УДК 517.926

В. В. Калашников

О типичности боттовских интегрируемых гамильтоновых систем

В данной работе рассматриваются интегрируемые гамильтоновы системы на симплектическом многообразии. Среди всех систем особое место занимают т.н. боттовские на заданном уровне энергии.

Многочисленные исследования конкретных систем классической механики и математической физики показали, что для почти всех уровней энергии системы являются боттовскими. Поэтому возникает важный вопрос, является ли свойство боттовости в каком-то смысле свойством общего положения? Исследованию этого вопроса посвящена данная работа. Основной результат – множество боттовских систем составляет множество первой категории среди всех интегрируемых (в слабой метрике) (теоремы 2.1 и 2.4). Напомним, что множество первой категории – это множество, представимое в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Однако, среди систем, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, это множество плотно (теорема 3.1). В сильной метрике множество боттовских систем открыто (теорема 4.1).

Библиография: 14 названий.

§1. Введение

Пусть (M^4, ω) – симплектическое четырехмерное многообразие, а $\operatorname{sgrad} H$ – гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану H. Предположим, что система $v = \operatorname{sgrad} H$ имеет независимый первый интеграл F. Обозначим $Q_h = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\} = \{H = h\}$, где h – регулярное значение H. Будем считать, что M^4 компактно, хотя в большинстве случаев нам будет достаточно, чтобы все слои лиувиллева слоения (регулярные и особые) были компактны. Все объекты ниже будем предполагать класса гладкости C^∞.

Определение 1.1. Будем говорить, что интеграл F системы $v = \operatorname{sgrad} H$ боттовский на Q_h, если критическое множество F на Q_h – непересекающееся объединение невырожденных многообразий, т.е. гессиан функции F, ограниченной на трансверсаль к этим многообразиям в Q_h, невырожден. Будем говорить, что система $v = \operatorname{sgrad} H$ боттовская на Q_h, если она допускает боттовский интеграл.

Невырожденные одномерные критические многообразия делятся на два класса – минимаксные, когда собственные числа гессиана одного знака, и седловые, когда они разных знаков.

Класс боттовских систем был выделен А.Т. Фоменко в 1986 году для изучения топологии интегрируемых систем. В неявной форме этот класс возникал и раньше, поскольку, как было осознано после работ многих физиков, механиков и математиков, в подавляющем большинстве обнаруженные интегралы классических интегрируемых систем с двумя степенями свободы являются невырожденными (т.е. боттовскими в терминологии [10]) на почти всех уровнях энергии (см., например, [5]–[8], [11]–[13]). Поэтому класс боттовских систем включает в себя практически все знаменитые случаи интегрируемости. Далее для боттовских нерезонансных систем в [1], [2] (см. также [3]) был открыт изоэнергетический топологический инвариант Фоменко–Цишанга, который полностью описывает топологию интегрируемой системы с точностью до тонкой топологической классификации. Конструкцию инварианта, его свойств см. в указанных работах. Понятие боттовского набора интегралов было распространено на системы со многими степенями свободы. Существует несколько определений этого понятия, см. А.Т. Фоменко [9], [10].

С интегрируемой системой $\operatorname{sgrad} H$ и ее фиксированным интегралом f связаны два важных объекта – отображение момента μ и бифуркационная диаграмма Σ.

Определение 1.2. Отображение $\mu = H \times f \colon M^4 \to \mathbb{R}^2$, где $\mu(z) = \bigl(H(z), f(z)\bigr)$, называется отображением момента.

Определение 1.3. Пусть $K = \bigl\{z \in M^4 \mid \operatorname{rk}(d\mu) < 2\bigr\}$. Множество $\Sigma = \mu(K)$ называется бифуркационной диаграммой.

Пусть $\mathbf{H}$ – множество гамильтонианов на (M^4, ω), для которых соответствующая система имеет независимый первый интеграл. Поскольку $\mathbf{H} \subset C^n(M^4, \mathbb{R})$, то множество $\mathbf{H}$ допускает естественную C^n метрику. Таким образом, в этом пространстве две системы близки, если в C^n метрике близки их гамильтонианы. При этом близость интегралов этих систем не предусматривается. Шевеления в этом пространстве будем обозначать $H \to \widetilde{H}$, а саму метрику будем называть слабой.

Пусть $\mathbf{HF}$ – множество пар (H, F), где H – гамильтониан, а F – независимый первый интеграл системы $v = \operatorname{sgrad} H$ (опять, симплектическое многообразие фиксировано). Аналогично $\mathbf{HF} \subset C^n(M^4, \mathbb{R}^2)$, поэтому $\mathbf{HF}$ допускает естественную C^n-метрику, в которой две системы близки, если близки гамильтонианы и интегралы. Назовем эту метрику сильной. Шевеления в этом пространстве будем обозначать $(H, F) \to (\widetilde{H}, \widetilde{F})$. Это то же самое, если мы будем шевелить пуассоново действие группы $\mathbb{R}^2$ в (M^4, ω).

Как оказалось, шевеления в этих пространствах существенно отличаются. Например, с точки зрения первого пространства неботтовские системы всюду плотны, а с точки зрения второго – боттовские системы составляют открытое множество.

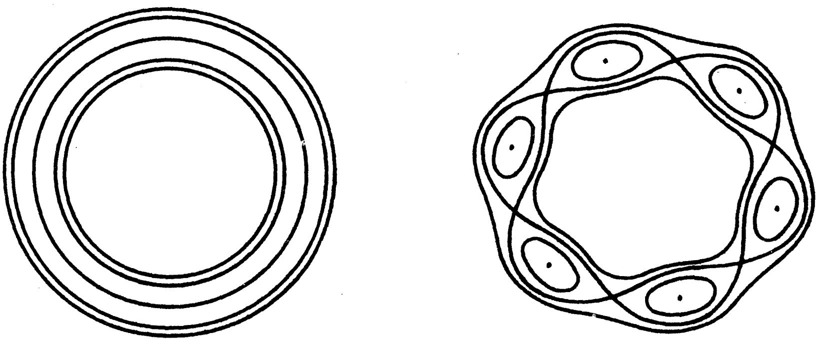
Автор выражает искреннюю благодарность А.Т. Фоменко и А.В. Болсинову за постановку задачи и постоянный интерес к работе. Автор признателен фонду Pro-Mathematica за поддержку.

