

УДК 515.162.6+515.164.63+515.148+515.164.174

Е. А. Кудрявцева

Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты

Доказывается критерий, описывающий все функции с конечным числом критических точек на двумерных поверхностях, являющиеся функциями высоты при погружениях поверхности в евклидово трехмерное пространство. Доказывается, что любая гладкая деформация функции Морса на поверхности реализуется как деформация функций высоты при подходящей деформации погружений поверхности в \mathbb{R}^3 . Получается новое простое доказательство известного утверждения о линейной связности пространства всех гладких погружений двумерной сферы в \mathbb{R}^3 . По-новому описывается “выворачивание наизнанку” двумерной сферы в \mathbb{R}^3 . Доказываются обобщения теоремы С. В. Матвеева о связности пространства функций Морса с фиксированным числом минимумов и максимумов на замкнутой поверхности.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

В статье доказывается критерий, дающий ответ на следующий естественный вопрос: какие гладкие функции на двумерных поверхностях M , имеющие конечное число критических точек, можно (или нельзя) реализовать в виде функций высоты при погружении поверхности в евклидово трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . Вместо функций высоты можно эквивалентным образом рассматривать функции расстояния $\rho_{x_0}(x)$, задающие расстояние от какой-то фиксированной (достаточно далекой от M) точки x_0 в \mathbb{R}^3 до переменной точки x на погруженном (вложенном) подмногообразии M в \mathbb{R}^3 . Изучение функций высоты на погруженных подмногообразиях полезно для описания фокальных точек этих подмногообразий [1].

Кроме того, задача изучения функций высоты на двумерных поверхностях представляет определенный интерес в связи с теорией интегрируемых гамильтоновых систем и теорией классификации особенностей лиувиллевых слоений (см. работы [2]–[5]). Полученная в этих работах лиувиллева и траекторная классификация интегрируемых систем с двумя степенями свободы дана в терминах так называемых атомов и молекул. Напомним, что атомы – это двумерные поверхности $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ с краем, являющиеся прообразом окрестности критического значения c функции Морса f на двумерной поверхности M . При этом на критическом уровне может находиться несколько критических точек. Отметим (см. [6], [7]), что классификация особенностей многомерных лиувиллевых слоений также дается в терминах двумерных атомов. Кроме того, изучение свойств бифуркаций функции Морса в окрестности ее критического уровня, на котором лежит, вообще говоря, много критических точек, представляет и самостоятельный интерес.

Нетрудно показать, что каждый отдельно взятый атом, т.е. окрестность $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ критического уровня c функции Морса f , всегда можно так погрузить в \mathbb{R}^3 , что функция f на нем превратится в функцию высоты. Это утверждение остается справедливым не только для функций Морса, но и для гладкой функции, имеющей лишь конечное число критических точек. Так что локально, т.е. в окрестности каждого отдельного критического уровня функции f , никаких препятствий для решения высотной задачи нет. Препятствия появляются только тогда, когда требуется решить задачу в целом, т.е. представить заданную функцию f как функцию высоты сразу на всей двумерной замкнутой поверхности M_g рода g .

Перейдем теперь к подробному изложению.

Напомним, что гладкая функция f на гладком многообразии M^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция f на M^n называется *функцией высоты* при погружении (вложении) в евклидово пространство, если ее можно представить в виде $f(x) = x_N(x)$, где x_N – декартова координата точки x из M^n при некотором погружении (вложении) многообразия M^n в \mathbb{R}^N .

Функции высоты образуют естественный подкласс в классе всех гладких функций.

Основное внимание мы уделяем реализации гладких функций на двумерных поверхностях M , имеющих лишь конечное число критических точек, в виде функций высоты (или функций расстояния $\rho_{x_0}(x)$) при подходящем погружении поверхности M в \mathbb{R}^3 . При этом выясняется, что при реализации функции в виде функции высоты предположение о невырожденности ее изолированных критических точек отнюдь не является обязательным.

Основным техническим приемом, используемым при доказательстве результатов настоящей работы, является известная теория препятствий.

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10 и как следствие предложение 3.

ТЕОРЕМА 1. а1) *При погружении в \mathbb{R}^3 замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g рода $g \geq 2$, т.е. не гомеоморфной сфере или тору, функция высоты всегда имеет по крайней мере четыре критические точки.*

а2) *Для любого $g \geq 2$ на ориентируемых замкнутых поверхностях M_g рода g всегда существуют гладкие функции с конечным числом критических точек, не реализующиеся как функции высоты ни при каком погружении M_g в \mathbb{R}^3 .*

б1) *Напротив, любую гладкую функцию на сфере S^2 или на торе T^2 , имеющую конечное число критических точек (не обязательно функцию Морса), можно реализовать как функцию высоты (или как функцию расстояния до фиксированной точки в \mathbb{R}^3) при некотором погружении этих поверхностей в \mathbb{R}^3 .*

б2) *Любую функцию Морса на любой замкнутой двумерной поверхности M (ориентируемой или неориентируемой) всегда можно реализовать как функцию высоты при подходящем погружении M в \mathbb{R}^3 . При этом для функции Морса с N критическими точками на ориентируемой поверхности M_g*

имеется ровно $C_N^{N/2}$ различных, т.е. нормально не эквивалентных, погружений M_g . (Определение нормальной эквивалентности см. ниже).

в) Любую гладкую функцию на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ , имеющую лишь конечное число критических точек (не обязательно невырожденных), можно реализовать как функцию высоты (или как функцию расстояния до некоторой фиксированной точки в \mathbb{R}^3) при некотором погружении поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 . При этом для функции Морса с N критическими точками имеется ровно 2^N нормально не эквивалентных погружений M_μ .

г) Каждый отдельно взятый атом $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ (т.е. окрестность в M критического уровня функции f , имеющей лишь конечное число критических точек), ориентируемый или неориентируемый, всегда можно так погрузить в \mathbb{R}^3 , что функция f на нем превратится в функцию высоты.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Очевидно, что сферу S^2 можно так вложить в \mathbb{R}^3 , что на ней появится функция высоты с ровно двумя невырожденными критическими точками (минимумом и максимумом). Для тора T^2 имеется очевидное вложение с функцией высоты, обладающей ровно четырьмя невырожденными критическими точками.

2) Хорошо известна теорема Рибо, согласно которой многообразию M^n , на котором существует гладкая функция с ровно двумя критическими точками (невырожденными или вырожденными – все равно), обязательно гомеоморфно стандартной сфере S^n (см., например, [1], [8], [9]).

3) Все теоремы настоящей работы остаются справедливыми, если вместо функций высоты на компактном подмногообразии M^n в \mathbb{R}^N рассмотреть функции, определяемые как расстояние $\rho_{x_0}(x)$ от переменной точки x до какой-то фиксированной точки x_0 в \mathbb{R}^N . В самом деле, если точка x_0 расположена в \mathbb{R}^N достаточно далеко от погруженного подмногообразия M^n , то функция расстояния $\rho_{x_0}(x)$ очень похожа на функцию высоты, определяемую прямой, проходящей через точку x_0 в направлении далеко расположенного многообразия M^n .

4) Из нашего критерия (теорема 2) следует, что для функции Морса f с N критическими точками на замкнутой поверхности M существует ровно $C_N^{N/2}$ (в ориентируемом случае) или 2^N (в неориентируемом случае) различных, т.е. нормально не эквивалентных погружений, реализующих данную функцию Морса f как функцию высоты. При этом мы считаем, что два погружения с одинаковой функцией высоты *нормально эквивалентны*, если в каждой критической точке функции высоты направления нормалей для этих погруженных поверхностей совпадают. Число нормально не эквивалентных погружений с данной функцией высоты f , очевидно, не превосходит 2^N . Другое, равносильное определение нормальной эквивалентности см. в § 7 (определение 6). Ранее в работе [10] было показано, как реализовать произвольную функцию Морса на поверхности некоторым погружением этой поверхности в \mathbb{R}^3 с последующим проектированием ее на вертикальную ось z . Однако в [10] были обнаружены далеко не все искомые погружения. А именно, для простых функций Морса были найдены лишь те, у которых каждая связная компонента неособой линии уровня, погруженная в горизонтальную плоскость, регулярно гомотопна стандартной окружности. Из нашей же работы вытекает, что в действительности искомых погружений существенно больше, и мы даем их полное описание (см. более общие теоремы 2, 3, 6, 6').

5) В той же работе [10] было получено необходимое и достаточное условие реализации функции Морса на замкнутой поверхности в виде функции высоты при вложении поверхности в \mathbb{R}^3 . При этом критерий работы [10] разбивает исходную задачу на две: а) допускают ли окрестности критических уровней функции Морса (т.е. атомы в нашей терминологии) искомую высотную реализацию при каком-то вложении; б) можно ли граничные окружности атомов согласовать так, чтобы получилось глобальное вложение. Впрочем, ответ на первый вопрос в работе [10] не дается.

При замене вложений на погружения мы даем ответ на вопрос о высотной реализуемости функций в виде эффективного и простого критерия. В частности, наша теорема 1 является следствием более сильных теорем 2 и 3 (см. §3). Теорема 2 дает (в ориентируемом случае) критерий реализуемости гладкой функции с конечным числом критических точек в виде функции высоты при погружении. Теорема 3 утверждает, что в неориентируемом случае искомое высотное погружение всегда существует для любой функции указанного класса. То есть здесь никаких препятствий нет вообще.

После решения задачи о реализации гладких функций на поверхности в виде функций высоты естественно перейти к вопросу о том, можно ли представить гладкую деформацию функции с конечным числом критических точек на поверхности в виде соответствующей регулярной гомотопии погружения поверхности в \mathbb{R}^3 . Оказывается, в случае деформаций функции в пространстве функций Морса ответ на вопрос положителен (см. ниже).

С этой задачей естественно связан также следующий известный факт: пространство функций Морса с фиксированным числом минимумов и максимумов на замкнутой двумерной поверхности линейно связно. Нам не удалось найти доказательство этого утверждения в литературе. Поэтому мы приводим его сначала для сферы и проективной плоскости (§6, теорема 4), а затем, в §8, — для произвольных двумерных поверхностей, следуя С. В. Матвееву (теорема 8). Развивая идеи Матвеева, мы докажем и некоторые обобщения этого факта (теоремы 9, 10).

6) В работе [11] упомянуто близкое утверждение о связности пространства мероморфных функций на комплексных кривых с фиксированным числом точек ветвления и доказаны его обобщения.

В §7 мы доказываем (см. теорему 7), что любая гладкая деформация функции Морса на любой двумерной поверхности реализуется как деформация функции высоты при подходящей деформации погружения поверхности в \mathbb{R}^3 . Из результатов этого и предыдущего параграфов в качестве простого следствия легко выводится новое доказательство хорошо известного факта: пространство всех гладких погружений сферы S^2 в \mathbb{R}^3 линейно связно. В частности, получается новое и простое доказательство известного “парадокса Смейла”: двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^3 . При нашем подходе выворачивание сферы очень наглядно иллюстрируется с помощью графов Рибо.

7) Из теоремы Хирша–Смейла [12]–[14] следует, что в случае замкнутой поверхности положительного рода g пространство всех ее погружений в \mathbb{R}^3 не является связным, а состоит из 2^{2g} компонент связности в ориентируемом случае и из 2^g компонент в неориентируемом случае. В действительности по теореме Хирша–Смейла это число равно числу гомоморфизмов фундаментальной группы поверхности в фундаментальную группу классифицирующего пространства

$SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$, т.е. в группу \mathbb{Z}_2 из двух элементов. Отсюда нетрудно вывести, что пространство всех погружений поверхности, не гомеоморфной сфере, в \mathbb{R}^3 , факторизованное по группе автоморфизмов этой поверхности, состоит ровно из двух компонент связности.

Автор благодарит А. Т. Фоменко, А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, В. В. Шарко, А. А. Ошемкова, А. С. Мищенко, А. В. Чернавского, Ю. П. Соловьева, П. М. Ахметьева, А. Б. Скопенкова, С. А. Мелихова, Ф. Ю. Попеленского, W. Motta (Бразилия) за полезные обсуждения.

§ 2. Препятствия к реализации гладкой функции в виде функции высоты при вложении или погружении поверхности

Легко видеть, что на ориентируемых поверхностях существуют гладкие функции, не реализующиеся как функции высоты при погружениях поверхности в \mathbb{R}^3 . Приведем простой пример такой функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) *На любой связной замкнутой двумерной поверхности M , не гомеоморфной сфере, существует гладкая функция K_3 , имеющая ровно три критические точки: минимум, максимум и седло (вырожденное или невырожденное).*

б) *Эта функция K_3 не может быть реализована как функция высоты при вложении ориентируемой поверхности M_g в \mathbb{R}^3 . (Напомним, что в неориентируемом случае вложений M_μ в \mathbb{R}^3 нет вообще.)*

в) *На ориентируемых поверхностях M_g рода $g \geq 2$ эта функция K_3 не может быть реализована как функция высоты при погружении M_g в \mathbb{R}^3 .*

г) *Напротив, на торе T^2 и на любой замкнутой неориентируемой поверхности M_μ функция K_3 может быть реализована как функция высоты при подходящем погружении поверхности в \mathbb{R}^3 .*

Мы начнем с доказательства предложения 1, поскольку функция K_3 достаточно интересна и (как мы увидим ниже) позволяет наглядно моделировать препятствия к построению высотных вложений и погружений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Искомая функция K_3 легко строится в явном виде. Достаточно воспользоваться известной теоремой классификации двумерных поверхностей. Согласно этой теореме любая связная замкнутая двумерная поверхность M диффеоморфна сфере с g ручками M_g ($g \geq 0$) или сфере с μ пленками Мёбиуса M_μ ($\mu \geq 1$). При этом поверхность M представима в виде склейки фундаментального $2N$ -угольника

$$a_1 \dots a_N a_1^{-1} \dots a_N^{\pm 1},$$

где “ -1 ” отвечает ориентируемому случаю, а “ $+1$ ” — неориентируемому и $N = 2g$ или μ . Разделим фундаментальный многоугольник пополам, добавив ориентированное ребро a_0 , и зададим на нем функцию K_3 ее линиями уровня (рис. 1). А именно, в левой половине многоугольника функция отрицательна и имеет одну точку минимума, а в правой половине — положительна и имеет одну точку максимума. На ребрах a_0, a_1, \dots, a_N функция равна нулю. Легко видеть, что все вершины фундаментального многоугольника склеиваются в одну точку на поверхности M . Тогда

в этой точке на поверхности возникает седловая критическая точка функции K_3 . Можно считать, что это седло имеет тип $\text{Re}(z^{N+1})$. Описанное клеточное разбиение поверхности M имеет ровно одну вершину, $N + 1$ ребер a_0, a_1, \dots, a_N и две двумерные клетки. На одной из клеток функция K_3 положительна, на другой – отрицательна.

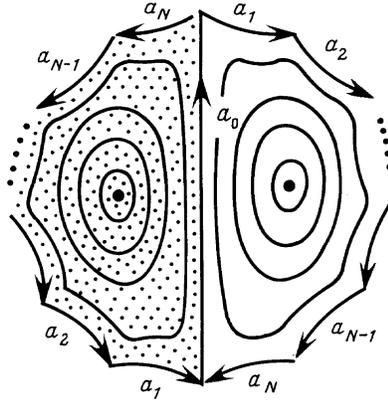


Рис. 1

б) По построению множество нулевого уровня функции K_3 – это букет $N + 1$ окружностей a_0, a_1, \dots, a_N . Допустим, что K_3 – функция высоты при каком-то вложении $i: M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда в ориентируемом случае каждая окружность букета гладко вложена в горизонтальную плоскость $\Pi(0)$, причем эти окружности пересекаются в вершине трансверсально. Следовательно, по теореме Жордана окружности пересекутся еще в нескольких точках, что невозможно при вложении i .

в) Этот пункт сразу вытекает из теоремы 1, которую мы докажем ниже. В самом деле, функция K_3 имеет ровно три критические точки, а согласно п. а) теоремы 1 функция высоты на погруженной поверхности обязательно должна иметь по крайней мере четыре критические точки.

г) Этот пункт является следствием теоремы 1 (см. ее п. в)), которая будет доказана ниже. В явном виде погружение тора в \mathbb{R}^3 представлено на рис. 8.

Предложение 1 доказано.

§ 3. Критерий реализуемости функции с конечным числом критических точек на поверхностях в виде функции высоты (доказательство теоремы 1)

Из приводимых ниже теорем 2 и 3 вытекает, что любая функция с конечным числом критических точек на сфере, торе или на произвольной замкнутой неориентируемой поверхности всегда реализуется в виде функции высоты при некотором погружении в \mathbb{R}^3 . Если же f – функция Морса на произвольной ориентируемой поверхности M_g или неориентируемой поверхности M_μ , то она всегда реализуется в виде функции высоты при подходящем погружении.

Сначала докажем пп. а) и б) теоремы 1. Они следуют из еще более сильного утверждения.

ТЕОРЕМА 2 (критерий существования высотных погружений в ориентируемом случае). а) Пусть f – гладкая функция на замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g , имеющая лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N (не обязательно функция Морса). Тогда равенство

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = 0, \quad \text{где } \varepsilon_k = \pm 1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (1)$$

является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении поверхности M_g в \mathbb{R}^3 таким, что в каждой критической точке x_k , $1 \leq k \leq N$, положительная нормаль к поверхности M_g имеет вид $\varepsilon_k e$, где e – единичный базисный вертикальный вектор евклидовой системы координат в \mathbb{R}^3 .

б) Любая функция Морса f на произвольной замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g всегда реализуется как функция высоты при подходящем погружении M_g в \mathbb{R}^3 .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Здесь через $\operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f)$ обозначен обычный индекс особой точки векторного поля $\operatorname{grad} f$, т.е. степень гауссова отображения на себя малой окружности S^1_α радиуса α с центром в критической точке. Гауссово отображение для векторного поля w в какой-то его особой точке определяется формулой $x \mapsto \alpha w(x)/|w(x)|$, где $|w|$ – норма вектора w в некоторой римановой метрике, заданной в малой окрестности критической точки (от выбора метрики степень не зависит). Точка x пробегает здесь окружность S^1_α .

2) Отметим, что в случае функции Морса f индекс $\operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f)$ для точек x_k минимума и максимума функции f равен $+1$, а для седловых точек x_k функции f всегда равен -1 . Фактически именно из этого обстоятельства и из четности эйлеровой характеристики поверхности следуют все утверждения перечисленных выше теорем, касающиеся функций Морса на ориентируемых поверхностях.

ТЕОРЕМА 3 (об отсутствии препятствий к построению высотных погружений в неориентируемом случае). Пусть f – гладкая функция на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ , имеющая лишь конечное число критических точек (не обязательно функция Морса). Тогда любое вложение в \mathbb{R}^3 достаточно малых окрестностей критических точек, реализующее функцию f как функцию высоты (такие вложения всегда существуют), можно всегда продолжить до погружения всей поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 , реализующего функцию f как функцию высоты. В частности, любая функция указанного типа на неориентируемой поверхности реализуется как функция высоты при некотором погружении.

Простая модификация доказательств теорем 2 и 3 показывает, что верно следующее их обобщение для функций высоты на поверхностях с краем, т.е. на атомах. При этом предполагается, что индекс каждой граничной окружности, погруженной в горизонтальную плоскость, фиксирован.

ТЕОРЕМА 2'. Пусть f – гладкая функция на поверхности с краем P , имеющая лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N . Пусть на каждой граничной окружности S_l , $1 \leq l \leq L$, поверхности P функция f постоянна и не имеет критических точек. Фиксируем числа $\varepsilon_k = \pm 1$, $1 \leq k \leq N$, и $\mu_l \in \mathbb{Z}$, $1 \leq l \leq L$. Тогда равенство

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = \sum^+ \mu_l - \sum^- \mu_l$$

в ориентируемом случае и

$$L \equiv \sum_{l=1}^L \mu_l \pmod{2}$$

в неориентируемом случае является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении поверхности P в \mathbb{R}^3 следующего вида:

- 1) в каждой критической точке x_k , $1 \leq k \leq N$, положительная нормаль к поверхности P имеет вид $\varepsilon_k e$, где e – единичный базисный вертикальный вектор евклидовой системы координат в \mathbb{R}^3 ;
- 2) индекс каждой граничной окружности S_l , погруженной в горизонтальную плоскость, фиксирован и равен μ_l .

Здесь суммы \sum^+ и \sum^- берутся по всем положительным и отрицательным граничным окружностям S_l поверхности P , определяемым тем, что на них функция f достигает соответственно локального максимума и локального минимума.

Определение индекса плоской кривой и доказательства теорем 2 и 3 мы дадим ниже, а сейчас из этих теорем выведем теорему 1.

а) Пусть f – гладкая функция на ориентируемой поверхности M_g , $g \geq 0$, имеющая конечное число критических точек x_1, \dots, x_N . Тогда обязательно найдутся по крайней мере две критические точки \min и \max такие, что $\operatorname{ind}_{\min}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{ind}_{\max}(\operatorname{grad} f) = 1$. Достаточно взять точку \min какого-нибудь локального минимума и точку \max какого-нибудь локального максимума функции (такие точки всегда существуют). С другой стороны, для любого гладкого векторного поля w на M_g , имеющего конечное число особых точек (нулей) x_1, \dots, x_N , имеет место равенство:

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{ind}_{x_k}(w) = \chi(M_g) = 2 - 2g.$$

Таким образом, среди чисел $\operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f)$ имеются две единицы, а сумма оставшихся чисел равна $-2g$. Допустим теперь, что у функции f на поверхности M_g , $g \geq 2$, число критических точек меньше четырех. Приведем это предположение к противоречию. Поскольку $g \geq 2$, то число критических точек не может равняться двум (тогда поверхность была бы гомеоморфна сфере, т.е. род g равнялся бы нулю). Следовательно, критических точек ровно три: \min – минимум, \max – максимум, sad – седло. Поэтому $\operatorname{ind}_{\operatorname{sad}}(\operatorname{grad} f) = -2g$. В то же время в силу критерия

реализуемости (см. теорему 2) имеем: $\varepsilon_{\min} + \varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\text{sad}} \text{ind}_{\text{sad}}(\text{grad } f) = 0$. Поэтому $\varepsilon_{\min} + \varepsilon_{\max} - 2g\varepsilon_{\text{sad}} = 0$. Так как $\varepsilon_k = \pm 1$, то отсюда получаем, что $|2g| \leq 2$, что противоречит условию $g \geq 2$. Пункт а) теоремы 1 доказан.

