УДК 517.926

В. В. Калашников

Типичные интегрируемые гамильтоновы системы на четырехмерном симплектическом многообразии

В данной работе изучается топология интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в окрестности вырожденной окружности. Среди всех вырожденных окружностей выделен и изучен класс так называемых вырожденных окружностей общего вида. Эти окружности неустранимы из симплектического многообразия малым шевелением пуассонова действия, и система в их окрестности остается топологически эквивалентной невозмущенной системе. Более того, если система имеет только боттовские окружности и вырожденные окружности общего вида, то при условии простоты возмущенная система глобально топологически эквивалентна невозмущенной. При дополнительном условии доказывается, что малым возмущением гамильтониана можно добиться того, что все вырожденные окружности будут общего вида.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Пусть (M^4, ω) – симплектическое четырехмерное многообразие. Рассмотрим интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему на M^4. Это подразумевает задание гладкого гамильтониана H и дополнительного гладкого первого интеграла F.

Пусть $Q_h^3 = H^{-1}(h)$, где h – регулярное значение H. Положим $f_h = F|_{Q_h^3}$. Поскольку H является первым интегралом системы $v = \operatorname{sgrad} H$, то можно эту систему ограничить на Q_h^3. Тогда f_h станет первым интегралом полученной системы.

Определение 1.1. Интеграл f_h называется *невырожденным* или *боттовским*, если критические точки функции f_h образуют невырожденные подмногообразия, т.е. матрица вторых производных функции f_h невырождена на трансверсальных к ним плоскостях. В противном случае f_h называется *вырожденным интегралом*.

Класс боттовских (невырожденных) систем на Q^3 был явно определен А. Т. Фоменко для нужд теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Одним из основных определений этой теории была топологическая эквивалентность.

Определение 1.2. Две интегрируемые гамильтоновы системы $v_1 = \operatorname{sgrad} H_1$ и $v_2 = \operatorname{sgrad} H_2$ с интегралами F_1 и F_2 *топологически эквивалентны на изоэнергетических подмногообразиях* $H_1^{-1}(h_1)$ и $H_2^{-1}(h_2)$, если существует гомеоморфизм

$$g\colon H_1^{-1}(h_1) \to H_2^{-1}(h_2),$$

отображающий связную компоненту уровня интеграла F_1 на $H_1^{-1}(h_1)$ в связную компоненту уровня интеграла F_2 на $H_2^{-1}(h_2)$.

В [2] А. Т. Фоменко доказал, что если f_h – боттовский интеграл, то его критическое множество – непересекающееся объединение окружностей S^1, двумерных торов T^2 и бутылок Клейна K^2. Окружности могут быть двух типов: минимаксные и седловые (более подробно см. в [1]–[3]).

Интуитивно было понятно, что почти все боттовские системы должны быть структурно устойчивыми при шевелении гамильтониана H и интеграла F, т.е. возмущенная система должна быть топологически эквивалентной невозмущенной системе. Это было доказано для простых боттовских систем без критических торов и бутылок Клейна в [6]. Простая боттовская система – это такая система на Q_h^3, у которой на каждом критическом уровне интеграла f_h критическое множество связно. Нгуен Т.З. в [10] доказал, что простые боттовские системы плотны в классе боттовских систем.

Эти результаты касались систем на Q^3. В данной работе исследуется вопрос о структурной устойчивости интегрируемых гамильтоновых систем на симплектическом многообразии. Для этого необходимы следующие определения.

Определение 1.3. Две интегрируемые системы (M^4, H_1, F_1) и (M^4, H_2, F_2) *топологически эквивалентны на* M^4, если существует гомеоморфизм $g\colon M^4 \to M^4$ такой, что g непрерывно отображает компоненту связности $\mu_1^{-1}(p_1)$ в компоненту связности $\mu_2^{-1}(p_2)$, где $\mu(x) = \big(H(x), F(x)\big)$ – отображение момента.

Определение 1.4. Две интегрируемые системы (M^4, H_1, F_1) и (M^4, H_2, F_2) *изоэнергетически топологически эквивалентны на* M^4, если существует гомеоморфизм $g\colon M^4 \to M^4$ такой, что g непрерывно отображает компоненту связности $\mu_1^{-1}(p_1)$ в компоненту связности $\mu_2^{-1}(p_2)$ и, кроме того, g отображает $H_1^{-1}(h)$ в $H_2^{-1}\big(h_2(h)\big)$.

Как видно, это – прямые обобщения определения 1.2. Можно рассматривать системы, которые являются боттовскими на каждом уровне энергии H из заданного интервала, и для таких систем исследовать вопрос о структурной устойчивости. Такой подход является недостаточным, так как исключает из рассмотрения случай, когда система не является боттовской на отдельных уровнях энергии, а такое происходит довольно часто. Во многих интегрируемых случаях динамики твердого тела существуют изолированные уровни энергии, на которых интеграл является вырожденным. Поэтому А. Т. Фоменко и С.В. Матвеев ввели понятие ручного интеграла, существенно расширив рассматриваемый класс систем (см. [1, приложение 8]). Ими было доказано, что такое расширение не влияет на топологию изоэнергетической поверхности.

А. В. Болсинов в [8] поставил вопрос: какой может быть топология интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности вырожденной замкнутой траектории (окружности) при условии, что дополнительный интеграл вырождается только на ней? Эта задача для изолированных окружностей была решена О. Е. Орел в [13]. Следует указать на то, что в указанных статьях исследовалась топология достаточно широкого класса вырожденных систем. В настоящей работе этот вопрос ставится с другой точки зрения: какие вырожденные интегралы встречаются чаще всего и какую топологию они порождают?

Здесь уместно сказать о работе [7]. В ней был, в частности, рассмотрен один тип вырожденных окружностей. Эти окружности сохранились при малом шевелении пуассонова действия. Была вычислена топология системы в их окрестности. В данной работе найдены другие типы вырожденных окружностей, которые тоже не разрушаются при малом шевелении пуассонова действия. Более того, сформулирована и частично доказана теорема о том, что найденный список топологически устойчивых вырожденных окружностей полон.

Таким образом, обнаружен естественный класс пуассоновых действий $\mathbb{R}^2$ в окрестности вырожденной окружности со свойством: их топологическая структура сохраняется при малом шевелении пуассонова действия. Следовательно, обнаружен естественный класс интегрируемых гамильтоновых систем, обладающих свойством устойчивости при малой деформации гамильтониана и интеграла. Этот класс обобщает открытый ранее в [2] А. Т. Фоменко класс боттовских систем.

Вкратце опишем этот класс. Пусть S – вырожденная окружность системы $v = \operatorname{sgrad} H$ с дополнительным интегралом F. В окрестности S совершим изоэнергетическую редукцию системы $u = \operatorname{sgrad} F$. Мы таким образом получим координаты p, q, T, F. В этих координатах эту же систему приведем к нормальной форме Биркгофа (первые члены). Мы докажем теорему, по которой в этих же координатах функция H будет автоматически приведена к нормальной форме. Пусть n – резонанс окружности S. Зафиксируем T, а координату F рассмотрим как параметр и рассмотрим $\widetilde{H}$ – совокупность первых n членов H (нормальную часть). Заметим, что $\widetilde{H}$ инвариантна относительно поворота на угол $2\pi/n$ в плоскости $\langle pq\rangle$.

Определение 1.5. Назовем окружность S *вырожденной окружностью общего вида*, если $\widetilde{H}$ – семейство общего положения как однопараметрическое семейство инвариантных функций от координат p, q с параметром F. Строгое и подробное описание класса таких окружностей содержится в § 3 (определение 3.5).