§2. Плотность неботтовских систем в слабой метрике

Теорема 2.1 (О плотности неботтовских систем).

а) *Любую интегрируемую (боттовскую) систему $v = \operatorname{sgrad} H$ малым шевелением $H \to \widetilde{H}$ можно сделать интегрируемой неботтовской на заданном уровне $\{H = \alpha\}$.*

б) *У любой боттовской системы, малым шевелением $H \to \widetilde{H}$ можно разрушить топологическую структуру, добавив сколь угодно много критических окружностей на заданном уровне гамильтониана, сохранив интегрируемость и боттовость новой системы. Кроме того, таким шевелением можно добиться появления метки со сколь угодно большим знаменателем (определение метки см. в* [2] *и* [3]).



$I_1|_{h=\alpha}$ $\qquad$ $I_1|_{\widetilde{h}=\alpha}$

Рис. 1

Доказательство. Пусть T_1 – регулярный тор системы $v = \operatorname{sgrad} H$. В его окрестности существуют канонические координаты действие – угол $I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2$ такие, что $H = H(I_1, I_2)$, а траектории системы $v = \operatorname{sgrad} H$ – прямолинейные обмотки торов. Так как $H = H(I_1, I_2)$, то можно считать (возмутив H вблизи T_1 в классе функций от I_j, если надо), что $\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_1 \partial I_j}\right) \neq 0$. Также можно считать, что существует такой тор T, что на нем отношение частот системы $v = \operatorname{sgrad} H$ рационально. Это означает, что траектории этой системы на T замкнуты. Тогда можно выбрать I_1 так, что на торе T векторные поля $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} I_1$ были линейно зависимы. Тогда, если рассматривать I_1 как интеграл системы $v = \operatorname{sgrad} H$, то тор T критический для этого интеграла. Считаем, что $I_i(T) = 0$. Если нужно, то малым возмущением H можно добиться того, что $\frac{\partial^2 H}{\partial I_2} \neq 0$. I_1 – интеграл системы $v = \operatorname{sgrad} I_1$. Пусть

$$\mathcal{H} = \{H \mid \{H, I_1\} = 0 \ \text{ в окрестности } \ T_1\}$$

– множество интегралов системы $v = \operatorname{sgrad} I_1$ – это в точности те функции, которые в окрестности T_1 не зависят от φ_1. Будем возмущать H в классе $\mathcal{H}$. Пусть $h = H\ |_{\varphi_1=0}$. Заметим, что h – регулярная функция от I_1, I_2, φ_2. Ясно, что в окрестности T_1 любая функция Y из $\mathcal{H}$ имеет вид $Y = Y(I_1, I_2, \varphi_2)$. $I_1\ |_{h=\alpha}$ имеет неморсовские особенности (целая окружность). Возмутим h следующим образом $\widetilde{h} = h + \varepsilon g(I_1, I_2)\sin(k\varphi_2)$, где g такая гладкая функция, что в достаточно малой окрестности нуля $g = 1$, а вне несколько большей (но тоже малой) окрестности $g = 0$. Подбирая ε малым, получим малое возмущение. Нетрудно проверить, что

$I_1 \mid_{\widetilde{h}=\alpha}$ будет иметь только морсовские особенности – k седловых точек, и k минимумов (или максимумов). На рис. 1 показаны линии уровня I_1 на поверхности $\{h = \alpha\}$ и $\{\widetilde{h} = \alpha\}$ при $k = 6$. После этого по $\widetilde{h}$ построим соответствующий гамильтониан $\widetilde{H}$. Ясно, что новая система будет интегрируема, и кроме того, вблизи T (тора старой системы), у новой будет k новых минимаксных и k седловых окружностей. Мы доказали первую часть пункта б) теоремы 1. Теперь докажем пункт а), и затем окончим доказательство б). Чтобы получилась неботтовость, достаточно в последнем шевелении $\widetilde{h} = h + \varepsilon g(I_1, I_2)\sin(k\varphi_2)$ вместо синуса взять функцию w, например, такую, что

1) $w(t)$ периодическая с периодом 2π;
2) для малого δ, на отрезке $[\delta, \pi - \delta]$ $w(t) = \sin(2t)$;
3) вне $[0, \pi]$ $w(t) = 0$.

Покажем, что получившаяся система не будет боттовской – у нее будет критическое множество на $\{\widetilde{H} = \alpha\}$, отличное от тора, окружности и бутылки Клейна. Это множество – двумерное кольцо, составленное из критических окружностей. Мы таким образом показали, что данный интеграл I_1 не будет боттовским. Чтобы показать, что любой интеграл не будет боттовским, заметим, что особый слой лиувиллева слоения имеет критические окружности, к которым приклеиваются три кольца. В боттовском случае такого не может быть. Пункт а) доказан.

Чтобы завершить доказательство теоремы сделаем следующее. В окрестности T_1 зафиксируем рациональный тор T. Пусть γ_1, γ_2 – образующие торов, причем γ_1 – идет "вдоль" траектории системы $v = \operatorname{sgrad} H$ на T. Заметим, что после указанных возмущений все слои лиувиллева слоения новой системы будут содержать γ_1. Пусть T_2 – близкий к T рациональный тор. Пусть γ – тип обмотки на T_2, $\gamma = q\gamma_1 + p\gamma_2$. Чем ближе T_2 к T, тем ближе отношение p/q к нулю, и тем больше q. Тогда совершим такие возмущения в непересекающихся окрестностях T и T_2. Ясно, что p/q будет меткой между уровнями, содержащими новые минимаксные окружности. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Назовем интеграл F системы $\operatorname{sgrad} H$ периодическим, если все траектории системы $\operatorname{sgrad} F$ замкнуты.