б1) Пусть теперь $g = 0$ (сфера) или $g = 1$ (тор). Снова возьмем какую-нибудь точку \min минимума и какую-нибудь точку \max максимума для функции f . В силу теоремы об индексе векторного поля имеем:

$$1 + 1 + \sum_{x_k \neq \min, \max} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 2 - 2g, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{x_k \neq \min, \max} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = -2g.$$

Для случая сферы имеем:

$$\sum_{x_k \neq \min, \max} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0.$$

Из теоремы 2 получаем, что мы построим искомое погружение сферы в \mathbb{R}^3 , если подберем числа $\varepsilon_i = \pm 1$, удовлетворяющие следующему равенству:

$$\varepsilon_{\min} + \varepsilon_{\max} + \sum_{x_k \neq \min, \max} \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0. \quad (2)$$

Достаточно положить $\varepsilon_{\min} = -\varepsilon_{\max} = -1$ и $\varepsilon_k = 1$ при $x_k \neq \min, \max$. Отметим, что построенное таким образом искомое погружение сферы в \mathbb{R}^3 обладает тем свойством, что в одной критической точке функции высоты (а именно, в точке \min локального минимума) положительная нормаль направлена вниз, а во всех остальных критических точках — вверх.

Осталось рассмотреть случай тора. Рассуждения аналогичны. Здесь мы имеем:

$$\sum_{x_k \neq \min, \max} \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = -2.$$

Нужно подобрать $\varepsilon_i = \pm 1$ так, чтобы удовлетворить равенству (2). Очевидно, что достаточно положить $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{\max} = 1$ и $\varepsilon_k = 1$ при $x_k \neq \min, \max$. Тогда в силу теоремы 2 существует некоторое погружение тора в \mathbb{R}^3 , реализующее данную функцию f как функцию высоты. Отметим, что это погружение обладает следующим любопытным свойством. А именно, в каждой критической точке x_k положительная нормаль к погруженному тору направлена вверх. Это погружение можно предъявить в явном виде. Оно извлекается из доказательства теоремы 2.

Докажем пп. б2) и в) теоремы 1. В ориентируемом случае это утверждение следует из равенства (1), так как сумма в левой части этого равенства содержит N слагаемых, из которых ровно $N/2$ слагаемых должны равняться -1 , а остальные слагаемые должны равняться $+1$. В неориентируемом случае утверждение очевидно вытекает из более сильной теоремы 3 (которая будет доказана ниже): согласно теореме 3 в неориентируемом случае никаких препятствий к решению высотной задачи нет, так что число нормально не эквивалентных погружений максимально и равно 2^N .

Пункт г) теоремы 1 следует из теоремы 2'.

Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

**§ 4. Критерий реализуемости функции в виде функции высоты
для погружений поверхности в ориентируемом случае
(доказательство теоремы 2)**

4.1. Необходимость. Пусть $f: M_g \rightarrow \mathbb{R}$ – функция высоты при некотором погружении замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g в \mathbb{R}^3 . Пусть x_1, \dots, x_N – критические точки функции f , а $c_1 < c_2 < \dots < c_L$ – критические значения функции f . Отметим, что $2 \leq L \leq N$. Тогда для любого некритического (регулярного) значения $a \notin \{c_1, \dots, c_N\}$ функции f регулярная кривая $\gamma_a = f^{-1}(a)$ погружена в горизонтальную плоскость $\Pi(a)$, расположенную на высоте a . Выберем естественную ориентацию кривой γ_a , т.е. такое направление обхода γ_a , при котором область $\{x \in M_g : f(x) < a\}$ меньших значений в M_g находится слева.

Определим индекс $\text{ind}_{\Pi} \gamma$ гладкой замкнутой ориентированной кривой γ в ориентированной плоскости Π как степень гауссова отображения $\gamma \rightarrow S^1$, сопоставляющего точке x из γ единичную нормаль к кривой γ в точке x . Все нормали при этом переносим параллельно самим себе в какую-то фиксированную точку. Хорошо известны следующие свойства индекса кривой.

1) *Инвариантность определения.* При диффеоморфизме плоскости Π на себя, сохраняющем ориентацию, индексы кривых γ сохраняются. При диффеоморфизме плоскости Π , меняющем ориентацию, индексы кривых заменяются на противоположные.

2) *Инвариантность при гомотопии.* Индекс кривой не меняется при гладкой гомотопии кривой в плоскости Π .

3) *Теорема Уитни* [15]. Если две кривые имеют одинаковые индексы, то существует гладкая деформация (регулярная гомотопия) одной кривой в другую.

Вычислим индексы кривых γ_a в плоскости $\Pi(a)$ при $a \notin \{c_1, \dots, c_N\}$. Будем считать при этом, что индекс пустой кривой равен нулю.

ЛЕММА 1. *Если значение a изменяется в интервале $c_k < a < c_{k+1}$ (при $1 \leq k \leq L-1$), то индекс кривой γ_a в плоскости $\Pi(a)$ не меняется. В частности, при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$*

$$\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_{k+1}-\varepsilon)} \gamma_{c_{k+1}-\varepsilon} = 0.$$

Это утверждение легко следует из свойства 2) индекса кривой.

ЛЕММА 2. *Предположим, что поверхность с краем $f^{-1}[c_k - \varepsilon^0, c_k + \varepsilon^0]$ не содержит критических точек функции f , отличных от точки x_k , для некоторого $\varepsilon^0 > 0$. Тогда для всех ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$, верно равенство:*

$$\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\varepsilon)} \gamma_{c_k-\varepsilon} = \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f), \quad (3)$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$ – знак, показывающий, вверх или вниз направлена положительная нормаль к поверхности в точке x_k . В частности, индексы линий уровня функции f вблизи точки x_k минимума или максимума f совпадают с $\varepsilon_k = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спроектируем двумерную поверхность $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ (с краем) на горизонтальную плоскость $\Pi(c_k)$ вдоль вертикальных прямых. Ясно, что при этом все кривые γ_a сместятся вниз на расстояние $a - c_k$. Окружим точку x_k малой окрестностью U (диффеоморфной диску) в поверхности M_g . В этой малой окрестности рассматриваемая нами проекция $\pi: U \rightarrow \Pi(c_k)$ является диффеоморфизмом, поскольку плоскость $\Pi(c_k)$ является касательной к поверхности M_g . Следовательно (см. свойство 1)), индекс любой замкнутой кривой γ в U равен (с точностью до знака ε_k) индексу проекции этой кривой в $\Pi(c_k)$:

$$\text{ind}_{\Pi(c_k)} \pi(\gamma) = \varepsilon_k \text{ind}_U \gamma. \tag{4}$$

В частности, индексы линий уровня вблизи точки x_k максимума или минимума функции f равны ε_k .

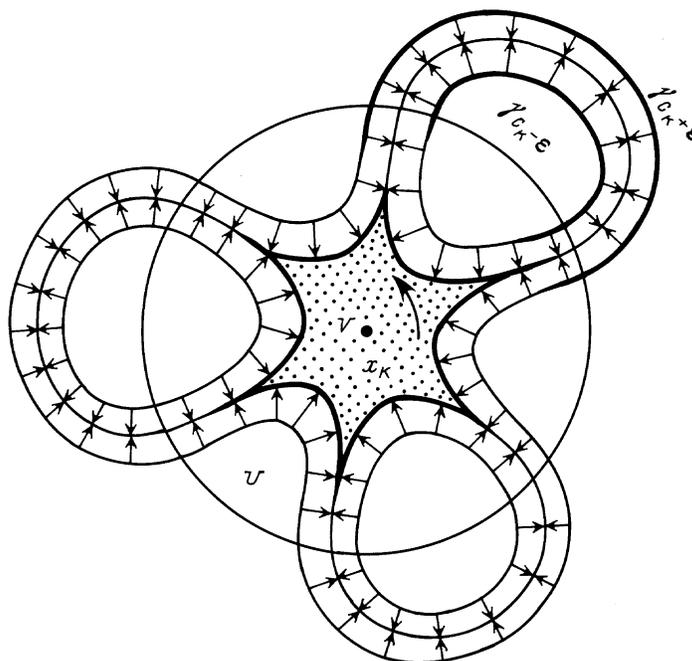


Рис. 2

Теперь мы можем подсчитать разность индексов кривых $\gamma_{c_k + \varepsilon}$ и $\gamma_{c_k - \varepsilon}$ в плоскостях $\Pi(c_k + \varepsilon)$ и $\Pi(c_k - \varepsilon)$. Прodeформируем эти кривые в поверхности M_g навстречу друг другу вдоль траекторий векторного поля $\varphi(x) \text{grad } f / |\text{grad } f|^2$, где $\varphi(x)$ — гладкая функция в атоме $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$, равная единице вне окрестности U и нулю в окрестности точки x_k , причем $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Ясно, что если ε достаточно мало, то полученные в результате деформации кривые совпадают вне окрестности U и ограничивают внутри U некоторую (звездообразную) область V , содержащую точку x_k (рис. 2). Ясно также, что проекции кривых на плоскость $\Pi(c_k)$ в процессе деформации все время оставались погруженными в $\Pi(c_k)$. Следовательно, индексы проекций кривых на $\Pi(c_k)$ не изменились. Таким образом, с учетом формулы (4) имеем:

$$\text{ind}_{\Pi(c_k + \varepsilon)} \gamma_{c_k + \varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k - \varepsilon)} \gamma_{c_k - \varepsilon} = \varepsilon_k \text{ind}_U (\partial V),$$

где поле нормалей на границе ∂V области V выбрано таким образом, чтобы при обходе границы ∂V вектор нормали изменялся непрерывно. Полученное нами равенство равносильно равенству (3), так как на кривой ∂V непрерывное поле нормалей гомотопно векторному полю $\text{grad } f$ на этой кривой (рис. 3). Кроме того, индекс поля $\text{grad } f$ на границе ∂V равен индексу $\text{ind}_{x_k}(\text{grad } f)$ в единственной особой точке $x_k \in V$ векторного поля $\text{grad } f$. Лемма 2 доказана.

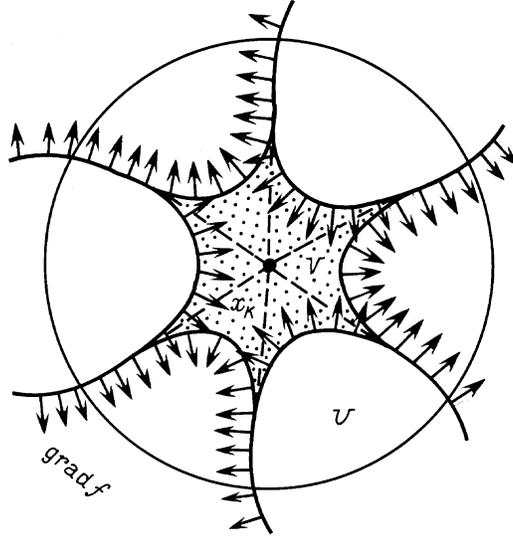


Рис. 3

Вернемся к доказательству необходимости в теореме 2. Преположим теперь, что критический уровень $f^{-1}(c_k)$ содержит несколько критических точек. Тогда аналогичное доказательство для атома $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ показывает, что

$$\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\varepsilon)} \gamma_{c_k-\varepsilon} = \sum \varepsilon_s \text{ind}_{x_s}(\text{grad } f), \quad (5)$$

где сумма справа берется по всем s таким, что $f(x_s) = c_k$.

Далее, складывая равенства (5) по $k = 1, 2, \dots, L$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) &= \sum_{k=1}^L (\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\varepsilon)} \gamma_{c_k-\varepsilon}) \\ &= \sum_{k=1}^{L-1} (\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_{k+1}-\varepsilon)} \gamma_{c_{k+1}-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Однако каждое слагаемое последней суммы равно нулю в силу леммы 1. Отсюда и получается искомое равенство (1):

$$\sum_{k=1}^L \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0.$$

Необходимость в теореме 2 доказана.

4.2. Достаточность. Теперь рассмотрим любую гладкую функцию f на замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g , имеющую лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N и удовлетворяющую условию (1) для некоторых $\varepsilon_k = \pm 1, 1 \leq k \leq N$. Мы хотим построить гладкое погружение поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , реализующее функцию f как функцию высоты и такое, что вектор $\varepsilon_k e$ является положительной нормалью к поверхности M_g в критической точке x_k для каждого $k = 1, 2, \dots, N$.

Идея построения заключается в следующем. Мы построим по функции f некоторый связный ориентированный граф Γ и запишем в вершинах v этого графа целые числа $\lambda = \lambda(v)$, сумма которых окажется равной $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f)$, т.е. нулю.

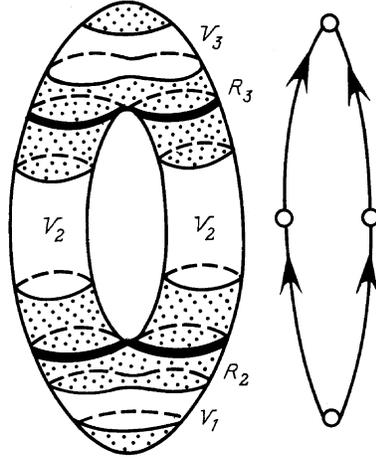


Рис. 4

Опишем построение графа Γ . Пусть $c_1 < \dots < c_L$ — критические значения функции f . Выбрав малое число $\varepsilon > 0$, рассмотрим непересекающиеся множества

$$V_k = f^{-1}[c_k + \varepsilon, c_{k+1} - \varepsilon], \quad 1 \leq k \leq L - 1,$$

и

$$R_k = f^{-1}(c_k) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}, \quad 2 \leq k \leq L - 1$$

(см. рис. 4). Определим множества вершин $\{v\}$ и ребер $\{r\}$ графа Γ следующим образом. Сопоставим каждой связной компоненте $V_k^{(i)}$ множества $V_k = \bigcup_i V_k^{(i)}$ одну вершину $v = v_k^{(i)}$, а каждой связной компоненте $R_k^{(j)}$ множества $R_k = \bigcup_j R_k^{(j)}$ сопоставим одно ребро $r = r_k^{(j)}$ (рис. 4). Отметим, что каждое множество $V_k^{(i)}$ диффеоморфно цилиндру $S^1 \times [c_k + \varepsilon, c_{k+1} - \varepsilon]$ и тривиально расслоено на линии уровня $S^1 \times \{a\}$ функции f . Каждое множество $R_k^{(j)}$ диффеоморфно окружности S^1 или прямой \mathbb{R} .

Осталось задать концы каждого ребра $r_k^{(j)}$. Выбрав на поверхности M_g риманову метрику, выпустим из точек кривой $R_k^{(j)}$ вниз и вверх траектории векторного поля $\text{grad } f / |\text{grad } f|^2$ до их пересечения с множествами $f^{-1}(c_k - \varepsilon)$ и $f^{-1}(c_k + \varepsilon)$.

Мы получим два диффеоморфизма кривой $R_k^{(j)}$, а именно, в верхнее основание некоторого цилиндра $V_{k-1}^{(s)}$ и в нижнее основание некоторого цилиндра $V_k^{(i)}$. Определим концы ребра $r_k^{(j)}$, поместив его начало в вершину $v_{k-1}^{(s)}$, а конец — в вершину $v_k^{(i)}$ (рис. 4).

Итак, вершины $v_k^{(i)}$ графа Γ изображают собой окружности, на которые распадается типичная регулярная линия уровня $f^{-1}(a)$ при $c_k < a < c_{k+1}$, а ребра $r_k^{(j)}$ графа Γ показывают нам движение отдельных участков этих окружностей вдоль траекторий поля $\text{grad } f / |\text{grad } f|^2$, когда уровень a проходит критическое значение c_k .

ЛЕММА 3. *Граф Γ конечен и связан.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая функции Морса это утверждение очевидно. Для случая произвольной гладкой функции с конечным числом критических точек оно тоже проверяется очень просто. Покажем, что число ребер у Γ конечно. Действительно, каждая некомпактная кривая $R_k^{(j)}$ лежит в $f^{-1}(c_k) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, диффеоморфна \mathbb{R} и соединяет путем какие-то две критические точки, скажем x_1 и x_2 (возможно, $x_1 = x_2$). Число всех таких кривых $R_k^{(j)}$ не превосходит $N + 2g - 1$. Это следует из определения рода g поверхности M_g [16] и того факта, что в каждой связной компоненте множества $M_g \setminus f^{-1}(c_k)$ найдется хотя бы одна критическая точка функции f (точка минимума или точка максимума). Напомним [16], что число связных компонент, на которые набор m непересекающихся дуг, соединяющих две точки на поверхности M_g , разбивает эту поверхность, не меньше чем $m - 2g$. Отсюда следует, что граф Γ конечен. Ввиду связности $M_g \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ граф Γ связан. Лемма доказана.

Перейдем к построению погружения поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты.

Шаг 1. Сначала окружим критические точки x_1, \dots, x_N функции f непересекающимися координатными окрестностями U_1, \dots, U_N и зададим вложение каждой окрестности U_k в \mathbb{R}^3 по формуле:

$$x \mapsto (\varepsilon_k u^1(x), u^2(x), f(x)),$$

где $x \in U_k$, а u^1, u^2 — такие координаты в U_k , что индуцированная ориентация в U_k согласована с ориентацией M_g . Ясно, что положительная нормаль в точке x_k к M_g действительно будет иметь вид $\varepsilon_k e$.

Шаг 2. Продолжим построенные локальные вложения до какого-нибудь погружения множеств $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 , $1 \leq k \leq L$, реализующего f как функцию высоты. Тогда для каждого цилиндра $V_k^{(i)} = S^1 \times [c_k + \varepsilon, c_{k+1} - \varepsilon]$ мы имеем погружение его граничных окружностей $S^1 \times \{c_k + \varepsilon\}$ и $S^1 \times \{c_{k+1} - \varepsilon\}$ в соответствующие горизонтальные плоскости $\Pi(c_k + \varepsilon)$ и $\Pi(c_{k+1} - \varepsilon)$. Обозначим через $\lambda(v_k^{(i)})$ разность индексов этих окружностей:

$$\lambda(v_k^{(i)}) = \text{ind}_{\Pi(c_k + \varepsilon)} S^1 \times \{c_k + \varepsilon\} - \text{ind}_{\Pi(c_{k+1} - \varepsilon)} S^1 \times \{c_{k+1} - \varepsilon\}.$$

ЛЕММА 4. Построенное погружение можно продолжить до погружения поверхности M_g в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты в том и только том случае, когда $\lambda(v_k^{(i)}) = 0$ для любой вершины $v_k^{(i)}$.

Эта лемма легко следует из свойства 3) индекса кривой.

Итак, в частном случае, когда функция $\lambda = \lambda(v_k^{(i)})$ тождественно равна нулю, построение искомого погружения можно успешно завершить.

Шаг 3. В общем случае – когда не все функции $\lambda(v_k^{(i)})$ равны нулю – нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Сумма всех чисел $\lambda(v_k^{(i)})$ равна $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сумма всех $\lambda(v_k^{(i)})$ равна

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{L-1} (\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_{k+1}-\varepsilon)} \gamma_{c_{k+1}-\varepsilon}) \\ = \sum_{k=1}^L (\text{ind}_{\Pi(c_k+\varepsilon)} \gamma_{c_k+\varepsilon} - \text{ind}_{\Pi(c_k-\varepsilon)} \gamma_{c_k-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Ввиду равенств (5) последняя сумма равна

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Существует такая функция $\beta = \beta(r_k^{(j)})$ на множестве ребер графа Γ , что $\beta(r_k^{(j)})$ является целым числом и $\lambda = \partial\beta$, где функции λ и β понимаются как 0-цепь и 1-цепь графа Γ , а ∂ – обычный граничный оператор в пространстве цепей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 (конечность и связность графа Γ) $H_0(\Gamma) = \mathbb{Z}$, причем 0-цепь λ является границей тогда и только тогда, когда сумма ее компонент равна нулю. Ввиду условия (1) сумма всех $\lambda(v_k^{(i)})$ равна нулю. Это гарантирует существование такой 1-цепи β , что $\lambda = \partial\beta$. Следствие доказано.

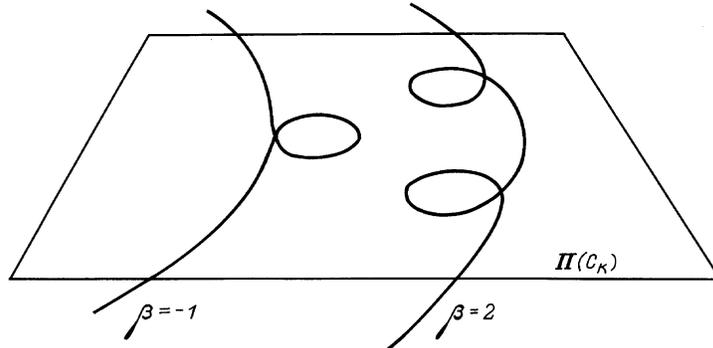


Рис. 5

Взяв теперь 1-цепь $\beta = \beta(r_k^{(j)})$ такую, что $\lambda + \partial\beta = 0$, присоединим к каждой кривой $R_k^{(j)}$ в плоскости $\Pi(c_k)$ петли нужной ориентации в количестве $|\beta(r_k^{(j)})|$ (рис. 5). Рассмотрим новое погружение поверхности $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты. А именно, в окрестностях критических точек новое погружение совпадает со старым, а на кривых $R_k^{(j)}$ — согласовано с погружением $R_k^{(j)}$ в плоскость $\Pi(c_k)$ с учетом добавленных петель. При этом разности $\lambda = \lambda(v_k^{(j)})$ заменятся на некоторые новые $\lambda' = \lambda'(v_k^{(j)})$. Покажем, что все $\lambda'(v_k^{(j)})$ равны нулю.

ЛЕММА 6. *Имеет место равенство $\lambda' = \lambda + \partial\beta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_{k-1}^{(s)}$ и $v_k^{(i)}$ — начало и конец ребра $r_k^{(j)}$ графа Γ . Тогда при добавлении петель нужной ориентации в количестве $|\beta(r_k^{(j)})|$ к кривой $R_k^{(j)}$ индекс верхней окружности цилиндра $V_{k-1}^{(s)}$ и индекс нижней окружности цилиндра $V_k^{(i)}$ — оба увеличатся на $\beta(r_k^{(j)})$, а индексы остальных компонент кривых $\gamma_{c_k - \varepsilon}$ и $\gamma_{c_k + \varepsilon}$ не изменятся. Следовательно, разность $\lambda(v_k^{(i)})$ увеличилась на сумму $\sum_j^+ \beta(r_k^{(j)})$ по всем ребрам, входящим в вершину $v_k^{(i)}$, и уменьшилась на сумму $\sum_m^- \beta(r_{k+1}^{(m)})$ по всем ребрам, выходящим из вершины $v_k^{(i)}$. Таким образом,

$$(\lambda' - \lambda)(v_k^{(i)}) = \sum_j^+ \beta(r_k^{(j)}) - \sum_m^- \beta(r_{k+1}^{(m)}) = (\partial\beta)(v_k^{(i)}).$$

Лемма доказана.

Итак, по построению 1-цепи β все разности $\lambda' = \lambda'(v_k^{(i)})$ равны нулю. Значит, согласно лемме 4 мы можем продолжить наше новое погружение $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 до некоторого погружения M_g в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты.

Достаточность доказана.

