2k+1$. По теореме Гантмахера–Крейна *сумма* K *кратностей корней* $p(s)-r(s)$ *не больше числа* Π. Легко проверить, что $2k+1\leqslant K$ (мы обоснуем это неравенство чуть ниже). Таким образом, в случае $t_1<1$ неравенство $K\leqslant\Pi$ обращается в равенство

$$2k+1=K=\Pi.$$

Если в (2.5) $t_1=1$, то

$$r(s)=\int_0^{t_k-0}\frac{db(t)}{s+t}+\frac{b_k}{s+t_k}+\dots+\int_{t_2+0}^{t_1-0}\frac{db(t)}{s+t}+\frac{b_1}{s+t_1}+b_0$$

и в разложении разности

$$p(s)-r(s)=(p_0-b_0)+\frac{p_1-b_1}{s+t_1}-\int_{t_2+0}^{t_1-0}\frac{db(t)}{s+t}+\dots+\frac{p_k-b_k}{s+t_k}-\int_0^{t_k-0}\frac{db(t)}{s+t}$$

число Π *перемен знака меньше чем* $2k+1$, *т.е. заведомо меньше чем* K, вопреки теореме Гантмахера–Крейна, согласно которой $K \leqslant \Pi$.

Тот же вывод тем более верен, если $t_1 > 1$.

Таким образом, остается обосновать неравенство $2k+1 \leqslant K$. Так как

$$r(s) = r(b_0, db, s) \geqslant I(s), \quad s \geqslant 0, \qquad r(s_j) = I(s_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant k+1,$$

то $r(s_j) = I(s_j), r'(s_j) = I'(s_j), 1 \leqslant j \leqslant k$. Следовательно, ввиду (2.7)

$$r(s_j) = p(s_j), \quad r'(s_j) = p'(s_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Рассмотрим два случая: 1) $r(0) = p(0) = I(0)$ и 2) $r(0) > p(0) = I(0)$, а значит, $s_{k+1} > 0$ и тем самым $r(s_{k+1}) = I(s_{k+1}) < p(s_{k+1})$. В обоих случаях кроме k кратных корней s_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, разность $p(s) - r(s)$ имеет еще хотя бы один корень ($s = 0$ в первом случае и $s = s^0 \in (0, s_{k+1})$ – во втором).

Проверка неравенства $t_1 < 1$ закончена.

Замечание. Далее в этой статье мы еще несколько раз будем опираться в своих доказательствах на теорему Гантмахера–Крейна.

Пояснение 3. Возьмем в (1.2) $x = 1$, положим

$$\widehat{I}(s) = I(s,1) = \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{s}}{\pi \sqrt{s}} = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\sqrt{t}}{s+t}, \qquad s \geqslant 0, \tag{2.12}$$

и построим рациональную аппроксимацию $\hat{r}_0(s)$ функции $\widehat{I}(s)$:

$$\hat{r}_0(s) = \hat{b}_{00} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{b}_{0i}}{s + \hat{t}_{0i}}, \qquad \hat{t}_{01} > \dots > \hat{t}_{0k} > 0, \tag{2.13}$$

$$\hat{r}_0^{(j)}(0) = \widehat{I}^{(j)}(0), \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2k. \tag{2.14}$$

Замечание. Сравнивая (1.2) и (2.12), видим, что $I(s) = \widehat{I}(s/x)/\sqrt{x}$. Значит, рациональные аппроксимации $r_0(s)$ и $\hat{r}_0(s)$ связаны соотношением

$$r_0(s) = \frac{\hat{r}_0(s/x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\hat{b}_{00} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{b}_{0i}}{s/x + \hat{t}_{0i}}\right) = \frac{\hat{b}_{00}}{\sqrt{x}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{b}_{0i}\sqrt{x}}{s + \hat{t}_{0i}x}. \tag{2.15}$$

Таким образом, чтобы доказать существование и единственность аппроксимации $r_0(s)$, достаточно построить аппроксимацию $\hat{r}_0(s)$ и проверить, что она однозначно определяется условиями (2.14).

При построении $\hat{r}_0(s)$ перед нами возникнет следующая

Задача. *Найти* $c_1, \dots, c_k$ *и* $\zeta_1, \dots, \zeta_k$, *удовлетворяющие нелинейной системе уравнений*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \zeta_i^p = \frac{1}{2p+3}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2k-1. \tag{2.16}$$

В [4; § 6, теорема 8, § 12, комментарий 14] доказана

Теорема 6. *Система* (2.16) *однозначно разрешима, причем* $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ – *это квадраты ненулевых корней полинома Лежандра* $L_{2k+1}(x)$, *а* $c_1, \dots, c_k$ *определяются из системы линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \zeta_i^p = \frac{1}{2p+3}\,, \qquad 0 \leqslant p \leqslant k-1.$$

Опираясь на эту теорему, построим $\hat{r}_0(s)$. Из (2.12) и (2.13) следует, что

$$\widehat{I}(0) = \frac{2}{\pi}\,, \qquad \hat{r}_0(0) = \hat{b}_{00} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{b}_{0i}}{\hat{t}_{0i}}$$

и что при $1 \leqslant j \leqslant 2k$

$$\frac{(-1)^j}{j!}\,\widehat{I}^{(j)}(0) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\sqrt{t}}{t^{j+1}}\,, \qquad \frac{(-1)^j}{j!}\,\hat{r}^{(j)}(0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{b}_{0i}}{\hat{t}_{0i}^{j+1}}\,.$$

Поэтому условия (2.14) эквивалентны системе уравнений

$$\hat{b}_{00} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{b}_{0i}}{\hat{t}_{0i}} = \frac{2}{\pi}\,, \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{b}_{0i}}{\hat{t}_{0i}^{j+1}} = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\sqrt{t}}{t^{j+1}}\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2k, \tag{2.17}$$

относительно $\hat{b}_{00}$ и $\hat{b}_{0i}, \hat{t}_{0i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Если положить

$$\zeta_i = \frac{1}{\hat{t}_{0i}}\,, \quad c_i = \frac{\pi}{2}\frac{\hat{b}_{0i}}{\hat{t}_{0i}^2}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant k; \qquad u = \frac{1}{t}\,, \quad \nu(u) = \frac{u^{3/2}}{3}\,,$$

то последние $2k$ уравнений из (2.17) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \zeta_i^p = \int_0^1 u^p\, d\nu(u), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2k-1.$$

Вычислив интегралы, приходим к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \zeta_i^p = \frac{1}{2p+3}\,, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2k-1,$$

т.е. оказываемся в условиях теоремы 6. Добавляя первое уравнение из (2.17), получаем, что *аппроксимация* $\hat{r}_0(s)$ *определяется однозначно условиями* (2.14).