ЛЕММА 2.3. *Пусть O – боттовская относительно периодического интеграла F седловая окружность системы $\operatorname{sgrad} H$. Пусть $H \to \widetilde{H}$ – достаточно малое интегрируемое возмущение H (в метрике C^n, $n > 2$). Тогда вблизи O останется критическая окружность новой системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π – 3-трансверсаль к O, и $\Pi_\alpha = Q_\alpha \cap \Pi$. Рассмотрим проекцию поля $\operatorname{sgrad} H$ на Π вдоль траекторий поля $\operatorname{sgrad} F$. Положим $\xi = d\pi(\operatorname{sgrad} H)$ – векторное поле на Π_α. Пусть $x \in O \cap \Pi$. Нам надо показать, что ξ в точке x имеет невырожденную линейную часть. Рассмотрим в окрестности x канонические координаты $q_1 = F, q_2, p_1, p_2$. Нам достаточно рассмотреть только линейную и квадратичную части H. Тогда

$$H = aq_1 + bq_1^2 + cq_2^2 + dp_1^2 + ep_2^2 + fq_1q_2 + gq_2p_2 + hq_2p_1 + kq_1p_2 + mp_1p_2.$$

Легко вычислить, что

$$d\xi = \begin{pmatrix} g & 2e \\ -2c & -g \end{pmatrix}.$$

Поскольку O – окружность седловая, то $4ce - g^2 < 0$. Собственные числа равны $\pm\sqrt{g^2 - 4ec}$. Предположим, что сепаратрисные диаграммы ориентируемы. Положим $\tau(y)$ – время, за которое траектория системы $\operatorname{sgrad} H$, выпущенная из $y \in \Pi_\alpha$, вернется на Π_α. Ясно, что τ определено вблизи x. Пусть $\Phi_t(\xi)$ – диффеоморфизм сдвига вдоль поля ξ на время t. Тогда $g(x) = \Phi_{\tau(x)}(\xi)(x)$, где g – отображение последования на Π_α. Тогда $dg = \exp(d\xi)$. Его собственные числа не равны 1. При малом шевелении H, Π_α мало пошевелится, и g мало пошевелится. Следовательно, останется неподвижная точка, и собственные числа $d\widetilde{g}$ не будут равны 1.

Если сепаратрисные диаграммы неориентируемы, то надо вместо g рассмотреть g^2. Лемма доказана.

Теорема 2.4. *Множество боттовских на данном уровне энергии систем – множество первой категории (в слабой метрике C^n, $n > 2$).*

Доказательство. Обозначим через B_n множество боттовских систем (на данном уровне энергии α), имеющих на этом уровне ровно n седловых окружностей. Покажем, что B_n нигде не плотно.

Пусть $H \in B_n$. Из предыдущей теоремы следует, что малым шевелением $H \to \widetilde{H}$ можно добиться того, что система $v = \operatorname{sqrad} \widetilde{H}$ боттовская при $\widetilde{H} = \alpha$, $\widetilde{H} \in B_{2n+1}$ и новые седловские окружности (их не менее $n+1$) при $\widetilde{H} = \alpha$ удовлетворяют условию леммы 2.3. Но по лемме 2.3 достаточно малым шевелением $\widetilde{H}$ нельзя вернуть его назад в B_n. Мы показали, что B_n нигде не плотно. Множество боттовских систем на $H = \alpha$ – объединение всех B_n. Теорема доказана.

Следствие 2.5. *При интегрируемом шевелении $H \to \widetilde{H}$ новая система наследует старые критические окружности, но при этом может получить новые.*

Замечание 2.6. Старые боттовские окружности остаются, мало продеформировавшись, критическими окружностями новой системы, но при этом, эти окружности не обязаны быть боттовскими. Этому посвящен следующий пример.

Пример 2.7. Рассмотрим боттовскую седловую окружность O системы $v = \operatorname{sgrad} H$ с независимым интегралом F. Можно считать, что $F(0) = H(0) = 0$. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность торов Лиувилля на уровне $Q_0 = \{H = 0\}$, причем $F(T_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через U_n непересекающиеся окрестности торов T_n. Ясно, что можно сколь угодно мало пошевелить H, если надо, чтобы в $U_n \cap Q_0$ был резонансный тор для данного n. Пусть дан $\varepsilon > 0$. Пусть δ_n – такая последовательность положительных чисел, что $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta_n < \varepsilon$. Далее в каждой окрестности U_n сделаем шевеление в метрике C^{n+k} не более чем на δ_n, чтобы в $U_n \cap Q_0$ был рациональный тор, а затем сделаем шевеление, как в теореме 1, в этой же метрике не более чем на δ_n. Проверим, что получится гладкая функция $\widetilde{H}$, в C^k-метрике отличащаяся от H не более чем на ε. Пусть U – любая окрестность слоя $\{H = 0; F = 0\}$, вне U лежит конечное число T_j, следовательно, вне U мы произвели конечное число возмущений. При каждом из них полученная функция была гладкой, и отличалась в C^k-метрике не более чем на $2\delta_j$ (метрика C^k слабее, чем C^{j+k}). Следовательно, $\widetilde{H}$ гладкая, по крайней мере, везде, исключая множество $\{f = 0\}$ и в C^k-метрике $\rho(H, \widetilde{H}) < \varepsilon$. Покажем, что на самом деле $\widetilde{H}$ гладкая везде. Пусть W_n – окрестность слоя $\{H = 0; F = 0\}$, не содержащая $T_1, \ldots, T_n$. Тогда внутри W_n все возмущения, по крайней мере, класса C^{n+k}. Эта метрика полна, следовательно, на множестве $\{F = 0\}$ функция $\widetilde{H}$ принадлежит C^{k+n}, n произвольно, отсюда получаем требуемое утверждение. Мы возмутили H в C^k-метрике не более чем на ε, особенность при $F = 0$ осталась, но перестала быть боттовской, так как она не изолирована.

§3. Плотность боттовских систем в более узком классе

Мы видели, что в слабой метрике почти все системы неботтовские. Эти системы могут иметь очень сложную структуру. Поэтому, можно поставить вопрос так: будут ли плотны боттовские системы среди "не очень сложных" систем. Оказалось, что это так, если сделать некоторые допущения.

В начале напомним некоторые уже известные факты. Пусть F – интеграл системы $v = \operatorname{sgrad} H$. Рассмотрим пуассоново действие группы $\mathbb{R}^2$ в (M^4, ω), задаваемое следующей формулой

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2, \qquad P(a, b)(x) = \Phi_a \cdot \Psi_b(x),$$

где Φ_t и Ψ_t – сдвиги вдоль траектории векторных полей $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} F$ на время t соответственно. Нас будут интересовать орбиты этого действия. Каждая орбита – гладкое многообразие размерности равной рангу $\operatorname{rk}(\operatorname{sgrad} H, \operatorname{sgrad} F)$. Очевидно, что сами эти многообразия диффеоморфны $\mathbb{R}^r/\Gamma$, где Γ – дискретная подгруппа группы $\mathbb{R}^r$, $r \leq 2$. Пусть $Q_h = \{H = h\}$ – многообразие регулярного уровня, а c – критическое значение F на Q_h. Рассмотрим множество $F^{-1}(c)$. Оно состоит , вообще говоря, не только из одномерных орбит. Известно, что в боттовском случае, к седловым критическим окружностям приклеиваются двумерные орбиты – кольца $\mathbb{R} \times S^1$ (сепаратрисы).