Важным показателем вырожденной окружности является ее резонанс. Интересно отметить, что вырожденные окружности резонансов $n = 1$ и $n = 2$ встречаются в интегрируемых задачах динамики твердого тела. Окружности с $n = 1$ встречаются очень часто, например в интегрируемых случаях Ковалевской, Жуковского, Сретенского. Окружности с резонансом $n = 2$ встречаются в случае Ковалевской (см. [8], [12]). Интересно отметить, что окружности с резонансом три и больше до сих пор в конкретных задачах пока не встречались. Очень интересен вопрос о том, в каких системах такие окружности можно ожидать.

Одно из важнейших свойств систем с вырожденными окружностями общего вида и боттовскими окружностями состоит в том, что эти системы при малой деформации остаются топологически эквивалентными недеформированным системам.

Утверждение. *Пусть система* $v = \operatorname{sgrad} H$ *и ее дополнительный интеграл* F *гладко зависят от параметра* ε *и при* $\varepsilon = 0$ *имеют вырожденные окружности общего вида и боттовские особенности без торов и бутылок Клейна. Пусть при* $\varepsilon = 0$ *удовлетворяется условие, аналогичное условию простоты.*

Тогда при достаточно малом $|\varepsilon|$ *система* $v = \operatorname{sgrad} H_\varepsilon$ *с интегралом* F_ε *изоэнергетически топологически эквивалентна системе* $v = \operatorname{sgrad} H_0$ *с интегралом* F_0.

Точная формулировка этого утверждения и его доказательство содержится в § 4.

Теорема 1.1. *Пусть система* $v = \operatorname{sgrad} H$ *и ее дополнительный интеграл* F *гладко зависят от параметра* ε. *Обозначим* $M_\varepsilon = H_\varepsilon^{-1}\big([a,b]\big)$, *где* $[a,b]$ – *заданный отрезок. Пусть система при* $\varepsilon = 0$ *удовлетворяет условиям* (1)–(5), *указанным в* § 4.

Тогда при достаточно малом $|\varepsilon|$ *система* $(M_\varepsilon, H_\varepsilon, F_\varepsilon)$ *изоэнергетически топологически эквивалентна* (M_0, H_0, F_0).

Доказательство теоремы содержится в § 4. Такие условия теоремы естественны, так как многие интегрируемые задачи вместе с их интегралами гладко зависят от параметров.

В одном случае определение вырожденных окружностей общего вида резко упрощается.

Определение 1.6. Непостоянный интеграл F системы $v = \operatorname{sgrad} H$ называется *периодическим*, если у системы $u = \operatorname{sgrad} F$ все траектории замкнуты и не вырождаются в точку.

В достаточно малой окрестности вырожденной окружности общего вида периодический интеграл всегда существует. Если дополнительный интеграл периодический, то вопрос об определении вырожденной окружности общего вида сведется к применению теории эквивариантных особенностей. В этой теории вырожденная окружность общего вида естественно соответствует вырожденной точке в однопараметрическом семействе общего положения инвариантных относительно поворота на угол $2\pi/n$ функций от двух переменных. В предположении существования периодического интеграла в § 5 доказана теорема 1.2.

Теорема 1.2. *Пусть система* $v = \operatorname{sgrad} F$ *в окрестности изолированной вырожденной окружности допускает периодический интеграл* F. *Тогда можно сколь угодно мало возмутить гамильтониан* H *внутри этой окрестности так, что*:

1) *возмущенная система* $v = \operatorname{sgrad} H_\varepsilon$ *имеет тот же первый интеграл* F;

2) *все вырожденные окружности системы* $v = \operatorname{sgrad} H_\varepsilon$ *в данной окрестности общего вида*;

3) H *и* H_ε *совпадают вне данной окрестности.*

Формулировку этой теоремы необходимо пояснить. Любую критическую траекторию интегрируемой гамильтоновой системы можно сделать вырожденной, выбрав подходящий дополнительный интеграл. В формулировке теоремы дополнительный интеграл F фиксирован. У исходной системы $v = \operatorname{sgrad} H$ могут быть вырожденные относительно F траектории. Теорема утверждает, что H можно возмутить так, что в некоторой окрестности все вырожденные траектории будут вырожденными общего вида. Возможно, что их вообще не будет. Кроме того, необходимо пояснить следующее. Не всякая резонансная замкнутая траектория вырождена относительно фиксированного интеграла. Теорема не утверждает, что после возмущения все резонансные траектории станут вырожденными общего вида.

Как уже было отмечено, в достаточно малой окрестности вырожденной окружности общего вида периодический интеграл всегда существует. Во всех известных интегрируемых случаях динамики твердого тела такой интеграл всегда существует хотя бы локально в окрестности любой нетривиальной траектории. Вопрос о том, при каких более общих условиях можно гарантировать существование такого интеграла, открыт.

Автор искренне благодарит своего научного руководителя А. Т. Фоменко, А. В. Болсинова и Р. Кушмана за постоянный интерес к работе и доброжелательную критику, а также В. М. Закалюкина за полезную консультацию. Автор также искренне благодарен рецензенту за полезные вопросы, ответы на которые помогли сделать многие места статьи более ясными для понимания.

§ 2. Необходимые определения и конструкции

Нам потребуется важное понятие отображения момента.

Определение 2.1. *Отображением момента* называется отображение $\mu\colon M^4 \to \mathbb{R}^2$; $\mu(x) = \bigl(H(x), F(x)\bigr)$.

Определение 2.2. Обозначим $K = \bigl\{x \in M^4 \mid \operatorname{rank} d\mu(x) < 2\bigr\}$. Множество $\Sigma = \mu(K)$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Топология интегрируемых гамильтоновых систем на Q^3, допускающих боттовский интеграл, была подробно изучена в работах [1]–[3], [8]. Для изучения топологии интегрируемых систем на всем M^4 следует допускать, что интеграл может и не быть боттовским на отдельных изоэнергетических поверхностях.

Для определения вырожденных окружностей общего вида нам понадобится процедура приведения к нормальной форме Биркгофа. Опишем прием изоэнергетической редукции.

Пусть имеется гамильтонова система в канонических координатах:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

причем H не зависит явно от времени t. Предположим, что q_1 можно выразить через p_1, q_2, p_2 и H, $q_1 = K(p_1, q_2, p_2, h)$, так что

$$H\big(K(p_1, q_2, p_2, h), p_1, q_2, p_2\big) = h.$$

Положим $T = p_1$. Тогда на многообразии $\{H = h\}$ локальными координатами могут быть взяты $q = q_2$, $p = p_2$, T. В этих координатах система будет иметь вид

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dT} = \frac{\partial K}{\partial p}$$

(см. [5. гл. 9, § 45, Б]).

Пусть S – периодическая траектория автономной гамильтоновой системы $v = \operatorname{sgrad} H$. В малой окрестности S можно выбрать канонические координаты q_1, p_1, q_2, p_2 такие, что окружность S задается условием $\{q_1 = q_2 = p_2 = 0\}$. На окружности S формы dq_1 и dH линейно зависимы. Следовательно, в достаточно малой окрестности S координату q_1 можно выразить через H, p_1, q_2 и p_2. Обозначив $T = p_1$, мы получим гамильтонову систему, периодически зависящую от времени T. К таким системам мы будем применять метод Биркгофа приведения к нормальным формам (см. [5, добавление 7]).

Более точно, мы будем приводить к нормальному виду гамильтонову систему $u = \operatorname{sgrad} F$. В таком случае функция F играет роль одной из координат, и мы получаем зависимость функции H от F и других координат. Именно эта зависимость и будет ключевым моментом в определении вырожденных окружностей общего вида.

