

Е. А. Кудрявцева, Б. А. Макаρχук

Однозначная разложимость детского рисунка Гротендика в связную сумму примарных рисунков

В работе исследуется структура детских рисунков Гротендика по отношению к операции связной суммы рисунков. Вводится понятие примарного (т.е. неразложимого) рисунка. Доказывается, что любой непримарный рисунок может быть представлен в виде связной суммы конечного числа примарных рисунков. При этом набор примарных рисунков, из которых данный рисунок может быть получен с помощью операции связной суммы, определен однозначно.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: детский рисунок Гротендика, атом с мультиседлами, связная сумма, примарное разложение, ленточный граф.

§ 1. Введение и формулировка результатов

1.1. Начало теории детских рисунков было положено А. Гротендиком в 1984 г. в препринте [6], озаглавленном “Esquisse d’un Programme”. В этой работе он изложил новую точку зрения на графы на поверхностях, решив изучать вложения графов в ориентированные поверхности. *Детский рисунок* (dessin d’enfants) Гротендика $D = (M, G)$ — это двудольный граф G (возможно, с петлями и/или кратными ребрами) на замкнутой ориентированной поверхности M , разбивающий поверхность на области, гомеоморфные открытому диску. Если степени всех белых вершин рисунка равны 2, рисунок называется чистым.

Хорошо известна операция связной суммы двух детских рисунков по паре их ребер. Она определяется путем разрезания каждого рисунка по ребру и склеивания их друг с другом по краям разрезов с учетом цвета вершин и ориентации поверхностей (варианты этой операции использовались в [7, 1, 2]). Род связной суммы рисунков равен сумме родов этих рисунков.

Верно ли, что любой рисунок можно разложить в связную сумму однозначно определенных слагаемых, не допускающих дальнейших разложений? Оказывается, ответ положительный.

Вместо языка детских рисунков часто используют другие эквивалентные языки, например статья [8] использует эквивалентный язык ленточных графов (и их изображение в виде плоских графов с самопересечениями ребер, т.е. в виде погружений ленточных графов в плоскость); равносильность этих языков хорошо известна (см., например, [13]). Другой широко известный язык — разветвленные накрытия замкнутой поверхности над двумерной сферой с ровно 3 точками ветвления (см. § 5.1).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-71-10100) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко и Х. Цишанг [5, 3] использовали язык оснащенных ориентированных атомов в качестве объекта, эквивалентного чистым детским рисункам (см. описание других эквивалентных объектов в [3; §2.7]). В этом подходе рисунку отвечает двойственный ему объект — *оснащенный ориентированный атом с мультиседлами* (см. §1.2), также называемый *вырожденным седловым атомом* [11]. Атомы были введены А.Т. Фоменко для изучения интегрируемых гамильтоновых систем. Атом описывает локальное строение бифуркаций торов Лиувилля в слоении Лиувилля на изоэнергетическом 3-мерном многообразии гамильтоновой системы [5, 3]. Так, 3-атомы (т.е. трехмерные атомы [5, 3]) классифицируют особенности (особые слои) слоения Лиувилля гамильтоновой системы с 2 степенями свободы. В [5, 3] показано, что трехмерные атомы однозначно с точностью до гомеоморфизма кодируются двумерными атомами. Вкратце: 2-атом — это окрестность критического уровня гладкой функции, заданной на двумерном ориентированном многообразии, с указанием направления роста функции (более подробно см. [5, 3] и §1.2). По нашему мнению, язык атомов [5, 3] удобнее и проще для исследования однозначности разложимости рисунка в связную сумму рисунков.

Таким образом, вместо детского рисунка мы будем использовать эквивалентный объект (двойственный ему) — оснащенный ориентированный атом с мультиседлами (кратко просто *атом*).

Ниже приводятся основные результаты статьи. При этом упоминаются определения и теоремы, сформулированные в последующих разделах статьи на языке атомов (т.е. объектов, двойственных рисункам, см. выше).

Мы определяем операцию связной суммы двух атомов вдоль пары их лент (определение 1). Эта операция является перестройкой Морса индекса 1 [10] и отвечает связной сумме рисунков, двойственных этим атомам, вдоль пары их ребер. С помощью этой операции можно получить (вообще говоря, неоднозначное) разложение любого атома в виде связной суммы других атомов. Такое разложение атома (а потому и двойственного ему объекта — рисунка) в виде связной суммы нескольких атомов (рисунков) кодируется в статье с помощью некоторого дерева с дополнительной структурой, названного схемой склейки (определение 2). Мы показываем, что результат склеивания полностью определяется такой схемой склейки (теорема 1). Если склеиваемые объекты (атомы или рисунки) являются примарными, т.е. не допускают нетривиальных разложений в виде связной суммы, схему склейки назовем схемой примарной склейки.

Первый основной результат статьи (теорема 2) утверждает, что если данный рисунок (или атом) можно представить двумя способами в виде связной суммы примарных рисунков (атомов), то этим двум способам отвечают изоморфные схемы примарной склейки и, в частности, один и тот же набор примарных рисунков (атомов). Таким образом, каждому рисунку отвечает единственный набор примарных рисунков и единственная схема примарной склейки (с точностью до изоморфности схем, см. определение 6), по которой данный рисунок можно “собрать” из набора примарных.

Вторым основным результатом статьи является способ находить примарное разложение конструктивно. Для этого каждому рисунку (или атому) сопостав-

ляется комбинаторный объект (схема примарного разложения, которая является графом с дополнительной структурой), причем объекты, сопоставляемые эквивалентным рисункам, изоморфны (определение 9 и теорема 3). Напомним, что сопоставления с таким свойством называются топологическими инвариантами. Мы показываем, что этот инвариант является полным (теорема 3). Мы также описываем множество значений этого инварианта, т.е. показываем, что любая абстрактная схема примарного разложения реализуема некоторым атомом (теорема 4), а потому и рисунком. Затем мы устанавливаем связь между схемой примарной склейки и схемой примарного разложения атома (или рисунка): указываем, каким способом одна получается из другой (теорема 5).

Полученные результаты позволяют свести изучение всех рисунков к изучению существенно меньшего подкласса объектов — примарных рисунков. Предложенные конструкции могут быть полезны также в теории дифференциальных уравнений на графах. Сложные вычисления, часто возникающие там, можно, по-видимому, упростить, проведя редукцию к более простым графам.

Перейдем к точным формулировкам.

1.2. Оснащенные ориентированные атомы с мультиседлами и их связанные суммы. *Оснащенным ориентированным атомом с мультиседлами* называется пара (P^2, K) , где P^2 — связная компактная ориентированная поверхность с краем, K — вложенный в нее граф (возможно, с петлями и/или кратными ребрами) такой, что каждая связная компонента $P^2 \setminus K$ гомеоморфна цилиндру $S^1 \times (0, 1]$ и каждой из этих компонент приписан черный или белый цвет так, чтобы к каждому ребру графа K примыкает одна черная и одна белая компонента. Оснащенный ориентированный атом удобно представлять как набор “мультиседел”, соединенных между собой лентами (мультиседло — это малая окрестность вершины графа K , гомеоморфная окрестности U начала координат в плоскости (x, y) , причем $K \cap U$ задается уравнением $F = 0$, а черно-белая раскраска на $U \setminus K$ — неравенствами $F < 0$ и $F > 0$, где $F(x, y) = \operatorname{Re}((x + iy)^d)$, d — степень вершины). Если степени всех мультиседел (т.е. вершин графа K) равны 4, получаем классическое определение атома, введенное А.Т. Фоменко для изучения топологии лиувилева слоения, задаваемого функцией Морса на поверхности [3; определение 2.9].

Мы будем рассматривать оснащенные ориентированные атомы с мультиседлами с точностью до естественной эквивалентности: два атома (P^2, K) и (P'^2, K') *эквивалентны* (пишем $(P^2, K) \sim (P'^2, K')$), если существует гомеоморфизм, переводящий P'^2 в P^2 и K' в K , сохраняющий оснащение и ориентацию. Здесь и всюду далее под *атомом* понимается оснащенный ориентированный атом с мультиседлами.

Теперь введем операцию связной суммы атомов и понятие примарного атома.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим два атома A_1 и A_2 . Выберем в каждом из них по одной ленте, и разрежем выбранные ленты по середине. Теперь склеим берега разрезов, принадлежащие разным атомам, так, чтобы уважались ориентация и оснащение. Сделать это можно единственным образом. Получаем новый атом, который назовём *связной суммой* атомов A_1 и A_2 (или результатом *перестройки* Морса индекса 1 [10]) *вдоль* пары их лент l_1 и l_2 . Назовём

атом *примарным*, если он не может быть получен как результат применения операции связной суммы к каким-либо двум атомам.

§ 2. Схема склейки и схема примарной склейки атома

Пусть дан конечный набор $[C_i]_{i=1}^n$ из $n \geq 2$ атомов (некоторые атомы набора могут быть эквивалентны). Применим операцию связной суммы к некоторым двум атомам из этого набора и перейдем к новому набору, в котором эти два атома заменены на результат применения к ним операции связной суммы. С новым набором можно проделать то же самое и перейти к следующему набору. После $n - 1$ шага набор будет состоять из единственного атома A , который, конечно, зависит от того, как и какие атомы склеивались на каждом шаге. Таким образом, из всякого набора из n атомов с помощью любой (описанной выше) последовательности из $n - 1$ применения операции связной суммы можно получить новый атом. Будем говорить, что атом A является *результатом данной последовательности из $n - 1$ применения операции связной суммы* к набору $[C_i]_{i=1}^n$. На рис. 1 (а) показан пример атома, являющегося связной суммой трех примарных атомов.