Докажем п. б) теоремы 2. В случае функции Морса индексы всех особых точек (нулей) векторного поля $\text{grad } f$ равны ± 1 . При этом критических точек у функции Морса на ориентируемой поверхности M_g всегда четное число (поскольку сумма индексов всех критических точек равна $\chi(M_g) = 2 - 2g$). Поэтому для любой функции Морса всегда можно подобрать набор чисел $\varepsilon_k = \pm 1$, чтобы выполнялось тождество $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \text{ind}_{x_k}(\text{grad } f) = 0$.

Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

§ 5. Реализуемость функции в виде функции высоты для погружений поверхности в неориентируемом случае (доказательство теоремы 3)

Идея доказательства теоремы 3, как и в ориентируемом случае, основана на построении по данной функции f некоторого связного ориентированного графа. Отличие от доказательства теоремы 2 связано с нестандартным определением ориентированной границы ∂ ребер графа Γ , при котором группа гомологий $H_0(\Gamma, \partial)$ изоморфна группе \mathbb{Z}_2 , а не \mathbb{Z} .

Пусть x_1, \dots, x_N – критические точки функции f , c_1, \dots, c_L – критические значения функции f . Рассмотрим такой же граф $\Gamma = \Gamma_f$, как и в ориентируемом случае (рис. 4). Напомним, что множества $f^{-1}(c_k, c_{k+1})$ распадаются на открытые цилиндры $V = S^1 \times (c_k, c_{k+1})$, которым соответствуют вершины v графа Γ . Для упрощения обозначений здесь мы будем писать просто V вместо использовавшегося выше обозначения $V_k^{(i)}$. Далее, множества $f^{-1}(c_k) \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ распадаются на замкнутые и незамкнутые кривые R , которым отвечают ребра r графа Γ . Здесь мы также будем писать просто R вместо прежнего обозначения $R_k^{(j)}$. Напомним, что инцидентным R и V отвечают инцидентные r и v . Для каждого цилиндра $V = S^1 \times (c_k, c_{k+1})$ фиксируем какую-нибудь ориентацию. Затем, взяв вектор $\text{grad } f$ в качестве первого вектора положительного репера, рассмотрим индуцированную ориентацию на всех окружностях $S^1 \times \{a\}$ в V , а также на всех кривых R из $f^{-1}(c_k)$, лежащих на нижней границе цилиндра V .

Ориентированную границу любого ребра r определим по формуле

$$\partial r = v_+ - \varepsilon_r v_-,$$

где v_- и v_+ – начало и конец ребра r , а знак $\varepsilon_r = \pm 1$ указывает, согласованы или нет ориентации цилиндров V_+ и V_- на их общей границе R .

Теперь выберем малое $\varepsilon > 0$ и построим какое-нибудь погружение α множества $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты и продолжающее заданное вложение малых окрестностей точек x_1, \dots, x_N . Для каждого цилиндра $V = S^1 \times (c_k, c_{k+1})$ мы имеем погружение окружностей $S^1 \times \{c_{k+1} - \varepsilon\}$ и $S^1 \times \{c_k + \varepsilon\}$ в горизонтальные плоскости $\Pi(c_{k+1} - \varepsilon)$ и $\Pi(c_k + \varepsilon)$. Обозначим через $\lambda(v)$ разность индексов этих окружностей. Как и в ориентируемом случае, верна (по теореме Уитни) следующая лемма.

ЛЕММА 7. *Погружение α тогда и только тогда может быть продолжено до погружения неориентируемой поверхности M_μ в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты, когда все числа $\lambda(v)$ равны нулю.*

Сопоставление $v \mapsto \lambda(v)$ может рассматриваться как нульмерная цепь

$$\sum_{v \in \Gamma} \lambda(v)v$$

графа Γ . Эту цепь обозначим через λ_α и назовем *препятствием к продолжению погружения α* на всю неориентируемую поверхность M_μ .

ЛЕММА 8 (основная). *Сумма всех чисел $\lambda(v)$ четна.*

СЛЕДСТВИЕ. *Препятствие λ_α является границей: $\lambda_\alpha = \partial\beta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Ввиду связности и неориентируемости поверхности M_μ (а также ввиду конечности графа Γ) группа $H_0(\Gamma, \partial)$ нульмерных гомологий графа Γ изоморфна группе \mathbb{Z}_2 . При этом 0-цепь

$$\lambda = \sum_{v \in \Gamma} \lambda(v)v$$

является границей в том и только том случае, когда сумма всех чисел $\lambda(v)$ четна. Таким образом, лемма 8 гарантирует существование 1-цепи β такой, что $\lambda_\alpha = \partial\beta$. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. По определению чисел $\lambda(v)$ их сумма равна

$$\sum_{k=1}^L [\text{ind}_{\Pi(c_k - \varepsilon)} \alpha(f^{-1}(c_k - \varepsilon)) - \text{ind}_{\Pi(c_k + \varepsilon)} \alpha(f^{-1}(c_k + \varepsilon))].$$

Поэтому лемма будет доказана, если мы проверим, что k -е слагаемое S_k этой суммы сравнимо по модулю 2 с числом связных компонент границы ∂P_k множества $P_k = f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$, $1 \leq k \leq N$ (так как объединение всех множеств P_k замкнуто). Начнем проверку с простого частного случая, когда множество P_k содержит только одну критическую точку x функции f , причем эта точка – морсовская. В этом случае P_k состоит из некоторого числа цилиндров и одного из множеств, изображенных на рис. 6. Это простые атомы A , B и \tilde{B} (т.е. атомы с одной вершиной, см. [5]). Очевидно, что число связных компонент границы ∂P_k является четным только в неориентируемом случае (для атомов A , B и \tilde{B} оно равно 1, 3 и 2 соответственно). В то же время число S_k , т.е. k -е слагаемое в выписанной сумме, сравнимо по модулю 2 с индексом плоской замкнутой кривой, имеющей точки возврата. Эти кривые, отвечающие атомам A , B и \tilde{B} , показаны на рис. 7. Так как этот индекс равен 1, -1 и $2 \text{ind}_{\Pi(c_k)} \alpha(\gamma)$ соответственно, то в описанном частном случае (т.е. в морсовском) лемма доказана.

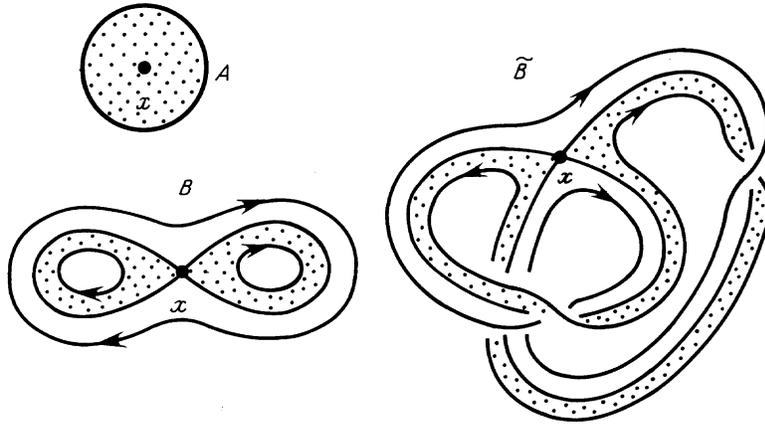


Рис. 6

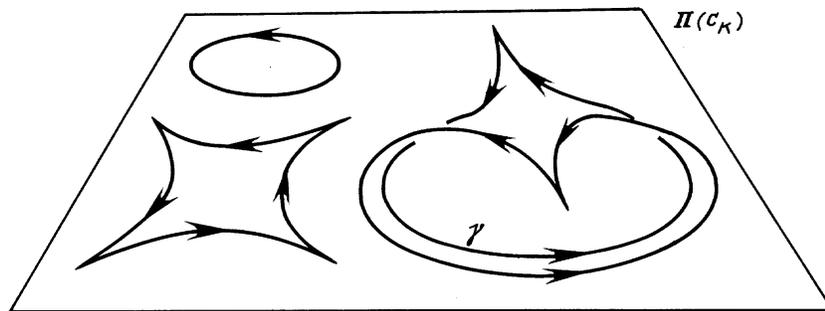


Рис. 7

В общем случае (когда функция не обязательно морсовская) мы рассмотрим малую деформацию $\alpha_t: P_k \rightarrow \mathbb{R}^3$ погружения $\alpha = \alpha_0$, тождественную на границе ∂P_k и превращающую функцию высоты в простую функцию Морса, т.е. в функцию, имеющую на каждом критическом уровне только одну критическую точку. Поскольку погружение не изменилось на границе ∂P_k , а для простой функции Морса утверждение уже доказано (см. описанный выше частный случай), то лемма полностью доказана.

Далее рассуждения в точности такие же, как и в ориентируемом случае. Для произвольной 1-цепи

$$\beta = \sum_{r \in \Gamma} \beta(r)r, \quad \beta(r) \in \mathbb{Z},$$

построим новое погружение $\tilde{\alpha}$ множеств $f^{-1}[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$, реализующее f как функцию высоты и совпадающее с α в окрестности каждой критической точки. А именно, добавим к каждой кривой $\alpha(R)$ в соответствующей горизонтальной плоскости $\Pi(c_k)$ несколько петель, алгебраическое число которых равно $\beta(r)$ (рис. 5). Зададим новое погружение $\tilde{\alpha}$ так, чтобы на кривых R оно было согласовано с погружением $\alpha|_R$ с учетом добавленных петель. Исходная цепь β называется в этом случае *различающей цепью* и обозначается через $\beta(\alpha, \tilde{\alpha})$.

ЛЕММА 9. *Имеет место равенство: $\lambda_{\tilde{\alpha}} = \lambda_{\alpha} + \partial\beta(\alpha, \tilde{\alpha})$.*

Доказательство леммы точно такое же, как и в ориентируемом случае.

Закончим доказательство теоремы 3. По следствию из леммы 8 препятствие является границей, т.е. $\lambda_{\alpha} = -\partial\beta$. Построим новое погружение $\tilde{\alpha}$, взяв различающую цепь $\beta(\alpha, \tilde{\alpha}) = \beta$. Тогда $\lambda_{\tilde{\alpha}} = 0$ согласно лемме 9, так что (по лемме 7) погружение $\tilde{\alpha}$ продолжается до некоторого погружения неориентируемой поверхности M_{μ} в \mathbb{R}^3 , реализующего f как функцию высоты. Тем самым, теорема 3 полностью доказана.

А следовательно, напомним еще раз, доказан п. в) теоремы 1 как очевидное следствие теоремы 3.

Таким образом, в ориентируемом случае вопрос о реализации функции f в виде функции высоты решается путем анализа интересного уравнения

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

дополняющего стандартное тождество

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = \chi(M_g) = 2 - 2g.$$

Было бы очень интересно получить другие геометрические или топологические интерпретации первого уравнения (т.е. критерия реализуемости).

На рис. 8 изображено погружение тора в \mathbb{R}^3 , реализующее в виде функции высоты построенную выше функцию K_3 с ровно тремя критическими точками (одним минимумом, одним максимумом и одним вырожденным седлом). Погружение

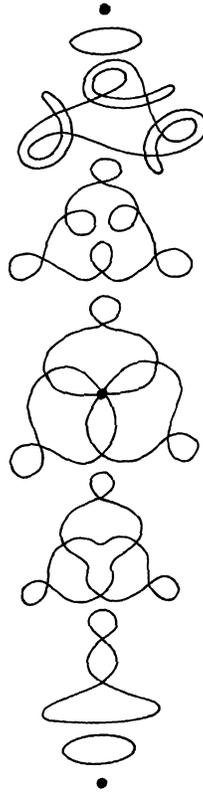


Рис. 8

наглядно изображено последовательностью сечений тора горизонтальными плоскостями, поднимающимися снизу вверх.

§ 6. Изотопность функций Морса на сфере и проективной плоскости. Приведение функций к каноническому виду

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две функции Морса f_0 и f_1 на гладком многообразии M^n назовем *изотопными*, если их можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса на M^n .

Рассмотрим (связную) замкнутую двумерную поверхность $M = M^2$ и обозначим через $F(M, p, q)$ совокупность всех функций Морса на этой поверхности, имеющих фиксированное число p локальных минимумов и фиксированное число q локальных максимумов. Ясно, что изотопные функции Морса принадлежат одному и тому же пространству $F(M, p, q)$. Заметим, что число r седловых точек функции из пространства $F(M, p, q)$ определяется поверхностью M и числами p, q однозначно по формуле эйлеровой характеристики $p + q - r = \chi(M)$. Нетрудно проверить также, что при любых фиксированных $p, q \geq 1$ пространство $F(M, p, q)$ непусто. Оказывается, что пространство $F(M, p, q)$ линейно связно, т.е. любые две функции из этого пространства изотопны. Доказательство этого известного факта мы

приведем в § 8. В дальнейшем, говоря о связности, мы всегда будем иметь в виду линейную связность.

Обозначим через $\tilde{F}(M, p, q)$ пространство функций Морса на поверхности M со следующими свойствами:

- 1) функции имеют p локальных минимумов и q локальных максимумов;
- 2) фиксирован порядок критических точек на каждом из трех множеств критических точек одного типа: минимумов, максимумов и седел.

Такие функции можно назвать *нумерованными функциями Морса*. В частности, каждой функции из $F(M, p, q)$, где $p, q \geq 1$, отвечает ровно $p!q!(p+q-\chi)!$ функций из $\tilde{F}(M, p, q)$, где $\chi = \chi(M) = 2 - 2g$ или $2 - \mu$ — эйлерова характеристика поверхности $M = M_g$ или M_μ соответственно. Таким образом, пространство $\tilde{F}(M, p, q)$ является $(p!q!(p+q-\chi)!)$ -листным накрытием над пространством $F(M, p, q)$. Отметим, что $F(M, p, q)$ можно рассматривать как однородное пространство $\tilde{F}(M, p, q)/(S_p \times S_q \times S_{p+q-\chi})$ по действию групп перестановок критических точек каждого типа. При этом любая изотопия $f_t, 0 \leq t \leq 1$, функций Морса, лежащих в пространстве $F(M, p, q)$, однозначно определяет изотопию в накрывающем пространстве $\tilde{F}(M, p, q)$ такую, что при непрерывном изменении расположения критических точек на поверхности сохраняется их отношение порядка. При доказательстве предложения 3 об изотопности любых двух погружений сферы в \mathbb{R}^3 (см. § 7) нам понадобится следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Если поверхность M является либо двумерной сферой S^2 , либо проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$, то накрывающее пространство $\tilde{F}(M, p, q)$ линейно связно при любых фиксированных значениях p и q .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Выберем некоторое подмножество N в множестве всех критических точек нумерованной функции Морса. Рассмотрим подпространство $\tilde{F}_N(M, p, q)$ в пространстве $\tilde{F}(M, p, q)$, состоящее из всех функций Морса с p минимумами и q максимумами на поверхности M , для которых все критические точки из набора N считаются фиксированными точками на поверхности, а на множествах остальных критических точек каждого типа предполагаются фиксированными отношения порядка. Заметим, что из связности подпространства $\tilde{F}_N(M, p, q)$ следует связность пространства $\tilde{F}(M, p, q)$. В случае сферы нетрудно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *В случае двумерной сферы пространство $\tilde{F}_N(S^2, p, q)$, $|N| \leq 3$, нумерованных функций Морса с фиксированным расположением не более чем трех критических точек линейно связно при любых значениях p и q .*

Мы выведем теоремы 4 и 5 из следующего основного утверждения о пространстве $\tilde{F}(M, p, q)$ для произвольной замкнутой поверхности M (т.е. поверхности произвольного рода).

Рассмотрим группу $\text{Aut}(M)$ всех автоморфизмов поверхности M , т.е. всех диффеоморфизмов этой поверхности на себя, сохраняющих ориентацию, если поверхность ориентируема. Группа $\text{Aut}(M)$ естественно действует (справа) на пространстве $F(M, p, q)$ функций Морса, $\varphi: f \mapsto f \circ \varphi$, $f \in F(M, p, q)$, $\varphi \in \text{Aut}(M)$. Рассмотрим однородное пространство $F(M, p, q)/\text{Aut}(M)$, состоящее из орбит этого действия, и аналогичное однородное пространство $\tilde{F}(M, p, q)/\text{Aut}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – любая замкнутая двумерная поверхность (ориентируемая или неориентируемая). Тогда однородное пространство $\tilde{F}(M, p, q) / \text{Aut}(M)$ линейно связно. Другими словами, для любых двух функций Морса f_0 и f из пространства $\tilde{F}(M, p, q)$ существуют гладкий путь f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса и диффеоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(M)$ поверхности на себя (сохраняющий ориентацию в ориентируемом случае) такие, что $f_1 = f \circ \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Известно [17], что любой автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(M)$ сферы или проективной плоскости изотопен тождественному, т.е. его можно соединить гладким путем φ_t , $1 \leq t \leq 2$, $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \text{id}$, в пространстве всех диффеоморфизмов с тождественным диффеоморфизмом id поверхности на себя. В частности, выбирая в качестве φ автоморфизм из предложения 2, мы получаем путь f_t , $0 \leq t \leq 2$, в пространстве $\tilde{F}(M, p, q)$, соединяющий исходные функции Морса f_0 и $f_2 = f$ в пространстве всех функций Морса, где $f_t = f_1 \circ \varphi_t$, $1 \leq t \leq 2$. Теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Согласно предложению 2 для любых двух функций Морса $f_0, f \in \tilde{F}(S^2, p, q)$ существуют путь $f_t \in \tilde{F}(S^2, p, q)$, $0 \leq t \leq 1$, и автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(S^2)$ такие, что $f_1 = f \circ \varphi$. Как мы уже отмечали, заменой автоморфизма φ на другой автоморфизм из пространства $\text{Aut}(S^2)$ можно добиться, чтобы изотопия f_t , $0 \leq t \leq 1$, оставляла на месте все критические точки. При этом автоморфизм φ по определению оставляет на месте все точки набора N .

Воспользуемся теперь следующим фактом. Любой автоморфизм $\varphi = \varphi_0 \in \text{Aut}(S^2)$ сферы, оставляющий на месте каждую из выделенных точек, число которых не более трех, можно соединить с тождественным автоморфизмом $\varphi_1 = \text{id}$ некоторым путем $\varphi_t \in \text{Aut}(S^2)$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi_0 = \varphi$, в пространстве всех автоморфизмов, оставляющих на месте выделенные точки. Этот факт следует из связности пространства всех путей с фиксированными концами на сфере или диске, а из него вытекает, что полученный автоморфизм φ можно соединить путем с тождественным автоморфизмом, при котором все выделенные критические точки из подмножества N остаются неподвижными. Таким образом, пространство $\tilde{F}_N(S^2, p, q)$, $|N| \leq 3$, линейно связно. Теорема 5 доказана.

Остальная часть параграфа посвящена доказательству предложения 2, в котором мы приводим любую функцию Морса к каноническому виду. Нам понадобятся следующие два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функцию Морса f на M назовем *простой*, если в каждой связной компоненте ее линии уровня содержится не более одной критической точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Гладкий путь f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса f на M будем называть путем *общего положения*, если при каждом t , $0 \leq t \leq 1$, кроме конечного числа значений t_1, \dots, t_N , функция Морса f_t является простой, а при любом $t = t_i$, $i = 1, \dots, N$, функция f_t имеет ровно одну связную компоненту линии уровня, в которой содержится более одной критической точки, причем число критических точек на этой связной компоненте равно двум.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. *Ориентируемый случай.* Пусть $M = M_g$ – замкнутая ориентируемая поверхность и f_0 – произвольная функция Морса на этой поверхности.

Для каждой гладкой функции f на M рассмотрим ее граф Рибба $W = W_f$ (молекулу), т.е. базу расслоения (точнее, слоения) $\sigma: M \rightarrow W$ поверхности M на связные компоненты линий уровня функции f . Итак, граф Рибба изображает пространство связных компонент линий уровня функции. На этом графе корректно определена функция $f' = f \circ \sigma^{-1}$ и имеется естественная ориентация, показывающая направление роста этой функции. Ясно, что в случае простой функции Морса f на ориентируемой поверхности все вершины графа Рибба W_f имеют кратность 1 или 3, причем для каждой вершины кратности 3 имеется ребро, входящее в эту вершину, и ребро, выходящее из нее. Отметим, что конечным вершинам отвечают точки максимума или минимума f , а вершинам кратности 3 отвечают особые линии уровня функции f , содержащие седловую точку. Верна и теорема реализации, а именно: любой связный ориентированный граф W указанного вида, не имеющий ориентированных циклов, является графом Рибба некоторой простой функции Морса на замкнутой поверхности. При этом род g поверхности M_g совпадает с родом графа W .

Пусть f – нумерованная простая функция Морса, т.е. на каждом из трех множеств критических точек одного типа – минимумов, максимумов и седел – фиксировано отношение порядка, или нумерация. Тогда при проекции $\sigma: M \rightarrow W$ поверхности на граф Рибба нумерация критических точек функции f перейдет в некоторую нумерацию вершин графа Рибба W . Обозначим полученный нумерованный граф Рибба через \widetilde{W} . Итак, для нумерованного графа Рибба фиксирован порядок на каждом из трех множеств вершин одного типа: 1) вершины кратности 1 с выходящим ребром, 2) вершины кратности 1 с входящим ребром, 3) вершины кратности 3. Отметим еще два свойства графа Рибба W_f для простой функции Морса f , которые докажем ниже.

ЛЕММА 10 (о графе Рибба простой функции Морса). а) Пусть f – нумерованная простая функция Морса на замкнутой ориентируемой поверхности $M = M_g$. Тогда существует вложение $i: \widetilde{W} \hookrightarrow M$ нумерованного графа Рибба $\widetilde{W} = \widetilde{W}_f$ в поверхность со следующими свойствами:

- 1) при отображении $i: \widetilde{W} \hookrightarrow M$ нумерация вершин графа \widetilde{W} переходит в нумерацию критических точек функции f ;
- 2) $\sigma \circ i = \text{id}_W$ (и значит, $i \circ \sigma|_{i(W)} = \text{id}_{i(W)}$), где $\sigma: M \rightarrow W$ – естественная проекция.

б) Подмножество в пространстве $\widetilde{F}(M, p, q) / \text{Aut}(M)$, которому отвечают нумерованные простые функции Морса f на $M = M_g$ с одним и тем же (фиксированным) нумерованным графом Рибба $W_f = W$, линейно связно.

Пусть p и q – число локальных минимумов и число локальных максимумов функции f_0 соответственно. Обозначим через $W(g, p, q)$ граф, составленный из g окружностей, соединенных последовательно отрезками, и имеющий p нижних и q верхних концов (см. рис. 9). Этот граф однозначно определяется числами p и q . Фиксируем вложение M в \mathbb{R}^3 , при котором функция высоты k является простой функцией Морса и ее граф Рибба совпадает с графом $W(g, p, q)$. Докажем сначала



Рис. 9

ла более слабое утверждение о том, что существуют гладкий путь f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(M)$ поверхности на себя такие, что $f_1 = k \circ \varphi$ (без учета порядка на множестве критических точек). Заметим, что без ограничения общности мы можем считать, что исходная функция Морса f_0 является простой.

