Математические заметки

ТОМ 75 ВЫПУСК 1 ЯНВАРЬ 2004

УДК 515.162.2

МИНИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ПРООБРАЗОВ ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С. А. Богатый, Д. Л. Гонсалвес, Е. А. Кудрявцева, Х. Цишанг

Вычислено минимальное число корней уравнения $f(x)=c$ для отображений f из заданного гомотопического класса отображений между замкнутыми (не обязательно ориентируемыми) поверхностями.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Пусть M_1 и M_2 – замкнутые многообразия, $f\colon M_1\to M_2$ – непрерывное отображение и $c\in M_2$ – точка в образе. *Минимальным числом корней для отображения* f называется

$$MR[f]=\min_{\tilde f\simeq f}|\tilde f^{-1}(c)|,$$

где “$\simeq$” означает гомотопность. Под *задачей корней* понимается задача вычисления $MR[f]$. Более общей является *задача совпадения* – определить *минимальное число точек совпадения*

$$MC[f_1,f_2]=\min_{\tilde f_1\simeq f_1,\tilde f_2\simeq f_2}|\operatorname{coin}(\tilde f_1,\tilde f_2)|,$$

где $\operatorname{coin}(\tilde f_1,\tilde f_2)=\{x\in M_1\mid \tilde f_1(x)=\tilde f_2(x)\}$, для двух непрерывных отображений $f_1,f_2\colon M_1\to M_2$. Другим широко известным специальным случаем задачи совпадения является *задача неподвижных точек* (где $M_1=M_2$ и $f_2=\mathrm{id}_{M_1}$), которой посвящено много исследований.

В случае, когда M_1 и M_2 – многообразия одной размерности, известно много глубоких результатов. В частности, для всякой пары отображений $f_1,f_2\colon M_1\to M_2$ минимальное число совпадения $MC[f_1,f_2]$ не меньше *числа совпадения Нильсена* $NC[f_1,f_2]$, т.е. числа существенных классов совпадения; под “существенным” понимается класс совпадения с ненулевым индексом:

$$MC[f_1,f_2]\geqslant NC[f_1,f_2].$$

Если размерность n многообразий отлична от 2, то проблему совпадения решили для пары произвольных отображений в ориентируемом случае Х. Ширмер [1] и в неориентируемом случае Р. Добренко и Ю. Езерски [2], доказав справедливость *свойства Векена*

Работа выполнена в ноябре–декабре 2000 г. во время визита первого автора на Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum. Этому автору приятно выразить благодарность Ruhr-Universität Bochum за гостеприимство. Визит был поддержан DFG-проектом “Niedrigdimensionale Topologie und geometrisch-topologische Methoden in der Gruppentheorie”. Второй автор пользовался поддержкой FAPESP по проекту “Projeto Temático Geometria e Topologia”.

для пары произвольных отображений, т.е. доказав, что минимальное число совпадения равно числу совпадения Нильсена. Если $n = 2$ и M_2 является 2-мерной сферой S^2 или проективной плоскостью $\mathbb{P}^2$, то справедливость свойства Векена доказана в [3, предложение 2.2] и [4, теорема 4.10].

В отличие от случая $\dim M_j \geqslant 3$ двумерные многообразия не имеют достаточно свободы для осуществления "освобождающих" деформаций, но в отличие от случая $\dim M_j = 1$ они недостаточно просты и существуют отображения, для которых минимальное число корней $MR[f]$ и *число Нильсена корней* $NR[f] = NC[f, c]$ не совпадают. Первый пример такого отображения замкнутой ориентируемой поверхности рода 2 в тор построил Х. Хопф [5], см. [6, пример 5.10].

Пусть $A(f)$ обозначает *абсолютную степень* отображения $f\colon M_1 \to M_2$, см. [7] или [5], и пусть $\ell(f) = [\pi_1(M_2) : f_\#(\pi_1(M_1))]$. Рассмотрим проблему корней для f. Согласно Р. Бруксу [8, (3.21)] все классы Нильсена корней имеют одинаковый индекс $A(f)/\ell(f)$ и число этих классов равно $NR[f] = \ell(f) < \infty$, если $A(f) > 0$, см. также [9, предложение 2.2 и лемма 5.7].