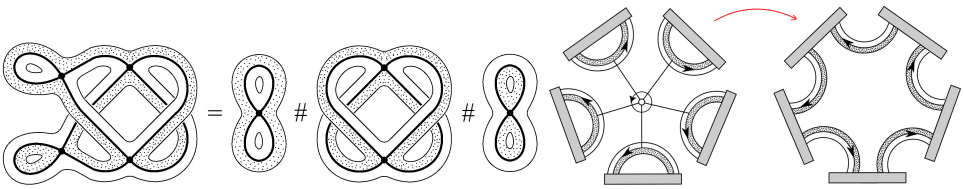


Рис. 1. (а) Пример разложения атома в связную сумму $B \# C_1 \# B^*$ трех атомов; (б) построение связной суммы нескольких атомов по топологической схеме склейки в малой окрестности ленточной мультиручки

Для описания результата данной последовательности применений операции связной суммы к набору $[C_i]_{i=1}^n$, а также для ответа на вопрос о том, какие последовательности применений операции связной суммы к набору $[C_i]_{i=1}^n$ имеют одинаковый результат, введем следующие определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Схемой склейки \dot{T}* назовем двудольно ленточное дерево T , i -ой неленточной вершине которого сопоставлены атом C_i ($i = 1, \dots, n$) и биекция между подмножеством множества лент атома C_i (ленты этого подмножества назовем *выделенными*) и множеством ребер дерева T , инцидентных i -ой неленточной вершине¹.

Для большей наглядности наряду со схемой склейки будем рассматривать эквивалентную ей топологическую схему склейки. Будем использовать следующую терминологию. Каждой ленточной вершине T сопоставим “ленточную

¹Двудольно ленточным деревом будем называть связный граф, являющийся деревом и имеющий 2 типа вершин: ленточные и неленточные. Каждое ребро соединяет вершины разных типов, для каждой ленточной вершины фиксирован циклический порядок инцидентных ей ребер. Также потребуем, чтобы степень каждой ленточной вершины была не меньше 2.

мультиручку” степени d_j (и индекса 1) — это объединение этой ленточной вершины и инцидентных ей ребер (рассматриваемое как абстрактное двумерно ленточное дерево с одной ленточной вершиной, d_j ребрами и d_j неленточными вершинами — подошвами ленточной мультиручки). Например, мультиручка степени 2 — это обычная ручка Морса индекса 1 [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Топологическая схема склейки* (отвечающая схеме \dot{T}) — это топологическое пространство, получающееся из набора атомов C_1, \dots, C_n в результате приклеивания всех мультиручек по их подошвам согласно схеме склейки \dot{T} : каждая подошва каждой мультиручки крепится к середине выделенной ленты, отвечающей этой подошве.

Каждой топологической схеме склейки (а значит, и каждой схеме склейки) сопоставим атом, получающийся из топологической схемы склейки перестройками в “малых окрестностях ленточных мультиручек”, отвечающих ленточным вершинам. Здесь “малая окрестность ленточной мультиручки” — это подмножество топологической схемы склейки, являющееся объединением ленточной вершины, инцидентных ей ребер и малых окрестностей дуг на лентах (с концами на граничных окружностях атома), трансверсально пересекающих граф K в точках на лентах, к которым крепятся подошвы согласно схеме склейки. Сама перестройка изображена на рис. 1 (b), где серыми прямоугольниками изображены атомы из набора $[C_i]_{i=1}^n$, к лентам которых крепятся подошвы соответствующей мультиручки, а вся остальная часть изображает “малую окрестность” этой мультиручки.²

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Полученный таким способом по данной схеме склейки \dot{T} атом назовем *результатом склейки набора атомов $[C_i]_{i=1}^n$ по схеме склейки \dot{T}* и будем обозначать $\#_{\dot{T}}[C_i]_{i=1}^n$ (или $\#\dot{T}$ для краткости).

ТЕОРЕМА 1. а) Для любого набора атомов $[C_i]_{i=1}^n$ и любой последовательности из $n-1$ применения операции связной суммы к этому набору (см. выше) существует схема склейки \dot{T} , i -ой неленточной вершине которой сопоставлен атом C_i исходного набора, такая, что результат этой последовательности применений операции связной суммы к набору $[C_i]_{i=1}^n$ эквивалентен атому $\#\dot{T}$.

б) Наоборот, для всякой схемы склейки \dot{T} , i -ой неленточной вершине которой сопоставлен атом C_i , атом $\#\dot{T}$ является результатом некоторой последовательности из $n-1$ применения операции связной суммы к набору $[C_i]_{i=1}^n$, где n — число неленточных вершин дерева T .

Конструкция атома, отвечающего данной схеме склейки по сути обобщает операцию связной суммы двух атомов, на случай произвольного числа атомов. Для того, чтобы определить связную сумму пары атомов, достаточно выделить на каждом из них по ленте, а для взятия связной суммы произвольного числа атомов необходимо “вставить” их в некоторую схему склейки \dot{T} и перейти к $\#\dot{T}$. В свою очередь теорема 1 утверждает, что определенная таким образом

²То, что поверхность, полученная таким способом, действительно является ориентируемой, следует из теоремы 1.

операция взятия связной суммы нескольких атомов представляется как композиция нескольких операций взятия связной суммы двух атомов. Здесь можно усмотреть аналогию с арифметикой, где перемножить несколько чисел можно, имея лишь бинарную операцию умножения.

Так как атомы разумно рассматривать с точностью до естественной эквивалентности, важно разобраться, какие схемы склейки определяют эквивалентные атомы. Пусть двудольно ленточные деревья T_1 и T_2 двух схем склейки изоморфны как абстрактные двудольно ленточные графы и $\phi : T_1 \rightarrow T_2$ — их изоморфизм. Рассмотрим неленточную вершину c_1 графа T_1 и $c_2 := \phi(c_1)$, а также примарные атомы C_1 и C_2 , отвечающие этим вершинам. Изоморфизм ϕ индуцирует биекцию между множествами ребер, инцидентных c_1 и c_2 соответственно. Учитывая, что каждому из этих ребер соответствуют ленты некоторых атомов C_1 и C_2 , получаем биекцию α между подмножествами множеств лент атома C_1 и атома C_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовём биекцию α *регулярной*, если существует изоморфизм h атомов C_1 и C_2 , такой, что порождаемая этим изоморфизмом биекция между множествами лент совпадает с биекцией α на соответствующем подмножестве множества лент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем две схемы склейки \dot{T}_1 и \dot{T}_2 *изоморфными*, если существует изоморфизм двудольно ленточных деревьев T_1 и T_2 , порождающий регулярные биекции в каждой вершине. Обозначаем $\dot{T}_1 \simeq \dot{T}_2$.

Можно доказать, что из изоморфных схем склейки получаются эквивалентные атомы, обратное же, вообще говоря, неверно, т.е. эквивалентные атомы могут получаться из неизоморфных схем, но ниже мы выделим особый подкласс схем склейки, для которого будет верно и обратное утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Схема склейки \dot{T} называется *схемой примарной склейки*, если все атомы C_1, \dots, C_n , сопоставляемые неленточным вершинам ее двудольно ленточного дерева T , являются примарными.

ТЕОРЕМА 2. Для каждого атома A существует единственная (с точностью до изоморфизма) примарная схема склейки \dot{T} такая, что $\#\dot{T} \sim A$.

Единственную схему примарной склейки \dot{T} , результат склейки по которой эквивалентен атому A (т.е. $\#\dot{T} \sim A$), будем обозначать через \dot{T}_A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Набор атомов, сопоставленных неленточным вершинам в схеме \dot{T}_A , назовем *набором примарных компонент* атома A .

В частности, из теоремы 1 получаем, что набор примарных атомов, из которых данный атом A может быть получен с помощью некоторой последовательности применений операции связной суммы, определен однозначно.

Последняя теорема констатирует наличие естественного взаимозначного соответствия между схемами примарной склейки и атомами. Т.е. изучение всех атомов в некотором смысле сводится к изучению примарных атомов и двудольно ленточных деревьев. Возвращаясь к аналогии с арифметикой, можно заметить, что теорема 2 играет роль аналога основной теоремы арифметики,

о том, что любое число единственным (с точностью до перестановки множителей) образом представляется в виде произведения простых. В нашем случае кроме “простых чисел” — примарных компонент — нужно фиксировать еще и “способ перемножения” — схему примарной склейки.

В следующем разделе мы укажем явный способ, позволяющий найти схему примарной склейки, отвечающую данному атому. Эта конструкция будет использована для доказательства теоремы 2, а также интересна сама по себе, потому что дает другой взгляд на процесс разложения атома на примарные компоненты.

§ 3. Схема примарного разложения

Рассмотрим следующую конструкцию. На множестве всех мультисидел данного атома A введем отношение эквивалентности: мультисидла S_1 и S_2 — эквивалентны, если не существует двух лент, после разрезания которых S_1 и S_2 окажутся в разных компонентах связности.

ЛЕММА 3.1. Указанное отношение действительно является отношением эквивалентности.