Как уже было сказано, резонанс вырожденной окружности является ее важным показателем. Напомним, как определяется резонанс. Пусть γ – замкнутая траектория системы $v = \operatorname{sgrad} H$. Рассмотрим двумерную площадку в $Q^3 = \big\{H = H(\gamma)\text{–const}\big\}$, трансверсальную γ. Пусть x_0 – точка пересечения γ с этой площадкой. В окрестности этой точки определено отображение последования для системы $v = \operatorname{sgrad} H$. Сама эта точка неподвижная, поэтому корректно определена производная отображения последования в точке x_0. Эта производная – линейный оператор A из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. У него есть два собственных значения λ_1 и λ_2. Если $\lambda_{1,2} = \exp(\pm 2\pi i k/n)$, то траектория γ называется *резонансной*, а дробь k/n называется *резонансом* γ. Как видно, в случае, когда имеется один гамильтониан, проблем с определением резонанса не возникает. В случае, когда имеется пуассоново действие, резонанс замкнутой траектории в общем случае зависит от выбора гамильтониана. Покажем, что когда γ вырождена относительно пуассонова действия, ее резонанс не зависит от выбора гамильтониана. Интуитивно это понятно, так как резонанс определяется квадратичными членами в разложении гамильтониана.

Лемма 2.1. *Пусть H и F – две коммутирующие относительно скобки Пуассона функции, и пусть γ – замкнутая траектория, вырожденная относительно пары H и F. Предположим, что для гамильтониана H эта траектория эллиптическая.*

Тогда резонанс γ не зависит от того, для какой системы он вычисляется: для $v = \operatorname{sgrad} H$ или $u = \operatorname{sgrad} F$.

Доказательство. Выберем канонические координаты в окрестности γ так, что $\gamma = \{p_1 = p_2 = q_2 = 0\}$ и γ параметризована координатой q_1 от 0 до 2π. Приведем H в окрестности γ к виду

$$H = p_1 + p_1 L + S + R,$$

где L – линейная форма от p_2 и q_2 с коэффициентами, зависящими от q_1; S – квадратичная форма от p_2 и q_2 с коэффициентами, зависящими от q_1, а R – остаточный член, содержащий одночлены от p_1, p_2, q_2 степени 3 и выше. Могут быть три случая.

1) Собственные числа оператора A равны 1. Тогда форму S можно сделать не зависящей от q_1. Очевидно, она должна быть вырожденной. Поэтому ее можно привести к виду $S = \alpha p_2^2$.

2) Собственные числа оператора A равны -1. Тогда в общем случае S нельзя сделать не зависящей от q_1. Это связано с тем, что матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

нельзя представить в виде экспоненты никакой другой матрицы.

3) Собственные числа A лежат на единичном круге (условие эллиптичности) и не равны ± 1. В этом случае S можно привести к виду $\frac{\omega}{2}(p_2^2 + q_2^2)$.

Будем сначала рассматривать случаи 1) и 3). Для F имеем разложение

$$\lambda F = p_1 + p_1 a(q_1) + p_1^2 b(q_1) + S_2 + p_1 L_2 + R.$$

Без потери общности можно считать, что $\lambda = 1$. Пусть V – совокупность одночленов степени 2 от p_2, q_2, не содержащих p_1, из формального разложения скобки Пуассона $\{H, F\}$. Вычисления показывают, что

$$V = \frac{\partial S}{\partial q^2} + \{S, S_2\} = 0.$$

Следовательно, S_2, как функция от p_2, q_2, инвариантна относительно действия оператора A. В третьем случае, когда собственные числа не равны ± 1, S_2, как квадратичная функция, может быть лишь вида $S_2 = \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2)$. Из условия вырожденности γ получаем, что тогда $\omega_2 = \omega$ и, следовательно, резонансы совпадают.

В случае, когда собственные числа равны 1, разберем два подслучая:

1а) $\alpha \neq 0$; тогда $S_2 = \beta p_2^2$ и резонансы снова совпадают;

1б) $\alpha = 0$; тогда $S = 0$ и S_2 может быть любой вырожденной квадратичной формой, так как γ вырождена. Следовательно, резонансы совпадут и в этом случае.

Рассмотрим случай, когда собственные числа оператора A равны -1. Тогда можно перейти к двулистному накрытию и перейти к рассмотрению первого случая. Лемма доказана.

§ 3. Определение вырожденных окружностей общего вида и их неустранимость

Пусть S – критическая окружность системы $v = \operatorname{sgrad} H$ относительно интеграла F. Тогда S является траекторией системы $u = \operatorname{sgrad} F$. Именно для этой системы мы сделаем изоэнергетическую редукцию, выразив q_1 через p_1, q_2, p_2 и $\alpha = F$:

$$q_1 = L(q_2, p_2, T, \alpha), \qquad T = p_1.$$

Функция L 2π-периодична по новому времени T. Пусть $[\,,\,]$ – скобка Пуассона по q_2, p_2. Именно,

$$[L, H] = \frac{\partial L}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}.$$

Можно считать, что замкнутая траектория S лежит на нулевом уровне F. Мы получили гамильтонову систему, записанную в канонических координатах $p = p_2$ и $q = q_2$ со временем T. Величина α играет роль параметра. Мы получили однопараметрическое семейство гамильтоновых систем. Ниже появится еще один параметр – параметр деформации. Поскольку количество параметров для метода Биркгофа несущественно, обозначим через ν совокупный параметр.

При фиксированном параметре ν система определяет отображение Пуанкаре на двумерной площадке $\{T = 0\}$. При $\nu = 0$ это отображение имеет неподвижную точку $\{q = p = 0\}$. Следовательно, в этой точке корректно определен дифференциал этого отображения. Пусть λ_1, λ_2 – его собственные числа. Мы будем рассматривать случай, когда λ_i – корни степени n из единицы. В таком случае можно записать $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega)$, где $\omega = 2\pi k/n$.

I) Пусть $n \geqslant 3$. Обозначим $\tau = (p^2 + q^2)/2$. Канонической заменой координат (метод Биркгофа) гамильтониан L приводим к виду

$$L = \omega_1(\nu)\tau + \sum_{m=2}^{[n/2]} \omega_m(\nu)\tau^m + L_n(p, q, T) + (\text{члены степени } > n), \tag{3.1}$$

где $\omega_1(0) = k/n$; k, n взаимно просты, $k < n$, и $L_n(p, q, T)$ – однородный многочлен степени n от переменных P и Q таких, что $P + iQ = (p + iq)e^{-iTk/n}$. При этом многочлен L_n инвариантен относительно поворотов на угол $2\pi/n$ в плоскости

$\{T\text{–const}\}$ вокруг нуля. Разложим функцию H в формальный ряд Тейлора в точке $(0,0,0,0)$ по переменным p и q с коэффициентами, зависящими от T и α:

$$H = \sum_{m=0}^{\infty} H_m,$$

где H_m – однородный многочлен степени m от p и q. Члены этого ряда степени не меньше n инвариантны относительно поворота на угол $2\pi/n$.

Определение 3.1. Будем говорить, что *функция H приведена к нормальной форме порядка* $n \geqslant 3$, если совокупность членов ряда Тейлора степени не выше n инвариантна относительно поворота на угол $2\pi/n$ в плоскости $\langle pq\rangle$.

Исходная система $u = \operatorname{sgrad} F$ имела интеграл H. Следовательно, H останется интегралом и в новых координатах.

Теорема 3.1. *Если гамильтониан L приведен к форме* (3.1) *каноническими преобразованиями, то H в этих координатах будет в нормальной форме порядка n* $(n \geqslant 3)$.

Доказательство теоремы 3.1 приведено в конце § 6.

II) Случай $n = 2$. В случае резонанса $n = 2$ гамильтониан L можно привести к виду

$$L = \omega_1(\nu)\tau + L_2(P,Q,\alpha,\varepsilon) + L_4(P,Q,\alpha,\varepsilon) + (\text{члены степени } > 4), \qquad (3.2)$$

где $\omega_1(0) = 1/2$ и $(P+iQ) = (p+iq)\exp(-iT/2)$; L_2 и L_4 – многочлены степеней 2 и 4 от P и Q.