Пояснение 4. Занумеруем ζ_i так, что $0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_k$, тогда (по теореме 6) $\zeta_1 = X_k$ – квадрат наименьшего положительного корня полинома Лежандра L_{2k+1}, т.е.

$$\hat{t}_{01} = \frac{1}{X_k}\,. \tag{2.18}$$

Вследствие (2.15) $t_{0i} = \hat{t}_{0i}x$, $1 \leqslant i \leqslant k$, откуда с учетом (2.18) $t_{01} = x/X_k$. Итак, соотношения $t_{01} \leqslant 1$, $t_{01} = 1$ и $t_{01} \geqslant 1$ выполняются соответственно при $x \leqslant X_k$, $x = X_k$ и $x \geqslant X_k$.

Пояснение 5. Разобьем доказательство неравенства $t_1 > t_{01}$ на три части.

A. Для функции $p(s)$ из (2.6) введем обозначение $p(\mathscr{S}, s)$, где $\mathscr{S} = \{s_1, \dots, s_k\}$ – набор точек на полуоси $s > 0$, в которых (в соответствии с (2.7)) $p(s)$ совпадает с $I(s)$ вместе с производной. Аналогично, $p^*(s) = p(\mathscr{S}^*, s)$ – это функция вида (2.6), совпадающая с $I(s)$ вместе с производной в точках s_j^*, $1 \leqslant j \leqslant k$, из набора $\mathscr{S}^* = \{s_1^*, \dots, s_k^*\}$, $s_1^* > \dots > s_k^* > 0$. Кроме того, как и в (2.7), $p^*(0) = I(0)$. Пусть точки наборов $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}^*$ *чередуются*:

$$s_1 \geqslant s_1^* \geqslant \dots \geqslant s_k \geqslant s_k^* > 0. \tag{2.19}$$

Докажем, что тогда полюсы t_i и t_i^* $(1 \leqslant i \leqslant k)$ аппроксимаций $p(\mathscr{S}, s)$ и $p(\mathscr{S}^*, s)$ тоже *чередуются*, причем неравенства *строгие* (если только $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}^*$ не совпадают):

$$t_1 > t_1^* > \dots > t_k > t_k^* > x > 0. \tag{2.20}$$

По построению $p(\mathscr{S}, 0) = p(\mathscr{S}^*, 0)$ и, кроме того,

$$p(\mathscr{S}, s_j) = I(s_j) \leqslant p(\mathscr{S}^*, s_j), \quad p(\mathscr{S}^*, s_j^*) = I(s_j^*) \leqslant p(\mathscr{S}, s_j^*), \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Поэтому для функции

$$\rho(s) = p(\mathscr{S}, s) - p(\mathscr{S}^*, s) = p_0 - p_0^* + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i}{s + t_i} - \frac{p_i^*}{s + t_i^*} \right) \tag{2.21}$$

сумма K *кратностей корней на полуоси* $s \geqslant 0$ и даже *сумма* K' *кратностей корней на отрезке* $[0, s_1]$ *не меньше* $2k$: $K \geqslant K' \geqslant 2k$. Приведем в (2.21) подобные члены, упорядочим полюсы по убыванию и запишем (2.21) в виде

$$\rho(s) = c_0 + \sum_{i=1}^{q} \frac{c_i}{s + x_i}, \qquad x_1 > \dots > x_q > x > 0, \quad q \leqslant 2k.$$

По теореме Гантмахера–Крейна *число* Π *перемен знака в последовательности коэффициентов* $c_0, \dots, c_q$ *не меньше* K. Так как $\Pi \leqslant q$, отсюда следует, что $q = \Pi = K = K' = 2k$, и (2.20) доказано: если полюсы t_i и t_i^* располагаются в любом другом порядке, то $\Pi < 2k$.

B. Взяв малое $\varepsilon > 0$, рассмотрим последовательность наборов

$$\mathscr{S}_n = \{s_{n,1}, \dots, s_{n,k}\}, \qquad s_{n,1} > \dots > s_{n,k} > 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

обладающую тремя свойствами: 1) $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}$, 2) $s_{N,1} < \varepsilon$, 3) точки наборов $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{S}_{n+1}$ $(1 \leqslant n < N)$ *чередуются*: $s_{n,1} > s_{n+1,1} > \dots > s_{n,k} > s_{n+1,k} > 0$.

Согласно **A** для аппроксимаций $p(\mathscr{S}_n, s)$ и $p(\mathscr{S}_{n+1}, s)$

$$t_{n,1} > t_{n+1,1} > \dots > t_{n,k} > t_{n+1,k} > x > 0.$$

Отсюда

$$t_1 = t_{1,1} > t_{N,1}. \tag{2.22}$$

C. При $\varepsilon \to 0$ аппроксимация $p(\mathscr{S}_N, s)$, очевидно, стремится к аппроксимации $r_0(s)$ (см. (2.9)). Отсюда ввиду (2.22) следует неравенство $t_1 > t_{01}$.

§ 3. Принцип двойственности

В этом параграфе будет доказана теорема 3 (сформулированная в п. 1.2).

3.1. Начнем с проверки двух лемм.

Лемма 2. *При любом $x \in [0,1]$ для каждой пары $(b_0, db) \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ число b_0 положительно.*

Доказательство. При любом $x \in [0,1]$ функция $I(s) = I(s,x)$ (см. (1.2)) убывает при $s \to \infty$ как $1/\sqrt{s}$. Согласно (1.6) если $b_0 = 0$, то функция $r(b_0, db, s)$ убывает при $s \to \infty$ как $(b(1) - b(0))/s$. Таким образом, равенство $b_0 = 0$ противоречит условию $(b_0, db) \in \mathscr{B}$: если $b_0 = 0$, то неравенство $r(b_0, db, s) \geqslant I(s)$ нарушается при больших $s > 0$. Значит, $b_0 > 0$ для каждой пары $(b_0, db) \in \mathscr{B}$.

