БОТТОВОСТЬ И СВОЙСТВА ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

В. В. Калашников

В работе изучается вопрос о том, является ли боттовость свойством общего положения для интегрируемых гамильтоновых систем. Дело в том, что все известные интегрируемые системы, возникшие в механике и физике, являются боттовскими на почти всех уровнях энергии. Этот вопрос интересен также потому, что для боттовских систем был открыт топологический инвариант Фоменко–Цишанга, классифицирующий такие системы с точностью до тонкой топологической эквивалентности.

Пусть (M^4, ω) – симплектическое многообразие. Рассмотрим гамильтониан H и соответствующее ему векторное поле $\operatorname{sgrad} H$. Будем считать эту систему интегрируемой по Лиувиллю с помощью дополнительного интеграла F. Пусть $Q_h = H^{-1}(h)$, где h – регулярное значение H.

Определение 1. Назовем интеграл F боттовским на Q_h, если его критические точки составляют невырожденные подмногообразия, т.е. гессиан функции $F \mid Q_h$ невырожден на трансверсальных к ним пространствах.

Будем называть систему $v = \operatorname{sgrad} H$ боттовской на Q_h, если она допускает боттовский интеграл.

Введем на множестве интегрируемых систем две метрики, относительно которых будем рассматривать свойство боттовости. Множество гамильтонианов, для которых соответствующая система на (M, ω) интегрируема, обладает естественной C^k-метрикой. В этой метрике системы близки, если близки их гамильтонианы. При этом близость интегралов не предусматривается. Назовем такую метрику слабой. Аналогично определяется сильная метрика. Рассматриваем множество пар коммутирующих функций (H, F). Это множество также обладает естественной C^k-метрикой как подмножество пар гладких функций на многообразии M. Отметим, что эти метрики определены на разных пространствах.

Теорема 1 (О плотности неботтовских систем для слабой метрики).
а) Любую интегрируемую (боттовскую) систему $v = \operatorname{sgrad} H$ малым шевелением $H \to \widetilde{H}$ в слабой метрике можно сделать интегрируемой неботтовской на заданном уровне $\{H = h\}$.
б) У любой боттовской системы малым шевелением $H \to \widetilde{H}$ в слабой метрике можно разрушить топологическую структуру, добавив сколь угодно много критических окружностей на заданном уровне гамильтониана, сохранив интегрируемость и боттовость новой системы. Кроме того, таким шевелением можно добиться появления метки со сколь угодно большим знаменателем. (Определение метки см. в [2].)

Определение 2. Подмножество топологического пространства называется множеством 1-й категории, если оно представимо в виде не более чем счетного объединения нигде не плотных множеств.

Определение 3. Интеграл F системы $\operatorname{sgrad} H$ назовем *периодическим*, если все траектории системы $\operatorname{sgrad} F$ замкнуты.

Пункт а) теоремы 1 может быть обобщен следующим образом

Теорема 2. *Множество боттовских на данном уровне энергии систем является множеством 1-ой категории (в слабой метрике C^n, $n > 2$).*

Из доказательства теорем 1 и 2 следует, что если у системы $v = \operatorname{sgrad} H$ имеется окружность, боттовская относительно периодического интеграла, то при малом возмущении в слабой метрике $H \to \widetilde{H}$ (сохраняющем интегрируемость) эта окружность, малопродеформировавшись, останется критической окружностью возмущенной системы, но, при этом, новая окружность не обязана допускать боттовский интеграл.

Таким образом, интегрируемые системы, боттовские на данном уровне энергии, образуют очень тонкое множество относительно слабой метрики. Однако можно доказать, что среди систем с “не очень сложной” структурой критических множеств боттовские системы образуют плотное множество.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть система* $v = \operatorname{sgrad} H$ *имеет интеграл* f, *удовлетворяющий условиям* (i), (ii). *Тогда можно сколь угодно мало возмутить* H *так, чтобы возмущенная система* $v = \operatorname{sgrad} H$ *на заданном уровне* $\{\widetilde{H} = h_0\}$ *стала боттовской.*
(i) *Для всех* h, $\alpha < h < \beta$, *на* Q_h *все критические множества* f *– двумерные торы, бутылки Клейна и окружности. К окружностям могут приклеиваться только кольца.*
(ii) *Бифуркационная диаграмма* $\Sigma(H, f) \subset \Sigma_1$, *где* Σ_1 *– объединение непрерывных кривых* $f - w_i(h)$, $1 \leq i \leq m$.

Доказательство теоремы опирается на следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть система удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii). *Тогда для любого* ε *найдется число* h, *такое, что* $|h - h_0| < \varepsilon$ *и в некоторой окрестности* $V \subset M^4$ *критического множества* $\{H = h; f = c_h\}$ *существует периодический интеграл* F *системы* $\operatorname{sgrad} H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства видно, что возмущения в теореме 3 можно делать локально. Во многих случаях можно доказать, что a сколь угодно близко приближается некоторым другим интегралом a_1 так, что $\{f_1, H\} = 0$ и $f_1 = g(H, F)$ в некоторой окрестности сингулярного слоя. Тогда, возмутив H в этой окрестности, можно возмутить и f_1, положив $f_2 = f_1$ вне и $f_2 = g(\widetilde{H}, F)$ внутри данной окрестности. Таким образом можно получить "сильный" вариант теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия (i), (ii) фактически нужны для того, чтобы доказать существование периодического интеграла. Поэтому, если заранее предполагать его существование, от этих условий в теореме 3 можно освободиться.

Комбинируя сказанное в замечаниях 2 и 3, можно доказать следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. *В случае аналитических* (M, ω), H *и* F *можно сколь угодно малым гладким шевелением в сильной метрике сделать (гладкую) систему* $(\widetilde{H}, \widetilde{F})$ *боттовской на заданном уровне энергии.*

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* O *– боттовская окружность системы* $v = \operatorname{sgrad} H$ *относительно интеграла* f. *Тогда при малом возмущении вида* $(H, f) \to (\widetilde{H}, \widetilde{f})$ *в сильной* C^n*-метрике* $(n > 2)$ *окружность* O *мало шевелится, оставаясь боттовской.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема перестает быть верной для боттовских торов. Это следует из доказательства теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* M^4 *компактно, и система* $v = \operatorname{sgrad} H$ *на* Q_h *имеет только критические окружности, и на каждом критическом уровне интеграла* f *содержится одна критическая окружность. Тогда топологическая структура (изоэнергетический инвариант Фоменко–Цишанга) устойчива относительно малых шевелений в сильной метрике.*

Автор признателен А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову за постоянный интерес к работе и полезные замечания, а также фонду ProMathematica за поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. М.: МГУ, 1988. [2] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 49–77. [3] Нгуен Тьен Зунг // УМН. 1990. Т. 42. №4. С. 161–162.

Поступило в Правление общества
09.07.1993