Случай $n = 2$ отличается от рассмотренных выше. Дело в том, что собственные числа λ_i равны -1 и, следовательно, совпадают. Дифференциал отображения Пуанкаре в общем случае можно привести лишь к жордановой форме

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому квадратичная форма в разложении L будет иметь добавок $L_2 = P^2$. Однако члены третьей степени можно убить методом Биркгофа.

Необходимо отметить, что форма (3.2) не является нормальной формой в полном смысле этого слова. Как уже было сказано, дифференциал отображения Пуанкаре в этом случае, вообще говоря, недиагонализируем. Общая теория нормальных форм для симплектических отображений с недиагонализируемой линейной частью была совсем недавно построена в [15]. В этой работе форма (3.2) называется *пренормальной формой* из-за того, что она может быть упрощена. Мы рассматриваем эту форму, так как нам технически проще привести L к этой форме.

Определение 3.2. При $n = 2$ будем говорить, что *функция H приведена к нормальной форме*, если совокупность членов степени не выше 4 по переменным p и q в ряду Тейлора инвариантна относительно поворота на угол π в плоскости $\langle pq \rangle$.

Это означает, что у H члены степени 1 и 3 равны нулю.

Теорема 3.2. *Если гамильтониан L приведен к виду* (3.2) *каноническими преобразованиями, то H в этих координатах приведена к нормальной форме.*

Доказательство теоремы 3.2 приведено в конце § 6.

III) В случае резонанса $n = 1$ не будем применять метод Биркгофа и сделаем по-другому. Рассмотрим Π^3 – трехмерную трансверсаль к окружности S. На Π^3 можно выбрать координаты p, q, $\alpha = F$, так как F, ограниченная на Π^3, не имеет особых точек. Теперь рассмотрим ограничение $h = H|_{\Pi^3}$.

Пусть S – вырожденная окружность системы $v = \operatorname{sgrad} H$ относительно интеграла F. Рассмотрим систему $u = \operatorname{sgrad} F$. Будем считать, что S лежит на нулевом уровне F. Как и выше, Π^3 – трехмерная трансверсаль к S. Обозначим $\Pi_c = \Pi^3 \cap \{F = \alpha = c\}$. Система $u = \operatorname{sgrad} F$ определяет отображение последования на Π_0 с неподвижной точкой. Пусть λ_1 и λ_2 – собственные числа его дифференциала в этой точке. Будем изучать случай, когда $|\lambda_j| = 1$.

Определение 3.3. Если λ_j – корни степени n из 1, то назовем *n резонансом* данной окружности S. Иначе скажем, что *окружность S нерезонансна*.

Разложим функцию $h(p, q, \alpha) = H(p, q, T = 0, \alpha)$ в формальный ряд на однородные многочлены от p и q с коэффициентами, зависящими от α:

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k. \tag{3.3}$$

Можно рассматривать такое же разложение функции H, и тогда коэффициенты будут зависеть еще и от T.

Пусть S имеет резонанс n. Если $n > 1$, то приводим систему $u = \operatorname{sgrad} F$ к нормальной форме, как это показано в начале этого параграфа. Тогда в силу теорем 3.1 и 3.2 H тоже будет иметь нормальную форму. Более точно, у нас имеются координаты (p, q, T, α) со следующими свойствами: $F = \alpha$ и первые s членов h из разложения (3.3) инвариантны относительно поворота на угол $2\pi/n$ в плоскости $\{T\text{–const}, \alpha\text{–const}\}$ (здесь s зависит от n: $s(1) = 3$, $s(2) = 4$, $s(k) = k$ при $k > 2$). Рассмотрим разложение Тейлора функции h по координатам p, q, α:

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} h'_k, \tag{3.4}$$

где h'_k – однородный многочлен от p, q и α степени k. Подчеркнем, что p, q, T, α – координаты, полученные в результате применения метода Биркгофа указанным способом.

Определение 3.4. Пусть $P_n(p,q)$ – однородный инвариантный многочлен степени n от переменных p, q из разложения (3.4). Скажем, что точка $(0,0,0)$ – *вырожденная точка общего вида функции* h, если:

1) при $n = 1$ матрица вторых производных не равна нулю и в координатах, в которых $h_{qq} = 0$, следующие члены в разложении (3.4) не вырождаются:

$$C_1 p^2, \qquad C_2 q^3, \qquad C_3 \alpha q, \qquad C_1, C_2, C_3 \neq 0;$$

2) при $n = 2$ матрица вторых производных не равна нулю и в координатах, в которых $h_{qq} = 0$, следующие члены в разложении (3.4) не вырождаются:

$$C_1 p^2, \qquad C_2 q^4, \qquad C_3 \alpha q^2, \qquad C_1, C_2, C_3 \neq 0;$$

3) при $n = 3$ коэффициенты при $\alpha(p^2+q^2)$, $P_3(p,q)$ не обнуляются;

4) при $n = 4$ коэффициенты при $\alpha(p^2+q^2)$, $P_4(p,q)$ не обнуляются, причем $P_4(p,q)$ не является полным квадратом многочлена степени 2;

5) при $n > 4$ коэффициенты при $(p^2+q^2)^2$, $\alpha(p^2+q^2)$, $P_n(p,q)$ не обнуляются, причем $P_n(p,q)$ не является функцией от (p^2+q^2).

Определение 3.5. Скажем, что S – *вырожденная окружность общего вида резонанса* n, если:

1) окружность S имеет резонанс n;

2) $h(p,q,\alpha)$ имеет вырожденную особую точку $(0,0,0)$ общего вида резонанса n.

Теорема 3.3. *Предположим, что гамильтониан H и дополнительный интеграл F зависят от параметра ε, так что скобка Пуассона $\{H,F\}$ равна нулю при всех значениях ε. Пусть S – вырожденная окружность резонанса n системы $v = \operatorname{sgrad} H_0$ относительно интеграла F_0. Тогда при достаточно малом ε вблизи S будет ровно одна вырожденная окружность S_ε системы с параметром ε, она будет общего вида и резонанса n. Более того, семейство S_ε гладкое.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n > 1$. Метод приведения к нормальной форме Биркгофа гладко зависит от ε. Условие того, что данная окружность вырожденная общего вида, означает, что определенные коэффициенты разложения h не удовлетворяют некоторому соотношению. Поэтому при малых $|\varepsilon|$ вырожденная окружность существует и является вырожденной окружностью общего вида. Гладкость семейства следует из гладкой зависимости метода нормализации.

В случае $n = 1$ условие того, что S – вырожденная окружность общего вида, выражается в терминах трансверсальности. Поэтому в этом случае теорема очевидна. Теорема доказана.

Фактически для случая $n = 1$ доказательство содержится в [7].

Резонансом вырожденной окружности мы назвали знаменатель частоты $\omega = 2\pi k/n$, где $\exp(\pm i\omega)$ – собственное число дифференциала отображения Пуанкаре. Поэтому наряду с n важной характеристикой является числитель k. Это число взаимно просто с n, и оно определено с точностью до прибавления n и с точностью до знака.

Рассмотрим вырожденные окружности резонанса 2. По определению следующие члены ряда (3.4) (в подходящих координатах) не равны нулю: C_1p^2, C_2q^4, $C_3\alpha q$. Будем различать два случая: а) $C_1C_2 > 0$; б) $C_1C_2 < 0$.

Можно легко заметить, что эти случаи различны с топологической точки зрения. Именно, при $\alpha = 0$ в случае а) функция $h(p, q, \alpha)$ имеет строгий минимум или максимум в начале координат, а в случае б) эта функция не имеет ни максимумов, ни минимумов.