Множество всех мультисидел распадается на непересекающиеся классы. Если лента соединяет мультисидла из одного класса, назовём её *внутренней* лентой этого класса, прочие ленты (не являющиеся внутренними ни для какого класса) назовем *внешними*.

Рассмотрим произвольную внешнюю ленту l_1 . Пусть один из её концов приклеен к мультисидлу S_1 , принадлежащему классу эквивалентности X .

ЛЕММА 3.2. Существует ровно одна внешняя лента l_2 , такая, что после разрезания l_1 и l_2 исходный атом становится несвязным и один из концов l_2 также приклеен к мультисидлу, принадлежащему классу эквивалентности X .

Ленту l_2 будем называть *парной* для l_1 относительно класса X . Разрежем все внешние ленты атома A . Берега разрезов, отвечающие мультисидлам из класса X , разбиты на пары (парные берега отвечают парам внешних лент, инцидентных классу X).

Рассмотрим все мультисидла, принадлежащие фиксированному классу X вместе с внутренними лентами этого класса.

Склеим парные берега так, чтобы уважались ориентация и оснащение. В результате получится атом или дизъюнктивное объединение нескольких атомов.

ЛЕММА 3.3. Для любого атома A и любого класса эквивалентности X его мультисидел объект, полученный в результате указанной склейки, является примарным атомом (и, в частности, связан). Назовем этот атом примарной компонентой атома A , отвечающей классу X .

Таким образом, по каждому классу эквивалентности мультисидел нами построен примарный атом.

Теперь рассмотрим остовный граф K атома A . Будем считать его ориентированным так, что ориентация каждого ребра согласована с направлением

соответствующего гамильтонова векторного поля (т.е. при движении вдоль ребра отрицательная связная компонента $P \setminus K$ расположена слева). Введенные выше понятия переносятся на этот ориентированный граф. Т.е. отношение эквивалентности на множестве мультисёдел порождает отношение эквивалентности на множестве вершин графа, ребра графа разделяются на внутренние и внешние в зависимости от того, какой ленте в атоме они соответствуют. Удалим из графа K все внутренние ребра всех классов, после чего профакторизуем граф по отношению эквивалентности на множестве вершин (т.е. в новом графе эквивалентные вершины отождествлены). Полученный ориентированный граф обозначим через Γ_A и назовем *графом примарного разложения атома A* .

ЛЕММА 3.4. *Каждое ребро графа Γ_A лежит ровно в одном простом цикле, причем каждый простой цикл ориентирован. Назовем это свойство графа свойством (1)³.*

Вспомним, что каждая вершина графа Γ_A отвечала какому-то классу эквивалентности мультисёдел, по которому ранее был построен примарный атом (в леммах 3.1–3.3). Получаем естественную биекцию между примарными компонентами атома A (см. лемму 3.3) и вершинами его графа примарного разложения. Для каждой вершины графа примарного разложения рассмотрим множество проходящих через неё простых циклов. Каждому такому циклу отвечает лента (склеенная из двух “полулент” пары внешних лент l_1, l_2) примарного атома, отвечающего этой вершине. Таким образом, в каждой вершине имеется естественная инъекция из множества простых циклов, проходящих через неё, в множество лент соответствующего примарного атома.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Построенный по атому A граф примарного разложения Γ_A , вершинам которого сопоставлены примарные атомы и естественная инъекция из множества простых циклов, проходящих через данную вершину, в множество лент примарного атома, будем называть *схемой примарного разложения атома A* и обозначать через $\tilde{\Gamma}_A$. Схемы примарного разложения двух атомов назовём *изоморфными*, если существует изоморфизм соответствующих графов примарного разложения, порождающий регулярные биекции между подмножествами множеств лент примарных атомов в соответствующих вершинах (определение 5). В частности, примарные атомы, стоящие в вершинах, отождествляемых таким изоморфизмом, должны быть эквивалентными.

ТЕОРЕМА 3. *Два атома эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы примарного разложения изоморфны.*

Таким образом, сопоставление любому атому его схемы примарного разложения (определение 9) является топологическим инвариантом атомов (т.е. принимает одно и то же значение на эквивалентных атомах), причем этот инвариант является полным (т.е. принимает разные значения на неэквивалентных атомах). Теперь опишем множество значений, которые может принимать построенный инвариант.

³Такие графы — это в точности кактусы с четными степенями вершин, все простые циклы которых ориентированы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Абстрактной схемой примарного разложения* назовём ориентированный граф $\dot{\Gamma}$, обладающий свойством (1) из леммы 3.4 и снабженный следующей структурой: каждой вершине этого графа сопоставлен примарный атом и биекция между множеством простых циклов, проходящих через рассматриваемую вершину, и подмножеством множества лент примарного атома.

Изоморфность абстрактных схем примарного разложения определяется так же, как и для схем примарного разложения атомов (определение 9), обозначение $\dot{\Gamma}_1 \simeq \dot{\Gamma}_2$.

ТЕОРЕМА 4. *Любая абстрактная схема примарного разложения изоморфна схеме примарного разложения некоторого атома.*

§ 4. Связь схемы примарной склейки и схемы примарного разложения

Оказывается, что полученные в разделах 2 и 3 (см. теоремы 2 и 3) инварианты атомов тесно связаны между собой.

Рассмотрим два множества: \mathbf{V} — множество вершин графа Γ_A примарного разложения атома A , а \mathbf{Z} — множество его простых циклов. Построим новый двудольный граф T_A^Γ с множеством вершин $\mathbf{V} \sqcup \mathbf{Z}$. В этом графе две вершины v и Z соединены ребром тогда и только тогда, когда $v \in \mathbf{V}$, $Z \in \mathbf{Z}$ (или наоборот) и простой цикл Z содержит вершину v (в графе Γ_A). В каждой вершине $Z \in \mathbf{Z}$ этого графа можно естественно ввести циклический порядок инцидентных ей полуребер. Действительно, любое ребро, инцидентное вершине Z в графе T_A^Γ , имеет вид $Z v_i$, где v_i — одна из вершин простого цикла Z . Ребро $Z v_i$ будем считать *следующим* за ребром $Z v_j$, если вершина v_j следует за v_i в простом ориентированном цикле Z .

ЛЕММА 4.1. *Двудольно ленточный граф T_A^Γ является деревом. Обратное тоже верно: любое двудольно ленточное дерево может быть получено указанным способом из некоторого графа со свойством (1) из леммы 3.4.*

В каждой неленточной вершине дерева T_A^Γ есть естественная биекция между множеством выделенных лент отвечающего этой вершине примарного атома P и ребрами дерева T_A^Γ , инцидентными этой вершине, так как в схеме примарного разложения каждая выделенная лента атома P отвечала единственному простому циклу. Т.е. двудольно ленточное дерево T_A^Γ естественным образом наделяется структурой схемы примарной склейки.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого атома A схема примарной склейки \dot{T}_A^Γ (см. обозначение после теоремы 2), изоморфна схеме примарной склейки \dot{T}_A^Γ , получаемой из схемы примарного разложения атома A указанным выше способом.*

При решении различных вопросов может быть удобно пользоваться как схемой примарной склейки, так и схемой примарного разложения. Установленная в теореме 5 эквивалентность этих инвариантов дает возможность при необходимости переходить от одного к другому.

§ 5. Связь с детскими рисунками Гротендика, графами и узлами

5.1. Детские рисунки Гротендика и их однозначная разложимость в связную сумму примарных рисунков. Атом (P^2, K) можно эквивалентным образом задать как ориентированный ленточный граф K (т.е. граф, снабженный циклическим порядком полуребер, инцидентных каждой вершине) с чередующимися входящими и исходящими полуребрами в любой вершине. Такой ориентированный ленточный граф можно изображать в виде погруженного ориентированного графа K в плоскость [8; §3.2].

Атом (P^2, K) кодирует гладкую функцию $F : M \rightarrow [0, +\infty]$ с ровно 3 критическими значениями $0, 1, +\infty$ на замкнутой ориентированной поверхности M (при этом поверхность $P^2 \subset M$ с краем задается неравенствами $1/2 \leq F \leq 2$, граф K — уравнением $F = 1$, а оснащение — разбиением $P \setminus K$ на отрицательные и положительные кольца $F < 1$ и $F > 1$).

Как отмечалось выше, понятие атома эквивалентно также понятию детского рисунка Гротендика [6], поскольку они являются двойственными друг другу объектами. Эти понятия также эквивалентны разветвленному накрытию $f : M \rightarrow S^2$ замкнутой поверхности M над двумерной сферой S^2 с ровно 3 критическими значениями $0, 1, \infty \in S^2 = \mathbb{C}$. Такому разветвленному накрытию сопоставим двудольный граф — детский рисунок $f^{-1}([0, 1])$. Двойственный этому рисунку объект — атом (P^2, K) — задается формулами $P^2 = f^{-1}\{w \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq |\frac{w-1}{w}| \leq 2\}$, $K = f^{-1}\{w \in \mathbb{C} \mid |\frac{w-1}{w}| = 1\}$. На этом атоме задана гладкая функция $F = |\frac{f-1}{f}|$ с ровно одним критическим значением 1, критическим уровнем $K = F^{-1}(1)$ и множеством критических точек $f^{-1}(\infty)$.