В размерности 2 Х. Кнезер [10] показал, что $MR[f] = 0$, если $A(f) = 0$, и $MR[f] \leqslant \ell(f) = A(f)$, если отображение f не является ориентирующе-правильным и $A(f) > 0$. Согласно [9, теорема 4.6]

$$MR[f] = \ell(f) \iff \ell(f) \geqslant \chi(M_1) + (1 - \chi(M_2))A(f),$$

если $A(f) > 0$ (доказательство опирается на сильный результат Д. Габаи и В. Х. Казеса [11]); согласно [9, теорема 2.5] $MR[f] \geqslant \chi(M_1) + (1-\chi(M_2))A(f)$, если отображение f является ориентирующе-правильным и $A(f) > 0$.

Данная статья является продолжением [3], [9], [12] и мы доказываем следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ – непрерывное отображение замкнутых поверхностей абсолютной степени $A(f)$. Тогда*

(a) *если $A(f) = 0$, то $MR[f] = NR[f] = 0$;*

(b) *если $A(f) > 0$, то для $\ell(f) = [\pi_1(M_2) : f_\#(\pi_1(M_1))]$*

$$MR[f] = \max\bigl\{\ell(f),\ \chi(M_1) + (1 - \chi(M_2))A(f)\bigr\}, \qquad NR[f] = \ell(f).$$

2. Первые шаги доказательства. Через S_g мы обозначаем замкнутую ориентируемую поверхность рода g; ее эйлерова характеристика равна $2 - 2g$. Через N_g мы обозначаем замкнутую неориентируемую поверхность, полученную из 2-сферы приклеиванием $g + 1$ листа Мёбиуса; ее эйлерова характеристика равна $1 - g$, и существует ориентирующее (двулистное) накрытие $S_g \to N_g$.

Согласно упомянутым во введении результатам нам осталось только рассмотреть ситуацию, когда $M_2 \not\approx S_0, N_0$, $A(f) > 0$ и отображение f является ориентирующе-правильным. При этих условиях индекс $\ell(f)$ подгруппы $f_\#(\pi_1(M_1))$ в $\pi_1(M_2)$ конечен.

Предложение 2.1. *Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ – непрерывное отображение замкнутых поверхностей, $M_2 \not\approx S_0, N_0$, и абсолютная степень $A(f) > 0$. Тогда для $\ell(f) = [\pi_1(M_2) : f_\#(\pi_1(M_1))]$*

$$MR[f] = \max\bigl\{\ell(f), \chi(M_1) + (1 - \chi(M_2))A(f)\bigr\}.$$

Доказательство. Так как отображение f может быть поднято на $\ell(f)$-листное (неразветвленное) накрытие M_2, отвечающее подгруппе $f_\#(\pi_1(M_1)) \subset \pi_1(M_2)$, то справедливо неравенство $MR[f] \geqslant \ell(f)$.

Нам необходимо рассмотреть различные случаи и мы закончим доказательство предложения 2.1 (и тем самым теоремы 1.1) только в разделе 4. Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ называется *ориентирующе-правильным*, если замкнутые кривые, сохраняющие ориентацию, переходят при f в кривые, сохраняющие ориентацию, а кривые, обращающие ориентацию, переходят в кривые, обращающие ориентацию, см. также [13].

Случай 2.2. Пусть $M_1 = S_h,\ M_2 = S_g$. В этой ситуации утверждение предложения 2.1 совпадает с [2, теорема 3.3].

Случай 2.3. Во всех оставшихся случаях по крайней мере одна поверхность неориентируема. Как уже упоминалось раньше, нам необходимо рассматривать только ориентирующе-правильные отображения. В частности, случай $M_1 = N_h$ и $M_2 = S_g$ полностью сделан. Далее, как уже упоминалось выше, если $\ell(f) \geqslant \chi(M_1) + (1 - \chi(M_2))A(f)$, то утверждение следует из [9, теорема 4.3]. Итак, в двух оставшихся случаях нам надо только рассмотреть ориентирующе-правильные отображения f с

$$\ell(f) < \chi(M_1) + (1 - \chi(M_2))A(f). \tag{1}$$

Случай 2.4. Пусть $M_1 = S_h,\ M_2 = N_g$. Отображение f может быть поднято на двулистное ориентирующее накрытие $p\colon S_g \to N_g$ до отображения $\bar f\colon M_1 = S_h \to S_g$ с $f = p \circ \bar f$. Если $d = |\deg \bar f|$, то мы имеем $A(f) = 2d$ и $\ell(f) = 2\ell(\bar f)$. Пусть $p^{-1}(c) = \{c_1, c_2\}$. Понятно, что число