Аналогично рассмотрим вырожденные окружности резонанса 4.

При $n = 4$ числитель k восстанавливается однозначно, так как все случаи эквивалентны. По определению вырожденных окружностей применительно к резонансу 4, в разложении (3.4) имеется инвариантный многочлен $P_4(p, q)$, не являющийся полным квадратом многочлена степени 2 и не равный нулю. Можно легко показать, что все инвариантные относительно поворота на угол $\pi/2$ однородные многочлены степени 4 имеют вид

$$A(p^2 + q^2)^2 + Bp^2q^2,$$

где A и B – произвольные действительные числа. Этот многочлен – полный квадрат тогда и только тогда, когда либо $A = 0$, либо $B = -4A$. Будем различать два случая:

а) $B \in (-4A, 0)$ при $A > 0$ и $B \in (0, -4A)$ при $A < 0$;

б) $B \notin [-4A, 0]$ при $A > 0$ и $B \notin [0, -4A]$ при $A < 0$.

Легко заметить, что эти случаи также топологически различны.

В зависимости от того, какой случай реализуется к резонансу, будем приписывать букву *а* или *б*. Все вырожденные окружности общего вида распадаются на множество типов, в каждом из которых содержатся окружности одинакового резонанса и с эквивалентным числом k. Окружности с резонансом 2 или 4 разделены на два типа: $2_а$, $2_б$ и $4_а$, $4_б$. Будем различать резонансы $2_а$ и $2_б$, а также $4_а$ и $4_б$. Перестройки линий уровня функции $h(p, q)$ при разных α показаны в табл. 1.

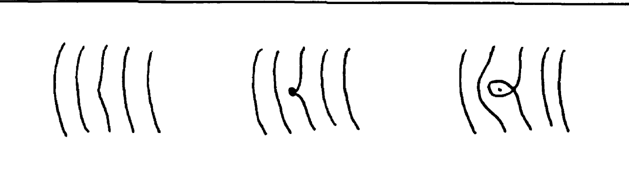
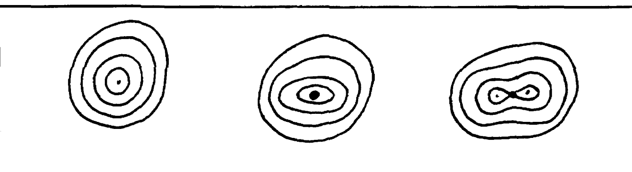
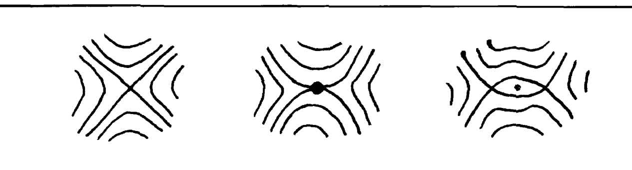
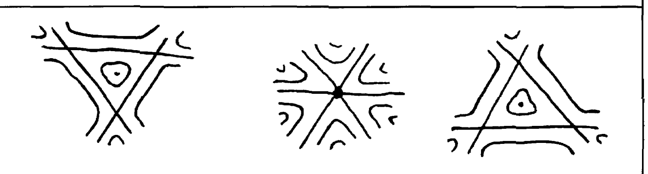
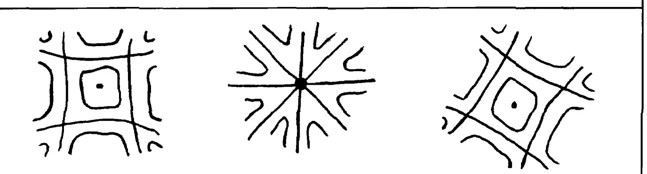
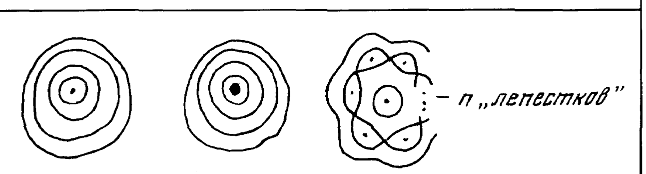
Определение 3.6. Две окружности принадлежат одному типу, если у них одинаковый резонанс n и эквивалентные числа k.

Следствие 3.1. *При малой деформации интегрируемой системы тип вырожденной окружности общего вида не меняется.*

Смысл этой классификации – разбиения на типы – таков, что интегрируемые системы в малой окрестности вырожденных окружностей одного типа топологически эквивалентны. Это выражено следующей теоремой.

Теорема 3.4. *Пусть даны две интегрируемые гамильтоновы системы в окрестностях вырожденных окружностей общего вида одного типа. Тогда*

Таблица 1

Резонанс	Перестройка линий уровня
$n = 1$	
$n = 2_а$	
$n = 2_б$	
$n = 3$	
$n = 4_а$	
$n = 4_б$ или $n > 4$	

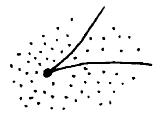
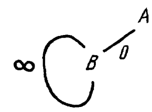
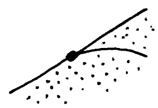
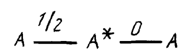
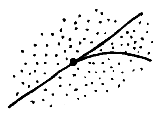
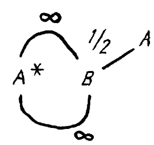
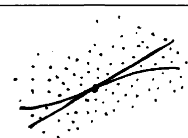
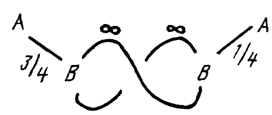
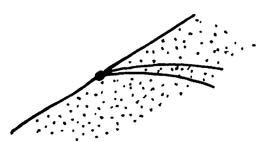
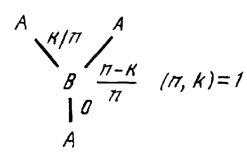
эти системы топологически эквивалентны в достаточно малых окрестностях этих окружностей. Более того, эта эквивалентность может быть выбрана изоэнергетической или изоинтегральной.

Доказательство этой теоремы дано в § 6.

Следствие 3.2. *При малой деформации интегрируемая система остается топологически эквивалентной, недеформированной в достаточно малой окрестности вырожденной окружности общего вида.*

Вопрос о том, когда эти системы глобально эквивалентны, изучается в следую-

Таблица 2

Резонанс	Бифуркационная диаграмма	Круговая слово-молекула
$n=1$		
$n=2_a$		
$n=2_{б}$		
$n=3$		
$n=4_a$		
$n=4_{б}$ или $n>4$		

щем параграфе.

Топология интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности вырожденной окружности определяется линиями уровня функции $h(p,q)$ при фиксированном значении α. В случае, когда рассматривается вырожденная окружность общего вида, поведение этих линий полностью восстанавливается по резонансу. В табл. 1 показаны перестройки линий уровня $h(p,q)$ при прохождении бифуркационного уровня α. Рассмотрим точку $z_0 \in \mathbb{R}^2$ – образ вырожденной окружности общего вида при отображении момента μ. Строение бифуркационной диаграммы в окрестности z_0 указано в табл. 2. В случаях $1, 2_б, 3, 4_a$ бифуркационная диаграмма имеет указанный вид при условии, что в прообразе z_0 нет других критических множеств. В остальных случаях это условие выполнено автоматически. Круговые слова-молекулы указаны в табл. 2. В случаях $1, 2_б, 3, 4_a$ эти инварианты посчитаны при указанном выше условии.

Следует отметить, что топологическая устойчивость вырожденных окружностей (общего вида) при резонансе $n = 1$ отмечалась в [7]. При $n = 1$ причина устойчивости не в гамильтоновом характере системы. Доказательства топологической устойчивости при других резонансах существенно используют каноничность уравнений.

