

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МИНИМАКСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ФОМЕНКО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА $S^3, RP^3, S^1 \times S^2, T^3$

В. В. К а л а ш н и к о в

В настоящей работе найдено явное описание топологических инвариантов Фоменко «минимаксного типа», классифицирующих интегрируемые гамильтоновы системы дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы на изоэнергетических поверхностях, гомеоморфных $S^3, RP^3, S^1 \times S^2, T^3$.

Рассмотрим грубый топологический инвариант Фоменко интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы на четырехмерном многообразии M — неоснащенную молекулу (построение инварианта см. в [1]). Рассмотрим ее π -граф (определение — там же). Для удобства не будем сильно различать эти понятия, поскольку π -граф однозначно определяет свою молекулу.

Напомним, что атом (определение и классификацию см. в [1]) — структурная единица π -графа и что каждому π -графу и каждому атому можно поставить четыре числа: m — число вершин, n — число ребер для π -графа и соответственно число выходящих ребер для атома, b — число звездочек — вершин кратности 2 и p — род молекулы или атома. В [2] получены условия соответствия молекул интегрируемым гамильтоновым системам на многообразиях $S^3, RP^3, S^1 \times S^2, T^3$.

О п р е д е л е н и е. Рассмотрим некоторый класс молекул, соответствующих интегрируемым гамильтоновым системам на некотором многообразии Q . Назовем молекулу сложности (m_0, n_0) максимальной, если для любой молекулы из этого класса сложности (m_0, n) выполняется неравенство $n \leq n_0$. Аналогично введем понятие минимальной молекулы.

Т е о р е м а 1. Молекула W соответствует некоторой системе на одном из многообразий $S^3, RP^3, S^1 \times S^2, T^3$ и является максимальной тогда и только тогда, когда она состоит из атомов из множества $\{A, A^*, B\}$, выполняются условия соответствия некоторой системе на данном многообразии и в случаях S^3 и RP^3 должно выполняться равенство род $(W) = 0$, а в случаях $S^1 \times S^2$ и T^3 род $(W) = 1$. (Здесь имеется в виду максимальность каждой молекулы в своем классе).

Т е о р е м а 2. Минимальные молекулы, соответствующие системам на $S^3, RP^3, S^1 \times S^2, T^3$, в точности те, которые указаны в таблице, где $N, N_1^*, N_2^*, N_3^*, N_4^*, K$ — произвольные атомы рода 0, кроме K , род $(K) = 1$, и кроме того, $b(N) \leq 1, b(N_1^*) = b(N_2^*) = 1, b(N_3^*) = 2, 1 \leq b(N_4^*) \leq 2, b(K) = 0$.

Зададим две операции на множестве π -графов.

S^3, RP^3	$A - A$				
$S^1 \times S^2$	$A - A$				
T^3				$A - \textcircled{B}$	$A - A^* - \textcircled{B}$

1. Пусть в π -графе Π_1 есть хотя бы два атома, отличных от атома A (обозначим их N_1 и N_2 с соответствующими постоянными: $p_1, m_1, n_1, b_1, p_2, \dots$) и соединенных хотя бы одним ребром. Тогда построим π -граф Π_2 : возьмем атом N_3 с постоянными p_3, m_3, n_3, b_3 так, что

$$(1) \quad 1) \quad m_3 = m_1 + m_2, \quad 2) \quad n_3 = n_1 + n_2 - 2, \quad 3) \quad b_3 = b_1 + b_2, \quad 4) \quad p_3 = p_1 + p_2.$$

Такой атом существует, но он, вообще говоря, не единственный. Теперь заменим в Π_1 атомы N_1 и N_2 вместе с ребром, их соединяющим, атомом N_3 . Легко видеть, что эта операция задана корректно, т. е. сделать такую замену можно в силу условий (1). Назовем такую операцию *склеивкой атомов* N_1 и N_2 . Заметим, что в случае, когда атомы N_1 и N_2 соединены k ребрами, получится атом N_3 с $k + g - 1$ петлями, из него выходящими, где g — число петель, выходящих из N_1 и N_2 .

2. Определим обратную операцию. Пусть в π -графе Π_2 имеется атом N_3 . Произведем обратную замену: вместо N_3 вставим N_1 и N_2 , удовлетворяющие (1) и соединенные ребром. Назовем эту операцию *расщеплением атома* N_3 .

Заметим, что эти операции оставляют неизменными род молекулы, первую компоненту ее сложности, то есть m , число атомов A и общее число звездочек в молекуле.

Пользуясь операциями склейки и расщепления атомов, опишем изменения структуры молекул при вертикальном движении по таблице сложности (определение см. в [1]).

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть M — молекула сложности (m, n) , соответствующая системе на S^3 , π -граф которой имеет два смежных атома, отличных от A , один из которых имеет $b = 0$ (отсюда следует ее неминимальность). Тогда существует молекула сложности $(m, n - 1)$, соответствующая системе на S^3 , полученная из первой молекулы операцией склейки атомов.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть M — немаксимальная молекула на S^3 сложности (m, n) . Тогда можно применить операцию расщепления к некоторому атому и получить молекулу, соответствующую системе на S^3 , сложности $(m, n + 1)$. Следовательно, любая немаксимальная молекула на S^3 имеет «родительскую» молекулу сверху и получается из нее операцией склейки.

В более сложных случаях $S^1 \times S^2$ и T^3 имеют место аналогичные утверждения, вытекающие из результатов работы [2]. Для их получения нужно к условиям (1) добавить очевидные ограничения, чтобы получившаяся молекула соответствовала системе на данном многообразии. Например, в случае S^3 эти ограничения состоят в том, что склеивать можно атомы, один из которых имеет $b = 0$.

Определим еще одну операцию. Пусть из атома N_1 , с параметрами m_1, n_1, b_1, p_1 , в π -графе выходят k петель. Тогда заменим атом N_1 атомом N_2 с параметрами $m_2 = m_1, n_2 = n_1 - 2, b_2 = b_1, p_2 = p_1 + 1$. При этом из нового атома будут выходить $k - 1$ петля. Очевидно определяется обратная операция.

С помощью этих преобразований легко получить следующее равенство, верное для любых молекул:

$$a = (m - b)/2 + 1 - p,$$

где a — число атомов A в молекуле.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Т. Фоменко за постановку задачи, а также А. В. Болсинову, Нгуену Тьен Зунгу, А. А. Ошемкову и Л. С. Поляковой за полезные дискуссии.

[1] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. // УМН.— 1990.— Т. 45, вып. 2.— С. 49—77. [2] Нгуен Тьен Зунг, Фоменко А. Т. // УМН.— 1990.— Т. 45, вып. 6.— С. 91—112.