Лемма 3. *В задаче* (B) *при каждом $x \in (0,1]$ существует такая зависящая от x пара $(b_0^\circ, db^\circ) \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$, что $\min_{\mathscr{B}} H(b_0, db) = H(b_0^\circ, db^\circ)$.*

Доказательство. Будучи *положительной и полунепрерывной снизу на* $[0,1]$, мажоранта $M(t)$ достигает *положительного минимума* M_0 в некоторой точке $t_0 \in [0,1]$:

$$\min_{[0,1]} M(t) = M(t_0) = M_0 > 0.$$

Тем самым для каждой пары $(b_0, db) \in \mathscr{B}$

$$H(b_0, db) = b_0 + \int_0^1 M(t)\, db(t) \geqslant b_0 + \int_0^1 M_0\, db(t) = b_0 + M_0\big(b(1) - b(0)\big). \tag{3.1}$$

Рассмотрим последовательность пар $(b_{0,n}, db_n) \in \mathscr{B}$, для которой $b_n(0) = 0$ и

$$H(b_{0,n}, db_n) \to H^\circ = \inf_{\mathscr{B}} H(b_0, db).$$

Так как $x > 0$, то $H^\circ < \infty$ (поскольку для пары $b_0 = I(0) = 2/(\pi\sqrt{x}\,)$, $db = 0$ значение $H(b_0, db) = 2/(\pi\sqrt{x}\,)$ конечно). Поэтому, ввиду (3.1), $b_n(1)$ равномерно ограничены, так что (по второй теореме Хелли [10; гл. VI, теорема 3]) из последовательности неубывающих функций $b_n(t)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке $t \in [0,1]$ к некоторой неубывающей функции $b^\circ(t)$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что сама последовательность $b_n(t)$ сходится к $b^\circ(t)$ и что при этом $b_{0,n} \to b_0^\circ \geqslant 0$. Переходя к пределу в неравенствах

$$r(b_{0,n}, db_n, s) = b_{0,n} + \int_0^1 \frac{db_n(t)}{s+t} \geqslant I(s), \qquad s \geqslant 0,$$

получаем (по первой теореме Хелли [10; гл. VI, теорема 2]), что

$$r(b_0^\circ, db^\circ(t), s) \geqslant I(s) \text{ при всех } s \geqslant 0, \text{ т.е. } (b_0^\circ, db^\circ(t)) \in \mathscr{B}.$$

Если бы мажоранта $M(t)$ была *непрерывна на* $[0,1]$, то (по той же первой теореме Хелли) выполнялось бы равенство

$$H^\circ = H(b_0^\circ, db^\circ). \tag{3.2}$$

Поскольку $M(t)$ лишь *полунепрерывна снизу*, то предельный переход

$$b_n(t) \to b^\circ(t), \qquad b_{0,n} \to b_0^\circ$$

дает лишь *неравенство* $H^\circ \geqslant H(b_0^\circ, db^\circ)$; но случай $H^\circ > H(b_0^\circ, db^\circ)$ невозможен, так как H° – нижняя грань $H(b_0, db)$ на $\mathscr{B}$; значит, выполняется (3.2) и лемма 3 доказана.

3.2. Первый шаг к доказательству теоремы 3 сделан – по лемме 3 при любом значении параметра $x \in (0,1]$ нижняя грань в задаче (B) достигается: *для некоторой зависящей от x пары $(b_0^\circ, db^\circ) \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$*

$$H(b_0^\circ, db^\circ) = \min_{\mathscr{B}(x)} H(b_0, db).$$

Остается установить, что при любом $x \in (0,1]$ верхняя грань в задаче (A) тоже достигается (на некоторой зависящей от x мере $da^\circ \in \mathscr{A}$) и

$$h(da^\circ, x) = \max_{\mathscr{A}} h(da, x) = \min_{\mathscr{B}(x)} H(b_0, db) = H(b_0^\circ, db^\circ). \tag{3.3}$$

Лемма 4. *Множество S° особых точек пары (b_0°, db°) непусто.*

Доказательство. При $s \to \infty$ разность $r(b_0^\circ, db^\circ, s) - I(s)$ стремится к b_0°. По лемме 2 число b_0° положительно. Поэтому если бы при $s \geqslant 0$ выполнялось строгое неравенство $r(b_0^\circ, db^\circ, s) > I(s)$, то выполнялось бы и неравенство

$$r(b_0^\circ, db^\circ, s) > I(s) + \varepsilon$$

(для некоторого $\varepsilon > 0$) и можно было бы, не выходя из $\mathscr{B}$, уменьшить b_0° и тем самым уменьшить $H(b_0^\circ, db^\circ)$. Итак, $r(b_0^\circ, db^\circ, s) = I(s)$ при некотором $s \geqslant 0$, т.е. множество S° особых точек пары (b_0°, db°) непусто.

Так как X_k из (1.5) стремятся к нулю, то для любого $x \in (0,1]$ найдется такой номер k, что $x \geqslant X_k$. Тогда согласно §2 множество S° содержит не более k точек.

Тем самым, S° состоит из конечного числа точек для любого $x \in (0,1]$:

$$S^\circ = \{s_1^\circ, \dots, s_m^\circ\}.$$

3.3. Сделаем следующий шаг к доказательству теоремы 3. Напомним определение множества $\mathscr{P}$ (см. п. 1.2):

$$\mathscr{P} = \big\{(b_0, db) : b_0 \geqslant 0,\ db = db(t) \geqslant 0,\ t \in [0,1]\big\}. \tag{3.4}$$

Введем множество $\widehat{\mathscr{B}} = \widehat{\mathscr{B}}(x) \supset \mathscr{B}(x)$, состоящее из пар $(b_0, db) \in \mathscr{P}$, для которых $r(b_0, db, s) \geqslant I(s)$ на S°:

$$\widehat{\mathscr{B}} = \big\{(b_0, db) \in \mathscr{P} : r(b_0, db, s_j^\circ) \geqslant I(s_j^\circ),\ 1 \leqslant j \leqslant m\big\}. \tag{3.5}$$

Лемма 5. *Справедливо равенство $H(b_0^\circ, db^\circ) = \min_{\widehat{\mathscr{B}}} H(b_0, db)$.*

Доказательство. Множество $\widehat{\mathscr{B}}$ содержит $\mathscr{B}$, поэтому нижняя грань $H(b_0, db)$ по всем $(b_0, db) \in \widehat{\mathscr{B}}$ могла бы оказаться *меньше* числа $H(b_0^\circ, db^\circ)$, равного $\min_{\mathscr{B}} H(b_0, db)$. Допустим, что это действительно так, и приведем это допущение к противоречию.