Гипотеза. *Других топологически устойчивых типов вырожденных окружностей нет.*

Эта гипотеза не доказана. По теореме 1.1 если в малой окрестности вырожденной окружности есть периодический интеграл и эта окружность топологически устойчива при шевелениях пуассонова действия, то она имеет один из вышеуказанных типов. Таким образом, если иметь своей целью найти другие устойчивые типы, то следует искать их среди систем, не допускающих периодического интеграла. До сих пор такие системы вообще не встречались в аналитической механике. Правда, существует пример интегрируемой гамильтоновой системы (см. [6]), у которой нет периодического интеграла в малой окрестности некоторой замкнутой траектории.

Во введении уже говорилось о том, какие вырожденные окружности общего вида реализуются в известных случаях динамики твердого тела. Повторим, что очень часто встречается вырожденная окружность общего вида резонанса $n = 1$ (интегрируемые случаи Ковалевской, Жуковского, Сретенского). На бифуркационной диаграмме таким окружностям соответствует характерный клюв, поэтому их часто можно идентифицировать (см. [8], [12]). Вырожденные окружности общего вида резонанса 2 тоже встречаются, но реже, их можно увидеть в случае Ковалевской. У них тоже своя характерная бифуркационная диаграмма. Вырожденные окружности общего вида резонанса 3 и выше до сих пор пока не встречались. Почему так происходит, неизвестно.

Получить ответ на этот вопрос, очевидно, нельзя в терминах общей теории динамических систем, так как эта теория допускает существование вырожденных окружностей общего вида любого резонанса. По-видимому, это происходит от того, что осмысленные интегрируемые системы с вырожденными окружностями общего вида высоких резонансов имеют гораздо более сложную аналитическую запись и поэтому не найдены.

§ 4. Топологическая устойчивость в целом

Теперь нашей целью будет доказать, что если исходная система имеет только боттовские окружности, а также вырожденные окружности общего вида, то достаточно близкая интегрируемая система будет топологически эквивалентной исходной системе.

Напомним, что отображение момента $\mu\colon M^4 \to \mathbb{R}^2$ определяется равенством $\mu(x) = \big(H(x), F(x)\big)$, где $x \in M^4$.

Пусть a и b – два различных регулярных значения H. Положим $a < b$. Рассмотрим следующие условия на систему $v = \operatorname{sgrad} H$ и ее дополнительный интеграл F:

1) любое h из интервала $[a, b]$ – регулярное значение H;

2) $H^{-1}\big([a, b]\big)$ компактно;

3) в прообразе $H^{-1}\big([a, b]\big)$ все критические множества суть либо боттовские окружности, либо вырожденные окружности общего вида (в прообразах $H^{-1}(a)$ и $H^{-1}(b)$ все критические окружности боттовские);

4) в каждой связной компоненте прообраза $\mu^{-1}(p)$ не более одной критической окружности, где $p = (x, y)$ и $a \leqslant x \leqslant b$;

5) для h из интервала $[a, b]$ в $H^{-1}(h)$ содержится не более одной вырожденной окружности.

Теорема 4.1. *Пусть система $v = \operatorname{sgrad} H$ и ее дополнительный интеграл F зависят от параметра ε. Обозначим $M_\varepsilon = H_\varepsilon^{-1}\big([a, b]\big)$. Пусть система при $\varepsilon = 0$ удовлетворяет условиям* 1)–5). *Тогда при достаточно малом $|\varepsilon|$ система $(M_\varepsilon, H_\varepsilon, F_\varepsilon)$ изоэнергетически топологически эквивалентна (M_0, H_0, F_0).*

Доказательство. Из компактности M_0 следует, что в нем будет лишь конечное число вырожденных окружностей. Пусть $h_1, \dots, h_k$ – уровни H_0, на которых лежат вырожденные окружности. Можно считать, что

$$a < h_1 < h_2 < \dots < h_k < b.$$

В силу теоремы 3.3 при малом $|\varepsilon|$ система будет иметь столько же вырожденных критических окружностей. Они будут общего вида и находиться на разных уровнях гамильтониана H_ε. Обозначим эти уровни, аналогично, в порядке возрастания: $h_1^\varepsilon < h_2^\varepsilon < \dots < h_k^\varepsilon$. Пусть $l(x)$ – непрерывная монотонная функция такая, что $l(a) = a,\ l(b) = b$ и $l(h_j) = h_j^\varepsilon$. Системы на $H^{-1}(x)$ и $H_\varepsilon^{-1}\big(l(x)\big)$ топологически эквивалентны, если $x \neq h_j$ ни при каком j. По теореме 3.3 вырожденные окружности общего вида не меняют типа при малом $|\varepsilon|$. Поэтому системы на $H^{-1}(x)$ и $H_\varepsilon^{-1}\big(l(x)\big)$ будут топологически эквивалентны и при $x = h_j$. Очевидно, что гомеоморфизмы на изоэнергетических подмногообразиях можно сшить в единый гомеоморфизм. Теорема доказана.

Если не требуется того, чтобы гомеоморфизм переводил изоэнергетические подмногообразия в таковые, то от условия 5) можно освободиться. Точно таким же приемом доказывается аналогичная теорема.

Теорема 4.2. *Пусть система $v = \operatorname{sgrad} H$ и ее дополнительный интеграл F зависят от параметра ε. Обозначим $M_\varepsilon = H_\varepsilon^{-1}\big([a, b]\big)$. Пусть система при $\varepsilon = 0$ удовлетворяет условиям* 1)–4). *Тогда при достаточно малом $|\varepsilon|$ система $(M_\varepsilon, H_\varepsilon, F_\varepsilon)$ топологически эквивалентна (M_0, H_0, F_0).*

§ 5. О плотности систем с вырожденными окружностями общего вида

В § 3 были определены так называемые вырожденные окружности общего вида и была изучена топология системы в окрестности таких окружностей. Исходя из строения лиувиллева слоения, можно показать, что в окрестности вырожденной окружности общего вида существует периодический интеграл F системы $v = \operatorname{sgrad} H$. Цель данного параграфа – доказать теорему 1.2, которая утверждает, что если система обладает периодическим интегралом, то ее можно мало продеформировать так, что все вырожденные окружности будут общего вида.

Доказательству предпошлем несколько замечаний. Пусть F – периодический интеграл и Π^3 – трехмерная трансверсаль к замкнутой траектории системы $u = \operatorname{sgrad} F$. Рассмотрим отображение последования τ для этой системы на Π^3. Обозначим $f = F|_{\Pi^3}$ и $\Pi_\alpha = f^{-1}(\alpha)$. Пусть τ не тождественно. Тогда, как показано в [6], при каждом α существует одна неподвижная точка, все остальные точки имеют одинаковый период n, т.е. минимальное положительное целое число n такое, что $\tau^n(x) = x$. Кроме того, матрица дифференциала $d\tau$, вычисленная в неподвижной точке, имеет собственные числа – корни степени n из единицы. Отметим, что Π_α – симплектическое многообразие. Поэтому операторы $A_\alpha = d\tau|_{\Pi_\alpha}$, где дифференциал $d\tau$ вычислен в неподвижной точке, симплектические при всех α. Если τ – тождественное отображение, то $A_\alpha = E$. Легко проверить, что диффеоморфизм, заданный по формуле

$$g_\alpha(p,q) = \frac{1}{n}\bigl((x,y) + A_\alpha^{-1}\tau(x,y) + \dots + A_\alpha^{-n+1}\tau^{n-1}(x,y)\bigr), \tag{5.1}$$

сопрягает линейное отображение A_α и отображение τ. Этот диффеоморфизм, вообще говоря, не канонический относительно структуры $dp \wedge dq$.