Рассмотрим пять простейших типов особенностей I–V, возникающих у непростых функций Морса f на поверхности M , для которых некоторая связная компонента линии уровня $f^{-1}(c)$ содержит две критические точки (см. рис. 10). На рис. 10 показаны вложения в \mathbb{R}^3 соответствующих окрестностей особых линий уровня (т.е. атомов) $P = f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, при которых функция f является функцией высоты. Нетрудно построить гладкую деформацию $f_t : P \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0 = f$, функции f , при которой эта функция Морса становится простой, а ее значения в критических точках переставляются, скажем, имеют вид $c - t$ и $c + t$. На рис. 11 показаны пять соответствующих перестроек графа Рибо, которые мы будем называть допустимыми.

ЛЕММА 11 (о приведении графа Рибо к каноническому виду). *Пусть W – граф Рибо простой функции Морса $f_0 \in F(M_g, p, q)$. Тогда существует конечная последовательность допустимых перестроек этого графа, приводящая его к каноническому виду $W(g, p, q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Утверждение а) очевидно. Докажем п. б). Пусть f_0 и f – две простые функции Морса на поверхности M_g , которым отвечает один и тот же ориентированный граф Рибо W . Это значит, что имеется изоморфизм $\psi' : W_0 \rightarrow W$ между ориентированным графом Рибо W_0 функции f_0 и ориен-

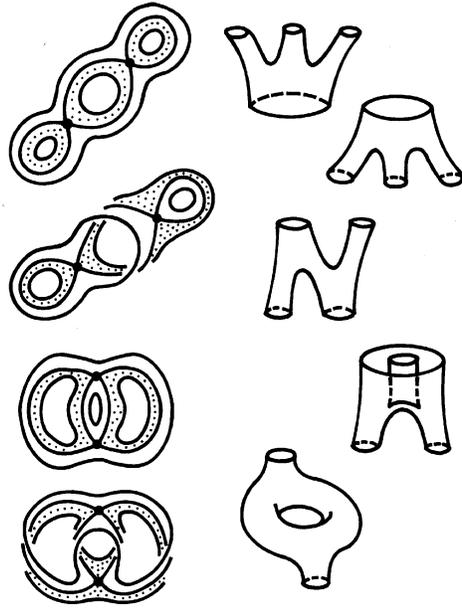


Рис. 10

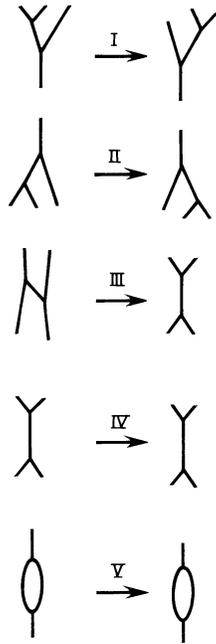


Рис. 11

тированным графом Рибба W функции f . Изоморфизм ψ' мы будем рассматривать как гомеоморфизм между соответствующими топологическими пространствами

W_0 и W . Легко видеть, что этот гомеоморфизм обладает следующим свойством. Для любых двух вложений $i_0: W_0 \hookrightarrow M$ и $i: W \hookrightarrow M$ графов Рибо в поверхность (см. п. а)) гомеоморфизм $i \circ \psi' \circ i_0^{-1}$ между их образами $i_0(W_0)$ и $i(W)$ продолжается до некоторого послойного гомеоморфизма $\psi: M \rightarrow M$, сохраняющего ориентацию поверхности M . Под *послойным* гомеоморфизмом мы понимаем гомеоморфизм, сохраняющий слоение поверхности M на связные компоненты линий уровня, т.е. удовлетворяющий равенству $\sigma \circ \psi = \psi' \circ \sigma_0$, где $\sigma_0: M \rightarrow W_0$, $\sigma: M \rightarrow W$ — естественные проекции, отвечающие функциям f_0 и f . Нетрудно показать, что послойный гомеоморфизм $\psi: M \rightarrow M$ можно немного пошевелить так, чтобы он стал гладким, а значит, $\psi \in \text{Aut}(M)$.

Итак, на поверхности M имеются две функции Морса f_0 и $f_1 = f \circ \psi$, имеющие одни и те же связные компоненты линий уровня и одинаковое направление роста функции. Легко видеть, что пространство таких функций линейно связно: имеется гладкая гомотопия f_t , $0 \leq t \leq 1$, между функциями f_0 и f_1 , в процессе которой функция f_t остается морсовской на всей поверхности M . А именно, можно положить $f_t = (1-t)f_0 + tf_1$. Лемма 10 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11. 1) Предположим сначала, что $p > 1$. Рассмотрим два произвольных нижних конца графа W и произвольный путь $\Gamma \subset W$, соединяющий эти конечные вершины. Без ограничения общности можно считать, что путь Γ не имеет самопересечений. Покажем, что если длина этого пути (т.е. число его ребер) больше 2, то с помощью допустимых перестроек графа W длину пути Γ можно уменьшить на 1. В самом деле, так как оба конца пути Γ являются нижними вершинами W , внутри него всегда найдется “максимальная” точка. А так как длина Γ не меньше 3, отрезок пути Γ в окрестности максимальной точки имеет вид, как на рис. 12 (а–в). На этих рисунках показано также, как с помощью допустимых перестроек II, III (рис. 11) можно уменьшить на 1 длину пути Γ .

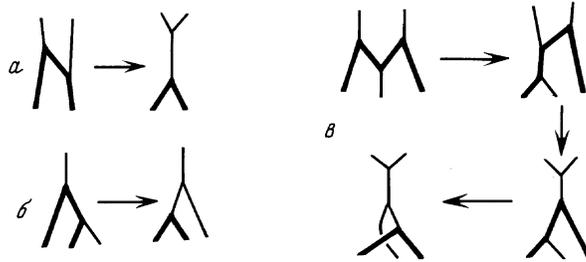


Рис. 12

Таким образом, в случае $p > 1$ после конечного числа допустимых перестроек графа Рибо W любые два нижних конца этого графа можно соединить путем длины 2, состоящим из двух соседних ребер графа.

2) Теперь докажем лемму индукцией по числу $N = 2(p + q + g - 1)$ всех вершин графа W . База индукции такова. При $N = 2$ или $N = 4$ граф Рибо любой функции $f \in F(M_g, p, q)$ совпадает с каноническим графом $W(g, p, q)$. Индуктивный переход осуществляется от $N - 2$ к N . Рассмотрим отдельно три случая: а) $p > 1$, б) $q > 1$, в) $p = q = 1$. В случае а) по доказанному выше существует последовательность допустимых перестроек графа W , в результате которых любые два

наперед заданных нижних конца этого графа становятся концами двух соседних ребер. Выкидывая из рассмотрения эти два соседних ребра, мы получим новый граф Рибо с $N - 2$ вершинами, который по предположению индукции приводится допустимыми перестройками к каноническому виду $W(g, p - 1, q)$. Восстанавливая выкинутые два ребра, получаем искомую перестройку, приводящую исходный граф к каноническому виду. Случай б) рассматривается аналогично. Случай в) сводится к случаю а) следующим образом. Заметим, что $g \geq 2$. Выкинем из графа Рибо единственный нижний конец вместе с выходящим из него ребром, в результате чего получим новый граф Рибо рода на единицу меньше с тем же числом вершин N , но уже с двумя нижними концами. Для полученного графа существуют (по доказанному в а)) допустимые перестройки, приводящие его к каноническому виду $W(g - 1, 2, 1)$. Восстанавливая выкинутое ребро, получаем искомую перестройку, приводящую исходный граф к каноническому виду $W(g, 1, 1)$. Лемма 11 полностью доказана.

Закончим доказательство предложения 2 в ориентируемом случае. Из леммы 10 (п. б)) и леммы 11 следует, что существуют изотопия $f_t \in F(M_g, p, q)$, $0 \leq t \leq 1$, и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(M_g)$ поверхности на себя такие, что $f_1 = k \circ \varphi$, где k — определенная выше простая функция Морса с каноническим графом Рибо $W(g, p, q)$. Отсюда следует, что пространство $F(M_g, p, q) / \text{Aut}(M_g)$ связно.

Рассмотрим теперь пространство $\tilde{F}(M_g, p, q)$ нумерованных функций Морса на ориентируемой поверхности M_g , имеющих p локальных минимумов, q локальных максимумов. Напомним, что для этих функций фиксирован порядок критических точек на каждом из трех множеств критических точек одного типа: минимумов, максимумов и седел. Покажем, что пространство $\tilde{F}(M_g, p, q) / \text{Aut}(M_g)$ таких функций, рассматриваемых с точностью до автоморфизмов поверхности, также связно. Из доказательства леммы 11 видно, что мы умеем приводить нумерацию конечных вершин на нумерованном графе Рибо к любой заданной нумерации таких вершин на каноническом графе Рибо $W(g, p, q)$. Таким образом, нам осталось проверить, что любую перестановку на множестве внутренних вершин канонического графа $W(g, p, q)$ (т.е. вершин, отвечающих седловым критическим точкам функции k) можно получить конечным числом допустимых перестроек, не затрагивающих его концов. Но ввиду связности этого графа любая перестановка его внутренних вершин реализуется в виде последовательности перестановок его соседних внутренних вершин. Каждую перестановку соседних внутренних вершин графа $W(g, p, q)$ легко реализовать с помощью допустимых перестроек типа I, II, IV, V (см. рис. 11). Это доказывает предложение 2 в ориентируемом случае.

Неориентируемый случай. Пусть $M = M_\mu$ — замкнутая неориентируемая поверхность и f_0 — произвольная функция Морса на этой поверхности.

Для каждой простой функции Морса f на поверхности $M = M_\mu$ рассмотрим аналогичный граф Рибо $W = W_f$ (т.е. молекулу), в котором могут содержаться вершины кратности 1, 2 и 3. Этим вершинам отвечают особые линии уровня, окрестности которых изображены на рис. 6. Это простые атомы A , \tilde{B} и B . Вершины кратности 2, т.е. отвечающие атому \tilde{B} , будем обозначать звездочками на графе W .

Мы будем считать, что в некоторой малой окрестности P каждой особой ли-

нии уровня фиксирована ориентация либо самой этой окрестности, если P ориентируемо ($P \simeq A$ или $P \simeq B$), либо одной из двух гладких окружностей, лежащих на особом уровне функции f в $P \simeq \bar{B}$, причем эту окружность $S^* \subset P$ также будем считать фиксированной. Введем индуцированную ориентацию всех неособых линий уровня функции f в P в ориентируемом случае так, чтобы вектор $\text{grad } f$ образовывал с вектором скорости к линии уровня положительный репер, а в неориентируемом случае пусть ориентации линий уровня согласованы с фиксированной ориентацией окружности S^* . Поставим на каждом ребре r_j графа W метку $\varepsilon_j = \pm 1$, показывающую, согласована или нет фиксированная ориентация неособых линий уровня функции f при переходе из окрестности одной особой линии уровня f в окрестность другой особой линии, которые на графе W соединены ребром r_j . Два набора меток $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах графа W будем считать эквивалентными, если они получаются друг из друга после изменения выбранной ориентации неособых линий уровня f в некоторых окрестностях P особых линий.

Полученный граф $W = W_f$ с естественной ориентацией его ребер и фиксированными метками $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах, рассматриваемыми с точностью до указанного отношения эквивалентности, обозначим через $W^* = W_f^*$ и назовем *меченым графом Рибо* простой функции Морса f на неориентируемой поверхности M_μ . Нетрудно показать, что для меченых графов Рибо справедлив аналог леммы 10, а именно: *подпространство в пространстве $F(M, p, q) / \text{Aut}(M)$, которому отвечают простые функции Морса f на M_μ с фиксированным меченым графом Рибо W^* , линейно связно.*

Пусть p и q – число локальных минимумов и число локальных максимумов функции f_0 . Обозначим через $W^*(\mu, p, q)$ граф, имеющий p нижних концов и q верхних концов и получающийся из канонического графа $W(g, p, q)$ заменой цепочки из g окружностей, соединенных последовательно отрезками, на цепочку из μ вершин-звездочек. Для неориентируемой поверхности M_μ граф $W^*(\mu, p, q)$ однозначно определяется числами p и q . Легко видеть, что все наборы меток $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах такого графа эквивалентны, и поэтому можно считать, что все метки на $W^*(\mu, p, q)$ равны $+1$. Фиксируем на поверхности M_μ простую функцию Морса k , для которой граф Рибо совпадает с графом $W(\mu, p, q)$. Докажем сначала, что существуют гладкий путь f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса и диффеоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(M)$ поверхности на себя такие, что $f_1 = k \circ \varphi$ (без учета порядка на множестве критических точек). Как и в ориентируемом случае, будем предполагать, не ограничивая общности, что исходная функция Морса f_0 является простой.

В неориентируемом случае имеется всего 11 типов особенностей непростых функций Морса f на M_μ , для которых некоторая связная компонента линии уровня $f^{-1}(c)$ содержит две критические точки. А именно, кроме пяти типов особенностей ориентируемого случая, показанных на рис. 10, имеется еще 6 типов особенностей, показанных на рис. 13. На рис. 14 показаны 6 соответствующих перестроек графа Рибо, которые мы также будем называть допустимыми (неуказанные метки $\varepsilon_j = \pm 1$ на ребрах предполагаются равными 1).

Покажем, что лемма 11 справедлива и для неориентируемых поверхностей, а именно: *любой меченый граф Рибо W^* простой функции Морса f_0 на неориентируемой поверхности M_μ можно привести конечным числом допустимых перестроек к каноническому виду.*

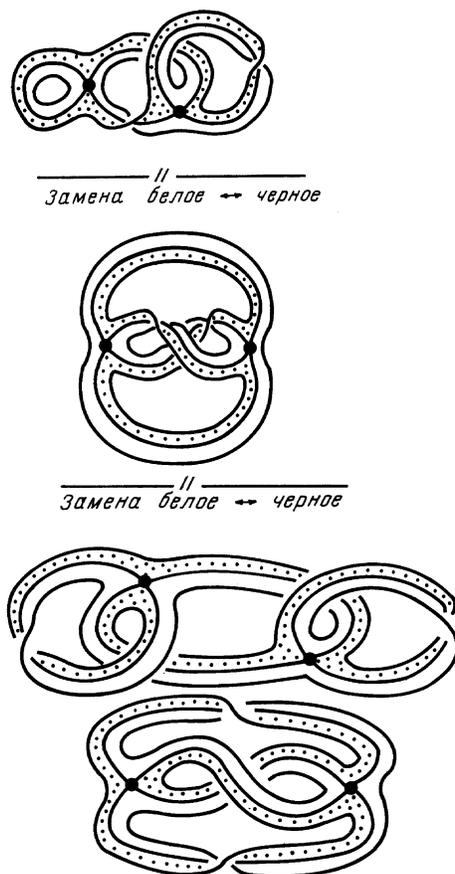


Рис. 13

Первая часть доказательства леммы 11 легко проходит и в неориентируемом случае, так как с помощью перестроек Γ' и Π' с любого пути Γ можно убрать все звездочки, поместив их на какое-нибудь конечное ребро графа W^* .

Вторая часть доказательства леммы 11 также проводится индукцией по числу $N = 2(p+q-1) + \mu$ вершин меченого графа W^* . База индукции такова: при $N = 3$ имеем $p = q = \mu = 1$ и меченый граф Рибо любой функции $f \in F(M_1, 1, 1)$ совпадает с каноническим графом $W^*(1, 1, 1)$. Индуктивный переход от $N-1$ к N почти повторяет ориентируемый случай. Опять рассмотрим три возможности: а) $p > 1$, б) $q > 1$, в) $p = q = 1$. Случаи а) и б) выводятся из первой части доказательства леммы аналогично ориентируемому случаю. Случай в) можно свести к случаю а) следующим образом. Если соседней с нижней конечной вершиной являлась вершина-звездочка, то при ее удалении из меченого графа Рибо, применении предположения индукции и восстановлении выкинутой звездочки получаем искомое приведение к каноническому виду $W^*(\mu, 1, 1)$. Пусть, в случае в), вершина, соседняя с нижней конечной вершиной, имеет кратность 3. Выкинем из меченого графа Рибо нижний конец вместе с выходящим из него ребром, в результате чего получим, как в ориентируемом случае, новый меченый граф Рибо с тем же числом вершин N ,

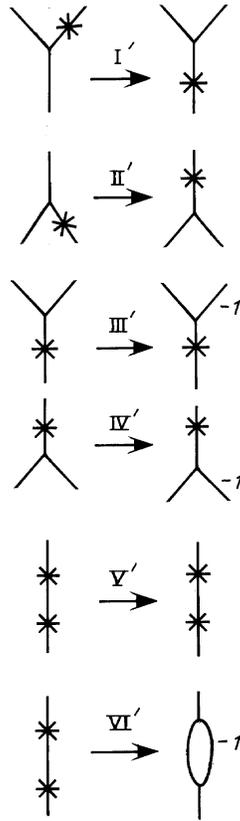


Рис. 14

но уже с двумя нижними концами. Для полученного графа существуют (по доказанному в п. а)) допустимые перестройки, приводящие его к каноническому виду $W^*(\mu, 2, 1)$ или $W^*(\mu - 1, 2, 1)$. Восстанавливая выкинутое ребро, получаем перестройку, приводящую исходный граф к графу, отличающемуся от канонического $W^*(\mu, 1, 1)$ наличием двойного ребра вместо двух нижних звездочек.

Возможны два случая:

- в1) если метки $\varepsilon_j = \pm 1$ на этих двух ребрах противоположны, то с помощью перестройки VI' их можно заменить на две звездочки, в результате чего получим канонический граф $W^*(\mu, 1, 1)$;
- в2) если эти метки совпадают, то $\mu \geq 3$, и с помощью перестройки IV' эти метки можно сделать противоположными, что приведет нас к предыдущему случаю в1).

Лемма 11 в неориентируемом случае доказана.

Вернемся к доказательству предложения 2 в неориентируемом случае. Из аналогов лемм 10 (п. б)) и 11 для неориентируемого случая следует, что пространство $F(M_\mu, p, q) / \text{Aut}(M_\mu)$ связно. Рассмотрим теперь пространство $\tilde{F}(M_\mu, p, q)$ функций Морса на поверхности M_μ , имеющих p локальных минимумов, q локальных максимумов, причем для этих функций фиксирован порядок критических точек

на каждом из трех множеств критических точек одного типа: минимумов, максимумов и седел. Докажем, что пространство $\tilde{F}(M_\mu, p, q)/\text{Aut}(M_\mu)$ таких функций, рассматриваемых с точностью до автоморфизмов поверхности, также связно. В самом деле, как и в ориентируемом случае, осталось проверить, что любую перестановку на множестве внутренних вершин (т.е. не являющихся концами) канонического графа $W^*(\mu, p, q)$ можно получить конечным числом допустимых перестроек, не затрагивающих его концов. Но ввиду связности этого графа любая перестановка его внутренних вершин реализуется в виде последовательности перестановок его соседних внутренних вершин. Каждую перестановку соседних внутренних вершин графа $W^*(\mu, p, q)$ легко реализовать с помощью допустимых перестроек типа I, II, I', IV', V' (см. рис. 11 и 14).

Предложение 2 полностью доказано.

Отметим следующее следствие из леммы 10 и ее аналога в неориентируемом случае.

СЛЕДСТВИЕ. В случае сферы S^2 или проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ пространство всех простых функций Морса f на M с одним и тем же (фиксированным) нумерованным графом Рибба $\tilde{W}_f = \tilde{W}$ линейно связно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство леммы 11 дает алгоритм, по которому для любой простой функции Морса на замкнутой поверхности M можно построить изотопию, связывающую путем в пространстве всех функций Морса эту функцию с некоторой функцией канонического вида $k \circ \varphi$. Здесь k – фиксированная простая функция Морса с каноническим графом Рибба $W(g, p, q)$ или $W^*(\mu, p, q)$, $\varphi \in \text{Aut}(M)$. При этом указанная изотопия является путем общего положения в смысле определения 4, т.е. в процессе изотопии производится лишь конечное число простых перестроек, при которых имеется связная компонента линии уровня с двумя критическими точками.

§ 7. Топология пространства всех погружений с данной функцией высоты. Изотопность гладких погружений сферы в трехмерном пространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Два погружения α_0 и α_1 поверхности M в \mathbb{R}^3 назовем *регулярно гомотопными*, если их можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех погружений M в \mathbb{R}^3 .

Рассмотрим пространство $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^3)$ всех гладких погружений поверхности M в \mathbb{R}^3 . Это пространство называется *связным*, если любые два погружения α_0 и α_1 из $\text{Imm}(M, \mathbb{R}^3)$ регулярно гомотопны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В случае двумерной сферы $M = S^2$ пространство $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Другими словами, любые два погружения α_0 и α_1 сферы S^2 в \mathbb{R}^3 можно соединить гладким путем α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех гладких погружений сферы в \mathbb{R}^3 .

В частности, из предложения 3 следует известный “парадокс Смейла” [12], [14] о том, что двумерную сферу можно “вывернуть наизнанку”. Это значит, что существует гладкая деформация α_t , $0 \leq t \leq 1$, погружений сферы в \mathbb{R}^3 , соединяющая одно стандартное вложение сферы $\alpha_0: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, у которого положительное

поле нормалей направлено наружу сферы, с другим стандартным вложением сферы $\alpha_1: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, у которого положительное поле нормалей направлено внутрь сферы.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) В работе Смейла [12] доказано, в частности, что стандартную n -мерную сферу S^n можно “вывернуть наизнанку” в \mathbb{R}^{n+1} тогда и только тогда, когда $n = 2$ или 6 .

2) Наглядная реализация выворачивания двумерной сферы S^2 в \mathbb{R}^3 была также построена А. Шапиро и Б. Морином [18] (см. также [19]). Отметим, что пространство $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно [12], но не является односвязным. А именно, замкнутый путь γ , определяемый равномерным вращением погруженной поверхности вокруг оси z на угол 2π , нестягиваем в $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$. Поэтому существуют разные способы выворачивания сферы наизнанку. Однако если профакторизовать пространство $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ по группе $\text{Aut}(S^2)_0$ всех диффеоморфизмов сферы на себя, изотопных тождественному, то полученное накрывающее пространство уже будет односвязным. Это следует из того, что указанный путь γ в $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$ реализуется очевидным путем в группе $\text{Aut}(S^2)_0$ и согласно общему результату Смейла [12] этот путь служит образующей в фундаментальной группе пространства $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$. Отметим также, что группа $\text{Aut}(S^2)_0$ совпадает с группой всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов сферы на себя [17]. Из односвязности пространства $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)/\text{Aut}(S^2)_0$ сразу получаем, что любые два выворачивания сферы наизнанку (обычно рассматриваемые с точностью до автоморфизмов сферы, изотопных тождественному) регулярно гомотопны друг другу.