Будем считать выполненным следующее условие: у системы $v = \operatorname{sgrad} H$ имеется интеграл f со следующими свойствами.

(i) Для всех h, $\alpha < h < \beta$ на Q_h все критические множества f – двумерные торы, бутылки Клейна и окружности. К окружностям могут приклеиваться только кольца.

(ii) Бифуркационная диаграмма $\Sigma(H, f) \subset \Sigma_1$, где Σ_1 – объединение непрерывных кривых $f = w_i(h)$, $1 \leq i \leq m$.

Теорема 3.1. *Пусть система* $v = \operatorname{sqrad} H$ *удовлетворяет условиям* (i), (ii). *Тогда можно сколь угодно мало возмутить H так, чтобы возмущенная система* $v = \operatorname{sgrad} \widetilde{H}$ *на заданном уровне* $\{\widetilde{H} = h_0\}$ *стала боттовской.*

Доказательство. Идея доказательства такова: сначала строится периодический интеграл F, а затем производится возмущение H, аналогично, как в теореме 2.1, чтобы F стал боттовским. Основная сложность – доказательство существования F. Для этого и введены условия (i), (ii).

Обозначим через c_h критическое значение f на Q_h.

Теорема 3.2. *Для любого ε найдется число h такое, что $|h - h_0| < \varepsilon$ и в некоторой окрестности $V \subset M^4$ критического множества $\{H = h; f = c_h\}$ существует периодический интеграл F системы* $\operatorname{sgrad} H$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *В условиях теоремы всюду плотное и открытое множество (в U) составляет такие уровни $H = \widetilde{h}$, что выполнено следующее условие. Для каждого такого $\widetilde{h}$ существует открытый интервал U_0 такой, что множество Σ_1, ограниченное на множество $\{h \in U_0\}$ состоит из объединения непересекающихся непрерывных кривых $f = w_1^i(h)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Обозначим $\rho(h)$ – число различных значений функции $w_i(x)$ при $x = h$. Из условия 2 теоремы следует, что ρ всегда конечно. Пусть $U_n = \{h \mid \rho(h) = n\}$; $V_n = U_{k \geq n} U_k$. Из непрерывности w_i следует, что множество V_n открыто при всех n. Рассмотрим $P(h) = \limsup\limits_{x \to h} \rho(x)$. Тогда в некоторой окрестности $U \ni h$ нет таких $\widetilde{h}$, что $\rho(\widetilde{h}) > P(h)$ или, что то же самое, $U_k \cap U = \varnothing$ при $k > P(h)$. Пусть $n = P(h)$, V_n открыто (и не пусто) в U. Поэтому, так как $V_n \cap U = U_n \cap U$, то и U_n открыто в U. Кроме того, h – предельная точка U_n, поэтому существует $h_0 \in U_n$ такое, что для заданного ε, $|h - h_0| < \varepsilon$.

Пусть $f_1, \dots, f_n$ – множество значений $w_i(h_0)$ (по построению их ровно n). Из непрерывности w_i следует, что существует такой открытый интервал W ($U_n \supset W \ni h_0$), на котором кривые $w_i(h)$ и $w_j(h)$ не пересекаются, если $w_i(h_0) \neq w_j(h_0)$.

Покажем, что если $w_i(h_0) = w_j(h_0)$, то $w_i(h) = w_j(h)$ при $h \in W$. Пусть это не так: $h \in W$ и $w_i(h) \neq w_j(h)$. Это означает, что на уровне h множество значений $w_i(h)$ содержит, по крайней мере, $n+1$ элемент. Это противоречит тому, что $h \in U_n = \{\rho(x) = n\}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Определять F будем следующим образом. Выберем в окрестности на каждом слое согласованные образующие, после этого положим

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \varkappa; \qquad \text{где} \qquad d\varkappa = \omega.$$

Обозначим данный уровень энергии через h_0, а критическое значение f на нем через f_0. В силу леммы 3.3 выберем $|h - h_0| < \varepsilon/2$ так, что в некоторой окрестности $W \ni h$, если $\widetilde{f}$ – критическое значение f на уровне $\widetilde{h} \in W$, близкое к нулю, то $\widetilde{f} = w(\widetilde{h})$, где w – непрерывная функция.

Если уровень $f = w(h)$ не критический, то теорема доказана, так как в этом случае в качестве F можно взять координату-функцию действия. Ясно, что можно считать, что в некоторой окрестности $W_1 \ni h$ ($W_1 \subset W$) все $w(x)$ – критические значения f на уровнях $H = x$.

Рассмотрим случай, когда $f = w(h)$ – критическое значение f на $\{H = h\} = Q_h$. Пусть в некоторой окрестности $W_1 \ni h$; $W_1 \subset W$ на любом сингулярном слое $\{H = x; f = w(x)\}$, $x \in W_1$, нет колец $S \times R$. Тогда $w(x)$ доставляет локальный максимум (для определенности) f на многообразии $H = x$ при $x \in W_1$ (прообраз $f^{-1}(w(x))$ – окружность). В этом случае образующая выбирается легко. Достаточно определить ее на одном торе и распространить на другие торы и окружности.

Если же любой окрестности W_1 точки h существует $\widetilde{h}$ такое, что слой $\{H = \widetilde{h}; f = w(\widetilde{h})\}$ содержит кольцо, то выберем $\widetilde{h}$ так, что $|h - \widetilde{h}| < \varepsilon/2$. Тогда $|h_0 - \widetilde{h}| < \varepsilon$. Для простоты будем считать, что $\widetilde{h} = 0$ и $w(\widetilde{h}) = 0$.

Итак, на слое $\{H = 0; f = 0\}$ есть кольца. Будем считать этот слой связным. (Если это не так, по очереди рассмотрим каждую связную компоненту.) Кроме того, на всех близких уровнях H есть критические окружности при $f = w(h)$.