$$A(f)\chi(M_2) - \chi(M_1) = 2d\chi(N_g) - \chi(S_h) = d\chi(S_g) - \chi(S_h)$$

четно и согласно неравенству Кнезера неотрицательно (см. [9, предложение 1.6]). В соответствии с неравенством (1) мы найдем два таких числа μ_1, μ_2, что

$$\ell(f) = 2\ell(\bar f) < 2d - (d\chi(S_g) - \chi(S_h)) = \mu_1 + \mu_2 \quad \text{с} \quad \ell(\bar f) \leqslant \mu_i \leqslant d.$$

Согласно [3, теорема 5.3] существует такое d-листное разветвленное накрытие $\tilde f\colon S_h \to S_g$, что

$$|\tilde f^{-1}(c_1)| = \mu_1,\ |\tilde f^{-1}(c_2)| = \mu_2 \quad \text{с} \quad \tilde f_\#(\pi_1(S_h)) = \bar f_\#(\pi_1(S_h)).$$

Согласно теореме Габаи–Казеса [11] существует такой гомеоморфизм $q\colon S_h \to S_h$, что $\bar f \simeq \tilde f \circ q$. Отображение $p \circ \tilde f \circ q$ является искомым.

Случай 2.5. Пусть $M_2 = N_g,\ M_1 = N_h$. Этот случай будет рассмотрен в разделе 4.

3. Построение разветвленных накрытий над неориентируемыми поверхностями. Перед окончанием доказательства сформулируем и докажем некоторые вспомогательные результаты, представляющие и самостоятельный интерес. В последующем мы пишем операцию перестановки множества $\{1, 2, \ldots, d\}$ с правой стороны от множества. Пусть Σ_d обозначает симметрическую группу на d символах. Прямым вычислением получается

Лемма 3.1. *Пусть* $d \geqslant 3k+1,\ \ k \geqslant 0$ *и* $\alpha = (d, d-1, \dots, 3, 2, 1)$,

$$\beta_k = (1, 2, 4, 5, 7, \dots, 3k-2, 3k-1, 3k+1, 3k+2, 3k+3, \dots, d)(3)\dots(3k).$$

Перестановка $\gamma = \beta_k^2 \alpha^2$ *имеет* $d-2k$ *независимых циклов*; *более точно,*

$$\gamma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)\dots(3k-2, 3k-1, 3k)(3k+1)\dots(d).$$

Лемма 3.2. *Подгруппа* $\langle \alpha, \beta_k \rangle$ *группы* $\Sigma_d,\ \ k \geqslant 1$, *примитивна, т.е. не существует собственного разбиения множества* $\{1, 2, \dots, d\}$, *инвариантного относительно действия* $\langle \alpha, \beta_k \rangle$.

Доказательство. Пусть $P_1, \dots, P_q$ – разбиение множества $\{1, 2, \dots, d\}$, инвариантное относительно действия $\langle \alpha, \beta_k \rangle$. Согласно [3, лемма 5.14] инвариантность относительно α^{-1} влечет, что

$$d = q \cdot \bar{d} \quad \text{и} \quad P_i = \{i + jq \mid 0 \leqslant j \leqslant \bar{d} - 1\}$$

после некоторой перенумерации множеств. Покажем, что при $1 < q < d$ такое разбиение не является инвариантным при действии перестановки γ.

Случай $q \geqslant 3k-1$. Здесь $2 \in P_2$ и $2+q \in P_2$, но $(2)\gamma = 3 \notin P_2$ и $(2+q)\gamma = 2+q \in P_2$; следовательно, разбиение не инвариантно при действии $\langle \alpha, \beta_k \rangle$.

Случай $q \leqslant 3k$. Здесь $q \in P_q$ и $d \in P_q$, но $(q)\gamma$ это $q+1$ или $q-2$. Таким образом, $(q)\gamma \notin P_q$ в противоречии с $(d)\gamma \in P_q$. Для $q = 2,\ (2)\gamma = 3 \in P_1$.