Докажем сначала два вспомогательных утверждения. Зафиксируем замкнутую поверхность $M = M_g$ или M_μ (т.е. ориентируемую или неориентируемую). Зафиксируем гладкую функцию f на поверхности M . Обозначим через $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ пространство всех погружений M в \mathbb{R}^3 , реализующих f как функцию высоты. Обозначим через $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ подпространство в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$, состоящее из всех погружений, для которых фиксировано направление положительной нормали в каждой критической точке f . Здесь предполагается, что в ориентируемом случае фиксирована некоторая ориентация поверхности, а в неориентируемом случае фиксированы некоторые ориентации окрестностей критических точек функции f . Можно дать другое, эквивалентное определение пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Два погружения $\alpha_0, \alpha \in \text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ назовем *нормально эквивалентными*, если для любой точки $x \in M$ существует путь α_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ такой, что погружения α_1 и α имеют одинаковые направления положительной нормали в точке x . Каждый класс нормально эквивалентных погружений пространства $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ будем обозначать через $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Легко видеть, что два данных определения пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ эквивалентны. Далее будем предполагать, что функция f имеет конечное число критических точек. Заметим, что, теорема 2 (п. а)) дает простой критерий того, что пространство $\text{Imm}_{f,+}(M_g, \mathbb{R}^3)$ непусто, а по теореме 3 каждое пространство $\text{Imm}_{f,+}(M_\mu, \mathbb{R}^3)$ непусто. Исследуем вопрос о связности пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть f – гладкая функция с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности $M = M_g$ или M_μ (т.е. ориентируемой или неориентируемой). Фиксируем какое-нибудь погружение $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, т.е. погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках. Тогда имеется естественное взаимно однозначное соответствие между связными компонентами пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ и элементами группы $H^1(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ или $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}^{\mu-1}$ одномерных когомологий поверхности M .

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, из теоремы 6 следует, что в случае гладкой функции f с конечным числом критических точек на сфере указанное пространство $\text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Другими словами, любые два погружения сферы в \mathbb{R}^3 , реализующие данную функцию f как функцию высоты и имеющие в каждой критической точке f фиксированное направление нормали, можно соединить путем в пространстве всех таких погружений.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f_t: M \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, – гладкий путь в пространстве всех функций Морса на замкнутой поверхности M . Пусть $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f_0}(M, \mathbb{R}^3)$ – некоторое погружение M в \mathbb{R}^3 , реализующее простую функцию Морса f_0 как функцию высоты. Тогда существует гладкий путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех погружений M в \mathbb{R}^3 такой, что при любом t погружение α_t реализует функцию f_t как функцию высоты. Пространство всех таких путей $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, связно.

Доказательства теорем 6 и 7 мы приведем ниже. А пока выведем предложение 3 из этих теорем и из теоремы 4 (о связности пространства функций Морса с фиксированным числом минимумов и максимумов на сфере и с фиксированным порядком на множестве критических точек каждого типа). Идея этого доказательства будет затем продемонстрирована на примере выворачивания сферы наизнанку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Пусть $\alpha_0, \alpha_1: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – любые два погружения сферы в \mathbb{R}^3 . Покажем, что их можно соединить гладким путем в пространстве всех погружений $\text{Imm}(S^2, \mathbb{R}^3)$.

Шаг 1. Рассмотрим малую деформацию α_t , $t \in [0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1]$, погружений α_0 и α_1 , при которой их функции высоты $f_0, f_1: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ станут простыми функциями Морса. Для каждой из полученных функций высоты f_ε и $f_{1-\varepsilon}$ рассмотрим число p_+ минимумов и число q_+ максимумов, в которых положительная нормаль к погруженной поверхности направлена вверх, число p_- минимумов и число q_- максимумов, в которых положительная нормаль направлена вниз. Вообще говоря, для погружений α_ε и $\alpha_{1-\varepsilon}$ четверки чисел p_+, p_-, q_+ и q_- могут не совпадать. Однако эти четверки чисел нетрудно уравнивать для погружений $\alpha_{2\varepsilon}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ при помощи “рождений” нужного числа точек минимума и максимума у функций высоты с нужными направлениями положительных нормалей в них, взяв подходящие деформации α_t , $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon] \cup [1 - 2\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, погружений α_ε и $\alpha_{1-\varepsilon}$, см. рис. 15. Заметим, что в силу равенства (1) число r_+ и число r_- седловых точек функции высоты, в которых положительная нормаль направлена соответственно вверх и вниз, для погружений $\alpha_{2\varepsilon}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ также совпадают.

В частности, функции высоты $f_{2\varepsilon}$ и $f_{1-2\varepsilon}$ для построенных погружений $\alpha_{2\varepsilon}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ имеют одинаковое число минимумов, максимумов и седел, т.е. лежат в одном

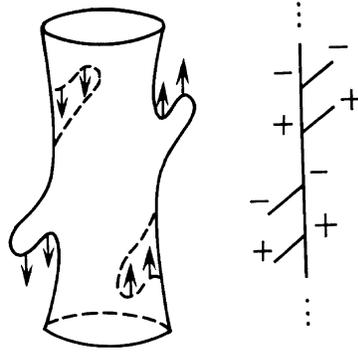


Рис. 15

и том же пространстве $F(S^2, p_+ + p_-, q_+ + q_-)$.

Шаг 2. Для любого погружения $\alpha: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ рассмотрим множество $C(f)$ критических точек его функции высоты f и разбиение этого множества на подмножества $C_+(f)$ и $C_-(f)$, в которых положительная нормаль к погруженной поверхности направлена соответственно вверх и вниз. Фиксируем любой порядок на множестве минимумов функции f , при котором все минимумы из $C_+(f)$ идут раньше всех минимумов из $C_-(f)$, и аналогичные порядки фиксируем на множестве максимумов и множестве седел функции f . Согласно теореме 4 функции $f_{2\varepsilon}$ и $f = f_{1-2\varepsilon}$ можно соединить путем f_t , $2\varepsilon \leq t \leq 1/2$, $f_{1/2} = f$, в пространстве $\tilde{F}(S^2, p_+ + p_-, q_+ + q_-)$ всех функций Морса, при котором сохраняется указанный порядок критических точек. В частности, множества $C_+(f_{2\varepsilon})$ и $C_-(f_{2\varepsilon})$ критических точек функции $f_{2\varepsilon}$ перейдут соответственно в множества $C_+(f)$ и $C_-(f)$.

Шаг 3. Согласно теореме 7 существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(S^2, \mathbb{R}^3)$, $2\varepsilon \leq t \leq 1/2$, в пространстве погружений сферы в \mathbb{R}^3 , который при каждом t реализует функцию Морса f_t как функцию высоты. Осталось заметить, что погружения $\alpha_{1/2}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ имеют одну и ту же функцию высоты $f = f_{1-2\varepsilon} = f_{1/2}$, причем для этих погружений направления нормалей в критических точках функции f совпадают (по построению на предыдущем шаге). То есть оба погружения $\alpha_{1/2}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$ принадлежат одному и тому же множеству $\text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$. Значит, согласно замечанию к теореме 6 существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$, $2\varepsilon \leq t \leq 1/2$, соединяющий погружения $\alpha_{1/2}$ и $\alpha_{1-2\varepsilon}$. А значит, исходные погружения α_0 и α_1 регулярно гомотопны. Предложение 3 доказано.

ПРИМЕР (построение выворачивания сферы наизнанку). Мы будем изображать погружение сферы в \mathbb{R}^3 схематически, в виде графа Рибба его функции высоты (рис. 16), которая предполагается простой функцией Морса. При этом в каждой вершине графа Рибба поместим метку $\varepsilon_i = \pm 1$, указывающую направление положительной нормали к погруженной поверхности в соответствующей критической точке. В нашем примере функция высоты будет иметь по две критические точки каждого типа, причем метки на этих двух точках будут противоположны. Значит, такой меченый граф Рибба вполне определяет погружение, так как (согласно следствию из леммы 10 и теореме 6) пространство всех погружений сферы в \mathbb{R}^3 , для которых функция высоты имеет заданный меченый граф Рибба, связно. А значит, согласно теореме 7 последовательность меченых графов Рибба (с естественным со-

ответствием между вершинами соседних графов) вполне определяет регулярную гомотопию погружений.

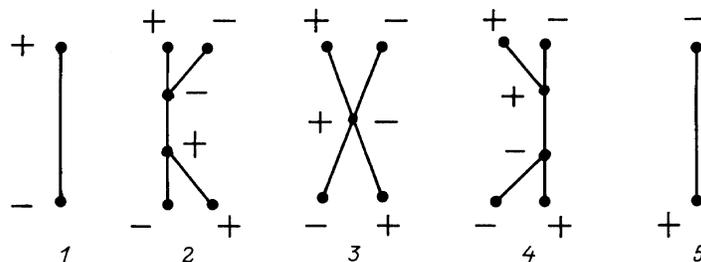


Рис. 16

Рассмотрим стандартное вложение $\alpha_0: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ сферы в \mathbb{R}^3 , при котором положительное поле нормалей направлено наружу (рис. 16.1), и другое вложение $\alpha_1: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, при котором положительное поле нормалей направлено внутрь сферы (рис. 16.5). Функции высоты f_0 и f_1 при этих погружениях являются простыми функциями Морса с двумя критическими точками – минимумом и максимумом, в которых направления нормалей противоположны.

Согласно алгоритму, описанному в доказательстве предложения 3, для построения регулярной гомотопии между погружениями α_0 и α_1 мы должны сначала уравнять число минимумов и максимумов функций f_0 и f_1 с учетом направления нормалей в них. Для этого “породим” по одному минимуму и максимуму у этих функций ($1 \rightarrow 2$ и $5 \rightarrow 4$ на рис. 16) путем “продавливания” сферы внутрь. В результате получим погружения α_ε и $\alpha_{1-\varepsilon}$, для которых функции высоты f_ε и $f_{1-\varepsilon}$ имеют одинаковые графы Рибба (2 и 4 на рис. 16) с одинаковыми метками на всех четырех конечных вершинах, но с противоположными метками на обеих внутренних вершинах.

Между функциями f_ε и $f_{1-\varepsilon}$ с отмеченными критическими точками существует очевидная изотопия $f_t, \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon$, а именно, перестройка типа IV (рис. 11), меняющая местами седловые критические значения. Согласно теореме 6 мы можем реализовать эту изотопию некоторой деформацией погружений $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t}(S^2, \mathbb{R}^3)$, $\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon$ ($2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ на рис. 16). Это завершает построение выворачивания сферы наизнанку.

Подведем итог. В указанной регулярной гомотопии имеются ровно пять моментов бифуркации, т.е. значений параметра, при которых функция высоты не является простой функцией Морса. А именно, два момента “рождения” критических точек, один момент существования двух критических точек на одной связной компоненте особой линии уровня и два момента “уничтожения” критических точек. На рис. 16 показаны следующие основные моменты регулярной гомотопии:

- 1 – стандартное вложение сферы в \mathbb{R}^3 с полем положительных нормалей, направленных наружу сферы;
- 1 \rightarrow 2 – две перестройки: “рождение” одного максимума функции высоты с отрицательным направлением нормали и “рождение” одного минимума функции высоты с положительным направлением нормали, при этом “рождаются” также два седла с теми же направлениями нормалей;

2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 – перестройка типа IV (см. рис. 11), меняющая местами значения функции высоты в двух седловых точках, после этой перестройки граф Рибба не изменился, но изменились направления нормалей в обеих седловых точках.

4 \rightarrow 5 – две перестройки: взаимное “уничтожение” максимума и седла функции высоты, в которых положительная нормаль направлена вверх, и взаимное “уничтожение” минимума и седла функции высоты, в которых положительная нормаль направлена вниз.

5 – стандартное вложение сферы в \mathbb{R}^3 с полем положительных нормалей, направленных внутрь сферы.

Для доказательства теорем 6 и 7 нам понадобится следующий известный факт из теории погружений окружности в плоскость. Рассмотрим пространство $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ всех погружений окружности в плоскость, т.е. пространство замкнутых путей $\gamma = \gamma(s)$ в плоскости, $\frac{d\gamma(s)}{ds} \neq 0$, где $s \in S^1$ – параметр на окружности. Пусть $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)_\kappa$ – подпространство в $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$, состоящее из всех погружений γ , для которых вектор скорости $\frac{d\gamma(s)}{ds}$ совершает κ оборотов вокруг начала координат, когда параметр $s \in S^1$ пробегает всю окружность, κ – любое целое число. Согласно теореме Уитни каждое пространство $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)_\kappa$ связно.

УТВЕРЖДЕНИЕ. а) *Фундаментальная группа пространства $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)_\kappa$ изоморфна группе \mathbb{Z} целых чисел.*

б) *Пусть $\gamma_t \in \text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$, $t \in S^1$, – любой замкнутый путь в пространстве всех погружений окружности в плоскость. Рассмотрим соответствующий путь Γ_t , $t \in S^1$, проходимый вектором скорости $\Gamma_t = \left. \frac{d\gamma_t(s)}{ds} \right|_{s=0}^\kappa$ погруженной окружности в точке $s = 0$ при $t \in S^1$. Тогда путь γ_t , $t \in S^1$, стягиваем в пространстве $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда число оборотов пути Γ_t , $t \in S^1$, вокруг начала координат равно нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. 1) Пусть f – гладкая функция с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности M . Любому погружению $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, реализующему f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей, поставим в соответствие некоторый коцикл $\Delta = \Delta_{\alpha, \alpha_0} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ в группе одномерных когомологий поверхности M , определяемый следующим образом.

Пусть $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ – любой цикл на поверхности, не проходящий через критические точки функции f . Рассмотрим на γ поле $\nu_\alpha|_\gamma$ положительных нормалей ν_α к погруженной поверхности и рассмотрим проекцию этого поля $\nu_{\alpha, \gamma} = \pi \circ \nu_\alpha|_\gamma$ на горизонтальную плоскость, где $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – проекция на горизонтальную плоскость. Определим теперь значение $\langle \Delta, \gamma \rangle$ коцикла $\Delta = \Delta_{\alpha, \alpha_0}$ на цикле γ , полагая его равным $\langle \Delta, \gamma \rangle = |\nu_{\alpha, \gamma}| - |\nu_{\alpha_0, \gamma}|$, где $|\nu_{\alpha, \gamma}|$ означает число оборотов вокруг нуля плоской кривой $\nu_{\alpha, \gamma}$. Такой коцикл будем называть различающим коциклом для погружений $\alpha, \alpha_0 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Нетрудно показать с помощью леммы 2, что функция $\gamma \mapsto \langle \Delta, \gamma \rangle$ действительно является коциклом, т.е. число $\langle \Delta, \gamma \rangle$ не меняется при замене цикла γ на гомологичный ему цикл, не проходящий через критические точки функции f . Заметим, что

любой связной компоненте в пространстве всех погружений $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, реализующих данную функцию f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках, отвечает фиксированный коцикл $\Delta = \Delta_{\alpha, \alpha_0} \in H^1(M, \mathbb{Z})$. Тем самым, построено отображение из множества связных компонент пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ в группу $H^1(M, \mathbb{Z})$ одномерных когомологий поверхности M .

2) Покажем, что построенное отображение взаимно однозначно.

2а) Пусть $\alpha_0, \alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ – два погружения поверхности в \mathbb{R}^3 , реализующие функцию f как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках, причем различающий коцикл $\Delta_{\alpha_0, \alpha} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ для этих погружений равен нулю. Покажем, что эти погружения можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, $\alpha_1 = \alpha$, в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты. Мы тем самым покажем, что указанное отображение является вложением и, в частности, что в случае сферы пространство $\text{Imm}_{f,+}(S^2, \mathbb{R}^3)$ связно. Пусть x_1, \dots, x_N – критические точки функции f . Рассмотрим граф Рибба $W = W_f$ функции f и естественную проекцию $\sigma: M \rightarrow W$ этого графа на поверхность M . Пусть $v_i = \sigma(x_i)$ – вершины, r_j – ребра графа W .

ЛЕММА 12 (об отсутствии нулевого и первого препятствий). *Если $\Delta_{\alpha_0, \alpha} = 0$, то существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений, реализующих f как функцию высоты, такой, что погружение α_1 совпадает с α в окрестностях всех особых линий уровня $K_i = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U_i – достаточно малая окрестность критической точки x_i функции f , $1 \leq i \leq N$. Так как направления положительных нормалей в этой точке для погружений α_0 и α совпадают, нетрудно построить путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1/2$, в пространстве погружений M в \mathbb{R}^3 , реализующих f как функцию высоты, такой, что погружения $\alpha_{1/2}$ и α совпадают в каждой окрестности U_i , $1 \leq i \leq N$. Если x_i – точка минимума или максимума, то ее особая линия уровня $f^{-1}(v_i)$ состоит из одной точки x_i и, значит, содержится в U_i .

Пусть критическая точка x_i не является точкой минимума или максимума, $c_i = f(x_i)$ – ее критическое значение. Тогда ее особая линия уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ – это связный ориентированный граф, вершинами которого являются критические точки, а ребрами – связные компоненты K_j множества $K \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$. При этом ориентация любой линии уровня определяется так, чтобы векторное поле $\text{grad } f$ являлось полем положительных нормалей к ней, если M ориентируемо (см. §4), или как в §5, если M неориентируемо. Рассмотрим теперь связную окрестность $P = P_i = f^{-1}[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$ графа K (т.е. атом), где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Будем теперь считать, что погружения α_0 и α заданы в этой поверхности P с краем.

Рассмотрим пространство $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, аналогичное $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Для любых двух погружений $\alpha, \alpha' \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$ рассмотрим различающий коцикл $\Delta_{\alpha, \alpha'} \in H^1(P, \mathbb{Z})$, определяемый аналогичным образом. По условию леммы имеем $\Delta_{\alpha_0, \alpha} = 0$, а значит, $\Delta_{\alpha_{1/2}, \alpha} = 0$. Покажем, что погружения $\alpha_{1/2}$ и α принадлежат одной компоненте связности пространства $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$.

Для погружения α рассмотрим соответствующее погружение $\alpha|_K$ особой линии уровня K в горизонтальную плоскость Π_c и добавим к каждому погружен-

ному ребру $\alpha(K_j)$ несколько петель, алгебраическое число которых мы обозначим через β_j (эти числа будут построены ниже). Рассмотрим новое погружение $\alpha': P \rightarrow \mathbb{R}^3$, реализующее функцию f на P как функцию высоты и совпадающее на графе K с погружением α с учетом добавленных петель. В этом случае соответствующую коцепь $\beta = \beta_{\alpha, \alpha'} \in C^1(K, \mathbb{Z})$ графа K будем называть различающей коцепью для погружений α и α' , где α'' – любое погружение, принадлежащее той же связной компоненте пространства $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, что и погружение α' . Нетрудно показать, используя теорему Уитни, что числа β_j всегда можно подобрать так, чтобы погружение α' можно было связать путем в пространстве $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$ с любым наперед заданным погружением α'' из $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, в частности с погружением $\alpha'' = \alpha_{1/2}$. Заметим, что граф K является деформационным ретрактом поверхности с краем P , а значит, отображение включения $K \hookrightarrow P$ индуцирует изоморфизм $H^1(K, \mathbb{Z}) \simeq H^1(P, \mathbb{Z})$. Легко видеть, что образ коцикла $[\beta]$ при этом изоморфизме в точности совпадает с различающим коциклом $\Delta_{\alpha, \alpha'} = \Delta_{\alpha, \alpha_{1/2}} \in H^1(P, \mathbb{Z})$, а значит, по условию леммы равен нулю. Тем самым, имеем $[\beta_{\alpha, \alpha_{1/2}}] = \Delta_{\alpha, \alpha_{1/2}} = \Delta_{\alpha, \alpha_0} = 0$.

Заметим, что из теоремы Уитни нетрудно вывести, что для любых двух погружений $\alpha, \alpha' \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$ класс когомологий $[\beta] \in H^1(K, \mathbb{Z})$ различающей коцепи $\beta = \beta_{\alpha, \alpha'}$ для этих погружений равен нулю тогда и только тогда, когда погружения α и α' принадлежат одной компоненте связности пространства $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$. В частности, это верно для погружений α и $\alpha_{1/2}$.

Таким образом, в достаточно малых окрестностях $P = P_i$ особых линий уровня функции f (т.е. в атомах) погружения $\alpha_{1/2}$ и α действительно можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, $1/2 \leq t \leq 1$, $\alpha_1 = \alpha$. Нетрудно продолжить построенные погружения на всю поверхность M и получить тем самым некоторый путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $1/2 \leq t \leq 1$. Лемма полностью доказана.

Рассмотрим теперь открытые круговые цилиндры $V_j = \sigma^{-1}(r_j)$ в M , получающиеся выкидыванием из поверхности M всех особых линий уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f . Зафиксируем на цилиндре V_j произвольную кривую γ_j , соединяющую две критические точки функции f на противоположных основаниях цилиндра, вдоль которой функция f строго возрастает.

Для любого погружения $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ рассмотрим на образе $\alpha(\gamma_j)$ кривой γ_j поле $\nu_\alpha|_{\gamma_j}$ положительных нормалей ν_α к погруженной поверхности. Рассмотрим проекцию этого поля $\nu_{\alpha, r_j} = \pi \circ \nu_\alpha|_{\gamma_j}$ на горизонтальную плоскость, где $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – проекция на горизонтальную плоскость. Так как по построению погружение α_1 совпадает с α вблизи особых линий уровня функции f (см. лемму 12), то пути ν_{α_1, r_j} и ν_{α, r_j} совпадают вблизи своих концов и не проходят через нуль (т.е. начало координат). Значит, можно рассмотреть замкнутый путь $\nu_j = \nu_{\alpha_1, r_j}^{-1} \circ \nu_{\alpha, r_j}$ в горизонтальной плоскости, не проходящий через нуль. Построим теперь на ребре r_j графа W метку μ_j , равную числу оборотов вокруг нуля плоской кривой ν_j . Можно показать, что число μ_j не зависит от способа вложения кривой γ_j в цилиндр V_j .

Из упомянутого выше утверждения легко вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 13 (о втором препятствии). *Для того чтобы погружения α_1 и α можно было соединить путем в пространстве всех погружений, реализую-*

щих f как функцию высоты и постоянных в окрестностях всех особых линий уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$, $1 \leq i \leq N$, функции f , необходимо и достаточно, чтобы все числа μ_j были равны нулю.

Таким образом, если все метки μ_j на ребрах графа W равны нулю, то заданные погружения α_1 и α можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $1 \leq t \leq 2$, $\alpha_2 = \alpha$, в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты, и теорема 6 в этом случае доказана.

Предположим, что не все метки μ_j равны нулю. Изменим погружение α_1 в малых окрестностях P_i особых линий уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ (атомах), $1 \leq i \leq N$. А именно, рассмотрим композицию $\alpha_2 = R_\varphi \circ \alpha_1$ погружения α_1 и поворота R_φ горизонтальной плоскости на некоторый угол $\varphi = \varphi(f|_{P_i})$, зависящий от значения функции f в P_i , так что $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на поверхности, равная нулю вне окрестностей P_i и тождественно равная $2\pi\kappa_i$ в некоторой меньшей окрестности особой линии уровня $\sigma^{-1}(v_i)$, $1 \leq i \leq N$, где числа $\kappa_i \in \mathbb{Z}$ будут построены ниже. Ясно, что существует путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $1 \leq t \leq 2$, соединяющий новое погружение α_2 с исходным погружением α_1 , поскольку можно положить $\alpha_t = R_{(t-1)\varphi} \circ \alpha_1$. Заметим, что по построению оба погружения α_1 и α_2 совпадают с α в окрестностях особых линий уровня $\sigma^{-1}(v_i)$, $1 \leq i \leq N$.