Согласно принятому допущению найдется такая пара $(b_0, db) \in \widehat{\mathscr{B}}$, что

$$H(b_0, db) < H(b_0^\circ, db^\circ). \tag{3.6}$$

Выбирая достаточно малое $\varepsilon > 0$ и умножая (b_0, db) на $1 + \varepsilon$, получаем пару $(b_0^\star, db^\star)$, для которой, подобно (3.6), $H(b_0^\star, db^\star) < H(b_0^\circ, db^\circ)$ и, кроме того, во всех точках $s_j^\circ \in S^\circ$, а значит, и в их малых окрестностях U_j°, $1 \leqslant j \leqslant m$, выполняется строгое неравенство

$$r^\star(s) = r(b_0^\star, db^\star, s) > I(s), \qquad s \in U = U_1^\circ \cup \dots \cup U_m^\circ.$$

Так как $r^\circ(s) = r(b_0^\circ, db^\circ, s) \geqslant I(s)$ при всех $s \geqslant 0$ и $r^\circ(s) - I(s) > \mathrm{const} > 0$ вне U, то при достаточно малом $\delta > 0$ для пары

$$(b_{0,\delta}, db_\delta) = (1-\delta)(b_0^\circ, db^\circ) + \delta(b_0^\star, db^\star)$$

получаем: $r(b_{0,\delta}, db_\delta, s) - I(s) = (1-\delta)[r^\circ(s) - I(s)] + \delta[r^\star(s) - I(s)] > 0$ при всех $s \geqslant 0$, т.е. $(b_{0,\delta}, db_\delta) \in \mathscr{B}$. Вместе с тем $H(b_{0,\delta}, db_\delta)$ *строго меньше* чем $H(b_0^\circ, db^\circ) = \min_{\mathscr{B}} H(b_0, db)$. Полученное противоречие доказывает лемму 5.

Следствие. *Пусть $\mathscr{B}^\circ$ – подмножество $\widehat{\mathscr{B}}$, на котором $r(b_0, db, s_j^\circ) = I(s_j^\circ)$ при $s_j^\circ \in S^\circ$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда $H(b_0^\circ, db^\circ) = \min H(b_0, db)$ по всем $(b_0, db) \in \mathscr{B}^\circ$.*

3.4. Теперь займемся геометрией (в соответствии с конструкцией, описанной в конце п. 1.2).

Введем в $\mathbb{R}^{m+1}$ координаты $v_0, v_1, \dots, v_m$, причем ось v_0 направим “вверх”.

Отнесем к множеству V точки $\{v_0, v_1, \dots, v_m\} \in \mathbb{R}^{m+1}$ с координатами

$$v_0 = H(b_0, db), \qquad v_j = r(b_0, db, s_j^\circ), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{3.7}$$

где (b_0, db) – всевозможные пары из $\mathscr{P}$ (см. (3.4)). Так как $\mathscr{P}$ вместе с каждой парой (b_0, db) содержит все пары $(\lambda b_0, \lambda db)$, $\lambda > 0$, то V – *выпуклый конус с вершиной O в начале координат.* В частности, он содержит луч OH, где $H = \{v_0^\circ, v_1^\circ, \dots, v_m^\circ\}$ – точка с координатами

$$v_0^\circ = H(b_0^\circ, db^\circ), \qquad v_j^\circ = r(b_0^\circ, db^\circ, s_j^\circ) = I(s_j^\circ), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{3.8}$$

Тем самым любая гиперплоскость, опорная к V в точке H, содержит луч OH и, значит, проходит через начало координат.

Через точку H проведем прямую L, параллельную оси v_0, т.е. зададим L уравнениями

$$v_j = v_j^\circ = I(s_j^\circ), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

По следствию из леммы 5 точка H является *самой нижней точкой множества V на L.* А сама лемма 5 означает (ввиду (3.5)), что H – *самая нижняя точка множества V во всем телесном угле*

$$v_j \geqslant v_j^\circ = I(s_j^\circ), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{3.9}$$

Иными словами, выпуклый конус $U = \{v_0 < v_0^\circ,\ v_j \geqslant v_j^\circ,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$ с вершиной H не пересекается с V.

Лемма 6. *Через точку H проходит опорная к V и трансверсальная к L гиперплоскость Π°, которая задается уравнением*

$$v_0 = \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ v_j \tag{3.10}$$

с неотрицательными коэффициентами a_j°, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Доказательство. За Π° можно принять любую гиперплоскость $\Pi \supset OH$, опорную к V и не пересекающуюся с U (а значит, трансверсальную к L и такую, что в (3.10) все $a_j \geqslant 0$). Чтобы "увидеть", что такая гиперплоскость существует, полезно рассмотреть еще один выпуклый конус W с вершиной O, состоящий из всех лучей OQ, $Q \in U$. Тогда Π° – общая опорная к V и W гиперплоскость, разделяющая их.

Под опорной гиперплоскостью Π° нет точек из V. Ввиду (3.7) и (3.10) это означает, что для любой пары (b_0, db) из $\mathscr{P}$

$$H(b_0, db) \geqslant \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ r(b_0, db, s_j^\circ),$$

а с учетом (1.6) последнее неравенство можно переписать в виде

$$b_0 + \int_0^1 M(t)\, db(t) \geqslant \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ \left(b_0 + \int_0^1 \frac{db(t)}{s_j^\circ + t} \right)$$

или

$$b_0 \left(1 - \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ \right) + \int_0^1 \left(M(t) - \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^\circ}{s_j^\circ + t} \right) db(t) \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Лемма 7. *Выполняются два неравенства*:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^\circ \leqslant 1, \qquad \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^\circ}{s_j^\circ + t} \leqslant M(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.12}$$

Доказательство. Множество $\mathscr{P}$ (см. (3.4)) включает в себя как пары, содержащие $db \equiv 0$, так и пары, в которых $b_0 = 0$, а $db(t)$ сосредоточена в сколь угодно малой окрестности произвольно заданной точки $t_0 \in [0,1]$. Поэтому: a) в (3.11) оба слагаемых неотрицательны; b) выполняются неравенства (3.12).