Введенная нами операция связной суммы атомов A_1 и A_2 (определение 1) отвечает следующей операции *связной суммы* разветвленных накрытий (рисунков) $f_{A_j} : X_{A_j} \rightarrow S^2$ ($j = 1, 2$). Выберем поднятие γ_j отрезка $[0, 1] \subset S^2$ при разветвленном накрытии f_{A_j} (для каждого $j = 1, 2$), разрежем каждую поверхность X_{A_j} по дуге γ_j и склеим берега разрезов друг с другом так, чтобы образы склеиваемых точек при проекциях f_{A_1} и f_{A_2} совпадали и чтобы в результате склеивания получились замкнутая поверхность X и разветвленное накрытие $f : X \rightarrow S^2$ (рис. 2). Результат этой операции назовем *связной суммой* разветвленных накрытий (рисунков), а разветвленные накрытия, которые не являются связной суммой никаких двух накрытий, назовем *примарными*.

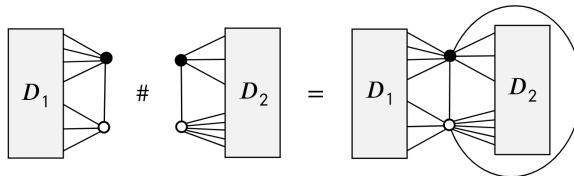


Рис. 2. Связная сумма детских рисунков Гротендика рода 0

На рис. 3 изображен рисунок рода 1, двойственный атому на рис. 1 (а), и его разложение в связную сумму трех примарных рисунков.

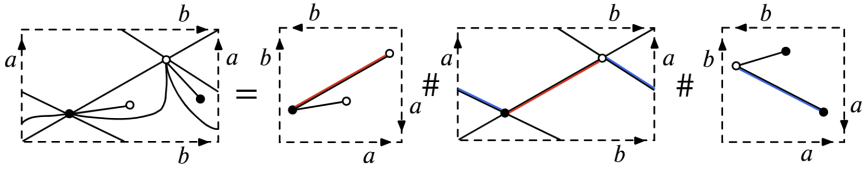


Рис. 3. Разложение рисунка в связную сумму трех примарных рисунков

Если вместо отрезка $[0, 1]$ рассмотреть дуги $[1, +\infty]$ и $[-\infty, 0]$ на сфере $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, получим понятия 0- и 1-связных сумм, 0- и 1-примарных разветвленных накрытий (рисунков) соответственно (рис. 4).

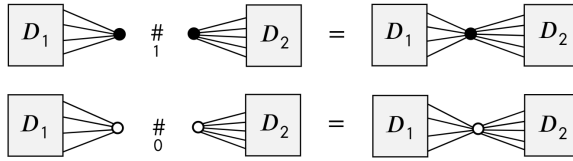


Рис. 4. 1- и 0-связные суммы детских рисунков Гротендика рода 0

На языке атомов эти операции формулируются так. Пусть в каждом атоме A_j фиксировано мультиседло и простая дуга δ_j , лежащая в положительном (соответственно отрицательном) кольце и соединяющая это мультиседло с точкой граничной окружности атома ($j = 1, 2$). 0-Связной суммой (соответственно 1-связной суммой) атомов A_1 и A_2 по паре их дуг δ_1, δ_2 назовем атом A , получающийся разрезанием этих атомов по этим дугам и склеиванием друг с другом по краям разрезов (рис. 5). Такой атом A можно назвать 0-букетом (соответственно 1-букетом) атомов A_1 и A_2 по отношению к указанным мультиседлам и примыкающим к ним дугам (линиям разреза).

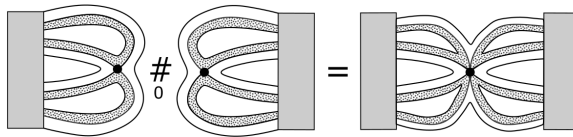


Рис. 5. 0-связная сумма (т.е. 0-букет) двух атомов

Как связаны примарные разложения атомов A_1, A_2 и их 0-связной суммы (т.е. 0-букета)? Ответ дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть атом A получен 0-связной суммой двух атомов A_1 и A_2 . Пусть S_j — участвующее в операции 0-связной суммы мультиседло атома A_j , P_j — содержащая это мультиседло примарная компонента атома A_j , Γ_{A_j} — граф примарного разложения атома A_j , и r_j — неленточная вершина этого графа, отвечающая примарной компоненте P_j ($j = 1, 2$). Тогда граф Γ_A примарного разложения атома A получается из графов Γ_{A_1} и Γ_{A_2} склеиванием вершин r_1 и r_2 . Схema $\dot{\Gamma}_A$ примарного разложения атома A сопоставляет этой вершине графа Γ_A примарный атом P , являющийся 0-связной суммой

примарных атомов P_1 и P_2 (полученной с помощью разрезания их по тем же дугам, которые участвовали в операции 0-связной суммы атомов A_1 и A_2), при этом любой вершине графа Γ_A сопоставляется естественная (индуцированная) биекция между множеством простых циклов графа Γ_A , проходящих через вершину, и подмножеством множества лент примарного атома.

Таким образом, по предложению 1 операция 0-связной суммы (т.е. 0-букета) двух атомов A_1 и A_2 сводится к применению этой операции к паре примарных компонент P_1 и P_2 этих атомов. Аналогично определяется схема 0-склейки для произвольного набора атомов (посредством “дерева склейки”). Так как операция 0-связной суммы определяется так же, как связная сумма (см. выше), для нее верны те же свойства и, в частности, однозначность разложения любого (например, примарного) атома в 0-связную сумму 0-примарных атомов.

Детский рисунок Гротендика (и отвечающий ему атом) назовем *полностью примарным*, если он является примарным, 0-примарным и 1-примарным.

Таким образом, результаты этой статьи сводят изучение рисунков Гротендика (и эквивалентных им атомов) к изучению меньшего подкласса объектов — полностью примарных рисунков.

5.2. Графы и их разложимость в связную сумму примарных графов. Полученные в статье результаты и введенные понятия распространяются не только на детские рисунки Гротендика, но и на более простые объекты — ориентированные графы, обладающие следующим свойством *сбалансированности*: в каждой вершине количества входящих и исходящих полуребер совпадают. При этом атом (P^2, K) примарен тогда и только тогда, когда его остов K примарен как ориентированный граф.

С другой стороны, примарность графа не зависит от его ориентации в том смысле, что если два ориентированных графа (обладающие свойством сбалансированности) становятся совпадающими после забывания ориентации, то их примарные компоненты совпадают. Значит, понятие примарности корректно определено для неориентированных графов с четными степенями вершин. При этом примарность атома (P^2, K) равносильна примарности его остова — (неориентированного) графа K .

Также на графы можно распространить понятие 0-примарности: граф назовем *0-примарным*, если он не является букетом двух других графов. Из 0-примарности графа K следует 0-примарность и 1-примарность атома (P, K) . Обратное верно в случае 4-валентных графов K (т.е. остовов обычных атомов, с морсовскими седлами). Но в общем случае (когда степени некоторых вершин графа K больше, чем 4) обратное не обязательно верно: из 0-примарности и 1-примарности атома (P, K) не следует, вообще говоря, 0-примарность графа K .

Интересно, существует ли полностью примарный атом (P, K) (т.е. детский рисунок), для которого граф K не является 0-примарным графом?

Определения схемы примарного разложения и схемы склейки (а также схем 0-примарного разложения, 0-склейки, 1-примарного разложения и 1-склейки) нетрудно распространить на неориентированные графы с четными степенями вершин. Интересен вопрос: единственно ли разложение такого графа в связную сумму примарных графов? А в 0-связную сумму 0-примарных графов?

5.3. Узлы и их однозначная разложимость в связную сумму примарных узлов. Рассмотрим атом (P, K) с 4-валентным графом K (т.е. обычный атом, с морсовскими седлами). Если такой атом является плоским и состоит из одной уникурсальной окружности, то его можно рассматривать как плоскую кривую с простыми точками самопересечения (такая кривая станет диаграммой узла, если в ее вершинах добавить информацию о проходах и переломах). Связной сумме таких атомов будет отвечать связная сумма узлов — известная (коммутативная) операция в теории узлов, причем верна однозначность разложимости узла в связную сумму примарных узлов [12].

Получаем связь между примарностью атома и примарностью узла: если диаграмма узла минимальна и задает примарный узел, то задаваемый этой диаграммой плоский атом (с одной уникурсальной окружностью) полностью примарен. Значит, таблицы диаграмм примарных узлов, полученные в теории узлов, дают нам примеры полностью примарных чистых детских рисунков (т.е. морсовских атомов) рода 0 и полностью примарных 4-валентных графов.

§ А. Доказательство лемм

Для начала заметим, что граф K атома A — реберно двусвязен (т.е. не имеет мостов). Отсюда, в частности, следует, что после разрезания любых двух лент атом A распадается не более, чем на 2 связные компоненты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Рефлексивность и симметричность очевидны. Поясним транзитивность. Пусть есть три мультиседла: S_1, S_2, S_3 , и пусть S_1 эквивалентен S_2 , а S_2 эквивалентен S_3 . Тот факт, что $S_2 \sim S_1$ и $S_2 \sim S_3$, означает, что после разрезания любых двух лент S_2, S_1 и S_3 лежат в одной компоненте связности. А значит, $S_1 \sim S_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Утверждение легко выводится из леммы 3.4, которая будет доказана независимо. Действительно, если классу X отвечает вершина x графа Γ , а ленте l_1 — ребро l_1 графа Γ , инцидентное x , то существует ребро l_2 инцидентное x и лежащее в том же простом цикле, что и l_1 . Внешняя лента, отвечающая l_2 , удовлетворяет всем необходимым условиям, так как после удаления l_1 и l_2 граф Γ становится несвязным (так как иначе граф Γ содержит подграф, гомеоморфный “букве θ ”, что противоречит свойству (1) из леммы 3.4 для графа Γ), а значит, несвязным становится и атом A после разрезания лент l_1 и l_2 .