Пусть при замене α_1 на α_2 метки μ_j на ребрах графа W (“препятствующие” регулярной гомотопности этих погружений и α) заменились на некоторые метки μ'_j .

ЛЕММА 14 (о различающей). *Рассмотрим функции $\mu(r_j) = \mu_j$ и $\kappa(v_i) = \kappa_i$ как одномерную и нульмерную коцепи графа W . Тогда $\mu' = \mu + \delta\kappa$, где δ — кограничный оператор в пространстве коцепей.*

Доказательство проводится непосредственно.

Таким образом, препятствием к регулярной гомотопности погружений α_1 и α в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты, служит не сама 1-коцепь μ , а, самое большее, лишь отвечающий ей элемент $[\mu] \in H^1(W, \mathbb{Z})$ группы одномерных когомологий графа W .

Ясно, что в случае $\Delta_{\alpha_0, \alpha} = 0$ имеем $\Delta_{\alpha_1, \alpha} = 0$, откуда $[\mu] = 0$. Возьмем в качестве “различающих” меток κ_i (чисел поворотов) в вершинах графа W такие числа, чтобы кограница $\delta\kappa$ соответствующей нульмерной коцепи $\kappa \in C^0(W, \mathbb{Z})$ была равна $-\mu \in C^1(W, \mathbb{Z})$. Тогда согласно лемме 14 для погружения α_2 все метки μ_j на ребрах W равны нулю. Значит, по лемме 13 погружения α_2 и α можно соединить путем $\alpha_t \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $2 \leq t \leq 3$, $\alpha_3 = \alpha$, в пространстве всех погружений, реализующих f как функцию высоты.

Итак, мы доказали, что если для двух погружений $\alpha_0, \alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ различающий коцикл $\Delta_{\alpha_0, \alpha} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ равен нулю, то эти погружения принадлежат одной связной компоненте пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$. То есть построенное отображение является вложением.

2б) Пусть теперь $\Delta \in H^1(M, \mathbb{Z})$ — любой коцикл на поверхности M . Построим погружение $\alpha \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, для которого различающий коцикл $\Delta_{\alpha, \alpha_0}$ совпадает с Δ .

Рассмотрим клеточное разбиение поверхности M , отвечающее функции f . А именно, одномерным остовом клеточного разбиения служит объединение

особых линий уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f и построенных выше кривых γ_j . В частности, нульмерные клетки разбиения совпадают с критическими точками функции f , а одномерные клетки бывают двух типов: любая одномерная клетка либо лежит в атоме P_i и тогда совпадает с ребром K_j соответствующего графа $K = \sigma^{-1}(v_i)$, либо проектируется в ребро r_j молекулы W и тогда совпадает с кривой γ_j . Двумерные клетки разбиения отвечают ребрам r_j графа W и являются квадратами, у которых две противоположные стороны склеены по кривой γ_j , образуя цилиндр, а две другие стороны примыкают к двум атомным ребрам.

Рассмотрим произвольную коцепь построенного разбиения, отвечающую данному коциклу $\Delta \in H^1(M, \mathbb{Z})$, и поставим на ребрах разбиения соответствующие целочисленные метки. В результате мы получим метки β_j на ребрах K_j графов $K = \sigma^{-1}(v_i)$, образующие некоторые коциклы $\beta \in H^1(K, \mathbb{Z})$, и метки μ_k на ребрах r_k графа Рибба W , образующие некоторый коцикл $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$. Построение погружения α разобьем на два шага.

Шаг 1. Заметим, что атомные коциклы $\beta \in H^1(K, \mathbb{Z})$ на разных графах $K = \sigma^{-1}(v_i)$ не произвольны, а согласованы друг с другом таким образом, что для любого цилиндра $V_k = \sigma^{-1}(r_k)$ сумма меток β_j по всем кривым K_j из верхнего основания цилиндра равна сумме меток β_j по всем кривым K_j из нижнего основания цилиндра. Рассмотрим кривые K_j и γ_k на поверхности M . Изменим погружение $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ вне малых окрестностей критических точек функции f и кривых γ_k , добавив к каждой неособой линии уровня $K_j \subset K = \sigma^{-1}(v_i)$, погруженной в горизонтальную плоскость, несколько петель, алгебраическое число которых равно β_j . Такое погружение α_1 существует в силу теоремы Уитни, так как числа β_j на соседних атомах согласованы, а на каждом цилиндре $V = V_k$ лежит лишь одна кривая γ_k , которая пересекает каждую неособую линию уровня $\sigma^{-1}(a)$ цилиндра V лишь в одной точке.

Шаг 2. Рассмотрим коцикл $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$ графа W . Изменим построенное на предыдущем шаге погружение $\alpha_1 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ в соответствии с коциклом $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$. Более точно, в каждом цилиндре $V = V_k$ рассмотрим гладкую функцию $\varphi = \varphi_k(a)$, тождественно равную нулю вблизи нижнего основания цилиндра и $2\pi\mu_j$ вблизи верхнего основания. Для каждого цилиндра $V = V_k$ рассмотрим композицию $R_\varphi \circ \alpha_1$ погружения α_1 и поворотов R_φ горизонтальных плоскостей Π_a на угол $\varphi = \varphi_k(a)$. В результате получим некоторое новое погружение $\alpha_2 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$.

Закончим доказательство теоремы 6. Итак, мы определили коциклы $\beta \in H^1(K, \mathbb{Z})$ на графах $K = \sigma^{-1}(v_i)$ и коцикл $\mu \in H^1(W, \mathbb{Z})$ на графе Рибба W функции f , отвечающие коциклу Δ на поверхности M . Мы показали, как по этим коциклам и погружению α_0 построить новое погружение $\alpha = \alpha_2 \in \text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Легко видеть, что построенное погружение α является искомым, т.е. различающий коцикл $\Delta_{\alpha, \alpha_0}$ для погружений α и α_0 в точности равен Δ . Теорема 6 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Простая модификация доказательства показывает, что теорема 6 верна и для поверхностей P с краем. При этом предполагается, что на каждой граничной окружности поверхности P функция f постоянна и не имеет критических точек.

2) Пусть \tilde{P} – замкнутая поверхность, полученная из поверхности P заклеиванием каждой ее граничной окружности диском. Обозначим через $\text{Imm}_{f,+,\partial}(P, \mathbb{R}^3)$ подпространство в пространстве $\text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, состоящее из всех погружений, для которых фиксированы также индексы всех граничных окружностей, погруженных в горизонтальные плоскости. Тогда аналогичное доказательство показывает, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством связных компонент пространства $\text{Imm}_{f,+,\partial}(P, \mathbb{R}^3)$ и группой $H^1(\tilde{P}, \mathbb{Z})$ одномерных когомологий замкнутой поверхности \tilde{P} . В частности, если поверхность \tilde{P} является сферой, то каждое пространство $\text{Imm}_{f,+,\partial}(P, \mathbb{R}^3)$ связно.

3) Рассмотрим любую связную компоненту $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)_0$ пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$, а значит, и всего пространства $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ погружений поверхности M в \mathbb{R}^3 с фиксированной функцией высоты f . Из приведенного выше утверждения аналогично доказательству теорем 2, 3 и 6 легко выводится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6'. Пусть $\alpha_t \in \text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$, $t \in S^1$, – любой замкнутый путь в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$. Выберем любую точку $x \in M$, не являющуюся критической точкой функции f . Рассмотрим соответствующий путь $\nu_t = \pi(\nu_{\alpha_t}(x))$, $t \in S^1$, проходимый проекцией на горизонтальную плоскость вектора нормали к погруженной поверхности в точке x , где $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – проекция на горизонтальную плоскость. Тогда путь α_t , $t \in S^1$, стягиваем в пространстве $\text{Imm}_f(M, \mathbb{R}^3)$ тогда и только тогда, когда число оборотов пути ν_t , $t \in S^1$, вокруг начала координат равно нулю.

В частности, согласно теореме 6' фундаментальная группа каждой связной компоненты пространства $\text{Imm}_{f,+}(M, \mathbb{R}^3)$ изоморфна группе \mathbb{Z} целых чисел. Можно показать, что каждая такая связная компонента в действительности гомотопически эквивалентна окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть t_1, \dots, t_N – моменты перестроек функций Морса, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = 1$. То есть при любом k , $0 \leq k \leq N$, все функции Морса f_t , $t_k < t < t_{k+1}$, имеют один и тот же граф Рибба W_k , причем для каждой вершины v_i этого графа число критических точек, принадлежащих соответствующей особой линии уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ функции f_t , постоянно при $t_k < t < t_{k+1}$. Ясно, что теорема будет доказана, если мы проверим ее для $N = 0$ и $N = 1$.

1) Пусть $N = 0$, т.е. все функции Морса f_t имеют один и тот же граф Рибба W , причем для каждой вершины $v_i \in W$ число критических точек на соответствующей особой линии уровня $K = \sigma^{-1}(v_i)$ не меняется. Рассмотрим клеточное разбиение поверхности M , отвечающее функции f_0 , см. доказательство теоремы 6. Нетрудно построить гладкую деформацию одномерного остова этого разбиения, являющуюся одномерным остовом функции f_t . С помощью этой деформации одномерного остова легко построить гладкую деформацию диффеоморфизмов $\varphi_t: M \rightarrow M$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi_0 = \text{id}$, поверхности M на себя, переводящих связные компоненты линий уровня функции f_0 в связные компоненты линий уровня функции f_t , $0 \leq t \leq 1$. Тогда в качестве искомого погружения $\alpha_t: M \rightarrow \mathbb{R}^3$, реализующего f_t как функцию высоты, можно взять композицию погружения $\alpha_0 \circ \varphi_t^{-1}$ и сдвига каждой точки $x \in M$ по вертикали на величину $f_t \circ \varphi_t - f_0$, постоянную на каждой связной компоненте линии уровня функции f_0 . Итак, при $N = 0$ теорема доказана.

2) Пусть $N = 1$. Не ограничивая общности, мы будем предполагать, что перестройка графа Рибба происходит в момент $t_1 = 1/2$. Рассмотрим пространство $\text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$, содержащее данное погружение α_0 . Так как при изотопии функции Морса не происходит “рождений” и “уничтожений” критических точек, то пространство $\text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$ однозначно определяет пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(P, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, для которых направление нормали в каждой критической точке не меняется.

Положим $f = f_{1/2}$. Согласно критерию из теоремы 2 существует погружение $\alpha'_{1/2} \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$. Рассмотрим малую деформацию $\alpha'_t: M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $1/2 - \varepsilon \leq t \leq 1/2 + \varepsilon$, этого погружения, где α'_t получается из $\alpha'_{1/2}$ сдвигом каждого уровня $f^{-1}(a)$ по вертикали на величину $f_t - f$. Ясно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ отображение α'_t является погружением и $\alpha'_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(P, \mathbb{R}^3)$. Построим в соответствии с рассмотренным случаем $N = 0$ любое продолжение $\alpha'_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$ этой деформации на весь отрезок $0 \leq t \leq 1$.

Теперь рассмотрим различающий коцикл $\Delta_{\alpha_0, \alpha'_0} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ для исходного погружения α_0 и построенного погружения $\alpha'_0 \in \text{Imm}_{f_0,+}(P, \mathbb{R}^3)$. Тогда согласно теореме 6 существует погружение $\alpha''_{1/2} \in \text{Imm}_{f,+}(P, \mathbb{R}^3)$, для которого $\Delta_{\alpha_0, \alpha'_0} = \Delta_{\alpha''_{1/2}, \alpha'_{1/2}}$. Заменим теперь погружение $\alpha'_{1/2}$ на погружение $\alpha''_{1/2}$ и рассмотрим для него аналогичный путь $\alpha''_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

Осталось заметить, что для любого пути f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве гладких функций с конечным числом критических точек верно следующее. Для любой пары путей $\alpha'_t, \alpha''_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, различающий коцикл $\Delta_{\alpha'_t, \alpha''_t} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ постоянен. Тем самым, $\Delta_{\alpha_0, \alpha'_0} = \Delta_{\alpha''_0, \alpha'_0}$, а значит, $\Delta_{\alpha_0, \alpha''_0} = 0$. Снова применяя теорему 6, получаем путь $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, $\alpha_1 = \alpha''_0$. Немного пошевелив этот путь, легко построить искомую деформацию $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, совпадающую с построенным путем $\alpha''_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$ при $\varepsilon \leq t \leq 1$. Аналогично доказывается, что пространство всех путей вида $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, связно. Теорема 7 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть f_t , $0 \leq t \leq 1$, – любой путь в пространстве всех гладких функций с конечным числом критических точек на замкнутой ориентируемой поверхности M . Тогда аналогичное доказательство показывает, что справедливо обобщение теоремы 7. Рассмотрим множество C , состоящее из критических точек этих функций. Это множество является графом в цилиндре $M \times [0, 1]$ – прямом произведении поверхности на отрезок. Разобьем множество C на два непересекающихся замкнутых подмножества C_+ и C_- и рассмотрим отвечающие этому разбиению пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, погружений, реализующих f_t как функцию высоты с заданными направлениями нормалей в критических точках. В неориентируемом случае построение аналогично, только пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, определяются не разбиением графа C на два подграфа, а заданием некоторой ориентации в окрестности графа C в $M \times [0, 1]$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7'. Пусть f_t , $0 \leq t \leq 1$, – любой путь в пространстве всех гладких функций с конечным числом критических точек на замкнутой поверхности M (ориентируемой или неориентируемой). Пусть задано погружение

$\alpha_0 \in \text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Тогда существует путь вида $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений M в \mathbb{R}^3 , причем множество всех таких путей связно.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Пусть $f_t: M \rightarrow \mathbb{R}$ – путь общего положения в пространстве всех гладких функций на M , а не только функций Морса, т.е. допускаются “рождения” и “уничтожения” критических точек. Тогда множество $C \subset M \times [0, 1]$, состоящее из критических точек этих функций, является гладким одномерным многообразием в $M \times [0, 1]$, т.е. распадается на гладкие окружности и дуги с концами на основаниях $M \times \{0\}$ и $M \times \{1\}$ цилиндра $M \times [0, 1]$. Разобьем это множество на непересекающиеся замкнутые подмножества C_+ и C_- и рассмотрим отвечающие этому разбиению пространства $\text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$. Пусть задано погружение $\alpha_0 \in \text{Imm}_{f_0,+}(M, \mathbb{R}^3)$. Тогда согласно теореме 7' путь вида $\alpha_t \in \text{Imm}_{f_t,+}(M, \mathbb{R}^3)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве погружений M в \mathbb{R}^3 вполне определен путем, проходящим его функцией высоты.

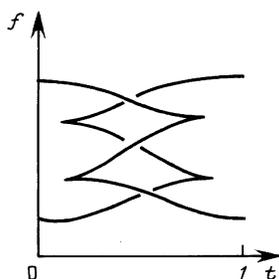


Рис. 17

2) Для построенного выше выворачивания сферы наизнанку множество $C \subset S^2 \times [0, 1]$, образуемое критическими точками функции высоты f_t , $0 \leq t \leq 1$, состоит из двух дуг C_+ и C_- , отвечающих точкам сферы, в которых положительная нормаль к погруженной сфере направлена вверх и вниз соответственно. При этом проекция множества C на плоскость f, t имеет вид как на рис. 17. Из этого рисунка видно, что минимальные, седловые и максимальные критические значения функций высоты f_t лежат в трех попарно не пересекающихся интервалах оси z . Перестройка $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ заключается в том, что оба минимальных значения, оба седловых значения и оба максимальных значения функции f_t меняются местами.

§ 8. Теорема о линейной связности пространства функций Морса на двумерных поверхностях

В этом параграфе мы дадим доказательство следующего известного факта: пространство функций Морса с фиксированным числом минимумов и максимумов на замкнутой двумерной поверхности линейно связно. Нам не удалось найти доказательство этого утверждения в литературе. Поэтому мы приведем здесь это доказательство (представляющее и самостоятельный интерес), следуя С. В. Матвееву.

Рассмотрим замкнутую двумерную поверхность M . Обозначим через $F_0(M, p, q)$ совокупность всех функций Морса на этой поверхности, имеющих

фиксированное число p точек локальных минимумов и фиксированное число q точек локальных максимумов, причем все эти точки предполагаются фиксированными на поверхности M .

ТЕОРЕМА 8. *Если M – любая связная замкнутая двумерная поверхность, то пространство функций Морса $F_0(M, p, q)$ линейно связно при любых значениях p и q . Другими словами, любые две функции Морса f_0 и f_1 на поверхности M , у которых все точки минимумов и максимумов совпадают, можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в том же пространстве $F_0(M, p, q)$ функций с фиксированным расположением минимумов и максимумов, в частности, в пространстве всех функций Морса на поверхности M (без “рождений” и “уничтожений”).*

Эту теорему полезно переформулировать на языке поверхностей с краем. Такие поверхности, снабженные функцией Морса, постоянной на граничных окружностях и имеющей лишь седловые точки, называются *седловыми атомами*. Поставим задачу более точно.

Пусть P – поверхность с краем, граничные компоненты которой разбиты на два класса $\partial_+ P$ и $\partial_- P$ положительных и отрицательных окружностей соответственно. Пусть имеется p отрицательных окружностей и q положительных. Обозначим через $F(P)$ пространство всех функций Морса f на поверхности P со следующими свойствами:

- 1) функция f имеет лишь седловые критические точки на поверхности P ;
- 2) функция f не имеет критических точек на границе поверхности;
- 3) функция f принимает значение $+1$ на всех q положительных компонентах границы и -1 на всех p отрицательных компонентах границы.

ТЕОРЕМА 8'. *Пространство $F(P)$ функций Морса указанного вида на атоме P линейно связно.*

КОММЕНТАРИЙ. Другими словами, любые две функции Морса f_0 и f_1 , имеющие лишь седловые критические точки на поверхности P и принимающие одинаковые значения: $+1$ на компонентах границы $\partial_+ P$ и -1 на компонентах границы $\partial_- P$, можно соединить гладким путем f_t , $0 \leq t \leq 1$, в пространстве функций Морса того же типа, т.е. внутри пространства $F(P)$. В частности, никаких рождений и уничтожений критических точек в процессе такой гомотопии не происходит.

Развивая идеи С. В. Матвеева доказательства теорем 8 и 8', мы докажем следующие усиления этого результата.

Рассмотрим пространство $\tilde{F}_0(M, p, q)$ функций Морса f со следующими свойствами на замкнутой двумерной поверхности M (оно аналогично пространству $\tilde{F}(M, p, q)$, рассмотренному в § 6):

- 1) функция f имеет p точек локальных минимумов и q точек локальных максимумов;
- 2) все точки минимумов и максимумов функции f предполагаются фиксированными на поверхности M ;
- 3) на множестве всех седловых критических точек функции f задано и фиксировано отношение порядка, или нумерация.

Такую функцию Морса f можно назвать *функцией с нумерацией* или *нумерованной функцией*.

Ясно, что пространство $\tilde{F}_0(M, p, q)$ является накрывающим пространством для пространства $F_0(M, p, q)$. На пространстве $\tilde{F}_0(M, p, q)$ очевидным образом действует группа перестановок S_r . Здесь r — число седловых критических точек функции f . Ясно, что $r = p + q - \chi(M)$, где $\chi(M) = 2 - 2g$ или $2 - \mu$ — эйлерова характеристика поверхности M , g и μ — род поверхности M (в ориентируемом и неориентируемом случае соответственно). Факторизуя пространство $\tilde{F}_0(M, p, q)$ по действию этой группы, мы и получаем пространство $F_0(M, p, q)$. Слой получившегося накрытия изоморфен группе S_r .

Любая изотопия f_t , $0 \leq t \leq 1$, функций Морса, лежащих в пространстве $F_0(M, p, q)$, однозначно определяет изотопию в накрывающем пространстве $\tilde{F}_0(M, p, q)$ нумерованных функций такую, что при непрерывном изменении положения критических точек на поверхности сохраняется их отношение порядка, т.е. нумерация.

Рассмотрим еще одно пространство $F_{+,0}(M, p, q)$ функций Морса f со свойствами 1), 2) и 3') на замкнутой двумерной поверхности M , где свойство 3') определяется так. Зафиксируем на поверхности M произвольную риманову метрику и в каждой седловой критической точке функции $f \in F_0(M, p, q)$ рассмотрим неориентированную гладкую дугу, образованную двумя сепаратрисами, входящими в эту критическую точку (эту дугу трансверсально пересекает другая гладкая дуга, образованная двумя выходящими сепаратрисами, мы ее не будем рассматривать). Мы будем называть эту дугу для краткости сепаратрисной дугой.

3') В каждой седловой критической точке функции Морса $f \in F_0(M, p, q)$ фиксирована ориентация сепаратрисной дуги.

Назовем такую ориентацию *оснащением* седловой критической точки функции f , а саму такую функцию Морса f назовем *оснащенной*. Полученное пространство оснащенных функций Морса обозначим через $F_{+,0}(M, p, q)$. Ясно, что пространство $F_{+,0}(M, p, q)$ является накрывающим пространством для пространства $F_0(M, p, q)$ со слоем, изоморфным группе $(\mathbb{Z}_2)^r$.

ТЕОРЕМА 9. *Если M — любая связная замкнутая двумерная поверхность, то пространство $\tilde{F}_0(M, p, q)$ нумерованных функций Морса и пространство $F_{+,0}(M, p, q)$ оснащенных функций Морса линейно связны при любых значениях p и q .*

Поскольку точки минимумов и максимумов предполагаются фиксированными на поверхности M , то теорему 9 можно переформулировать на языке атомов P , выбросив из поверхности M малые диски, являющиеся окрестностями точек минимумов и максимумов. Продеформируем функцию так, чтобы в процессе деформации функция оставалась морсовской и ее линии уровня не менялись, а в результате деформации функция принимала значения ± 1 на границе P . В результате получится атом P с функцией Морса f на нем, имеющей лишь седловые критические точки. Теорема 9 утверждает в действительности следующее.

ТЕОРЕМА 9'. *Любые две нумерованные функции Морса f_0 и f_1 , заданные на одном и том же атоме P , могут быть гладко продеформированы друг в друга посредством изотопии, неподвижной на краю атома. При этом нумерация седловых точек функции f_0 перейдет в нумерацию седловых точек функции f_1 . Аналогично, любые две оснащенные функции Морса f_0 и f_1 ,*

заданные на одном и том же атоме P , могут быть гладко продеформированы друг в друга посредством изотопии, неподвижной на краю атома. При этом оснащения седловых точек функции f_0 перейдут в оснащения седловых точек функции f_1 .