Лемма 8. *В уравнении* (3.10) *сумма всех коэффициентов a_j° равна* 1:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^\circ = 1. \tag{3.13}$$

Доказательство. Подставляя в (3.10) координаты (3.8) точки H°, получаем:

$$H(b_0^\circ, db^\circ) = \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ\, r(b_0^\circ, db^\circ, s_j^\circ) = \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ I(s_j^\circ). \tag{3.14}$$

Действуя так же, как при выводе (3.11), из (3.14) получаем

$$b_0^\circ\biggl(1 - \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ\biggr) + \int_0^1 \biggl(M(t) - \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^\circ}{s_j^\circ + t}\biggr) db^\circ(t) = 0. \tag{3.15}$$

Вследствие (3.12) оба слагаемых в (3.15) неотрицательны, поэтому каждое из них равно нулю, а так как (по лемме 2) $b_0^\circ > 0$, то выполняется равенство (3.13).

Замечание. Обращение в нуль второго слагаемого в (3.15) означает, что мера $db^\circ(t)$ сосредоточена в особых точках меры

$$da^\circ = da^\circ(s) = \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ \delta(s - s_j^\circ)\, ds; \tag{3.16}$$

сама мера da° сосредоточена (см. конец п. 3.2) в особых точках пары (b_0°, db°).

3.5. Теперь легко завершить

Доказательство теоремы 3. Докажем, что $\max_{\mathscr{A}} h$ достигается на мере da°. По леммам 6 и 8 мера da° – неотрицательная мера Стилтьеса с интегралом равным 1; по лемме 7

$$g(da^\circ, t) = \int_0^\infty \frac{da^\circ(s)}{s+t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^\circ}{s_j^\circ + t} \leqslant M(t), \qquad t \in [0,1],$$

т.е. $da^\circ \in \mathscr{A}$. Подставляя (3.16) в формулу (2.2) для $h(da)$, получаем:

$$h(da^\circ) = \int_0^\infty I(s)\, da^\circ(s) = \sum_{j=1}^{m} a_j^\circ I(s_j^\circ). \tag{3.17}$$

Сравнивая (3.17) с (3.14), приходим (с учетом (2.3)) к (3.3). Тот же результат следует (см. замечание к лемме 8) и из критерия совпадения $h(da^\circ)$ и $H(b_0^\circ, db^\circ)$ в п. 1.3. Теорема 3 доказана.

§ 4. Теорема о строгом максимуме

4.1. Произвольно фиксируем $x \in (0,1]$ и положим $h(da) = h(da, x)$. По теоремам 3 и 4 (см. §3 и п. 1.3) $\sup_{\mathscr{A}} h(da)$ достигается на некоторой дискретной мере (сосредоточенной максимум в k точках при $x \geqslant X_k$ из (1.5)). Докажем, что для всех остальных мер $da \in \mathscr{A}$ выполняется строгое неравенство

$$h(da) < h^\circ = \max_{\mathscr{A}} h(da). \tag{4.1}$$

Допустим, что вопреки (4.1) $\max_{\mathscr{A}} h(da)$ достигается на двух различных мерах $da_1, da_2 \in \mathscr{A}$. По теореме 4 обе они дискретны:

$$da_1 = da_1(s) = \sum_{j=1}^{P} a_{1,j}\delta(s - s_{1,j})\,ds, \qquad da_2 = da_2(s) = \sum_{j=1}^{Q} a_{2,j}\delta(s - s_{2,j})\,ds,$$

так что множество

$$\Bigl\{t \in [0,1] : \sum_{j=1}^{P} \frac{a_{1,j}}{s_{1,j}+t} = \sum_{j=1}^{Q} \frac{a_{2,j}}{s_{2,j}+t}\Bigr\}, \tag{4.2}$$

где $g(da_1, t) = g(da_2, t)$, содержит лишь конечное число точек.

Воспользуемся следующей очевидной леммой *о выпуклости*:

Лемма 9. *Пусть меры da_1 и da_2 принадлежат $\mathscr{A}$, и пусть $h(da_1) = h(da_2) = h^\circ$, тогда при любых $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, мера $da = \alpha\, da_1 + \beta\, da_2$ тоже принадлежит $\mathscr{A}$ и $h(da) = h^\circ$.*

Для двух различных пар (α_i, β_i), $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $\alpha_i + \beta_i = 1$, $i = 1, 2$, положим $da_i^\circ = \alpha_i\, da_1 + \beta_i\, da_2$. Каждая из двух функций

$$g_i^\circ(t) = g(da_i^\circ, t) = \alpha_i \sum_{j=1}^{P} \frac{a_{1,j}}{s_{1,j}+t} + \beta_i \sum_{j=1}^{Q} \frac{a_{2,j}}{s_{2,j}+t}, \qquad i = 1, 2,$$

совпадает с мажорантой $M(t)$ в тех и только тех точках t, в которых

$$g(da_1, t) = g(da_2, t) = M(t),$$

т.е. на подмножестве множества (4.2).

Все точки этого подмножества, т.е. все особые точки меры da_i°, $i = 1, 2$, обозначим через $t_1^\circ, \dots, t_p^\circ$. Тем самым при $i = 1, 2$

$$g_i^\circ(t_k^\circ) = g(da_i^\circ, t_k^\circ) = M(t_k^\circ),\ 1 \leqslant k \leqslant p, \quad g_i^\circ(t) < M(t),\ t \in [0,1],\ t \neq t_1^\circ, \dots, t_p^\circ.$$

В частности,

$$g_1^\circ(t_k^\circ) = g_2^\circ(t_k^\circ), \qquad 1 \leqslant k \leqslant p. \tag{4.3}$$

По принципу двойственности и по критерию из п. 1.3 (см. также п. 2.1) $h^\circ = H^\circ = H(b_0^\circ, db^\circ)$ для некоторой пары (b_0°, db°) из $\mathscr{B}$, причем мера db° сосредоточена в точках $t_1^\circ, \dots, t_p^\circ$:

$$db^\circ(t) = \sum_{k=1}^{p} b_k^\circ\, \delta(t - t_k^\circ)\,dt, \qquad b_k^\circ \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant p, \tag{4.4}$$

а меры da_i° – в особых точках $s_1^\circ, \dots, s_n^\circ$ пары (b_0°, db°):

$$da_i^\circ(s) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^\circ \delta(s - s_j^\circ)\,ds, \qquad a_{i,j}^\circ \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

так что

$$g_1^\circ(t) - g_2^\circ(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{1,j}^\circ - a_{2,j}^\circ}{s_j^\circ + t}, \qquad t \in [0, \infty). \tag{4.5}$$

С учетом (4.3) разность (4.5) имеет не менее p корней. Чтобы привести к противоречию последнее утверждение и тем самым доказать (4.1), остается проверить следующие леммы.