Рассмотрим кольцо R. Пусть γ – его образующая . Она определена с точностью до изотопии. Пусть U – трубчатая окрестность γ (в M). U пересекает близкие слои по кольцам, которые и определяют на этих слоях образующие и, притом, однозначно.

Пусть R_1 и R_2 – два кольца на уровне $\{H = 0, f = 0\}$. Предположим, что они имеют общие близкие торы. Каждое кольцо тогда определяет на них свою образующую.

Лемма 3.4. *Эти образующие совпадают.*

Доказательство леммы. Пусть γ_1 и γ_2 – две образующие R_1 и R_2, а U_1 и U_2 – их трубчатые окрестности. Можно их выбрать так, чтобы они не пересекались. U_1 и U_2 пересекают торы по K_1 и K_2. Так как $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то они определяют одинаковую образующую. Лемма доказана.

Пусть $O_1, \ldots, O_N$ – критические окружности на слое $\{H = 0, f = 0\}$, K – произвольное кольцо на этом слое.

А) K однозначно определяет образующие на близких торах.

Б) Пусть к O_1, кроме K, примыкает другое кольцо K_1. K_1 также определяет образующие на близких торах. При этом может получиться так, что на одном торе определены две образующие – от K и K_1. По лемме 3.4 они совпадают.

В) Предположим, что в окрестности O_1 на $Q_0 = \{H = 0\}$ образующие уже выбраны (если нет, то надо вернуться в пункт Б)). Тогда, если вблизи $\{f = 0\}$ на Q_0 определены все образующие, то существует такое кольцо K_2 и окружность O_2, что это кольцо примыкает к O_2 и O_1. Тогда нужно перейти в пункт Б), поменяв O_1 на O_2, а K на K_2.

Так можно определить образующие на $\widetilde{W} \cup O_1 U \ldots U O_N$, где $\widetilde{W}$ – некоторое открытое множество, содержащее все кольца слоя $\{H = 0, f = 0\}$. Это множество, ограниченное на $Q_0 = \{H = 0\}$, является окрестностью слоя $\{f = 0\}$.

Поступим так. На всех близких уровнях энергии проделаем такую процедуру. После этого покажем, что на этих уровнях образующие будут выбираться согласованно.

Множество регулярных торов открыто. В рассматриваемой области оно распадается на связные компоненты.

Определение. Назовем два тора смежными, если они принадлежат одной связной компоненте.

Ясно, что если мы выбрали образующую на одном торе, то она однозначно выбирается на всех смежных торах. Множество смежных торов открыто в M.

Пусть O – критическая окружность, а R – примыкающее к ней кольцо. Введем в рассматриваемой окрестности риманову метрику, от выбора которой доказательство не зависит.

Обозначим через $B(x, \lambda)$ открытый шар радиуса λ, с центром в точке x. Пусть V – трубчатая окрестность (малого радиуса) O. Положим $\widetilde{V}^\delta = \bigcup_{x \in O} B(x, \delta)$.

Выбирая δ малым, можно добиться того, что $\widetilde{V}^\delta \subset V$. Пусть γ – образующая R такая, что $\gamma \in V \setminus \widetilde{V}^\delta$, U – ее трубчатая окрестность $U \subset V \setminus \widetilde{V}^\delta$.

Множество слоев, которые пересекают U по кольцу, открыто. Пусть $x \in R$. $H(x) = f(x) = 0$, кроме того, в точке x $\mathrm{rk}(dH, df) = 2$. Поэтому существует $c > 0$ такое, что если $f_0^2 + h_0^2 < c^2$, то слой $\{H = h_0, f = f_0\}$ пересекает U по кольцу.

Уменьшим, если надо, δ так, чтобы максимум $|f - f_0|$ на $\widetilde{V}^\delta$ был меньше $c/2$: $\max|f(x) - f_0| < c/2$ при $x \in \widetilde{V}^\delta$ $(f_0 = 0)$. Выберем ε так, что

1) на множестве $(V \setminus \widetilde{V}^\delta) \cap \{H = \lambda\}$, $|\lambda| < \varepsilon$ нет критических окружностей (т.е. они существуют, но лежат в $\widetilde{V}^\delta$),

2) $\varepsilon < c/2$.

Отсюда следует следующий факт: пусть f_0 – критическое значение f на уровне $\{H = \lambda\}$, $|\lambda| < \varepsilon$. Тогда соответствующая критическая окружность лежит в $\widetilde{V}^\delta$ и, следовательно, $|f_0|^2 < c^2/4$, $f_0^2 + H^2 < c^2/4 + \lambda^2 < c^2/4 + c^2/4 < c^2$. Из этого следует, что слой $\{H = \lambda, f = f_0\}$ пересекает U по кольцу.

Мы построили такие ε и δ для данной окружности и для данного кольца, примыкающего к ней, следовательно, в силу конечности числа окружностей и колец на $Q_0 = \{H = 0\}$, можно предъявить такие ε и δ, что они будут удовлетворять нужным условиям для всех окружностей и колец на Q_0.

Сформулируем это точнее. Пусть кольцо R_j примыкает к окружности O_i. V_i – малая трубчатая окрестность O_i, $\widetilde{V}_i^\delta = \bigcup_{x \in O_1} B(x, \delta)$, $\gamma_{i,j}$ – образующая R_j, лежащая в $V_i \setminus \widetilde{V}_i^\delta$. $U_{i,j}$ – трубчатая окрестность $\gamma_{i,j}$; $U_{i,j} \subset V_i \setminus \widetilde{V}_i^\delta$. Тогда существуют такие ε, δ, что

1) $\gamma_{i,j} \subset V_i \setminus \widetilde{V}_i^\delta$;
2) $U_{i,j} \subset V_i \setminus \widetilde{V}_i^\delta$;
3) для любого $|\lambda| < \varepsilon$, на уровне $H = \lambda$,если $f = f_0$ – критический уровень f, то множество $f = f_0$ пересекает $U_{i,j}$ по кольцу;
3′) если $|f_0| < c$, где c не превосходит $\max|f - f_0| = \max|f|$ на любой из $\widetilde{V}_i^\delta$, то слой $\{H = \lambda, f = f_0\}$, $|\lambda| < \varepsilon$ пересекает любую $U_{i,j}$ по кольцу;
4) на этом уровне $H = \lambda$ все критические окружности лежат в $\bigcup_i \widetilde{V}_i^\delta$.