Теорема 3.3. *Для всякого* $d \geqslant 2$ *и всякого множества* m *точек* $c_1, \dots, c_m \in N_g$, *где* $g > 0$, *с такими ассоциированными целыми числами* $\mu_1, \dots, \mu_m$, *что*

$$1 \leqslant \mu_i \leqslant d-1 \ \forall i \in \{1, \dots, m\} \qquad \text{и} \qquad md - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \equiv 0 \mod 2,$$

существует такое примитивное d*-листное разветвленное накрытие* $\varphi\colon N_{\tilde{g}} \to N_g$ *с множеством ветвления* $B_\varphi = \{c_1, \dots, c_m\}$, *что* $|\varphi^{-1}(c_i)| = \mu_i$ *для* $1 \leqslant i \leqslant m$.

Доказательство. Наше доказательство основано на теореме Гурвица существования разветвленных накрытий [14], неориентируемый вариант которой можно найти в [15, теорема 2.1] или [16, лемма 2.1].

Рассмотрим сначала случай $d = p_1 \cdot \ldots \cdot p_t$ с простыми $2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_t$ и $\mu_i \leqslant (p_1 - 1)p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. Согласно теореме Гурвица существует такое разветвленное накрытие $\varphi\colon M \to N_g$ порядка d, что множество B_φ точек ветвления φ состоит из m точек $c_1, \dots, c_m$, с разбиениями $A_1, \dots, A_m$, где $A_i = (d - \mu_i + 1, 1, 1, \dots, 1)$ и A_j являются произвольными разбиениями d на μ_j слагаемых для $j \neq i,\ 1 \leqslant j \leqslant m$. Согласно [3, следствие 5.11] разветвленное накрытие φ примитивно.

Осталось рассмотреть случаи с $2\mu_i > d$. Тогда для $k = [(d-1)/3]$ мы имеем такое число $k \geqslant 1$, что $d \geqslant 3k+1$ и $d > \mu_i \geqslant d - 2k$. В [3] в доказательстве предложения 5.16 (случаи 2 и 3) точкам $c_1, \dots, c_m$ приписаны такие перестановки $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Sigma_d$ с $\mu_1, \dots, \mu_m$ циклами, соответственно, что

$$\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_m = (123)(456)\dots(3r-2, 3r-1, 3r)(3r+1)\dots(d-1)(d)$$

для некоторого $r \in \{1, \dots, k\}$. Представление $\pi_1(N_g \setminus \{c_1, \dots, c_m\}, *)$ в Σ_d зададим сопоставлением перестановок $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ каноническим образующим, соответствующим точкам $c_1, \dots, c_m$, и $\alpha_0 = \beta_r$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \dots = \alpha_g = \mathrm{id}$ для оставшихся $g+1$ образующих. Согласно лемме 3.2 и [3, предложение 5.6] d-листное разветвленное накрытие $\varphi\colon \widetilde{M} \to N_g$ (определяемое согласно теореме Гурвица по построенному представлению) примитивно.

Так как в обоих случаях разветвленное накрытие примитивно и (как всякое разветвленное накрытие) является ориентирующе-правильным, то накрывающее пространство $\widetilde{M}$ является неориентируемой замкнутой поверхностью $N_{\tilde{g}}$.

С использованием неразветвленного накрытия, отвечающего данной подгруппе $\pi_1(N_g)$, теорема 3.3 может быть обобщена на непримитивную ситуацию; для детального доказательства см. [3, следствие 5.18].

Следствие 3.4. *Пусть N_g – неориентируемая замкнутая поверхность, отличная от проективной плоскости, т.е. $g \geqslant 1$, и пусть $H \subset \pi_1(N_g, *)$ – подгруппа конечного индекса ℓ. Для всякого целого числа $d \geqslant \ell + 1$ с $d \equiv 0 \mod \ell$ и всякого множества m точек $c_1, \dots, c_m \in N_g$ с такими ассоциированными числами $\mu_1, \dots, \mu_m$, что*

$$\ell \leqslant \mu_i \leqslant d-1 \qquad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant m \qquad \text{и} \qquad \mu_1 + \dots + \mu_m \equiv md \mod 2,$$

существует такое d-листное разветвленное накрытие $\varphi\colon \widetilde{M} \to N_g$ замкнутой поверхности $\widetilde{M}$ на N_g с множеством ветвления $B_\varphi = \{c_1, \dots, c_m\}$, что $\varphi_\#(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{*})) = H$ для некоторой точки $\tilde{*} \in \varphi^{-1}(*)$ и $|\varphi^{-1}(c_i)| = \mu_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

Поверхность $\widetilde{M}$ ориентируема тогда и только тогда, когда H содержится в подгруппе индекса 2, содержащей гомотопические классы всех сохраняющих ориентацию путей, т.е. $H \subset p_\#(\pi_1(S_g))$, где $p\colon S_g \to N_g$ – двулистное ориентирующее накрытие N_g.