Лемма 10. *Разность* (4.5) *имеет не более* $n-2$ *корней, так что* $p \leqslant n-2$.

Лемма 11. *Выполняется неравенство* $p \geqslant n-1$.

4.2. Докажем леммы 10 и 11.

Доказательство леммы 10. Функции $f_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, равные $1/(s_j^\circ + t)$ при $t \in [0,\infty)$ и 1 при $t=\infty$, образуют чебышёвскую систему на $[0,\infty]$. Поэтому функция $F(t) = \sum_{j=1}^n (a_{1,j}^\circ - a_{2,j}^\circ) f_j(t)$ либо тождественно равна нулю (что невозможно, если $da_1^\circ \neq da_2^\circ$), либо имеет не более $n-1$ корней на $[0,\infty]$. А так как $\sum_{j=1}^n a_{i,j}^\circ = 1$, $i=1,2$, то $F(\infty) = \sum_{j=1}^n (a_{1,j}^\circ - a_{2,j}^\circ) f_j(\infty) = 0$ и, значит, у разности (4.5) не более $n-2$ корней на $[0,\infty)$.

Доказательство леммы 11. Среди коэффициентов b_k° в (4.4), возможно, есть нули, пусть для определенности $b_1^\circ, \dots, b_q^\circ > 0$, $b_{q+1}^\circ = \dots = b_p^\circ = 0$ при некотором $q \leqslant p$, так что

$$db^\circ(t) = \sum_{k=1}^q b_k^\circ \, \delta(t - t_k^\circ)\, dt$$

и, следовательно,

$$r(s) = r(b_0^\circ, db^\circ, s) = b_0^\circ + \sum_{k=1}^q \frac{b_k^\circ}{s + t_k^\circ}\,. \tag{4.6}$$

Напомним (см. определение $I(s)$ в (1.2)), что

$$I(s) = I(s,x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{d\sqrt{t}}{s+t} = \int_x^\infty \frac{d\theta(t)}{s+t}\,.$$

Из приводимого доказательства следует, что искомое неравенство труднее всего получить, если t_k° в (4.6), $1 \leqslant k \leqslant q$, и x удовлетворяют условию

$$x < t_q^\circ < \dots < t_1^\circ. \tag{4.7}$$

Пусть (4.7) выполняется. Положим $I(s) = I_0(s) + I_1(s) + \dots + I_q(s)$, где

$$I_q(s) = \int_x^{t_q^\circ} \frac{d\theta(t)}{s+t}\,, \quad \dots, \quad I_1(s) = \int_{t_2^\circ}^{t_1^\circ} \frac{d\theta(t)}{s+t}\,, \quad I_0(s) = \int_{t_1^\circ}^\infty \frac{d\theta(t)}{s+t}\,.$$

Тогда с учетом (4.6)

$$r(s) - I(s) = b_0^\circ - I_0(s) + \frac{b_1^\circ}{s+t_1^\circ} - I_1(s) + \dots + \frac{b_q^\circ}{s+t_q^\circ} - I_q(s). \tag{4.8}$$

По теореме Гантмахера–Крейна сумма K кратностей корней $r(s) - I(s)$ не больше числа Π перемен знака в разложении (4.8): $K \leqslant \Pi$. Так как в (4.8) всего $2q+2$ слагаемых, то $\Pi \leqslant 2q+1$ ($\Pi = 2q+1$ при условии (4.7)). Так как особые точки $s_1^\circ > \dots > s_{n-1}^\circ > 0$ пары (b_0°, db°) являются кратными корнями $r(s) - I(s)$ (поскольку $r \geqslant I$) и, кроме того, $r(s_n^\circ) = I(s_n^\circ)$, то $2n-1 \leqslant K$. Значит, $2n-1 \leqslant K \leqslant \Pi \leqslant 2q+1$ и, следовательно, $n-1 \leqslant q \leqslant p$.

Лемма 11 – а вместе с ней и теорема 5 о строгом максимуме – доказаны.

§ 5. Обобщения

Теоремы, доказанные в §§ 1–4 для меры $d\theta(t) = \dfrac{2}{\pi}\, d\sqrt{t}$, допускают обобщение: после модификации определения (1.5) их можно распространить на довольно широкий класс $\mathbb{S}$ неотрицательных мер Стилтьеса $d\theta(t)$, $t \geqslant 0$.

Опишем меры $d\theta(t) \in \mathbb{S}$, а затем обобщим (1.5) и теоремы из §§ 1–4 (опуская некоторые детали, которые нетрудно восстановить, опираясь на §§ 1–4).

5.1. В пояснении 1 к § 2 был сделан переход от $d\theta(t)$ к $d\rho(t) = \dfrac{d\theta(t)}{t}$, $t \geqslant x > 0$, а затем к пропорциональной $d\rho(t)$ мере $d\mu(t)$ с интегралом равным 1.

Сделаем теперь "обратный переход". Пусть $\rho(t)$ – неубывающая функция на полуоси $t > 0$, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$ (так что интеграл $d\rho(t)$ от x до бесконечности равен $-\rho(x)$ при любом $x > 0$), и пусть интеграл $t d\rho(t)$ от 1 до бесконечности *расходится*:

$$\int_x^\infty d\rho(t) = -\rho(x), \qquad \int_1^\infty t\, d\rho(t) = \infty. \tag{5.1}$$

Если $\rho(t)$ удовлетворяет этим условиям, отнесем $d\theta(t) = t\, d\rho(t)$ к классу $\mathbb{S}$. Всюду далее предполагается, что мера $d\theta(t) = t\, d\rho(t) \in \mathbb{S}$.

Так как $\rho(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и не убывает, то вследствие (5.1) $\rho(t) < 0$ при $t > 0$. Значит, $\rho(t)$ *не является ступенчатой функцией с конечным числом ступенек* и меры $d\rho(t)$ и $d\theta(t) = t\, d\rho(t)$ обладают следующими свойствами:

(1) они не сосредоточены в конечном числе точек;
(2) $\rho(t) \neq \mathrm{const}$ при $t \in (1, \infty)$.