   Уточним – рассматриваемая область – это $f^2 < c^2/4$; $|H| < \varepsilon$. Множества смежных торов открыты, поэтому можно потребовать еще следующее условие (на малость ε):

5) пусть тор T пересекает некоторую $U_{j,i}$ по кольцу. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon$ на уровне $Q_\lambda = \{H = \lambda\}$ будет существовать тор T', смежный с T, пересекающий $U_{j,i}$ по кольцу.

ЛЕММА 3.5. *Пусть T – тор на уровне Q_0. Предположим, что он пересекает $U_{j,i}$ по кольцу. Тогда (из условия 5)) на уровне Q_λ, $|\lambda| < \varepsilon$ есть T', смежный с T, и пересекающий $U_{j,i}$ по кольцу. Тогда*

1) *на уровне $\{H = \lambda\}$ определена описанная выше процедура выбора образующих,*
2) *в результате этой процедуры на торе T' будет определена та же образующая, что и на торе T.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала пункт 1). Напомним, что указанная процедура определяла образующие в окрестности (на Q) связной компоненты особого слоя при условии, что он содержит кольца. Тогда надо показать следующее:

1.1) слой $f = w(\lambda)$ на Q_λ связен (в рассматриваемой окрестности);

1.2) этот особый слой содержит кольца.

Предположим, что слой $\{H = \lambda; f = w(\lambda)\}$ не связен, а $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ – его связные компоненты. На Q_λ множество регулярных торов, значение f на которых не равно $w(\lambda)$ распадается на однопараметрические семейства T_j. Рассмотрим все такие семейства, примыкающие к $\mathcal{F}_1$. Пусть это будет семейства $T_1, \ldots, T_q$. Рассмотрим множество $A = \mathcal{F}_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_q$. есть две возможности:

1.1.1) A заполняет всю рассматриваемую окрестность на Q_λ (эта окрестность $|f| < c/2$). Но тогда $\mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_k$ ей не принадлежат;

1.1.2) существует точка x из рассматриваемой области, не принадлежащая A, на границе A. Пусть $\mathcal{F}$ – слой лиувиллева слоения, проходящий через x. Значение f на $\mathcal{F}$ ровно $w(\lambda)$, иначе A можно было бы продолжить. Следовательно, это один из $\mathcal{F}_j$. Тогда между $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_j$ существует прослойка регулярных слоев. Это противоречит тому, что $f(\mathcal{F}_1) = f(\mathcal{F}_j) = w(\lambda)$.

Предположим, что этот слой не содержит колец. Следовательно, этот слой – окружность или критический тор (для определенности – максимальные). Ясно, что $w(\lambda) < c/2$ (из свойства 3) константа c оттуда же). Тогда существует число g такое, что $w(\lambda) < g < c/2$. Поскольку в рассматриваемой окрестности нет других особых точек, то множество уровня $\{f = g\} \cap Q_\lambda$ пусто. Тогда нарушается условие 3') (см. выше), поскольку пустое множество не может пересекаться с другим множеством по кольцу. Таким образом, пункт 1 леммы 3.5 доказан.

Докажем пункт 2. Слой $\{f = w(\lambda); H = \lambda\}$ пересекает $U_{i,j}$ по кольцу (см. свойство 3) и 3')). Этот слой особый и, следовательно, можно рассматривать $U_{i,j}$, как окрестность образующей γ на некотором кольце из особого слоя на Q_λ. В таком случае, на двух торах определена одинаковая образующая, так как она определена с помощью одной и той же трубки $U_{i,j}$. Лемма доказана

Покажем, что множество смежных торов, лежащих на Q_λ, связно. Из доказательства леммы 3.5 следует, что на Q_t при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ нет изолированных окружностей, и особый слой связен и непуст. Тогда на каждом уровне Q_t множество регулярных торов распадается на $n_t^1, \ldots, n_t^k; p_t^1, \ldots, p_t^m$, где образ n при отображении момента лежит ниже графика $f = w(t)$, а у p – выше. В силу вышесказанного k и m не зависят от t. Ясно, что нумерацию можно сделать таковой, что торы из p_τ^j смежны с p_t^j (аналогично с n_t^j). Покажем, что торы из p_τ^j не смежны с n_t^i. Пусть это не так. Тогда есть непрерывная кривая γ, соединяющая два тора из n_t^j и p_τ^j и пересекающая только регулярные торы. Но тогда $\mu(\gamma)$ – образ γ при отображении момента пересечет график $f = w(h)$. Следовательно, в силу сделанных замечаний γ пересечет особый слой.

Покажем, что торы из p_τ^j не смежны с $p_\tau^i (i \neq j)$. Пусть это не так. Аналогично соединим двух представителей кривой γ. Образ $\mu(\gamma)$ не пересекается с некоторой окрестностью графика $f = w(h)$. Но тогда концы графика принадлежат одной связной компоненте т.е. p_τ^j.

Пусть T_1 и T_2 – смежные торы, и $T_1 \in Q_0$, тогда по свойству 5) существует тор T', смежный с T_2, лежащий с ним на одной Q_λ и такой, что к нему применима лемма

3.5. Тогда на T_1 и на T' образующая выбрана согласованно. Но T' и T_2 лежат в одной из связных (на Q_λ) компонент (p^j или n^i), следовательно, на них выбирается одинаковая образующая. Этим мы доказали, что на T_1 и T_2 образующие выбраны согласованные.

Аналогично это можно показать для произвольных торов. В таком случае $T_1 \in Q_\lambda$, заменив Q_0 на Q_λ и повторив все рассуждения, мы получим

Следствие. *Если T_1 и T_2 – смежные торы, и $T_1 \in Q_\lambda$, то существует ε_1 такое, что если $T_2 \subset \{|H-\lambda| < \varepsilon_1\}$, то на этих двух торах выбрана согласованная образующая и $(\lambda-\varepsilon_1, \lambda+\varepsilon_1) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Отрезок $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ покрывается конечным числом таких интервалов $(\lambda-\varepsilon_1, \lambda+\varepsilon_1)$, что завершает доказательство теоремы 3.2.