Лемма 5.1. *Существуют канонические координаты, в которых диффеоморфизм τ – поворот на угол $2\pi k/n$.*

Доказательство. Рассмотрим канонические координаты p и q, в которых A_α – поворот на угол $2\pi k/n$. Положим

$$\psi = p^2 + q^2, \qquad \Psi = \sum_{m=1}^{n} \psi\bigl(\tau^m(p,q)\bigr).$$

Функция Ψ инвариантна относительно диффеоморфизма τ. Ясно, что существуют канонические координаты P и Q, в которых $\Psi(P,Q) = Y(P^2+Q^2)$, т.е. функция Ψ является функцией от P^2+Q^2. В этих координатах A_α – поворот на угол $2\pi k/n$, так как линейная часть τ сохраняет квадратичную часть Ψ. В этих координатах перейдем к новым координатам посредством диффеоморфизма g, определенного формулой (5.1). Диффеоморфизм g сохраняет функцию Ψ, так как A_α

и τ сохраняли эту функцию. В новых (неканонических) координатах диффеоморфизм τ – это поворот на угол $2\pi k/n$ вокруг начала координат. В полярных координатах симплектическая форма (мера площади) имеет вид

$$dp \wedge dq = \rho(r, \phi)\, dr \wedge d\phi.$$

Можно заметить, что по построению интеграл функции ρ по окружности $r = r_0$ равен $2\pi r_0$. То что полученные координаты не канонические, выражается тем, что плотность ρ неравномерно распределена по этой окружности. Ясно, что существует диффеоморфизм, который сохраняет функцию Ψ и распределяет равномерно плотность ρ. Посредством этого диффеоморфизма перейдем к новым, каноническим, координатам. В силу того, что диффеоморфизм τ симплектический, в новых координатах диффеоморфизм τ – это поворот на угол $2\pi k/n$. Лемма доказана.

Итак, в нужных канонических координатах отображение последования системы $u = \operatorname{sgrad} F$ записывается как поворот на угол $2\pi k/n$ в плоскости F–const.

Теперь, если применить к системе $u = \operatorname{sgrad} F$ изоэнергетическую редукцию, в полученных координатах функция F будет приведена к нормальной форме и, следовательно, H тоже будет в нормальной форме. Кроме того, функция H, ограниченная на Π^3, инвариантна относительно поворотов, и, наоборот, любую инвариантную функцию $k(p, q, \alpha)$ можно однозначно продолжить до функции K такой, что $\{K, F\} = 0$. Поэтому вопрос об изучении критических окружностей сводится к изучению особых точек функции $h(p, q, \alpha)$, инвариантной относительно поворотов на угол $2\pi/n$. Мы будем возмущать H в классе инвариантных функций.

Мы, как и раньше, будем считать, что h – однопараметрическое семейство гладких функций от двух переменных.

Рассмотрим разложение функции $h = H|_{\Pi^3}$ по степеням p и q:

$$h = \sum_m h_m,$$

где h_m – однородный многочлен степени m от p и q. Заметим, что члены, инвариантные относительно поворота на угол $2\pi/n$, – это в точности резонансные члены при T–const.

Мы хотим найти семейства общего положения, которые имеют неморсовские особенности. Это задача теории эквивариантных особенностей. Следующие утверждения решают эту проблему. Эти результаты не новые для этой теории, поэтому для них приводятся только наброски доказательств (см. [9]).

Лемма 5.2. *При $n = 1$ функцию $h(x, y, \alpha)$ можно возмутить сколь угодно мало так, чтобы у возмущенной функции h_ε все вырожденные точки были общего вида (резонанса 1).*

Доказательство. В пространстве 3-струй множество вырожденных точек необщего вида имеет коразмерность 4. Поэтому малым шевелением их можно устранить. Лемма доказана.

Пусть $n > 1$. Тогда отображение последования не тождественно и точки ($p = q = 0$) образуют ось поворота. Заметим, что у функции $h(x, y, \alpha)$ все вырожденные точки общего вида, если вырожденные точки, лежащие на оси $\{x = y = 0\}$, общего вида резонанса n, а вырожденные точки вне оси общего вида резонанса 1.

Лемма 5.3. *При $n > 1$ инвариантные функции, имеющие вырожденные точки только общего вида, всюду плотны в пространстве инвариантных функций.*

Доказательство. Ясно, что малым эквивариантным шевелением можно добиться того, чтобы все вырожденные точки на оси были общего вида. После этой деформации, вообще говоря, могут появиться вырожденные точки вне оси. Вырезая достаточно малую окрестность оси, факторизуя по действию группы поворотов на угол $2\pi s/n$ и применяя лемму 5.2, получаем утверждение леммы 5.3.

Пусть O – вырожденная окружность системы $v = \operatorname{sgrad} H$. Будем считать, что нам даны два открытых инвариантных множества в M^4, U_1 и U_2, причем $\operatorname{cl}(U_1) \subset U_2$, а также O лежит в U_1, $O \subset U_1$. Предположим, что в U_2 у рассматриваемой системы есть периодический интеграл. В таком случае из лемм 5.2 и 5.3 непосредственно следуют две теоремы.

Теорема 5.1. *Можно возмутить H сколь угодно мало внутри U_2 так, что*:

1) $\{F, H_\varepsilon\} = 0$;
2) *все вырожденные окружности в U_1 системы $v = \operatorname{sgrad} H_\varepsilon$ общего вида.*

Теорема 5.2. *Если у системы $v = \operatorname{sgrad} H$ на множестве $U_1 \setminus \operatorname{cl}(U_1)$ нет вырожденных окружностей, то можно сколь угодно мало возмутить H внутри U_2 так, что*:

1) $\{F, H_\varepsilon\} = 0$;
2) *все вырожденные окружности в U_2 системы $v = \operatorname{sgrad} H_\varepsilon$ общего вида.*

Теорема 1.1 следует непосредственно из теоремы 5.2.

§ 6. Доказательства теорем 3.1, 3.2 и 3.4

Доказательство теоремы 3.1. H – первый интеграл системы с гамильтонианом L, поэтому

$$0 = \frac{dH}{dT} = \frac{\partial H}{\partial T} + [H, L] = 0,$$

где $[H, L] = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial L}{\partial p}$, $H = H(p, q, T, \nu)$. Разложим H в ряд по однородным многочленам от p и q с коэффициентами, зависящими от T и α:

$$H = \sum H_m,$$

где H_m – однородный многочлен от p и q степени m. Скобка Пуассона сохраняет однородность по p и q. Пусть H_m – член минимальной степени m, не инвариантный относительно поворота, и пусть $m < n$. Разложим $[H, L]$ по степеням:

$$[H, L] = \sum K_m.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial T} H = [L, H]$, то $\frac{\partial}{\partial T} H_m = K_m$. Вычислим K_m:

$$K_m = \sum_{\beta+\gamma=m+2} [L_\beta, H_\gamma].$$

В этой сумме если $\gamma < m$, то $H_\gamma = c\tau^{\gamma/2}$, но и $L_\beta = c_2\tau^{\beta/2}$. Тогда $[L_\beta, H_\gamma] = 0$. Останется ненулевым лишь один член $[L_2, H_m]$. Поскольку $L_2 = \omega_1(\nu)\tau$, то уравнение на H_m имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial T} H_m = \big[\omega_1(\nu)\tau, H_m\big].$$

Его решение $H_m = H(\xi, \eta)$ – полином от ξ и η, где $\xi + i\eta = (p + iq)\exp\big(-iT\omega_1(\nu)\big)$, H_m – также полином от p и q с коэффициентами, зависящими от T. Однако мы ищем только те решения, которые, будучи записанными в координатах p, q, T, периодичны по T с периодом 2π.