Докажем единственность. Пусть l_3 — другая внешняя лента, парная l_1 относительно класса X . Рассмотрим ребра графа Γ , отвечающие лентам l_1, l_2, l_3 в графе Γ , которые обозначим теми же символами. В доказательстве леммы 4 пояснено, что если атом распадается на две компоненты связности после разрезания пары лент, то граф Γ распадается на две компоненты связности после удаления ребер, отвечающих этим лентам. После удаления из Γ пары ребер, лежащих в разных простых циклах, Γ останется связным (так как его простые циклы не пересекаются по ребрам), а значит, l_1 и l_2 лежат в одном простом цикле w_2 , а ребра l_1 и l_3 в другом (так как все 3 ребра инцидентны одной вершине x) простом цикле w_3 . Но тогда ребро l_1 лежит сразу в двух простых циклах, что противоречит свойству (1) из леммы 3.4 для графа Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Рассмотрим любые два мультиседла S_1 и S_2 , лежащих в классе эквивалентности X мультиседел, из которого был получен рассматриваемый атом P (возможно, несвязный). По теореме Менгера о реберной связности (см., например, [4]) из того, что после удаления любых двух ребер из графа K вершины S_1 и S_2 остаются в одной компоненте связности, следует, что существует по крайней мере 3 попарно реберно непересекающихся пути в K с концами в S_1 и S_2 . Каждый из этих путей имеет вид

$$\pi_i = \gamma_1^i l_1^i \eta_1^i \tilde{l}_1^i \gamma_2^i l_2^i \eta_2^i \tilde{l}_2^i \dots \gamma_{n_i}^i l_{n_i}^i \eta_{n_i}^i \tilde{l}_{n_i}^i \gamma_{n_i+1}^i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где γ_j^i — части i -го пути, идущие по внутренним ребрам класса X (возможно, пустые), l_j^i и \tilde{l}_j^i — парные для класса X внешние ребра (согласно лемме 3.2), η_j^i — пути, лежащие в компоненте связности графа, получающейся после удаления ребер l_j^i и \tilde{l}_j^i , и не содержащей X . Теперь рассмотрим путь $\tilde{\pi}_i$ в графе K_P , отвечающий пути π_i и имеющий вид

$$\tilde{\pi}_i = \gamma_1^i L_1^i \gamma_2^i L_2^i \dots \gamma_{n_i}^i L_{n_i}^i \gamma_{n_i+1}^i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где L_j^i — ребро графа K_P , получившееся после склейки разрезов на ребрах l_j^i и \tilde{l}_j^i . Этот путь соединяет вершины S_1 и S_2 в графе K_P .

Итак, трем попарно реберно непересекающимся простым путям π_i в K отвечают три попарно реберно непересекающихся пути $\tilde{\pi}_i$ в K_P . Таким образом, любые две вершины графа K_P соединяются хотя бы 3 попарно реберно непересекающимися простыми путями. (В частности, полученный после склейки объект связан, а значит, является атомом.) Снова применяя теорему Менгера (см. [4]), заключим, что после удаления любых двух ребер граф K_P остается связным, а значит, после разрезания любой пары лент связным остается атом P . Отсюда, очевидно, следует, что атом P — примарный (определение 1). Стоит отметить, что доказательство этой леммы нетрудно провести, пользуясь лишь определением примарного атома и не привлекая теорему Менгера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Пусть $V = V_1 \sqcup V_2$, где V — множество всех вершин графа K , а V_1 и V_2 — не пусты. Пусть n_1 — число ребер, ведущих из вершин множества V_1 в вершины множества V_2 , n_2 — число ребер, ведущих из вершин множества V_2 в вершины множества V_1 , а m — число лент, соединяющих мультиседла из V_1 , k^+ — общее число ребер, выходящих из вершин V_1 , k^- — общее число ребер, входящих в вершины V_1 . Тогда $k^+ = k^- = k$ в силу того, что в каждой вершине число входящих и выходящих ребер равно по свойствам седловой особенности. С другой стороны $k^+ = m + n_1$, $k^- = m + n_2$ откуда заключаем, что $n_1 = n_2$. Взяв в качестве V_1 мультиседла одного класса, а в качестве V_2 все остальные мультиседла, получаем, что степени всех вершин графа Γ чётные, причем в каждой вершине число входящих и выходящих полуребер совпадает.

Для того, чтобы произвольное ребро l_1 содержалось в некотором простом (ориентированном) цикле, достаточно, чтобы оно содержалось в каком-нибудь (ориентированном) цикле. Построим такой цикл. Пусть l_1 ведет из вершины a_1 в вершину a_2 . Если $a_1 = a_2$, искомый цикл построен. Если же $a_1 \neq a_2$, то в силу того, что число входящих и выходящих ребер в вершине a_2 равны,

найдется выходящее ребро $l_2 \neq l_1$, ведущее из a_2 в a_3 . Если $a_3 \neq a_1$, то снова по тем же причинам найдется ребро $l_4 \notin \{l_1, l_2, l_3\}$, “продолжающее” строимый путь. Таким образом, после k итераций получаем реберно несамопересекающийся путь $l_1 l_2 l_3 \dots l_k$. С одной стороны, в некоторой вершине a_n продолжить такой путь будет невозможно в силу конечности множества ребер графа Γ , с другой стороны его можно продолжить из любой вершины, не совпадающей с a_1 . Значит, $a_n = a_1$ и на n -ом шаге получился искомым цикл.

Обратим внимание на следующее свойство графа Γ . Если после разрезания двух внешних лент l_1 и l_2 атома A атом A становится несвязным, то после удаления ребер графа Γ , отвечающих l_1 и l_2 , граф Γ также становится несвязным. Это следует из того, что после разрезания любых двух лент каждый класс эквивалентности мультиседла лежит целиком в одной из связных компонент, и того, что граф Γ получается из остовного графа K удалением части ребер и факторизацией по отношению эквивалентности на множестве вершин.

Если же какое-то ребро графа Γ лежит сразу в двух простых циклах, то в Γ есть подграф, гомеоморфный “букве θ ”. Рассмотрим две вершины x_1 и x_2 этого подграфа, имеющие степень 3. Этим вершинам отвечали два различных класса эквивалентности вершин X_1 и X_2 в графе K . Пусть $S_1 \in X_1$, $S_2 \in X_2$ — два неэквивалентных мультиседла. Тогда существуют две внешние ленты l_1 и l_2 , после разрезания которых S_1 и S_2 будут лежать в разных связных компонентах, причем все мультиседла из X_i будут лежать в компоненте связности мультиседла S_i ($i = 1, 2$). Тогда после разрезания ребер графа Γ , отвечающих внешним лентам l_1 и l_2 , граф Γ также перестает быть связным (по свойству графа Γ из предыдущего абзаца), причем x_1 и x_2 лежат в разных связных компонентах. Но это невозможно, так как они соединяются по крайней мере 3 реберно непересекающимися (до разрезания) путями, отвечающими ребрам подграфа θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Если в двудольно ленточном графе $T = T_A^\Gamma$ существует простой цикл $v_1 Z_1 \dots v_k Z_k$ (указаны вершины графа T), то через каждую ленточную вершину Z_i он проходит не более одного раза. Заменяем каждый фрагмент $v_i Z_i v_{i+1}$ на простую дугу внешних ребер в Γ от v_i до v_{i+1} вдоль простого ориентированного цикла Z_i . Получили ориентированный цикл в графе Γ . Будем идти по нему, пока не придем туда (в некоторую вершину графа Γ), где уже были. Получили простой подцикл в нашем цикле (в графе Γ). Значит, этот простой подцикл — один из простых циклов графа Γ . Но это противоречит построению и лемме 3.4: такой цикл в Γ не мог быть построен по простому пути (лежащему в простом цикле) двудольно-ленточного графа T . Полученное противоречие показывает, что T не имеет циклов, т.е. является деревом.

Докажем обратное. Пусть \mathbf{V} — множество неленточных вершин некоторого двудольно ленточного дерева T . Рассмотрим ориентированный граф Γ , для которого \mathbf{V} — множество вершин и две вершины a и b соединены (направленным) ребром \vec{ab} тогда и только тогда, когда в T найдется ленточная вершина Z , для которой ребро Za следует за ребром Zb . Каждой ленточной вершине графа T отвечает ориентированный простой цикл в графе Γ , причем из того, что T — дерево, сразу следует, что удаление любых двух ребер одного простого

цикла, отвечающего некоторой ленточной вершине, делает Γ несвязным. Учтывая, что каждое ребро графа Γ принадлежит некоторому простому циклу, отвечающему одной из ленточных вершин, заключим, что в Γ нет подграфа, гомеоморфного букве θ , а значит, он обладает свойством (1) из леммы 3.4. Построенное по Γ двудольно ленточное дерево T^Γ , очевидно, совпадает с T .