Рассмотрим диффеоморфизм $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Существует натуральное N такое, что $g^N = \mathrm{id}$.
2. $g_* H = H$, где (H, x', y') – заданные координаты в $\mathbb{R}^3$.
3. Точка z с координатами $x'(z) = y'(z) = 0$ неподвижна: $g(z) = z$.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathcal{N} = \{x' = y' = 0\}$. Тогда можно ввести гладкие координаты ρ, φ на $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}$ вместо x' и y', что диффеоморфизм g в этих координатах – поворот на угол $2\pi p/q$ в плоскостях $H = \mathrm{const}$.*

Доказательство. На каждой поверхности $\{H = \alpha\}$ у диффеоморфизма g есть неподвижная точка $x' = y' = 0$. Рассмотрим дифференциал ограничения g на $\{H = \alpha\}$ в этой точке, $dg^N = E$, следовательно, $d(g|_{H=\alpha})$ имеет собственные числа λ, равные корням из 1 степени $n \le N$. $d(g|_{H=\alpha})$ гладко зависит от α, следовательно λ и $\overline{\lambda}$ зависят от α. Пусть (H, x, y) – такие координаты, что $d(g|_{H=\alpha})$, вычисленный в этих координатах, имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$, тогда в этих координатах g – поворот на угол ψ с точностью до $O(x^2+y^2)$. Положим $\rho^2 = f + g_* f + \dots + g_*^{N-1} f$, где $f = x^2 + y^2$. Заметим, что ρ^2 – морсовская функция на каждой поверхности $\{H = \alpha\}$ и инвариантна относительно g. Ее линии уровня на $\{H = \alpha\}$ – замкнутые кривые, обходящие нуль.

Осталось построить координату φ. Сначала докажем лемму.

Лемма 3.7. *Если $\rho(z)$ достаточно мало, то n – минимальный период точки z.*

Доказательство леммы. Ограничимся на поверхность $H = H(z)$. Орбита точки z лежит на окружности $\{\rho = \rho(z)\}$. Пусть $\varphi_1 = \mathrm{arctg}(y/x)$ – многозначная функция. Ясно, что g с точностью до $O(x^2+y^2)$ – это преобразование $\rho' = \rho$; $\varphi_1' = \varphi_1 + 2\pi(k/n)$, где k и n взаимно просты. Поэтому орбита точки состоит уже, по крайней мере, из n точек. Осталось показать, что их ровно n. Пусть $g^n z \neq z$. Ясно, что отклонение $g^n z$ от z по координате φ_1 порядка $O(x^2+y^2)$. Поэтому, для всех точек таких, что $0 < \rho$ и ρ мало, однозначно определена функция отклонения $\xi(z) = \varphi_1(g^n z) - \varphi_1(z)$ (при вычислении $\xi(z)$ берется одна ветвь функции φ_1).

I. Предположим, что существует такая точка z', что $\rho(z') > 0$ и $\xi(z') = 0$, но ξ не равно нулю на всей окружности (иначе все доказано, и $\varphi = \varphi_1$). Пусть

$O\{\rho = \rho(z')\}$ и $O_+ = \{z \in 0 \mid \xi(z) > 0\}$ не пусто (иначе возьмем O_-). O_+ открыто – состоит не более чем из счетного объединения интервалов. $O_+ \neq O$, так как $z' \in O$ и $\xi(z') = 0$. Можно считать, что z' принадлежит границе O_+, причем так, что связная компонента O_+ лежит "слева" от z', т.е. φ_1 на O_+ больше, чем в z'. Вблизи z' на O_+ $\xi(z)$ очень мало, но положительно. Поэтому можно выбрать такую точку z'', чтобы ее период был сколь угодно большим, что противоречит тому, что $g^N = \mathrm{id}$.

II. Предположим противное, что $\xi(z) \neq 0$ для любой точки z такой, что $\rho(z)$ мало, но $\rho(z) > 0$. Тогда, так как $\xi(z) = \varphi_1(g^n z) - \varphi_1(z) = 0(\rho^2)$, то подбирая ρ достаточно малым, можно сделать так, что точка $z \in \{\rho = c, \text{ где } c \text{ мало}\}$ имеет сколь угодно большой период (аналогично, как в I).

Следовательно, $\xi(z) = 0$ для всех z с достаточно малым ρ. Лемма 3.7 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. φ_1 – функция неоднозначная, при обходе вокруг нуля имеет приращение 2π. Но $\varphi_1(gz) - \varphi_1(z) = 2\pi k/n + O(\rho^2)\ (\mathrm{mod} 2\pi)$, где $(k,n) = 1$. Положим $\Phi = \varphi_1 g_* \varphi_1 + \cdots + g_*^{n-1}\varphi_1$. Будем понимать это в смысле сложения однозначных функций. При этом Φ будет иметь приращение $2\pi n$ при обходе вокруг нуля. $g_*\varphi_1 - \varphi_1 = 2\pi k/n + 0(\rho^2)$, поэтому $g_*\Phi - \Phi = 2\pi k$, но с другой стороны, $g_*\Phi - \Phi = 0(\mathrm{mod} 2\pi)$, следовательно, $g_*\Phi - \Phi = 2\pi k$. Положим $\varphi = \Phi/n$. Теорема 3.6 доказана.

Продолжение доказательства теоремы 3.1.

Пусть П – трехмерная трансверсаль к критической окружности O. Рассмотрим отображение Пуанкаре g для системы $u = \mathrm{sgrad}\, F$ на П. Ясно, что можно ввести в П такие координаты, чтобы g удовлетворял условиям теоремы 3.6. Отметим, что H, ограниченная на П, регулярна. Это следует из того, что $TM^4 = T\Pi \oplus TO$ и, если $\xi \in TO$, то $\xi(H) = 0 \Rightarrow$ существует $\eta \in T\Pi$ такой, что $\eta(H) \neq 0$. Аналогично F на П регулярна. Пусть (x, y, H) – координаты, построенные по теореме 3.6. Будем возмущать H в классе функций, коммутирующих с F. Чтобы функция W коммутировала с F необходимо и достаточно, чтобы W была постоянна на траекториях системы $u = \mathrm{sgrad}\, F$. Пусть w – функция на П. Ясно, что она однозначно продолжается до функции W, коммутирующей с F в том и только в том случае, если w инвариантна относительно g – поворота на угол $2\pi p/q$. Пусть $H_0 = H|_\Pi$. Возмутим H_0 так, чтобы ограничение F на поверхность $\{H_0 = h\}$ имело только морсовские особенности, и возмущенная функция была инвариантна относительно поворотов. После этого продолжим $\widetilde{H}_0$ до $\widetilde{H}$. Легко показать, что так можно сделать. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.8. Легко видеть, что возмущения в теореме 3.1 можно делать локально. То есть, для заданной окрестности сингулярного слоя возмущать H можно в этой окрестности. Пусть f – произвольный интеграл системы $\mathrm{sgrad}\, H$. Во многих случаях можно доказать, что f сколь угодно близко приближается некоторым другим интегралом f_1 так, что $\{f_1, H\} = 0$ и $f_1 = g(H, F)$ в некоторой окрестности сингулярного слоя. Тогда, возмутив H в этой окрестности, можно возмутить и f_1, положив $f_2 = f_1$ вне и $f_2 = \dot{g}(\widetilde{H}, F)$ внутри данной окрестности. Таким образом, можно получить "сильный" вариант теоремы 3.1