Замечание 1. Разумеется, условие $d\theta(t) = t\, d\rho(t) \in \mathbb{S}$ накладывает и другие ограничения на меры $d\theta(t)$, например, "отсекает" быстро растущие $\theta(t)$; свойства (1), (2) выделены особо, чтобы было удобно ссылаться на них.

Положим

$$I(s,x) = \int_x^\infty \frac{d\theta(t)}{s+t} = \int_x^\infty \frac{t\, d\rho(t)}{s+t}, \quad s \geqslant 0,\ x \in [0,1],\ s^2 + x^2 \neq 0. \tag{5.2}$$

Для меры $d\theta(t) = t\, d\rho(t)$ проведем то же построение, что для меры $\dfrac{2}{\pi}\, d\sqrt{t}$ в пояснении 1 к § 2. Ввиду свойства (1) верна

Лемма 12. *Для любого $x \in (0,1]$, для функций $\mu(t)$ и $J(s)$,*

$$\mu(t) = \mu(t,x) = 1 - \frac{\rho(t)}{\rho(x)}\,,\ t \geqslant x,\ \ J(s) = J(s,x) = -\frac{I(s,x)}{\rho(x)} = \int_x^\infty \frac{t\, d\mu(t)}{s+t},\ s \geqslant 0,$$

для любого конечного набора точек $\mathscr{S} = \{s_1, \dots, s_k\}$, $s_1 > \dots > s_k > 0$, и для дуги $\mathscr{D}$ в $\mathbb{R}^{2k+1}$, которую задает вектор-функция

$$\xi(t) = \left\{\xi_0 = 1,\ \frac{t}{s_1+t}\,,\ \frac{-t}{(s_1+t)^2}\,, \dots,\ \frac{t}{s_k+t}\,,\ \frac{-t}{(s_k+t)^2}\right\}, \qquad t \geqslant x > 0,$$

можно (и притом единственным способом) указать $t_1 > \dots > t_k > x > 0$ *и поместить в точку* $\xi(\infty)$ *и в точки* $\xi(t_i)$ *дуги* $\mathscr{D}$ *такие положительные массы* m_∞ *и* m_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $m_\infty + m_1 + \dots + m_k = 1$, *что центр этой системы масс совпадет с точкой*

$$C = \bigl\{J(0),\, J(s_1),\, J'(s_1),\, \dots,\, J(s_k),\, J'(s_k)\bigr\} = \int_x^\infty \xi(t)\, d\mu(t).$$

Замечание 2. В доказательстве леммы 12 свойство (1) гарантирует несовпадение функций $I(s) = I(s,x)$ из (5.2) с функциями

$$p(\mathscr{S}, s) = p_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{s + t_i}\,, \qquad p_0 = -m_\infty \rho(x), \quad p_i = -m_i t_i \rho(x), \ \ 1 \leqslant i \leqslant k, \quad (5.3)$$

и тем самым позволяет применить теорему Гантмахера–Крейна при оценке числа корней разности $p(\mathscr{S}, s) - I(s)$.

Для функции (5.3) из леммы 12 следуют равенства, аналогичные (2.7):

$$p(\mathscr{S}, 0) = I(0), \qquad p(\mathscr{S}, s_j) = I(s_j), \quad p'(\mathscr{S}, s_j) = I'(s_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

5.2. Определим множество $\mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ так же, как в п. 1.2, только вместо (1.2) используем (5.2). Для набора $\mathscr{S}$ повторим рассуждения из пояснения 5 к § 2.

Возьмем малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим последовательность наборов

$$\mathscr{S}_n = \{s_{n,1}, \dots, s_{n,k}\}\,, \qquad s_{n,1} > \dots > s_{n,k} > 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

обладающую тремя свойствами: 1) $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}$; 2) $s_{N,1} < \varepsilon$; 3) точки наборов $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{S}_{n+1}$ $(1 \leqslant n < N)$ чередуются: $s_{n,1} > s_{n+1,1} > \dots > s_{n,k} > s_{n+1,k} > 0$. Тогда полюсы аппроксимаций $p(\mathscr{S}_n, s)$ и $p(\mathscr{S}_{n+1}, s)$ вида (5.3) тоже чередуются:

$$t_{n,1} > t_{n+1,1} > \dots > t_{n,k} > t_{n+1,k} > x > 0.$$

При $\varepsilon \to 0$ отсюда следует

Лемма 13. *При любом* $x \in (0,1]$ *существует и единственна пара*

$$(b_{k0}, db_k) \in \mathscr{B}(x), \qquad db_k = \sum_{i=1}^{k} b_{ki} \delta(t - t_{ki}) dt, \quad t_{k1} > \dots > t_{kk} \geqslant x > 0, \quad (5.4)$$

для которой при $s = 0$ *функция*

$$r_k(s) = r(b_{k0}, db_k, s) = b_{k0} + \sum_{i=1}^{k} \frac{b_{ki}}{s + t_{ki}}$$

совпадает с $I(s) = I(s,x)$ *вместе с* $2k$ *производными*:

$$r_k^{(j)}(0) = I^{(j)}(0), \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2k. \quad (5.5)$$

Числа $t_1 = t_1(x, \mathscr{S})$ *в* (5.3) *и* $t_{k1} = t_{k1}(x)$ *в* (5.4) *связаны неравенством*

$$t_1(x, \mathscr{S}) > t_{k1}(x). \quad (5.6)$$

С помощью теоремы Гантмахера–Крейна нетрудно доказать, что при любом фиксированном k функция $t_{k1}(x)$ *является неубывающей функцией* x (ср. с [4; § 12, комментарий 44]), а при каждом фиксированном $x \in (0,1]$ и любом k выполняется неравенство

$$t_{k+1,1}(x) > t_{k1}(x). \tag{5.7}$$

Лемма 14. *Для любого* $x \in (0,1]$ *найдется такое* k, *что* $t_{k1}(x) > 1$.