Теоремы 9 и 9' можно еще усилить. Рассмотрим пространство $\tilde{F}_{+,0}(M, p, q)$ оснащено-нумерованных функций Морса. т.е. пространство нумерованных функций $f \in \tilde{F}_0(M, p, q)$, в каждой седловой точке которых фиксировано оснащение – ориентация сепаратрисной дуги. Ясно, что это пространство является накрывающим пространством над пространством $F_0(M, p, q)$ со слоем, изоморфным группе $S_r \times (\mathbb{Z}_2)^r$. Обозначим через $\tilde{F}_{+,0}(M, p, q)$ пространство нумерованных функций Морса, для которых фиксированы оснащения не всех седловых точек, а всех, кроме одной (скажем, последней).

ТЕОРЕМА 10. а) Если M – произвольная связная замкнутая двумерная поверхность, то пространство $\tilde{F}_{+,0}(M, p, q)$ оснащено-нумерованных функций Морса распадается на две компоненты линейной связности.

б) Если M – любая связная замкнутая двумерная поверхность, то пространство $\tilde{F}_{+,0}(M, p, q)$ оснащено-нумерованных функций Морса, для которых не фиксируется оснащение одной седловой точки, линейно связно.

Обозначим через $\tilde{F}_+(P)$ пространство оснащено-нумерованных функций Морса f , заданных на атоме P . Обозначим через $\tilde{F}_{+,0}(P)$ пространство нумерованных функций Морса, для которых фиксированы оснащения не всех седловых точек, а всех, кроме одной (скажем, последней). На языке атомов теорема 10 формулируется так.

ТЕОРЕМА 10'. а) Для любого атома P пространство $\tilde{F}_+(P)$ оснащено-нумерованных функций Морса f , заданных на этом атоме, распадается на две компоненты линейной связности.

б) Для любого атома P пространство $\tilde{F}_{+,0}(P)$ оснащено-нумерованных функций Морса f , для которых не фиксируется оснащение одной седловой точки, линейно связно.

Другими словами, любые две оснащено-нумерованные функции Морса f_0 и f_1 , для которых не фиксируется оснащение одной седловой точки, заданные на одном и том же атоме P , могут быть гладко продеформированы друг в друга посредством изотопии, неподвижной на краю атома. При этом фиксированные оснащения и нумерация седловых точек функции f_0 перейдут в фиксированные оснащения и нумерацию седловых точек функции f_1 .

Как уже отмечалось, теоремы 8 и 8' эквивалентны. Поэтому для их доказательства нам достаточно доказать теорему 8' о связности пространства функций Морса на фиксированном атоме P . Для доказательства теоремы 8' введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть G – замкнутое подмножество поверхности P с краем. Регулярной окрестностью G в P назовем малую (т.е. содержащуюся в ε -окрестности, где ε достаточно мало) окрестность U подмножества G в P такую, что граница ∂U этой окрестности распадается на гладкие дуги, причем $[U] \setminus G$ диффеоморфно $(\partial U) \times (0, 1]$, где $[U]$ – замыкание U в P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 8 и 8' (С.В. Матвеев). Разобьем доказательство теорем на три шага.

Шаг 1. Рассмотрим атом P , т.е. поверхность с краем, граничные компоненты которой разбиты на два класса ∂_+P и ∂_-P положительных и отрицательных окружностей соответственно. Зафиксируем на атоме P произвольную риманову метрику. Рассмотрим произвольную функцию Морса $f \in F(P)$ на этом атоме, т.е. функцию Морса на поверхности P со следующими свойствами:

- 1) функция f имеет лишь седловые критические точки на поверхности P ;
- 2) функция f не имеет критических точек на границе поверхности;
- 3) функция f принимает значение $+1$ на всех p положительных компонентах границы и -1 на всех q отрицательных компонентах границы.

Пусть x_1, \dots, x_r – (седловые) критические точки функции f . Для каждой критической точки x_i рассмотрим гладкую неориентированную сепаратрисную дугу s_i , т.е. дугу, образованную входящими в эту точку траекториями векторного поля $\text{grad } f$. Ясно, что каждый конец сепаратрисной дуги s_i лежит либо на ∂_-P , либо в некоторой другой седловой точке x_j функции f , где $f(x_j) < f(x_i)$. Функцию Морса $f \in F(P)$ назовем хорошей, если оба конца каждой сепаратрисной дуги s_i лежат на ∂_-P . Ясно, что с помощью достаточно малой изотопии любой функции Морса f можно добиться, чтобы эта функция стала хорошей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Разрезом* атома P называется набор непересекающихся простых дуг s_1, \dots, s_r в P со следующими свойствами:

- 1) внутренность каждой дуги s_i лежит внутри P , а концы этой дуги лежат на ∂_-P ;
- 2) дополнение к $\partial_-P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r$ в поверхности P гомеоморфно $(\partial_+P) \times (0, 1]$, т.е. дуги s_1, \dots, s_r разбивают атом P на непересекающиеся плоские кольца.

Объединение дуг разреза s_1, \dots, s_r и отрицательных окружностей ∂_-P назовем *узором* на атоме P .

ЛЕММА 15. *Для любой хорошей функции Морса f набор сепаратрисных дуг s_1, \dots, s_r является разрезом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпустим из верхнего края ∂_+P поверхности P интегральные траектории векторного поля $-(f + 1) \text{grad } f$. Такие траектории определяют диффеоморфизм между $P \setminus (\partial_-P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r)$ и $(\partial_+P) \times \mathbb{R}_+ \simeq (\partial_+P) \times (0, 1]$, так как эти траектории взаимно не пересекаются и, очевидно, целиком покрывают $P \setminus (\partial_-P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r)$. Отметим, что эти траектории не выходят из поверхности P через отрицательные окружности ∂_-P , так как на этих окружностях указанное векторное поле обращается в нуль. Лемма доказана.

ЛЕММА 16. *Для любого разреза s_1, \dots, s_r поверхности P и любого выбора точек $x_i \in s_i$ существует хорошая функция Морса f на P с критическими точками x_1, \dots, x_r , для которой входящими сепаратрисами служат отрезки дуг s_i этого разреза, на которые их разбивают точки x_i . Пространство всех таких хороших функций Морса линейно связно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непересекающиеся регулярные окрестности U_i дуг s_i в P . В каждой такой окрестности U_i рассмотрим гладкую функцию g_i со

следующими свойствами:

- 1) на границе ∂U_i окрестности U_i в P функция g_i постоянна и равна единице;
- 2) функция g_i имеет ровно одну критическую точку $x_i \in U_i$, причем эта точка является седловой;
- 3) дуга s_i образована входящими в точку x_i сепаратрисами;
- 4) на каждой из этих сепаратрис функция g_i принимает значения в полуинтервале $[-1, 0)$.

Аналогично, рассмотрим регулярную окрестность U_0 нижнего края $\partial_- P$ атома P , не содержащую точки x_i , $i = 1, \dots, r$. В этой окрестности рассмотрим гладкую функцию g_0 , которая постоянна на всех компонентах ее границы $\partial_- P$ и ∂U_0 , равна -1 на $\partial_- P$ и 1 на ∂U_0 и не имеет критических точек в U_0 .

Склеим теперь полученные функции в единую функцию f . Для этого рассмотрим регулярную окрестность U узора $\partial_- P \cup s_1 \cup \dots \cup s_r$, лежащую в $U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$. Нетрудно показать, что в этой окрестности существует функция f , обладающая следующими свойствами:

- 1) функция f постоянна на всех компонентах границы $\partial_- P$ и ∂U , причем ограничение функции f на $\partial_- P$ и ∂U равно соответственно -1 и $1/2$;
- 2) вне окрестностей U_i функция f совпадает с g_0 , а вне окрестности U_0 она совпадает с g_i ;
- 3) функция f не имеет других критических точек, кроме x_1, \dots, x_r .

Заметим теперь, что по определению разреза дополнение к U в P распадается на положительные кольца $(\partial_+ P) \times [0, 1]$ с гладкими краями, каждое из которых замыкает ровно к одной положительной окружности из $\partial_+ P$. Поэтому построенную функцию f можно легко продолжить на весь атом P до некоторой хорошей функции Морса с теми же критическими точками x_1, \dots, x_r . Существование хорошей функции f с заданными входящими сепаратрисами доказано. Нетрудно видеть, что пространство всех таких хороших функций Морса линейно связно. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Фактически мы построили функцию Морса f на P для заданного разложения поверхности M на ручки, см. [1].

2) Легко показать, что любой путь в пространстве хороших функций Морса из пространства $F(P)$ определяет изотопию набора входящих сепаратрис. Можно также показать, что любая изотопия разрезов порождается некоторым путем в пространстве хороших функций Морса. Таким образом, с учетом предыдущей леммы сопоставление каждой функции Морса из пространства $F(P)$ набора сепаратрисных дуг s_i устанавливает взаимно однозначное соответствие между связными компонентами подпространства всех хороших функций Морса из пространства $F(P)$ и связными компонентами пространства всех разрезов поверхности P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть дуга s в $\partial_- P$ соединяет один конец дуги s_i с одним концом дуги s_j и не содержит других конечных точек дуг разреза s_1, \dots, s_r . Пусть U – регулярная окрестность кусочно гладкой дуги $s_i \cup s \cup s_j$ в P . Заменим s_i единственной дугой s'_i в ∂U , которая не изотопна s_i и s_j , см. рис. 18. Переход от разреза s_1, \dots, s_r к разрезу $s_1, \dots, s'_i, \dots, s_r$ назовем *скачком* дуги s_i через дугу s_j или *скольжением* ручки s_i по ручке s_j .

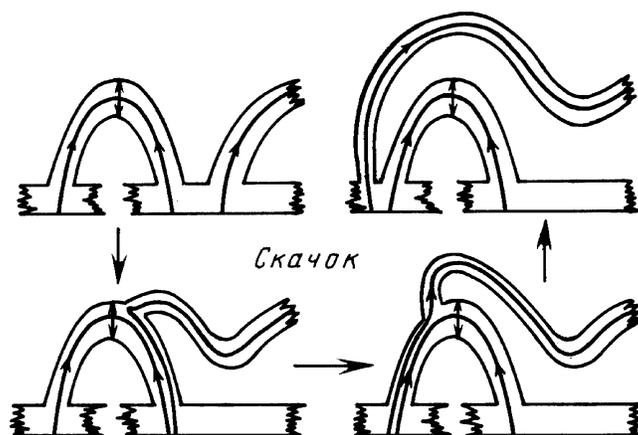


Рис. 18

ЛЕММА 17. Если два разреза атома P можно соединить друг с другом последовательностью изотопий и скачков, то отвечающие этим разрезам функции Морса из пространства $F(P)$ можно соединить путем в пространстве $F(P)$ функций Морса на атоме P .

Доказательство следует из рис. 18.

Шаг 2. Таким образом, осталось показать, что любые два разреза P можно соединить последовательностью изотопий и скачков. Для доказательства рассмотрим следующее понятие, обобщающее понятие разреза.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть G – кусочно-гладкий граф в атоме P следующего вида:

- 1) граф G содержит все отрицательные окружности $\partial_- P$ и не пересекается с положительными окружностями $\partial_+ P$;
- 2) G является спайном P , т.е. $P \setminus G$ гомеоморфно $(\partial_+ P) \times (0, 1]$;
- 3) любая вершина графа G , лежащая на $\partial_- P$, имеет степень 3, т.е. такая вершина является концом ровно одного внутреннего ребра, причем это ребро не является замкнутым.

Граф G такого вида назовем *графом-спайном* атома P . Граф-спайн G назовем *стянутым*, если все его вершины лежат на $\partial_- P$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть G – граф-спайн атома P . Следующие преобразования и обратные к ним будем называть *допустимыми преобразованиями* графов-спайнов:

- \mathcal{C} – сжатие в точку любого ребра $e \subset G$, имеющего по меньшей мере одну вершину вне $\partial_- P$ (после этого преобразования могут появиться ребра графа G , которые сходятся в одной вершине на $\partial_- P$, тогда нужно разъединить концы этих ребер, распределив их по $\partial_- P$);
- \mathcal{S} – скольжение одного ребра $e' \subset G$ по соседнему с ним ребру $e \subset G$, где общая вершина A ребер e и e' не лежит на $\partial_- P$ (после этого преобразования, как и после \mathcal{C} , концы ребер e и e' могут сойтись в одной вершине на $\partial_- P$,

тогда нужно разъединить эти концы, оставив их на $\partial_- P$); более точно, преобразование скольжения \mathcal{S} – это перемещение ребра e' по поверхности P , при котором один конец этого ребра фиксирован, внутренняя часть ребра e' движется внутри $P \setminus G$, а второй конец ребра e' перемещается по ребру e от точки A к другой его концевой точке.

Два графа-спайна поверхности P назовем *эквивалентными*, если их можно соединить друг с другом последовательностью допустимых преобразований \mathcal{C} , \mathcal{S} и обратных к ним, а также изотопий. Ясно, что преобразования \mathcal{C} и \mathcal{S} не выводят из класса графов-спайнов. Обратные преобразования к \mathcal{C} и \mathcal{S} по определению тоже не выводят из класса графов-спайнов.

Сделаем важное замечание: узоры в точности совпадают со стянутыми графами-спайнами. При этом скачок является частным случаем скольжения \mathcal{S} , примененного дважды. То есть скачок дуги e через другую дугу e' эквивалентен взбиранию одного конца дуги e на середину e' (преобразование \mathcal{S}^{-1}) и затем соскальзыванию этого конца дуги e с дуги e' (преобразование \mathcal{S}).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Деревом* в графе-спайне G мы будем называть его подграф T , который содержит отрицательные окружности $\partial_- P$ и для которого факторграф $T/\partial_- P$ не содержит циклов.

Выберем максимальное дерево T в графе-спайне G и с помощью преобразований \mathcal{C} стянем все его ребра, не лежащие целиком в $\partial_- P$, в точку. Ясно, что для любого дерева в спайне G эта операция применима, причем при изменении порядка стягивания ребер получаются изотопные графы-спайны. В результате такого стягивания мы получим некоторый стянутый граф-спайн, т.е. разрез. Покажем, что этот разрез, рассматриваемый с точностью до скачков, не зависит от выбора максимального дерева.

ЛЕММА 18. *Пусть T' – другое максимальное дерево в графе-спайне G . Тогда отвечающие T и T' стянутые графы-спайны можно соединить друг с другом последовательностью скачков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Предположим сначала, что граф-спайн G имеет вне $\partial_- P$ лишь одну вершину A . Тогда любое максимальное дерево в G – это объединение $\partial_- P$ и некоторого ребра $e \subset G$, соединяющего A с $\partial_- P$. Пусть e и e' – два таких ребра. Заметим, что стягивание ребра e эквивалентно скольжению по нему всех ребер, входящих в A , кроме ребра e' . При этом точка, в которую мы перенесем эти ребра, будет соответствовать образу ребра e в G/e . То же верно для стягивания ребра e' . Отсюда получаем, что разрез G/e переводится в разрез G/e' скачками всех ребер, входящих в A , кроме ребер e и e' , через ребро e' . Более точно: мы перемещаем по ребру e' конечные точки (подшвы) всех ребер, кроме e' , которые сходились в точке A и стали сходиться в образе ребра e в G/e . Ясно, что мы получим G/e' , причем точка, в которую мы перенесем эти ребра, будет соответствовать образу ребра e' в G/e' (см. рис. 19), т.е. разрез G/e переводится в разрез G/e' скачками.

б) Доказательство в общем случае следует из следующего наблюдения. Нетрудно показать, что любое максимальное дерево T можно преобразовать в любое другое максимальное дерево T' последовательностью операций, не выводящих из множества максимальных деревьев, следующего вида. Добавим к T новое ребро

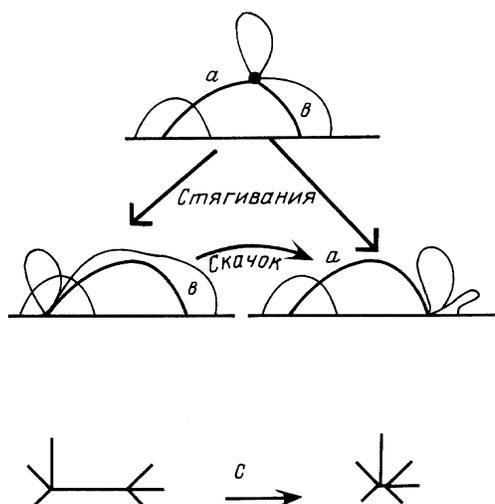


Рис. 19

$e' \subset G$ – в результате появится цикл на факторграфе – и затем удалим другое ребро e этого цикла (не лежащее целиком в $\partial_- P$) – в результате получим новое дерево T' . Ясно, что лемму достаточно доказать только для таких пар деревьев T и T' . Стянем в точку все общие ребра деревьев T и T' (не лежащие в $\partial_- P$). Так как полученный спайн содержит лишь одну вершину вне $\partial_- P$, мы можем применить а). Лемма полностью доказана.

Мы получаем, что результат стягивания максимального дерева не зависит от дерева (с точностью до скачков). Таким образом, каждому графу-спайну G корректно поставлен в соответствие некоторый класс эквивалентных разрезов. Оказывается, что допустимые преобразования графа-спайна G также не влияют на результат стягивания его максимального дерева (с точностью до скачков).

ЛЕММА 19. Пусть G и G' – два эквивалентных графа-спайна, т.е. они переводятся друг в друга последовательностью преобразований \mathcal{C} , \mathcal{S} и обратных к ним. Тогда разрезы, полученные при стягивании максимальных деревьев в G и G' , переводятся друг в друга последовательностью изотопий и скачков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим преобразование \mathcal{C} или \mathcal{S} – стягивание некоторого ребра $e \subset G$ в точку или скольжение ребра e' по другому ребру e . Заметим, что ребро e , которое стягивается преобразованием \mathcal{C} или по которому мы производим скольжение \mathcal{S} , не лежит целиком на $\partial_- P$. Значит, согласно лемме 18 мы всегда можем считать, что это ребро принадлежит максимальному дереву T . Тогда при стягивании дерева T такое преобразование графов-спайнов перейдет в тождественное преобразование разрезов. Аналогичное верно и для обратных преобразований к \mathcal{C} и \mathcal{S} . Лемма доказана.

Шаг 3. Осталось показать, что любые два графа-спайна G и G' атома P эквивалентны, т.е. их можно соединить последовательностью преобразований \mathcal{C} , \mathcal{S} и обратных к ним. Обозначим через V регулярную окрестность верхней границы

$\partial_+ P$ атома P , т.е. его воротник. Фиксируем произвольное клеточное разбиение поверхности P , содержащее воротник V как подкомплекс (например триангуляцию, содержащую также два выбранных спайна или разреза). Будем рассматривать P как клеточный комплекс. Ясно, что мы можем считать, не ограничивая общности, что оба графа-спайна G и G' лежат вне воротника V и являются подкомплексами P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Произвольный клеточный подкомплекс \tilde{G} в P назовем *спайном в поверхности P* , если он имеет следующий вид:

- 1) \tilde{G} содержит все отрицательные окружности $\partial_- P$ и не пересекается с положительными окружностями $\partial_+ P$;
- 2) \tilde{G} является спайном P , т.е. $P \setminus \tilde{G}$ гомеоморфно $(\partial_+ P) \times (0, 1]$.

Заметим, что подкомплекс $P \setminus V$ является частным случаем спайна. Этот подкомплекс будем называть *максимальным спайном*. Ясно, что графы-спайны в поверхности P , являющиеся подкомплексами P , в точности совпадают с одномерными спайнами в P . Граничную вершину некоторого ребра произвольного клеточного комплекса (или подкомплекса) \tilde{G} будем называть *свободной*, если к ней не примыкает ни одна двумерная клетка \tilde{G} и эта вершина имеет кратность 1 в \tilde{G} , т.е. является концом ровно одного (причем незамкнутого) ребра. Аналогично, граничное ребро некоторой двумерной клетки произвольного клеточного комплекса (или подкомплекса) \tilde{G} будем называть *свободным*, если это ребро имеет кратность 1 в \tilde{G} , т.е. является граничным для ровно одной двумерной клетки, причем входит в границу этой клетки ровно один раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Два спайна атома P назовем *эквивалентными*, если от одного к другому можно перейти последовательностью следующих элементарных преобразований и обратных к ним:

- \mathcal{C} – удаление (или сжатие) ребра подкомплекса, имеющего свободную граничную вершину, вместе с этой вершиной;
- $\tilde{\mathcal{C}}$ – удаление (или коллапсирование, сжатие) двумерной клетки D подкомплекса, имеющей свободное граничное ребро e , не лежащее целиком в $\partial_- P$, вместе с этим ребром, т.е. двумерная клетка D вдавливается со стороны ее ребра e ;
- \mathcal{T} – если некоторая двумерная клетка D пересекается с \tilde{G} по всем своим сторонам, кроме одного ребра e , то мы удаляем из \tilde{G} любое другое ребро $e' \subset D$, не лежащее целиком в $\partial_- P$, и добавляем ребро e , т.е. мы перекидываем ребро e' на ребро e .

Преобразования \mathcal{C} , $\tilde{\mathcal{C}}$, \mathcal{T} и обратные к ним будем называть *элементарными преобразованиями спайнов*. Известно, что из максимального спайна $P \setminus V$ преобразованиями \mathcal{C} и $\tilde{\mathcal{C}}$ можно получить любой спайн $G \subset P \setminus V$. То есть верна следующая лемма.

ЛЕММА 20. Пусть G – любой спайн атома P , лежащий в максимальном спайне $P \setminus V$. Тогда существует последовательность элементарных сжатий \mathcal{C} и $\tilde{\mathcal{C}}$, переводящая $P \setminus V$ в спайн G .

Доказательство леммы можно вывести из определения 13 графа-спайна. Мы его опускаем.

Пусть G и G' – любые два графа-спайна в P , являющиеся подкомплексами в $P \setminus V$. Так как они являются спайнами, то согласно лемме 20 существует последовательность элементарных расширений G в $P \setminus V$ и последовательность элементарных сжатий $P \setminus V$ в G' . Оказывается, что это “двумерное” преобразование можно заменить преобразованиями \mathcal{C} , \mathcal{I} и их обратными. То есть верна следующая лемма.

ЛЕММА 21. *Пусть два одномерных спайна G и G' в P можно соединить последовательностью элементарных преобразований \mathcal{C} , $\tilde{\mathcal{C}}$ и их обратных. Тогда эти спайны можно соединить последовательностью элементарных преобразований \mathcal{C} , \mathcal{I} и их обратными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы – это довольно общий факт, известный для всех размерностей, см. [20]. Идея его доказательства следующая. Заметим, что преобразование \mathcal{I} является сквозным преобразованием (т.е. композицией) элементарного расширения и элементарного сжатия двумерной клетки. Действительно, преобразование \mathcal{I} эквивалентно прибавлению двумерной клетки D вместе с ее стороной e (преобразование $\tilde{\mathcal{C}}^{-1}$) и затем удалению этой клетки D вместе с другой ее стороной e' (преобразование $\tilde{\mathcal{C}}$).