Замечание 3.9. Условия (i), (ii) фактически нужны для того, чтобы доказать существование периодического интервала. Поэтому, если заранее предполагать его существование, от этих условий в теореме 3.1 можно освободиться.

§4. Боттовские системы с точки зрения сильной метрики

Теорема 4.1. *Пусть O – боттовская окружность системы $v = \operatorname{sgrad} H$ относительно интеграла f. Тогда при малом возмущении вида $(H, f) \to (\widetilde{H}, \widetilde{f})$ в C^n-метрике $(n > 2)$ окружность O мало шевелится, оставаясь боттовской.*

Доказательство. Пусть Π – 3-трансверсаль к O, $\Pi_\alpha = \Pi \cap \{H = \alpha\}$; $f_\alpha = f|_{\Pi_\alpha}$. При малом шевелении H и f Π_α перейдет в близкую $\widetilde{\Pi}_\alpha$; $\widetilde{f}_\alpha = \widetilde{f}|_{\widetilde{\Pi}_\alpha}$ – тоже мало отличается от f_α. Но f_α морсовская при $\alpha = \alpha_0$, поэтому $\widetilde{f}_\alpha$ морсовская, если возмущение мало. Теорема доказана.

Замечание 4.2. Теорема перестает быть верной для боттовских торов. Это следует из доказательства теоремы 1.1.

Следствие 4.3. *Пусть M^4 компактно, и система $v = \operatorname{sgrad} H$ на Q_h имеет только критические окружности, и на каждом критическом уровне интеграла f содержится одна критическая окружность. Тогда топологическая структура (т.е. изоэнергетический инвариант Фоменко-Цишанга) устойчива относительно малых шевелений в сильной метрике.*

В случае когда на каждом критическом уровне интеграла f содержится не более одной критической окружности, интеграл f называется простым. В [14] показано, что среди боттовских систем системы с простым интегралом всюду плотны в сильной метрике.

В силу сказанного в замечании 3.8 видно, что при дополнительных ограничениях на интегрируемую систему, можно сделать ее боттовской на заданном уровне, возмутив даже в сильной метрике. Однако, это неверно для семейства уровней энергии. В общем случае нельзя возмутить ее так, чтобы исчезли все неботтовости на уровнях h, где $\alpha < h < \beta$. Этому может помешать следующее. Пусть f_n – семейство гладких функций, построенное как в теореме 4.1. Малым возмущением семейства гладких функций нельзя сделать так, чтобы все функции этого семейства стали морсовскими.

Просуммируем полученные выше утверждения. Итак, если рассматривать интегрируемые системы в слабой метрике, то почти все они неботтовские (дополнение к множеству первой категории). Это не согласуется с тем, что почти все известные системы боттовские. Однако, вблизи каждой системы, удовлетворяющей некоторому условию, есть боттовские системы с точки зрения слабой метрики.

§5. Многомерный случай

Как уже отмечалось, существует определение боттовости в многомерном случае, т.е. для систем со многими степенями свободы. Поэтому, естественно было бы посмотреть как доказанные выше теоремы обобщаются на многомерный случай. Теоремы 2.1, 2.4 о плотности неботтовских систем и о разрушении топологической структуры в слабой метрике, а также теоремы 4.1 об открытости множества боттовских систем в сильной метрике легко могут быть продолжены на многомерный случай. К сожалению, этого нельзя сказать о теореме 3.1 о плотности боттовских систем в слабой метрике среди "не слишком сложных" систем. При попытке обобщить ее доказательство на случай многих степеней свободы возникают трудности. В многомерном случае на регулярном изоэнергетическом многообразии критические множества могут быть размерности ниже, чем $n-1$, а в этом случае доказательство не пройдет, так как размерность боттовских многообразий не должна быть ниже $n-1$.

Список литературы

1. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения.. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45. №2.
3. *Bolsinov A.V.* Methods of Calculation of the Fomenko-Zieschang Invariant // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 147–183.
4. *Нгуен Тьен Зунг* О свойстве общего положения простых боттовских интегралов // УМН. 1990. Т. 42. №4. С. 161–162.
5. *Ошемков А.А.* Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на SO(4) // УМН. 1990. Т. 42. №2. С. 199–200.
6. *Oshemkov A.A.* Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigit Body Motion Equations // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 67–146.
7. *Polyakova L.S.* Topologikal Invariants for Some Algebraic Analogs of the Toda Lattice // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 185–207.
8. *Selivanova E.N.* Topologikal Classification of Integrable Bott Geodesic Flows on the Two-Dimensional Torus // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 209–228.
9. *Fomenko A.T.* The Theory of Invariants of Multidimensional Integrable Hamiltonian Systems (with Arbitrary Many Degrees of Freedom). Molecular Table of All Integrable Systems with Two Degrees of Freedom // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 1–35.
10. *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №6. С. 1276–1307.
11. *Харламов М.П.* Топологический анализ классических интегрируемых случаев в динамике твердого тела // ДАН СССР. 1983. Т. 273. №6. С. 1322–1325.
12. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
13. *Погосян Т.И., Харламов М.П.* Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил // ПММ. 1979. Т. 43. С. 419–428.
14. *Cushman R., Knorrer H.* The energy momentum mapping of the Lagrange top // Lect. notes in Math. 1985. V. 1139. P. 12–24.

г. Москва

Поступила в редакцию
29.03.1993