§ В. Доказательство теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть результатом данной последовательности из $n - 1$ применения операции связной суммы к набору $[C_i]_{i=1}^n$ является атом A . Строить схему склейки \dot{T} такую, что $\#\dot{T} \sim A$, будем последовательно, сопоставляя набору атомов k -ого шага (т.е. набору, полученному из $[C_i]_{i=1}^n$ применением первых k операций связной суммы из рассматриваемой последовательности) двудольно ленточный лес T_k с дополнительной информацией в неленточных вершинах (обозначаемый через \dot{T}_k^{num}), при этом лес T_k есть дизъюнктное объединение $n - k$ деревьев, где k — номер шага, $0 \leq k \leq n - 1$. Переход от \dot{T}_k^{num} к $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$ соответствует $k + 1$ -ой склейке. Двудольно ленточное дерево $T = T_{n-1}$ с дополнительной информацией (называемое *упорядоченной схемой склейки* \dot{T}^{num}) будет описывать весь процесс целиком. Мы покажем, что после “забывания нумерации” (т.е. перехода от \dot{T}^{num} к \dot{T}) получится схема склейки (определение 2), которая и является искомой, т.е. обладает свойством $\#\dot{T} \sim A$.

Определим \dot{T}_0^{num} как граф из неленточных вершин c_1, \dots, c_n без ребер, в каждую вершину c_i помещен атом C_i исходного набора (т.е. задана биекция между множеством вершин c_i (неленточных) и множеством атомов C_i).

Пусть определена упорядоченная схема склейки \dot{T}_k^{num} ($0 \leq k \leq n - 2$). То есть задан двудольно ленточный лес, в каждую неленточную вершину c_i которого помещен атом C_i и определена биекция $\alpha_{i,k}$ между множеством $R_{i,k}$ инцидентных ей ребер и подмножеством $L_{i,k}$ множества лент атома C_i ($R_{i,0} = L_{i,0} = \emptyset$). Также некоторым элементам двудольно ленточного леса приписаны некоторые номера из отрезка от 1 до k . Ленты, лежащие в $\bigsqcup_i L_{i,k}$, назовём *внешними* лентами схемы \dot{T}_k^{num} (по ним и только по ним, как будет видно ниже, производилась склейка на одном из первых k шагов).

Определим $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$. Пусть на $k + 1$ шаге склеиваются атомы A_{k+1} и B_{k+1} по лентам l_{k+1}^A и l_{k+1}^B . Каждому из них в схеме-лесе \dot{T}_k^{num} отвечает подсхема-дерево (одна из связных компонент), которое обозначим через $\dot{T}_{A_{k+1}}^{\text{num}}$ и $\dot{T}_{B_{k+1}}^{\text{num}}$ соответственно. Пусть D_{k+1} — атом, являющийся связной суммой атомов A_{k+1} и B_{k+1} вдоль пары их лент l_{k+1}^A и l_{k+1}^B (определение 1). Возможны 3 случая:

1) Если ленты l_{k+1}^A и l_{k+1}^B не являются внешними для схемы \dot{T}_k (а значит, корректно определена их принадлежность некоторым атомам C_i и C_j исходного набора соответственно), то двудольно ленточный лес T_{k+1} получается из T_k добавлением ленточной вершины v_{k+1} степени 2 и пары инцидентных ей ребер e_{k+1}^A и e_{k+1}^B , первое из которых инцидентно также неленточной вершине c_i двудольно ленточного дерева $T_{A_{k+1}}$, а второе — неленточной вершине c_j двудольно ленточного дерева $T_{B_{k+1}}$ (будем говорить, что ребро e_{k+1}^A соединяет ленточную

вершину v_{k+1} с лентой l_{k+1}^A атома C_i , а ребро e_{k+1}^B соединяет ленточную вершину v_{k+1} с лентой l_{k+1}^B атома C_j , см. рис. 6 слева). Сопоставим вершине c_i биекцию $\alpha_{i,k+1}$ между множествами $L_{i,k+1} = L_{i,k} \sqcup \{l_{k+1}^A\}$ и $R_{i,k+1} = R_{i,k} \sqcup \{e_{k+1}^A\}$, являющуюся естественным (и единственным) продолжением биекции $\alpha_{i,k}$ (и аналогично для вершины c_j). Во всех прочих вершинах ничего не меняется. Добавленной паре ребер e_{k+1}^A и e_{k+1}^B графа припишем номер шага. Получена схема $\hat{T}_{k+1}^{\text{num}}$.

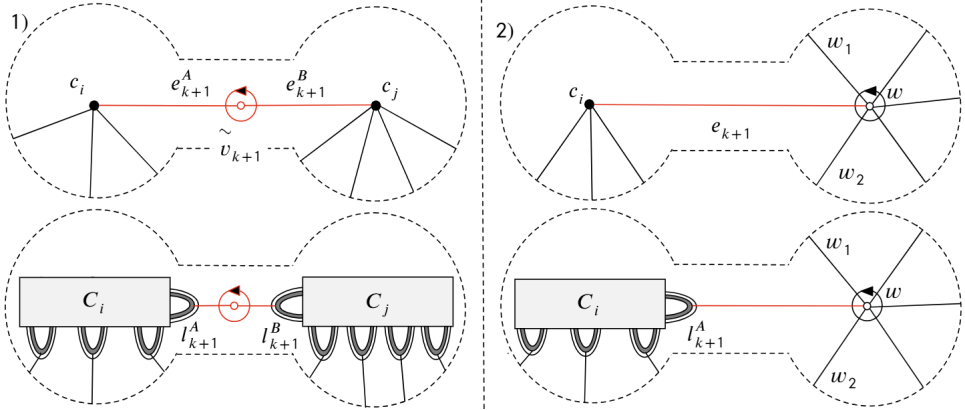


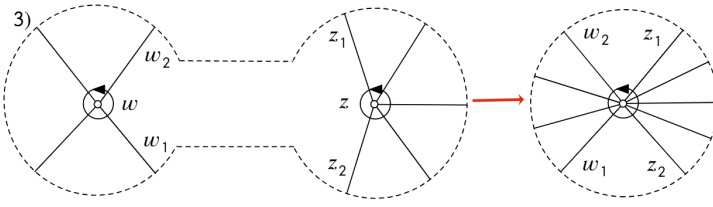
Рис. 6. Переход от \hat{T}_k^{num} к $\hat{T}_{k+1}^{\text{num}}$ в случаях 1) и 2) (красным показаны добавляемые ребра). Вне указанной окрестности двух вершин графа склейки (вверху)/топологической схемы склейки (внизу) изменений нет

2) Если лента l_{k+1}^A не внешняя для схемы \hat{T}_k^{num} (лента некоторого атома C_i), а лента l_{k+1}^B внешняя (тогда она отвечает некоторой ленточной вершине w и паре её последовательных полуребер w_1 и w_2 ; см. замечание 1 ниже), то добавим ребро e_{k+1} , соединяющее вершины c_i и w , и определим циклический порядок ребер в ленточной вершине w , расположив ребро e_{k+1} между w_1 и w_2 (см. рис. 6 справа). Сопоставим вершине c_i биекцию $\alpha_{i,k+1}$ между множествами $L_{i,k+1} = L_{i,k} \sqcup \{l_{k+1}^A\}$ и $R_{i,k+1} = R_{i,k} \sqcup \{e_{k+1}\}$, являющуюся естественным продолжением биекции $\alpha_{i,k}$. В остальных неленточных вершинах ничего не меняется. Добавленному ребру e_{k+1} графа припишем номер шага. Получена схема $\hat{T}_{k+1}^{\text{num}}$.

3) Если ленты l_{k+1}^A и l_{k+1}^B внешние для схемы \hat{T}_k^{num} (отвечают ленточным вершинам w и z степеней x и y и их последовательным полуребрам w_1, w_2 и z_1, z_2 соответственно; см. замечание 1 ниже), то сольем ленточные вершины w и z в одну, причём циклический порядок в ней определим следующим естественным образом: $w_1, z_2, z_3, \dots, z_x, z_1, w_2, w_3, \dots, w_y$ (см. рис. 7).

В частности, в этой вершине имеем две пары соседних полуребер w_1, z_2 и z_1, w_2 (каждой из этих пар отвечает лента атома D_{k+1}).

Четверке полуребер w_1, w_2 и z_1, z_2 припишем номер шага, а также разбиение этой четверки на две пары соседних полуребер (w_1, z_2) и (z_1, w_2) . В остальных вершинах по-прежнему ничего не меняем, получаем схему $\hat{T}_{k+1}^{\text{num}}$.

Рис. 7. Переход от \dot{T}_k^{num} к $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$ в случае 3)

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что атом D_{k+1} обладает следующими свойствами. Ему в схеме-лесе \dot{T}_{k+1} отвечает подсхема-дерево (одна из связных компонент), которое обозначим через $\dot{T}_{D_{k+1}}$. Имеется естественная биекция между лентами атома D_{k+1} и дизъюнктивным объединением следующих двух множеств: множество лент, не являющихся внешними для схемы \dot{T}_{k+1} , всех атомов, отвечающих неленточным вершинам дерева $T_{D_{k+1}}$; множество троек (w, w_1, w_2) , где w — ленточная вершина дерева $T_{D_{k+1}}$, а w_1 и w_2 — пара ее последовательных полу-ребер в двудольно ленточном дереве $T_{D_{k+1}}$.

