ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КВАДРАТИЧНО-ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

В. В. Калашников

В известной статье В. Н. Колокольцова [2] был приведен список (впоследствии оказавшийся неполным) геодезических потоков на двумерном торе, допускающих дополнительный квадратичный по импульсам интеграл. Для этого списка Е. Н. Селивановой в [3] были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга. Недавно И. К. Бабенко и Н. Н. Нехорошев перечислили уже все квадратично-интегрируемые геодезические потоки на торе. Поэтому было бы интересно увидеть, какие ранее неизвестные инварианты появятся.

Рассмотрим кратко конструкцию, предложенную И. К. Бабенко и Н. Н. Нехорошевым, метрик на торе, для которых соответствующий геодезический поток имеет дополнительный квадратичный интеграл.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы две решетки – Γ_1 и Γ_2. Γ_1 натянута на векторы e_1 и e_2, а Γ_2 – на E_1 и E_2. Γ_1 и Γ_2 связаны условием:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix},$$

где p и q – взаимно простые числа. Тогда тор $\mathbb{R}^2/\Gamma_1$ q-листно накрывает тор $\mathbb{R}^2/\Gamma_2$. Рассмотрим на торе $\mathbb{R}^2/\Gamma_1$ метрику типа Лиувилля $G = \big(f(X_1)+h(X_2)\big)(dX_1+dX_2)$; G определена на торе, поэтому период f равен 1, а период h равен t. Координаты X_1 и X_2 взяты из плоскости $\mathbb{R}^2$. Наложим дополнительные ограничения для того, чтобы G опускалась на тор $\mathbb{R}^2/\Gamma_2$. Рассмотрим координаты $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2/t$. В новых координатах функции f и h периодичны с периодом 1. Чтобы метрика G была корректно определена на $T = \mathbb{R}^2/\Gamma_2$, необходимо и достаточно потребовать, чтобы f и h были $1/q$-периодичны.

В статье В. Н. Колокольцова фактически рассматривался случай, когда Γ_1 и Γ_2 совпадали, т.е. $q = 1$, $p = 0$.

X_1 и X_2 можно считать неоднозначными координатами на торе T. В этих координатах метрика имеет Лиувиллев вид. Рассмотрим T^*T. Пусть p_1, p_2 – сопряженные координаты к X_1 и X_2. Поскольку X_i определены с точностью до прибавления определенных констант, то координаты p_i определены однозначно.

Геодезический поток на T с метрикой G имеет следующий гамильтониан в T^*T:

$$H = \frac{1}{4\lambda}(p_1^2 + p_2^2), \quad \text{где} \quad \lambda = f(X_1) + h(X_2).$$

Дополнительный интеграл F имеет вид:

$$F = \frac{h(X_2)p_1^2 - f(X_1)p_2^2}{\lambda}.$$

Топология лиувиллева слоения для таких систем вычисляется в явном виде. При этом остаются верными многие результаты Е. Н. Селивановой. Одним из самых существенных результатов [3] был алгоритм построения неоснащенного инварианта, исходя из так называемого кода лиувиллевой метрики (теорема 4, пп. 1)–3)). Этот код состоял из двух диаграмм максимумов и минимумов функций $f(x_1)$ и $h(x_2)$, взятых на $[0,1]$. В нашем случае эти функции $1/q$-периодичны. Поэтому коды метрик надо считать на отрезках $[0,1/q]$. Если учесть эти изменения, то теорема 4 [3] в пунктах 1)–3) остается верной и доказывается точно так же. Пункт 4) этой теоремы касался меток, и в общем случае не верен для систем, открытых И. К. Бабенко и Н. Н. Нехорошевым.

Теорема. *Слово-молекула квадратично-интегрируемого геодезического потока на торе T^2 имеет вид, указанный на рис.* 1, *где* $W(f)$ *и* $W(h)$ – *деревья, построенные следующим образом: к атому вида* P_n *приклеивается дерево, в каждой вершине которого – атом вида* V_k *или* A. *При этом* r-*метки таковы:*

1) *если ребро принадлежит дереву* $W(f)$ *или* $W(h)$, *то* r-*метка равна нулю, если это ребро примыкает к атому* A, *и равна бесконечности в противном случае.*
2) *На ребрах, соединяющих* $W(f)$ *и* $W(h)$ r-*метка равна дробной части* p/q *при условии, что они ориентированы как на рис.* 1.

$$\begin{tikzcd} W(h) \arrow[d] \arrow[dr] & W(h) \arrow[d] \arrow[dl] \\ W(f) & W(f) \end{tikzcd}$$

Рис. 1

Доказательство. То, что молекула имеет именно такой вид, доказывается повторением рассуждений Е. Н. Селивановой при доказательстве теоремы 4 [3]. Пункт 1) также получается из этих рассуждений. Рассмотрим более подробно доказательство пункта 2). Нам надо посчитать метку между циклами, которые определяются критическими окружностями из атомов P_n. Нужно заметить, что эти циклы естественно проектируются на базу – исходный тор T. Причем один цикл проектируется в цикл e_1, а другой – в e_2. Чтобы посчитать метку между этими циклами, надо, скажем, e_2 разложить в каком-нибудь базисе, содержащем e_1. В случае, описанном В. Н. Колокольцовым, e_2 дополнял e_1 до базиса. Мы можем взять E_2 в качестве дополняющего цикла, так как $E_1 = e_1$, а E_1 и E_2 образуют базис в T. Тогда получим $e_2 = pE_1 + qE_2$. Следовательно, по определению [1], r-метка равна дробной части числа p/q.

Следует отметить, что это, по-видимому, первый случай, когда физически осмысленная интегрируемая система имеет метки, отличные от 0, $1/2$ и ∞.

В заключение автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову за постановку задачи и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 49–77.
[**2**] Колокольцов В. Н. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 46. №5. С. 994–1010.
[**3**] Зунг Н. Т., Полякова Л. С., Селиванова Е. Н. // Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. №3. С. 42–56.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
04.07.1994