4. Окончание доказательства теоремы 1.1. Остался случай $M_1 = N_h$, $M_2 = N_g$ с $g \geqslant 1$. Из [9, теорема 2.5(c)] вытекает, что число $A(f)\chi(N_g) - \chi(N_h)$ четно. Кроме того, следующие рассуждения дают неравенства

$$0 < A(f)\chi(N_g) - \chi(N_h) < A(f) - \ell(f).$$

Правое неравенство вытекает из (1). Число $A(f)\chi(N_g) - \chi(N_h)$ неотрицательно согласно неравенству Кнезера (как в случае 2.5). Оно не зануляется, ибо иначе f будет гомотопно $A(f)$-листному накрытию, что влечет $A(f) = \ell(f)$ в противоречии с (1). Согласно следствию 3.4 существует такое $A(f)$-листное разветвленное накрытие $\varphi\colon \widetilde{M} \to N_g$, что

$$B_\varphi = \{c\}, \qquad \ell(f) < |\varphi^{-1}(c)| = A(f) - \bigl(A(f)\chi(N_g) - \chi(N_h)\bigr) < A(f)$$

и

$$\varphi_\#(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{*})) = f_\#(\pi_1(N_h, *_1)) = H.$$

Так как f является ориентирующе-правильным отображением, а M_1 неориентируемо, то H не может содержаться в подгруппе $p_\#(\pi_1(S_g))$ классов сохраняющих ориентацию кривых и, следовательно, $\widetilde{M}$ неориентируема. Для эйлеровых характеристик мы имеем

$$\chi(\widetilde{M}) = A(f) \cdot \chi(N_g) - \bigl(A(f) - |\varphi^{-1}(c)|\bigr) = \chi(N_h)$$

и, таким образом, $\widetilde{M}$ – неориентируемая поверхность, гомеоморфная N_h. Согласно теореме Габаи–Казеса [11] существует такой гомеоморфизм $q\colon N_h \to \widetilde{M}$, что f и $\varphi\circ q$ гомотопны. Теперь утверждение следует из

$$\begin{aligned} MR[f] \leqslant |(q^{-1}\circ\varphi^{-1})(c)| &= A(f) - \bigl(A(f)\chi(N_g) - \chi(N_h)\bigr) \\ &= \chi(N_h) + (1-\chi(N_g))A(f). \end{aligned}$$

Замечания. (a) Для $g \geqslant 3$ в теореме 3.3 и следствии 3.4 всякая система m разбиений числа d на $\mu_1,\dots,\mu_m$ слагаемых, соответственно, может быть реализована разветвленным накрытием с данным образом фундаментальной группы.

(b) Опираясь на [4, леммы 1.2, 3.1] или [3, фундаментальная лемма 8.3] или [9, леммы 5.5, 5.7, 6.3], наши результаты можно применить к решению некоторых квадратических уравнений в свободных группах.

(c) Так как тор S_1 является топологической группой, то минимальное число совпадения $MC[f_1,f_2]$ для всякой пары отображений $f_1,f_2\colon M_1\to M_2=S_1$ совпадает с минимальным числом корней $MR[f_1\overline{f_2}]$, где $\overline{f_2}(x)=(f_2(x))^{-1}$, $x\in M_1$, является обратным элементом к $f_2(x)$ в S_1, см. [16].

(d) Техника работы Добренко–Езерского [2] сводит вычисление минимального числа совпадения $MC[f_1,f_2]$ двух произвольных отображений $f_1,f_2\colon M_1 \to N_1$ в бутылку Клейна к соответствующему вычислению для двух отображений в тор S_1.