Получившееся после $n - 1$ шага двудольно ленточное дерево $T_n^{\text{num}} = T_{n-1}^{\text{num}}$ вместе со всей дополнительной информацией назовем *упорядоченной*⁴ *схемой склейки атома A* и обозначим через \dot{T}^{num} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что упорядоченная схема склейки полностью определяет процесс склейки, а потому и атом, получающийся в результате этого процесса (чтобы в этом убедиться, нужно показать, что по упорядоченной схеме склейки \dot{T}^{num} можно однозначно восстановить всю последовательность упорядоченных схем склейки $\dot{T}_0^{\text{num}}, \dot{T}_1^{\text{num}}, \dots, \dot{T}_{n-1}^{\text{num}}$; для этого достаточно показать, как по упорядоченной схеме склейки $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$ восстановить схему \dot{T}_k^{num} ; последнее показывается с помощью естественного вложения двудольно ленточных лесов $T_k^{\text{num}} \hookrightarrow T_{k+1}^{\text{num}}$ в случаях 1 и 2 из построения упорядоченной схемы склейки $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$, а в случае 3 — из существования естественного морфизма двудольно ленточных лесов $T_k^{\text{num}} \rightarrow T_{k+1}^{\text{num}}$, индуцирующего инъекцию их множеств ребер, с учетом того, что упорядоченная схема содержит информацию о разбиении соответствующей четверки ребер на пары).

Ленты множества $L_{i,n-1}$ назовем *выделенными* лентами атома C_i для схемы склейки \dot{T} , определенной ниже.

Через \dot{T} обозначим объект (схему), получающийся из упорядоченной схемы склейки \dot{T}^{num} забыванием номеров шагов, приписанных некоторым элементам схемы \dot{T}^{num} . Заметим, что \dot{T} является схемой склейки (определение 2). Наконец, покажем, что $\#\dot{T} \sim A$. Для этого воспользуемся индукцией по числу неленточных вершин в схеме склейки \dot{T} . Если неленточная вершина одна (база индукции), то ленточных вершин и ребер нет и утверждение очевидно. Пусть для любой упорядоченной схемы склейки \dot{T}^{num} , которая имеет не более,

⁴Это означает, что некоторым подмножествам множества всех ребер двудольно ленточного дерева T приписаны номера шагов, причем для каждого четырехэлементного подмножества, которому приписан номер, фиксировано разбиение его элементов на пары.

чем $n - 1$ неленточную вершину, результат применения последовательности операций связной суммы к набору атомов, которая описывается этой упорядоченной схемой, эквивалентен атому $\# \dot{T}$. Если упорядоченная схема склейки \dot{T}^{num} имеет n неленточных вершин и задает склейку набора атомов $[C_i]_{i=1}^n$, то рассмотрим схему $\dot{T}_{n-2}^{\text{num}}$, которая является дизъюнктивным объединением двух упорядоченных схем склейки $\dot{T}_{A_{n-1}}^{\text{num}}$ и $\dot{T}_{B_{n-1}}^{\text{num}}$, к каждой из которых применимо предположение индукции. Т.е. атомы A_{n-1} и B_{n-1} , полученные на $(n-2)$ -м шаге процесса, совпадают с атомами, полученными из двух дизъюнктивных наборов атомов $\mathbf{V}_{A_{n-1}} \subset [C_i]_{i=1}^n$ и $\mathbf{V}_{B_{n-1}} = [C_i]_{i=1}^n \setminus \mathbf{V}_A$ склейками по двум соответствующим (неупорядоченным) схемам склейки $\dot{T}_{A_{n-1}}$ и $\dot{T}_{B_{n-1}}$. Итоговый атом A получается как связная сумма атомов A_{n-1} и B_{n-1} . Теперь легко убедиться в том, что для каждого из 3 случаев 1), 2) и 3), которыми может описываться переход от $\dot{T}_{n-2}^{\text{num}}$ к $\dot{T}_{n-1}^{\text{num}} = \dot{T}^{\text{num}}$ (а значит, и склейка атомов A_{n-1} и B_{n-1}), результат склейки набора атомов $[C_i]_{i=1}^n$ по схеме \dot{T} является связной суммой результатов склейки наборов атомов $\mathbf{V}_{A_{n-1}}$ и $\mathbf{V}_{B_{n-1}}$ по схемам $\dot{T}_{A_{n-1}}$ и $\dot{T}_{B_{n-1}}$, т.е. атомов A_{n-1} и B_{n-1} , причем связная сумма результатов склейки берется по тем же лентам, по которым берется связная сумма атомов A_{n-1} и B_{n-1} на $(n-1)$ -м шаге построения упорядоченной схемы склейки \dot{T}^{num} . Таким образом, утверждение а) теоремы 1 доказано.

Для доказательства утверждения б) теоремы 1 достаточно показать, что на любой схеме склейки \dot{T} можно ввести нумерацию так, чтобы переход от \dot{T}_k^{num} к $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$ (см. замечание 2 о том, что по \dot{T}^{num} можно однозначно восстановить последовательность упорядоченных схем склейки $\dot{T}_0^{\text{num}}, \dot{T}_1^{\text{num}}, \dots, \dot{T}_{n-1}^{\text{num}}$) соответствовал одному из переходов 1), 2) или 3). Выберем одну ленточную вершину и припишем любой паре последовательных инцидентных ей ребер номер 1, затем припишем номера $2, 3, \dots, k_1 - 1$ по порядку всем оставшимся ребрам, инцидентным рассматриваемой ленточной вершине, где k_1 — степень этой вершины. Прделаем то же самое для другой ленточной вершины, начиная нумерацию с k_1 . Затем перейдем к следующей ленточной вершине и т.д. Ясно, что такая нумерация определяет переходы от \dot{T}_k^{num} к $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$, отвечающие случаям 1) и 2), т.е. является допустимой. Разумеется, способ нумерации можно выбрать не единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2, 3, 4 и 5. Для большей ясности введем следующие обозначения. Пусть \mathbf{A} — множество всех классов эквивалентности атомов с мультиседлами (см. §1.2), \mathbf{T} — множество всех классов изоморфности схем примарной склейки (определения 7 и 6), $\mathbf{\Gamma}$ — множество всех классов изоморфности абстрактных схем примарного разложения (определения 9 и 3). Пусть $t : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$ — отображение, сопоставляющее схеме примарной склейки атом, который получается из атомов, сопоставляемым вершинам этой схемы, в результате склейки по этой схеме (определение 4). Пусть $g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{\Gamma}$ — отображение, сопоставляющее атому схему его примарного разложения. Согласно леммам 3.1–3.4, отображение g определено корректно. Пусть $r : \mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{T}$ — отображение, сопоставляющее абстрактной схеме примарного разложения схеме примарной склейки, построенную по правилу из раздела 4.

Легко убедиться в том, что все три отображения t , g и r корректно определены на классах (т.е. переводят эквивалентные элементы в эквивалентные).

Действительно, это сразу следует из определений отображений и отношений эквивалентности. Например, чтобы установить корректность отображения g , достаточно убедиться в том, что каждая эквивалентность атомов порождает изоморфизм соответствующих схем, что очевидно.

Изобразим определенные выше отображения на диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{r} & \mathbf{T} \\ g \uparrow & & \downarrow t \\ \mathbf{A} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{A}. \end{array}$$

Во введенных обозначениях теорема 2 (о существовании и единственности примарного разложения) утверждает, что отображение t — сюръекция и инъекция, теорема 3 утверждает, что g — инъекция, а теорема 4, что g — сюръекция и, наконец, теорема 5 утверждает справедливость соотношения

$$t \circ r \circ g = \text{id}_{\mathbf{A}} \quad (\text{B.1})$$

(Также теоремы 2 и 3 утверждают, что отображения t и g корректно определены на классах, что было пояснено выше.)

Покажем справедливость этих утверждений.

То, что r является биекцией, следует из леммы 4.1.

Соотношение (B.1) проверяется непосредственно (действительно: для любого атома $A \in \mathbf{A}$ топологическая схема склейки $r(g(A))$ получается из атома A преобразованием набора его внешних лент, образующих простой цикл графа Γ_A примарного разложения атома $A \in \mathbf{A}$, изображенный в правой части рис. 1 (b), в набор лент, изображенный в его левой части, являющихся выделенными лентами примарных атомов — примарных компонент атома A , — и приклеиванием мультиручки по ее подошвам к этим выделенным лентам, как показано в левой части рис. 1 (b); а последующее отображение t задается самим рис. 1 (b) и поэтому приводит к исходному набору внешних лент атома A ; при этом вне внешних лент изменений не произошло, поэтому получился исходный атом A , т.е. t переводит схему склейки $r(g(A))$ в атом A).

Из соотношения (B.1) получаем теоремы 5 и 3, а также сюръективность отображения t (и поэтому часть “существование” теоремы 2, т.е. существование примарного разложения любого атома).

Осталось доказать инъективность t и сюръективность g (это докажет теорему 4 и часть “единственность” теоремы 2, т.е. однозначность примарного разложения любого атома). Для этого достаточно доказать соотношение

$$g \circ t \circ r = \text{id}_{\Gamma} \quad (\text{B.2})$$

Для доказательства соотношения (B.2) нужно проверить, что для любой абстрактной схемы примарного разложения $\dot{\Gamma} \in \Gamma$ атом $t(r(\dot{\Gamma}))$ имеет схему примарного разложения изоморфную $\dot{\Gamma}$. Для этого достаточно проверить, что мультиседла одной и той же примарной компоненты схемы $\dot{\Gamma}$ эквивалентны в атоме $t(r(\dot{\Gamma}))$ в смысле отношения эквивалентности из леммы 1, а мультиседла из разных примарных компонент — не эквивалентны.