Доказательство. Допустим, что для некоторого $x \in (0,1]$ при любом k

$$t_{k1}(x) \leqslant 1. \tag{5.8}$$

Свяжем с каждой парой (5.4) неубывающую ступенчатую функцию

$$B_k(t) = B_k(t,x), \quad t \in [x,\infty], \qquad B_k(x) = 0,$$

со скачком $B_{k0} = b_{k0}(x)$ в точке $t = \infty$ и со скачками $B_{ki} = b_{ki}(x)/t_{ki}(x)$ в точках $t_{ki} = t_{ki}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $t_{k1} > \dots > t_{kk} \geqslant x$. Ввиду (5.5)

$$\frac{(-1)^j}{j!}\, r_k^{(j)}(0) = \int_x^\infty \frac{dB_k(t)}{t^j} = \frac{(-1)^j}{j!}\, I^{(j)}(0) = \int_x^\infty \frac{d\rho(t)}{t^j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2k. \tag{5.9}$$

Ввиду (5.8) и (5.9) функции $B_k(t)$ *равномерно ограничены*: так как

$$r_k(0) = \sum_{i=0}^{k} B_{ki} = I(0) = -\rho(x),$$

то $B_k(t) \leqslant -\rho(x)$ при любом k. Значит, по второй теореме Хелли из последовательности $B_k(t)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке $t \in [x,\infty]$ к некоторой неубывающей функции $B(t)$, причем вследствие (5.8) $B(t) = \mathrm{const}$ при $t \in (1,\infty)$.

По первой теореме Хелли с учетом (5.9)

$$\int_x^\infty \frac{dB(t)}{t^j} = \int_x^\infty \frac{d\rho(t)}{t^j}, \qquad j = 0,1,2,3,\dots . \tag{5.10}$$

Так как система функций t^{-j}, $j \geqslant 0$, *полна на* $[x,\infty]$, то из (5.10) следует, что $dB(t)$ и $d\rho(t)$ совпадают. Однако это противоречит свойству (2): $B(t) = \mathrm{const}$, а $\rho(t) \neq \mathrm{const}$ при $t \in (1,\infty)$. Полученное противоречие доказывает лемму 14.

5.3. Теперь для любой меры $d\theta(t) \in \mathbb{S}$ можно дать

Определение универсальной последовательности X_k. Положим

$$X_k = \inf\{x \in (0,1] : t_{k1}(x) \geqslant 1\}, \qquad k = 1,2,3,\dots . \tag{5.11}$$

Из (5.7) нетрудно вывести, что последовательность X_k – *невозрастающая*, а из леммы 14 следует, что $X_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Повторяя рассуждения из п. 2.2 и из пояснения 2 к § 2 и опираясь на неравенство (5.6) и определение (5.11), получаем

Основное утверждение об особых точках. *Для X_k из (5.11) при*

$$x > X_k \tag{5.12}$$

любая пара $(b_0, db) \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ имеет максимум k особых точек.

Если функция $\rho(t)$ *непрерывна справа*, можно заменить inf в (5.11) на min и знак $>$ в (5.12) на $\geqslant$; если функция $\rho(t)$ *непрерывна*, то X_k *убывают*, пока $X_k > 0$ (может случиться, что, начиная с некоторого k, все $X_k = 0$; так будет, например, если $\rho(t) = \mathrm{const}$ вблизи нуля).

5.4. Теперь перейдем к обобщению принципа двойственности. В общем случае все построения – те же, что в § 3, нужно лишь внести небольшие изменения в доказательства лемм 2 и 3.

Докажем соотношение, которое используется при проверке леммы 2:

$$s\, I(s,1) \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{5.13}$$

Пусть $c > 0$ – любое число и $C > c$. Ввиду (5.1) найдется столь большое X, что $\displaystyle\int_1^X t\,d\rho(t) > C$. Отсюда

$$I(s,1) = \int_1^\infty \frac{t\,d\rho(t)}{s+t} > \int_1^X \frac{t\,d\rho(t)}{s+t} > \frac{1}{s+X}\int_1^X t\,d\rho(t) > \frac{C}{s+X}\,.$$

Поэтому (так как $C > c$) найдется такое S, что $I(s,1) > c/s$ при всех $s > S$.

Лемма 2 сразу следует из (5.13), так как $I(s,x) \geqslant I(s,1)$ при всех $x \in [0,1]$.

В доказательстве леммы 3 по-новому обосновывается неравенство $H^\circ < \infty$: ввиду (5.1) и (5.2) $I(0,x) = -\rho(x) < \infty$ при любом $x \in (0,1]$; поэтому для пары $b_0 = -\rho(x)$, $db = 0$ значение $H(b_0, db)$ конечно.

Все остальные построения из § 3 (и из § 4) проходят без изменений.

Таким образом, основное утверждение об особых точках, принцип двойственности и теорема о строгом максимуме верны для любой меры $d\theta(t) \in \mathbb{S}$.

В качестве следствия отсюда получаем, что и остальные теоремы из § § 1–4 переносятся на меры $d\theta(t) \in \mathbb{S}$, только под X_k нужно понимать *не убывающую последовательность* (1.5), а *невозрастающую последовательность* (5.11), и в теореме 2 в общем случае в (1.4) отрезок $[X_k, 1]$ нужно заменить полуинтервалом $(X_k, 1]$.

Список литературы

1. *Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А.* Новое доказательство теорем об универсальной последовательности и экстремальных свойствах дискретных мер // УМН. 1997. Т. 52. №6. С. 153–154.
2. *Гервер М. Л.* Новое в классической задаче обращения годографа // Препринт. МИТП РАН, 1997; // Вопросы геодинамики и сейсмологии. Вычислительная сейсмология. Вып. 30. М: Наука, 1998 (в печати).
3. *Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А.* Об экстремальных свойствах волноводов с конечным числом слоев в задаче обращения годографа // Докл. АН. 1997. Т. 356. №1. С. 25–28.
4. *Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А.* Универсальная последовательность в классической задаче обращения годографа // Матем. сб. 1997. Т. 188. №4. С. 3–56.
5. *Кронрод А. С.* Узлы и веса квадратурных формул. М.: Наука, 1964.
6. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
7. *Карлин С., Стадден В.* Чебышёвские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
8. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. *Гервер М. Л., Кудрявцева Е. А.* Теорема об отношениях предшествования, генерируемых вполне положительными ядрами // Матем. сб. 1995. Т. 186. №9. С. 19–44.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: m.l@gerver.mccme.ru ekudr@nw.math.msu.su

Поступила в редакцию
16.09.1997