(e) Техника, развитая в работах [3], [9], [12] и этой статье, позволяет вычислить минимальный прообраз множества $\{c_1,\dots,c_m\}$ из m точек M_2, т.е. вычислить *минимальное число пересечения* МакКорда [18] в случае отображения 2-поверхности и вложения 0-многообразия, состоящего из m точек, в некоторое (возможно другое) 2-многообразие:

$$\begin{aligned} MR_m[f] &:= \min_{\tilde f\simeq f} |\tilde f^{-1}\{c_1,\dots,c_m\}| \\ &= \max\{m\ell(f),\ \chi(M_1)+(m-\chi(M_2))\cdot A(f)\}. \end{aligned}$$

(f) В работах [19], [20] авторы полностью решили задачу существования примитивного разветвленного накрытия с заданными порядками ветвлений. То есть получен более сильный вариант теоремы 3.3, в котором реализуются не только заданные количества прообразов точек ветвления, но и заданные порядки ветвления в этих прообразах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Schirmer H. Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten // J. Reine Angew. Math. 1955. V. 194. P. 659–671.
[2] Dobreńko R., Jezierski J. The coincidence Nielsen number on non-orientable manifolds // Rocky Mountain J. Math. 1993. V. 23. P. 67–87.
[3] Bogatyi S., Gonçalves D. L., Zieschang H. The minimal number of roots of surface mappings and quadratic equations in free groups // Math. Z. 2001. V. 236. P. 419–452.
[4] Jezierski J. The least number of coincidence points on surfaces // J. Australian Math. Soc. Ser. A. 1995. V. 58. P. 27–38.
[5] Hopf H. Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. II // Math. Ann. 1930. V. 102. P. 562–623.
[6] Богатый С. А., Гонсалвес Д. Л., Цишанг Х. Теория совпадения: Проблема минимизации // Тр. МИАН. 1999. Т. 225. С. 52–86.
[7] Epstein D. B. A. The degree of a map // Proc. London Math. Soc. (3). 1966. V. 16. P. 369–383.

[8] Brooks R. B. S. Certain subgroups of the fundamental group and the number of roots of $f(x)=a$ // J. Amer. Math. Soc. 1973. V. 95. P. 720–728.

[9] Gonçalves D. L., Kudryavtseva E., Zieschang H. Roots of mappings on nonorientable surfaces and equations in free groups // Manuscripta Math.. V. 107. P. 311–341.

[10] Kneser H. Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen // Math. Ann. 1930. V. 103. P. 347–358.

[11] Gabai D., Kazez W. H. The classification of maps of nonorientable surfaces // Math. Ann. 1988. V. 281. P. 687–702.

[12] Gonçalves D. L., Zieschang H. Equations in free groups and coincidence of mappings on surfaces // Math. Z. 2001.

[13] Olum P. Mappings of manifolds and the notion of degree // Ann. of Math. 1953. V. 58. P. 458–480.

[14] Hurwitz A. Über Riemannische Fläche mit gegebenen Verzweigungs-punkten // Math. Ann. 1891. V. 39. P. 1–60.

[15] Ezell C. L. Branched point structure of covering maps onto nonorientable surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 243. P. 123–133.

[16] Brooks R., Wong P. On changing fixed points and coincidences to roots // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115. P. 527–533.

[16] Edmonds A. L., Kulkarni R. S., Stong R. E. Realizability of branched coverings of surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. P. 773–790.

[18] McCord C. K. A Nielsen theory for intersection numbers // Fund. Math. 1997. V. 152. P. 117–150.

[19] Bogatyi S., Gonçalves D. L., Kudryavtseva E., Zieschang H. Realization of primitive branched coverings over closed surfaces // Submitted to Kluwer Academic Publishers.

[20] Bogatyi S., Gonçalves D. L., Kudryavtseva E., Zieschang H. Realization of primitive branched coverings over closed surfaces following the Hurwitz approach // Central Europ. J. of Math. 2003. V. 2. P. 184–197.

(Богатый С. А.) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: bogatyi@mech.math.msu.su
(Gonçalves Daciberg L.) Departamento de Matemática – IME-USP
Agência Cidade de São Paulo
E-mail: dlgoncal@ime.usp.br
(Кудрявцева Е.А.) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова и
Ruhr-Universität Bochum
E-mail: eakudr@mech.math.msu.su;
elena.kudrjawzewa@ruhr-uni-bochum.de
(Zieschang H.) Ruhr-Universität Bochum
E-mail: Heiner.Zieschang@ruhr-uni-bochum.de

Поступило
15.02.2001
Исправленный вариант
07.04.2003