Рассмотрим теперь любую последовательность элементарных преобразований \mathcal{C} , $\tilde{\mathcal{C}}$, \mathcal{I} и обратных к ним, переводящую одномерный спайн G в спайн G' . Покажем, что число преобразований $\tilde{\mathcal{C}}$ в такой последовательности можно уменьшить на 1 (если это число положительно). Рассмотрим первое преобразование $\tilde{\mathcal{C}}$ в этой последовательности – это вдавливание некоторой клетки D со стороны ее свободного ребра e' . Тогда выполнено следующее.

- 1) В некоторый предыдущий момент произошло рождение клетки D , т.е. ее раздутие со стороны другого ребра e .
- 2) Между этими двумя моментами клетка D все время существовала и ее ребро e' оставалось свободным (так как никакие двумерные клетки не уничтожались).

Поэтому можно считать, что вдавливание клетки D со стороны ребра e' произошло сразу же после ее рождения со стороны ребра e . Тогда согласно замечанию композиция этих двух преобразований эквивалентна преобразованию T – перекидыванию ребра e' на ребро e . Мы будем уменьшать таким образом число элементарных сжатий $\tilde{\mathcal{C}}$ и расширений $\tilde{\mathcal{C}}^{-1}$ в данной последовательности элементарных преобразований, пока их число не станет равным нулю. Лемма доказана.

Таким образом, согласно леммам 20 и 21 любые два графа-спайна G и G' в P можно соединить последовательностью элементарных преобразований \mathcal{C} , \mathcal{I} и их обратных. А значит, их можно соединить последовательностью преобразований \mathcal{C} , \mathcal{S} и их обратных.

Закончим доказательство теорем 8 и 8'. Рассмотрим любые две функции Морса f_0 и f_1 на атоме P . Не ограничивая общности, будем считать, что эти функции Морса являются хорошими. Тогда в силу леммы 15 наборы сепаратрисных дуг s_1, \dots, s_r и s'_1, \dots, s'_r для этих функций являются разрезами поверхности P , а значит, и графами-спайнами, которые обозначим через G и G' . По леммам 20 и 21 эти графы-спайны переводятся друг в друга последовательностью допустимых преобразований графов-спайнов \mathcal{C} , \mathcal{S} и их обратных. Значит, при помощи стягивания

максимальных деревьев согласно леммам 18 и 19 разрезы G и G' переводятся друг в друга последовательностью изотопий и скачков. С учетом лемм 16 и 17 существует путь $f_t \in F(P)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве всех функций Морса на атоме P , соединяющий функции f_0 и f_1 . Теорема 8', а значит, и теорема 8 полностью доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Попытка перевести приведенное доказательство с языка более общих объектов – обобщенных спайнов – на язык менее общих, но более наглядных объектов – функций Морса, или наборов сепаратрисных дуг, или разрезов – по-видимому, приведет к значительному усложнению доказательства. Причина этого заключается в том, что пространство обобщенных спайнов устроено проще, чем пространство разрезов. Этот парадокс неизбежно возникает в ситуации, когда хотя и более наглядное, но сложное пространство вкладывается как ретракт в более простое, менее наглядное, но более общее пространство. Тогда для доказательства связности ретракта достаточно показать, как соединить любые две его точки путем во всем пространстве. Однако после проектирования такого пути на ретракт этот путь станет, вообще говоря, более сложным и менее наглядным. Пример: любой спайн любого связного многообразия связан, однако этот факт не следует автоматически из определения спайна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 9 и 9'. Докажем, что пространство $\tilde{F}(P)$ нумерованных функций Морса (т.е. функций с упорядоченными седловыми точками) на седловом атоме P линейно связно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть G – любой граф-спайн поверхности P . Пусть на графе-спайне G фиксирован упорядоченный набор его ребер e_1, \dots, e_r со следующим свойством: объединение всех остальных ребер графа-спайна G является максимальным деревом в G (см. определение 12). Такой граф-спайн будем называть *меченым графом-спайном поверхности P* и обозначать через (G, e_1, \dots, e_r) .

В частности, каждое из фиксированных ребер e_i меченого графа-спайна (G, e_1, \dots, e_r) не лежит на $\partial_- P$. При стягивании всех ребер меченого графа-спайна, не лежащих целиком на $\partial_- P$, кроме ребер e_i , получим меченый стянутый граф-спайн, т.е. разрез s_1, \dots, s_r , для дуг которого фиксирована нумерация, или поставлены числовые метки. Такие разрезы будем называть *нумерованными*. Заметим, что число фиксированных ребер действительно равно r , где r – число седловых точек функций Морса на атоме P (так как оно равно r для стянутого спайна по формуле эйлеровой характеристики).

Из лемм 16 и 17 вытекают следующие их аналоги для нумерованных функций Морса на атоме P . Обозначим через $F(P, s_1, \dots, s_r)$ пространство всех хороших нумерованных функций Морса на атоме P , для которых упорядоченный набор сепаратрисных дуг совпадает с набором дуг s_1, \dots, s_r нумерованного разреза.

ЛЕММА 22. *Если s_1, \dots, s_r – нумерованный разрез атома P , то такое пространство $F(P, s_1, \dots, s_r)$ нумерованных функций Морса на атоме P не пусто и линейно связно.*

ЛЕММА 23. *Если два нумерованных разреза атома P можно соединить друг с другом последовательностью изотопий и скачков, то отвечающие этим разрезам нумерованные функции Морса из пространства $\tilde{F}(P)$ можно*

соединить путем в пространстве $\tilde{F}(P)$ нумерованных функций Морса на атоме P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть (G, e_1, \dots, e_r) – меченый граф-спайн атома P . Следующие преобразования меченых графов-спайнов и обратные к ним будем называть *элементарными*:

\mathcal{C}, \mathcal{S} – преобразование \mathcal{C} стягивания неотмеченного ребра $e \subset G, e \neq e_i$, и преобразование \mathcal{S} скольжения ребра по ребру для меченых графов-спайнов получаются из соответствующих преобразований обычных графов-спайнов, см. определение 11;

\mathcal{M} – если меченый граф-спайн (G, e_1, \dots, e_r) не является стянутым, заменим одно его ребро $e_i \subset G$ на новое ребро e'_i , обладающее следующим свойством: при замене e_i на e'_i снова получается меченый граф-спайн, т.е. объединение ребра e_i и всех ребер графа-спайна G , кроме $e_1, \dots, e'_i, \dots, e_r$, является максимальным деревом в G .

Ясно, что преобразование \mathcal{M} меченого графа-спайна аналогично переходу от одного его максимального дерева к другому максимальному дереву. Пусть (G, e_1, \dots, e_r) – меченый граф-спайн поверхности P , и пусть s_1, \dots, s_r – упорядоченный набор дуг соответствующего стянутого меченого графа-спайна, т.е. нумерованного разреза. (Этот набор дуг на P определен однозначно, с точностью до изотопии.) Аналогично доказательству леммы 18 проверяется, что преобразование \mathcal{M} меток меченого графа-спайна не влияет на результат стягивания дерева с точностью до скачков нумерованных разрезов. Точнее, верно следующее обобщение лемм 18 и 19 для меченых графов-спайнов.

ЛЕММА 24. Пусть $T = G \setminus (e_1 \cup \dots \cup e_r)$ – максимальное дерево меченого графа-спайна (G, e_1, \dots, e_r) . Тогда при стягивании в точку ребер дерева T , не лежащих целиком на $\partial_- P$, элементарные преобразования $\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{M}$ и обратные к ним переходят в скачки нумерованных разрезов.

Доказательство получается простым обобщением из доказательств лемм 18 и 19.

Покажем теперь, что для любого меченого графа-спайна (G, e_1, \dots, e_r) и любой перестановки σ его отмеченных ребер существует последовательность элементарных преобразований $\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{M}$ и обратных к ним, переводящая граф-спайн G и набор его отмеченных ребер в себя и меняющая нумерацию этих ребер согласно σ , т.е. $(G, e_1, \dots, e_r) \rightarrow (G, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(r)})$. Доказательство достаточно провести для случая стянутого меченого графа-спайна, т.е. нумерованного разреза s_1, \dots, s_r . Заметим, что любая перестановка дуг разреза представляется как произведение транспозиций. Более того, в силу связности графа-спайна можно считать, что каждая из этих транспозиций переставляет соседние дуги разреза s_i и s_j . К каждой такой транспозиции мы можем применить следующую лемму.

ЛЕММА 25. Пусть s_1, \dots, s_r – нумерованный разрез. Пусть s_i и s_j – две разные соседние дуги этого разреза, т.е. существует дуга $s \subset \partial_- P$, соединяющая конец дуги s_i с концом дуги s_j , на которой нет других концевых точек дуг разреза. Тогда существует последовательность элементарных преобразований \mathcal{C}, \mathcal{M} и их обратных, переводящая разрез s_1, \dots, s_r в себя, перестав-

ляющая местами номера дуг s_i и s_j и не меняющая номера остальных дуг разреза.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $i = 1, j = 2$. Стянем дугу s в точку и склеим дуги s_1 и s_2 вблизи их склеившихся концов. При этом получится новый меченый граф-спайн, который обозначим через G . Этот граф-спайн состоит из ребер s_1, \dots, s_r и нового ребра, которое обозначим через e . Ясно, что при стягивании ребра e в G (применением операции \mathcal{C}) из меченого графа-спайна G получится исходный нумерованный разрез s_1, \dots, s_r . Так как новый меченый граф-спайн (G, s_1, \dots, s_r) не является стягиваемым, к нему можно применить преобразование \mathcal{M} . Заметим, что любое максимальное дерево в графе-спайне G — это объединение $\partial_- P$ и любого из трех ребер s_1, s_2 и e . Поэтому любой меченый граф-спайн, отвечающий G , имеет вид $(G, *, *, s_3, \dots, s_r)$, где на пропущенных местах стоит любая пара неориентированных ребер из тройки s_1, s_2 и e . Рассмотрим следующие преобразования этой пары: $(s_1, s_2) \rightarrow (s_1, e) \rightarrow (s_2, e) \rightarrow (s_2, s_1)$. Тем самым мы указали цепочку трех элементарных преобразований \mathcal{M} , переводящую меченый граф-спайн $(G, s_1, s_2, s_3, \dots, s_r)$ в меченый граф-спайн $(G, s_2, s_1, s_3, \dots, s_r)$. (Здесь мы не учитываем ориентации ребер.) Лемма доказана.

Итак, согласно лемме 25 любое изменение нумерации дуг нумерованного разреза s_1, \dots, s_r реализуется некоторой последовательностью элементарных преобразований $\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{M}$ и обратных к ним для меченых графов-спайнов. Значит, с учетом леммы 24 существует такая последовательность, состоящая лишь из элементарных преобразований \mathcal{S} , т.е. из скачков. Следовательно, в силу лемм 22 и 23 любая перестановка седловых точек хорошей нумерованной функции Морса $f \in F(P, s_1, \dots, s_r)$ реализуется путем в пространстве $\tilde{F}(P)$ всех нумерованных функций Морса. С учетом теорем 8 и 8' это доказывает линейную связность пространства $\tilde{F}(P)$.

Докажем линейную связность пространства $F_+(P)$ оснащенных функций Морса на атоме P . Рассмотрим оснащенные графы-спайны $\{G, e_1, \dots, e_r\}$. Они отличаются от меченых графов-спайнов (G, e_1, \dots, e_r) тем, что для каждого из фиксированных ребер e_1, \dots, e_r графа-спайна G фиксирована ориентация этого ребра, но не фиксирована нумерация на множестве ребер. Для оснащенных графов-спайнов аналог преобразования \mathcal{M} определяется так. Стянем каждое ребро графа-спайна G , кроме ребер e_1, \dots, e_r и e'_i , в точку. Пусть A — единственная вершина полученного графа-спайна, не лежащая на $\partial_- P$. Зададим ориентацию ребра e'_i так, чтобы одно из ребер e_i и e'_i входило в вершину A , а другое выходило из нее. Тогда справедлив аналог леммы 24 для преобразований оснащенных графов-спайнов.

Покажем, что существует цепочка преобразований \mathcal{C}, \mathcal{M} и их обратных, меняющая оснащение ровно одной произвольно выбранной дуги s_i . Из доказательства леммы 25 видно, что построенная там цепочка преобразований любой пары соседних дуг переводит оснащенную пару дуг $\{s_1, s_2\}$ в оснащенную пару дуг $\{s'_1, s'_2\} = \pm\{-s_2, s_1\}$, где знак \pm показывает, является ли вершина s графа G/s начальной либо конечной одновременно для обоих ребер s_1 и s_2 . Аналогично строится цепочка преобразований, переводящая $\{s_1, s_2\}$ в $\{s''_1, s''_2\} = \pm\{s_2, -s_1\}$. Одна из этих двух цепочек преобразований меняет ориентацию дуги s_1 и не меняет ориентации остальных дуг.

Теоремы 9 и 9' полностью доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 10 и 10'. Покажем сначала, что число связных компонент пространства $\tilde{F}_+(P)$ оснащено-нумерованных функций Морса на атоме P не больше двух. Рассмотрим любой оснащено-нумерованный разрез s_1, \dots, s_r атома P . Пусть s_i и s_j – любая пара соседних дуг этого разреза. Покажем, что существует последовательность преобразований \mathcal{C} , \mathcal{M} и их обратных, меняющая ориентации обеих дуг s_i и s_j , не меняющая ориентации остальных дуг и не меняющая нумерацию всех дуг разреза. Тогда в силу связности любого графа-спайна такое преобразование будет существовать для любой пары дуг разреза, не обязательно соседних. И значит, мы сможем поменять ориентации дуг любого набора из четного числа дуг данного разреза при помощи скачков его дуг.

Будем считать, что $i = 1$, $j = 2$. Рассмотрим преобразование из доказательства леммы 25, переводящее оснащено-нумерованную пару дуг (s_1, s_2) в оснащено-нумерованную пару дуг $(s'_1, s'_2) = \pm(-s_2, s_1)$. Тогда квадрат этого преобразования переводит (s_1, s_2) в $(-s_1, -s_2)$, что и требовалось. Заметим, что мы также доказали и п. б), так как мы можем поменять оснащения и любого нечетного числа седловых точек, добавив к ним неоснащенную точку.

Покажем теперь, что число связных компонент пространства $\tilde{F}_+(P)$ оснащено-нумерованных функций Морса не меньше двух. Пусть s_1, \dots, s_r – любой оснащено-нумерованный разрез атома P . Стянем в одну точку всю нижнюю границу $\partial_- P$ атома P , т.е. все r отрицательных окружностей. Тогда все дуги разреза замкнутся и образуют букет r упорядоченных ориентированных окружностей s_1, \dots, s_r . Заметим, что этот букет является ретрактом факторповерхности $P/(\partial_- P)$. Значит, ориентированные окружности букета определяют некоторый нумерованный базис $[s_1], \dots, [s_r]$ в группе одномерных гомологий факторповерхности $P/(\partial_- P)$. В частности, эта группа одномерных гомологий свободна: $H_1(P/(\partial_- P), \mathbb{Z}) = H_1(P, \partial_- P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$, и в ней можно выбрать ориентацию. Определим число $\Delta = \pm 1$, показывающее, согласована или нет эта ориентация с ориентацией базиса $[s_1], \dots, [s_r]$. Заметим теперь, что при скачке любой дуги s_i разреза базисный элемент $[s_i]$ переходит в элемент вида $[s'_i] = [s_i] \pm [s_j]$, где $i \neq j$. В частности, скачки дуг не меняют ориентацию базиса $\Delta = \pm 1$. Отсюда мы заключаем, что оснащено-нумерованные разрезы (s_1, \dots, s_r) и $(-s_1, s_2, \dots, s_r)$ атома P нельзя перевести друг в друга скачками и изотопиями, т.е. число связных компонент пространства $\tilde{F}_+(P)$ не меньше двух.

Теоремы 10 и 10' полностью доказаны.

§9. Некоторые обобщения

Пусть n – любое четное положительное число. Рассмотрим замкнутое ориентированное n -мерное многообразие M^n , которое можно погрузить в \mathbb{R}^{n+1} , т.е. представить в виде погруженной гиперповерхности. Простое обобщение доказательства теоремы 2 (точнее, доказательство необходимости) показывает, что справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (необходимое условие). Пусть n четно, и пусть функция высоты f (не обязательно функция Морса) при некотором погружении M^n в \mathbb{R}^{n+1} имеет лишь конечное число критических точек x_1, \dots, x_N . Тогда

имеет место равенство:

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \operatorname{ind}_{x_k}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

где знак $\varepsilon_k = \pm 1$ отвечает направлению (вверх или вниз) положительной нормали к M^n в критической точке x_k . В частности, эйлерова характеристика такого многообразия M^n всегда четна.

СЛЕДСТВИЕ. Если эйлерова характеристика замкнутого ориентируемого многообразия M^n не равна 0, 2 и 4, то при любом погружении M^n в \mathbb{R}^{n+1} функция высоты имеет не менее четырех критических точек.

Можно еще ослабить условия на функцию f . Некоторые утверждения остаются справедливыми и для произвольных гладких функций, отличных от константы, т. е. не обязательно даже требовать конечности числа критических точек. Критические точки могут здесь заполнять большие непрерывные подмножества в M^n . Например, из утверждения 1 нетрудно вывести следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть n четно, и пусть f – функция высоты для некоторого погружения M^n в \mathbb{R}^{n+1} . Тогда имеет место равенство:

$$\operatorname{ind}_U(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{2} \chi(M^n),$$

где U – достаточно малая окрестность множества (не обязательно конечного) критических точек f , в которых положительная нормаль к многообразию M^n направлена вверх.

Таким образом, если существует погружение M^n в \mathbb{R}^{n+1} , то индексы критических точек функции высоты делят пополам эйлерову характеристику многообразия M^n . Это свойство функций высоты, оказывается, является характеристическим в случае двумерных поверхностей. Более точно, справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. а) Пусть f – гладкая функция на связной замкнутой ориентируемой двумерной поверхности M_g , отличная от константы (здесь множество критических точек не обязательно конечно). Рассмотрим открытое множество U в M , на границе которого нет критических точек функции f . Тогда следующее равенство

$$\operatorname{ind}_U(\operatorname{grad} f) = 1 - g = \frac{1}{2} \chi(M_g)$$

является необходимым и достаточным условием того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении $\alpha: M_g \rightarrow \mathbb{R}^3$ таким, что в каждой критической точке функции f , лежащей в области U , положительная нормаль к поверхности $\alpha(M_g)$ направлена вверх, а в каждой критической точке функции f , не лежащей в области U , эта нормаль направлена вниз.

б) Пусть f – гладкая функция на связной замкнутой неориентируемой двумерной поверхности M_μ . Тогда существование ориентируемой (не обязательно связной) окрестности U_+ множества (не обязательно конечного)

критических точек функции f есть необходимое и достаточное условие того, что функцию f можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении $\alpha: M_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$. Причем это погружение можно выбрать так, чтобы в каждой критической точке x функции f ориентация $T_x M_\mu$, индуцированная касательным изоморфизмом α_* в горизонтальную плоскость, была согласована с любой наперед заданной ориентацией в U_+ .

СЛЕДСТВИЕ. Любую гладкую функцию на двумерном торе, отличную от константы и с произвольным множеством критических точек (не обязательно конечным), можно реализовать как функцию высоты при некотором погружении тора в \mathbb{R}^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Необходимость в ориентируемом случае (п. а)) следует из утверждения 2. В неориентируемом случае (п. б)) рассмотрим естественную проекцию $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ на горизонтальную плоскость. Тогда из компактности множества критических точек следует существование такой его окрестности U , на которой отображение $\pi \circ \alpha|_U$ является погружением U в \mathbb{R}^2 . Это отображение индуцирует ориентацию в U .

Докажем достаточность в а) и б). Напомним, что любую связную ориентируемую двумерную поверхность с непустым краем можно погрузить в плоскость.

Пусть $U \neq M$ – любая ориентируемая окрестность множества C критических точек функции f , и пусть $\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ – некоторое погружение этой окрестности в \mathbb{R}^3 , реализующее f как функцию высоты.

Нетрудно показать, что тогда существуют числа $a_1 < b_1 < \dots < a_N < b_N$ и такое погружение

$$\alpha_0: f^{-1}([a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N]) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

реализующее функцию f как функцию высоты, что

$$C \subset f^{-1}([a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N])$$

и погружения α и α_0 совпадают на пересечении областей определения.

Далее, как в доказательстве теорем 2 и 3, построим связный граф Γ , вершинам которого отвечают цилиндры V – связные компоненты множеств $f^{-1}[b_i, a_{i+1}]$. Ребра этого графа определим так. В каждой связной компоненте P множества $f^{-1}[a_i, b_i]$ (т.е. в атоме) рассмотрим любой кусочно гладкий граф $K \subset P$, являющийся ретрактом атома P , например букет окружностей. Тогда этот граф разбивает атом P на положительные и отрицательные кольца, причем к каждому ребру этого графа примыкает ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо. Определим граф Γ как граф в поверхности M , сопряженный к объединению всех графов K . В частности, ребрам графа Γ отвечают ребра графов K . Далее рассуждения в точности такие же, как в доказательстве теорем 2 и 3, шаг 3 (см. п. 4.2). Утверждение 3 доказано.

Список литературы

1. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1971.
2. *Фоменко А. Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1989. Т. 44. №1. С. 145–173.
3. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 49–77.
4. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I // Матем. сб. 1994. Т. 185. №4. С. 27–80; II // Матем. сб. 1994. Т. 185. №5. С. 27–78.
5. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997.
6. *Nguen T. Z.* Arnold–Liouville with singularities // Preprint, Ref. S. I. S. S. A. 153/94/M, October 1994 – revised January 1995.
7. *Nguen T. Z.* The symplectic topology of integrable Hamiltonian systems // Thèse. Université de Strasbourg, 1994.
8. *Milnor J.* Sommes des variétés différentiables et structures différentiables des sphères // Bull. Soc. Math. France. 1959. V. 87. P. 439–444.
9. *Rosen R.* A weak form of the star conjecture for manifolds // Notices Amer. Math. Soc. Abstract 570–28. V. 7, 1960. P. 380.
10. *Burlet O., Haab V.* Réalisations de fonctions de Morse sur des surfaces, par des immersions et plongements dans l'espace \mathbb{R}^3 // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1985. V. 300. №12. P. 401–406.
11. *Натанзон С. М.* Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых. I // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1988. №23. С. 79–103; II // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1991. №24. С. 104–132.
12. *Smale S.* The classification of immersions of the spheres in Euclidean spaces // Ann. of Math. (2). 1959. V. 69. №2. P. 327–344.
13. *Harsh M.* Immersions of manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 93. P. 242–276.
14. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.
15. *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // Compositio Math. 1937. V. 4. P. 276–284.
16. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
17. *Цишанг Х.* Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.
18. *Francis G. K., Morin B.* Arnold Shapiro's eversion of the sphere // Math. Intelligencer. 1979. №2. P. 200–203.
19. *Франсис Дж.* Книжка с картинками по топологии. М.: Мир, 1991.
20. *Wall C. T. C.* Formal deformations // Proc. London Math. Soc. (3). 1966. V. 16. P. 342–352.