ЛЕММА В.1. Пусть C_1 и C_2 — два атома (необязательно примарных) и $C = C_1 \# C_2$ — их связная сумма вдоль пары лент l_1 и l_2 . Мультиседла S_1 и S_2 эквивалентны в $C = C_1 \# C_2$ тогда и только тогда, когда до склейки они вместе принадлежали атому C_k ($k = 1$ или 2) и были в нем эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала заметим, что если S_1 и S_2 принадлежали до склейки разным атомам, то после разрезания в атоме $C_1 \# C_2$ лент L_1 и L_2 , полученных переклейкой l_1 и l_2 , S_1 и S_2 окажутся в разных компонентах связности, а значит, не эквивалентны.

Докажем, что из того, что мультиседла S_1 и S_2 эквивалентны в атоме C_1 , следует, что они эквивалентны в атоме $C = C_1 \# C_2$. Если S_1 и S_2 эквивалентны в атоме C_1 , то из теоремы Менгера о критерии реберной n -связности [4] при $n = 2$ получаем⁵, что существуют 3 попарно реберно непересекающихся пути $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в графе K_{C_1} , соединяющих s_1 и s_2 .

Случай 1: ни один из путей $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ не проходил через ребро l_1 . Тогда пути $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ являются тремя попарно реберно непересекающимися путями, соединяющими вершины s_1 и s_2 в графе K_C .

Случай 2: один из путей (γ_1 без ограничения общности) проходил через ребро l_1 , т.е. имел вид $\gamma_1^1 l_1 \gamma_1^2$. Рассмотрим 3 пути $\gamma_1^1 L_1 \tilde{\gamma} L_2 \gamma_1^2, \gamma_2, \gamma_3$, где $\tilde{\gamma}$ — любой путь в графе K_{C_1} , имеющий те же концы, что и ребро l_2 , но не проходящий через него. (Такой путь существует, так как ребро l_2 — не мост.) Три указанных пути являются тремя попарно реберно непересекающимися путями соединяющими вершины s_1 и s_2 в графе K_C .

В обоих случаях получаем, что мультиседла S_1 и S_2 эквивалентны в атоме $C = C_1 \# C_2$.

Предположим теперь, что мультиседла S_1 и S_2 эквивалентны в атоме $C = C_1 \# C_2$. Тогда (по доказанному выше) до применения операции связной суммы они принадлежали одному атому, скажем, атому C_1 . Докажем, что S_1 и S_2 эквивалентны в C_1 . По теореме Менгера существует 3 простых попарно реберно непересекающихся пути $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в графе K_C , соединяющих s_1 и s_2 . Каждый простой путь с началом и концом в вершинах графа K_{C_1} либо не проходит через ребра L_1 и L_2 либо проходит через оба этих ребра (по одному разу в силу простоты). Это действительно так, ведь только ребра L_1 и L_2 в графе K_C соединяют вершины, принадлежавшие до склейки разным графам (K_{C_1} и K_{C_2}). Снова имеем два случая.

Случай 1: ни один из путей $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в графе K_C не проходит через ребра L_1 и L_2 . Тогда эти же 3 пути соединяют вершины s_1 и s_2 в графе K_C и попарно реберно непересекаются.

Случай 2: один из путей (γ_1 без ограничения общности) проходил через ребра L_1 и L_2 , т.е. имел вид $\gamma_1^1 L_1 \tilde{\gamma} L_2 \gamma_1^2$. Рассмотрим 3 пути $\gamma_1^1 l_1 \gamma_1^2, \gamma_2, \gamma_3$. Они являются 3 попарно реберно непересекающимися путями, соединяющими вершины s_1 и s_2 в графе K_{C_1} .

⁵Из теоремы Менгера следует, что два мультиседла S_1 и S_2 эквивалентны в атоме A тогда и только тогда, когда существует 3 попарно реберно непересекающихся пути, соединяющих s_1 и s_2 в графе K_A .

В обоих случаях получаем, что мультиседла S_1 и S_2 эквивалентны в атоме C_1 . Отметим, что доказательство леммы нетрудно провести без использования теоремы Менгера. Лемма В.1 доказана.

Пусть $[P_i]_{i=1}^n$ — набор примарных атомов, сопоставленный вершинам схемы примарного разложения $\dot{\Gamma}$. Этот же набор атомов сопоставлен вершинам схемы примарной склейки $r(\dot{\Gamma})$. По теореме 1 атом $t(r(\dot{\Gamma}))$ может быть получен как результат некоторой последовательности применений операции связной суммы к набору $[P_i]_{i=1}^n$. Пусть \mathcal{S} — множество всех мультиседел атома $t(r(\dot{\Gamma}))$. До склейки каждое мультиседло $S \in \mathcal{S}$ принадлежало одному из атомов P_i . Нужно показать, что мультиседла S_i и S_j эквивалентны в $t(r(\dot{\Gamma}))$ тогда и только тогда, когда они принадлежали одному атому C_k до склейки. Из леммы В.1 и того, что каждый из атомов набора $[P_i]_{i=1}^n$ примарен (т.е. все его мультиседла эквивалентны) следует, что после каждого применения операции связной суммы в полученном атоме эквивалентны те и только те мультиседла, которые изначально лежали в одном из атомов P_i . А значит, это свойство будет выполнено и после применения $n - 1$ операции связной суммы, т.е. для атома $t(r(\dot{\Gamma}))$, что и требовалось.

Соотношение (В.2) полностью доказано.

Из двух соотношений (В.1) и (В.2) с учетом того, что r — биекция, следует (в силу теоретико-множественных соображений), что g и t — биекции. Таким образом, теоремы 2, 3, 4 и 5 доказаны.

2.1. Разложения атома в связные суммы любых атомов (необязательно примарных). Как для данного атома A получить все его разложения в связные суммы простых атомов (необязательно примарных)?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть атом A является результатом склейки набора m атомов $[C_i]_{i=1}^m$ по схеме склейки \dot{T} , а также результатом склейки набора n примарных атомов $[P_j]_{j=1}^n$ по своей схеме примарной склейки \dot{T}_A , т.е. $A \sim \# \dot{T} \sim \# \dot{T}_A$. Тогда $m \leq n$ и существует такая упорядоченная схема примарной склейки \dot{T}_A^{num} , что схема \dot{T} изоморфна схеме $\dot{T}_{A,n-m}$, где $\dot{T}_{A,0}^{\text{num}}, \dot{T}_{A,1}^{\text{num}}, \dots, \dot{T}_{A,n-1}^{\text{num}}$ — последовательность упорядоченных схем склейки, отвечающая упорядоченной схеме примарной склейки \dot{T}_A^{num} (см. построение схемы $\dot{T}_{k+1}^{\text{num}}$ в доказательстве теоремы 1 и замечание 2).

Таким образом, с помощью схемы примарной склейки \dot{T}_A атома A получено описание всех остальных схем \dot{T} склейки (необязательно примарной), результаты склеивания по которым эквивалентны атому A .

Благодарности

Авторы выражают признательность А.Т. Фоменко за стимулирующие обсуждения, вопросы и идеи. Также авторы благодарны В.В. Ведюшкиной, С.Ю. Доброхотову и А.Д. Медных за ценные замечания и интерес к работе.

Список литературы

- [1] S. A. Bogatyı, D. L. Gonçalves, E. A. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Realization of primitive branched coverings over closed surfaces”, *Advances in Topological Quantum Field Theory*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **179**, eds. J. M. Bryden, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004, 297–316.
- [2] S. A. Bogatyı, D. L. Gonçalves, E. A. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Realization of primitive branched coverings over closed surfaces following the Hurwitz approach”, *Central Europ. J. of Math.*, **1:2** (2003), 184–197.
- [3] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т. 1, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 1999.
- [4] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th ed., Springer, Berlin, 2017.
- [5] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287:5** (1986), 1071–1075.
- [6] A. Grothendieck, “Esquisse d’un Programme (1984)”, *Geometric Galois Actions, 1*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., **242**, eds. L. Schneps, P. Lochak, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 5–47.
- [7] G. A. Jones, “Joining dessins together”, arXiv:1810.03960v1, 2018.
- [8] В. С. Куликов, Г. Б. Шабат, “Ленточные графы и пары Белого с частично заданным ветвлением”, *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **320** (2023), 177–188.
- [9] С. В. Матвеев, “О примарных разложениях узлов в утолщенных поверхностях”, *Вестник КемГУ*, 2011, № 3/1, 67–72.
- [10] Дж. Милнор, *Теория Морса*, Мир, М., 1965.
- [11] И. М. Никонов, “Описание вырожденных двумерных особенностей с одной критической точкой”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2019, № 3, 5–15.
- [12] H. Schubert, “Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten”, *S.B.-Heidelberger Akad. Wiss. Math. Natur. Kl.*, **3** (1949), 57–104.
- [13] А. К. Звонкин, С. К. Ландо, *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО, М., 2010.

Е. А. Кудрявцева (E. A. Kudryavtseva)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

19.04.2026

Б. А. Макаrchук (B. A. Makarchuk)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: boris.makarchuk@math.msu.ru