Рассмотрим в координатах (ξ, η, T) преобразование $T \to T + 2\pi$. В координатах p и q это – поворот на угол $2\pi\omega_1(\nu)$. Поэтому H_m инвариантна относительно поворота на угол $2\pi\omega_1(\nu)$. При малых значениях параметра ν коэффициент ω_1 мало отличается от s/n. Если ω_1 рационально, то его знаменатель не меньше n. Поэтому $H_m = C\tau^{m/2}$. Если ω_1 иррационально, то $H_m = C\tau^{m/2}$. Таким образом, мы показали, что при $m < n$

$$H_m = c(\nu)(p^2 + q^2)^{m/2}.$$

Нам осталось показать, что H_n – тоже инвариантный многочлен. Мы имеем аналогичное уравнение для H_n:

$$\frac{\partial}{\partial T} H_n = \sum_{\gamma+\beta=n+2} [L_\gamma, H_\beta].$$

Но при $\gamma \neq n$ и $\beta \neq n$ имеем $L_\gamma = \omega_{\gamma/2}(\nu)\tau^{\gamma/2}$ и $H_\beta = C(\nu)\tau^{\beta/2}$, и тогда $[L_\gamma, H_\beta] = 0$. Останутся только два члена:

$$\frac{\partial}{\partial T} H_n = [L_n, H_2] + [L_2, H_n] = \big[L_n, C(\nu)\tau\big] + \big[\omega_1(\nu)\tau, H_n\big].$$

Это уравнение можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial T} H_n = \left[\omega_1(\nu)\tau, H_n - \frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right]. \tag{6.1}$$

К левой части прибавим и вычтем $\frac{\partial}{\partial T} L_n C(\nu)/\omega_1(\nu)$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(H_n - \frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right) + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right) = \left[\omega_1(\nu)\tau, H_n - \frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right]. \tag{6.2}$$

Но L_n удовлетворяет уравнению $\frac{\partial}{\partial T} L_n = [\omega_1(0)\tau, L_n]$; это видно из явного вида L_n. Предположим сначала, что $\omega_1(\nu) \neq \omega_1(0)$. Найдем a и b из системы

$$a + b = 1,$$
$$a + \frac{\omega_1(0)}{\omega_1(\nu)} b = 0.$$

Эта система имеет решение в силу предположения о том, что $\omega_1(\nu) \neq \omega_1(0)$. В этом случае определитель матрицы не равен нулю.

Распишем левую часть (6.2):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial T}\left(H_n - \frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right) + (a+b)\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right)\\ &\quad = \frac{\partial}{\partial T}\left(H_n - (1-a)\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right) + b\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right).\end{aligned}$$

Последний член перенесем в правую часть. В силу выбора a и b

$$-b\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right) = -b\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)}\frac{\partial}{\partial T} L_n = a\frac{C(\nu)}{\omega_1(0)}\frac{\partial}{\partial T} L_n = \left[\omega_1(\nu)\tau, a\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n\right].$$

Обозначим

$$\widetilde{H}_n = H_n - (1-a)\frac{C(\nu)}{\omega_1(\nu)} L_n.$$

Для многочлена $\widetilde{H}_n$ мы имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial T}\widetilde{H}_n = [\omega_1(\nu)\tau, \widetilde{H}_n].$$

Те же рассуждения, что и выше, показывают, что $\widetilde{H}_n$ – инвариантный многочлен. Поскольку многочлен L_n инвариантен, то и H_n будет инвариантным многочленом.

Пусть теперь $\omega_1(\nu) = \omega_1(0) = s/n$. В координатах P и Q таких, что $P + iQ = (p + iq)\exp(-iTs/n)$, уравнение (6.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial T} H_n = [L_n, C\tau],$$

причем правая часть не зависит от T. Но в новых координатах H_n должна быть хотя бы $2\pi n$-периодична по T. Поэтому правая часть равна нулю. Это значит, что $H_n = H_n(P, Q)$ не зависит явно от времени T. Тогда в координатах p, q, T многочлен H_n будет инвариантным. Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Поскольку H – интеграл, то

$$\frac{\partial H}{\partial T} + [H, L] = 0. \tag{6.3}$$

Как и раньше, $H = \sum H_m$ – разложение по степеням p и q. Нам надо показать, что $H_1 \equiv 0$ и $H_3 \equiv 0$, $[L, H] = \sum K_\beta$. Тогда из (6.3) имеем для H_1

$$\frac{\partial}{\partial T} H_1 = K_1 = \big[\omega_1(\nu)\tau + L_2, H_1\big]. \tag{6.4}$$

В координатах P и Q, где $(P + iQ) = (p + iq)\exp(-iT/2)$, (6.4) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial T} H_1 = \big[\big(\omega_1(\nu) - 1/2\big)\tau + L_2, H_1\big]. \tag{6.5}$$

Мы ищем H_1 – однородный многочлен степени 1; $H_1 = aP + bQ$, где a и b могут зависеть от T (а также от параметров ν). Уравнение (6.5) – линейная система для a и b. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot a &= 2b(1+\theta), \\ \dot b &= -2\theta a, \end{aligned}$$

где $\theta = \big(\omega_1(\nu) - 1/2\big)$. Собственные числа этой системы равны $\pm\sqrt{4\theta(1+\theta)}$. Они малы при малых $|\nu|$, поскольку θ – гладкая функция от ν и $\theta(0) = 0$. Но мы ищем решения a и b, которые хотя бы 4π-периодичны по T. Поэтому у этой системы есть только одно удовлетворительное для нас решение: $a = 0$ и $b = 0$. Отсюда $H_1 \equiv 0$.

Покажем, что $H_3 \equiv 0$. Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial T} H_3 = [\theta\tau + L_2, H_3], \qquad H_3 = a_1P^3 + a_2P^2Q + a_3PQ^2 + a_4Q^3. \tag{6.7}$$

Из (6.7) имеем систему

$$\begin{aligned} \dot a_1 &= 2a_2(1+\theta), \\ \dot a_2 &= -6\theta a_1 + 4a_3(1+\theta), \\ \dot a_3 &= -4\theta a_2 + 6a_4(1+\theta), \\ \dot a_4 &= -2\theta a_3. \end{aligned}$$

При $\theta = 0$ характеристические числа соответствующей матрицы равны нулю. Поэтому при малых θ они малы по модулю. Следовательно, у такой линейной системы имеется только одно 4π-периодическое решение – нулевое. Теорема 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.4 состоит из вычисления топологии лиувиллева слоения в окрестности вырожденной окружности общего вида. Ясно, что эта топология определяется линиями уровня функции $h(p,q)$, зависящей от параметра α. Рассмотрим случай $n>4$. Мы имеем следующее разложение $h(p,q,\alpha)$:

$$\begin{aligned} h(x,y,\alpha) &= \alpha C_1(\alpha)(x^2+y^2)+C_2(\alpha)(x^2+y^2)^2 \\ &\quad + \sum_{s=3}^{[n/2]} C_s(\alpha)(x^2+y^2)^s + P_n(x,y,\alpha)+f(x,y,\alpha), \end{aligned} \tag{6.8}$$

где $C_k(\alpha)$ – гладкие функции, $P_n(x,y,\alpha)$ – инвариантный однородный полином от x и y степени n, зависящий от α, и $P_n(x,y,0)\neq C(x^2+y^2)^{n/2}$. Гладкая функция $f(x,y,\alpha)$ – остаточный член. Из условия того, что $(0,0,0)$ – вырожденная точка общего вида, следует, что $C_1(0)\neq 0$ и $C_2(0)\neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $C_2(0)>0$, а $C_1(0)<0$. Умножая функцию на -1 и меняя знак параметра α, всегда этого можно добиться.

Пусть (r,ϕ,α) – цилиндрическая система координат. В ней

$$P_n = C(\alpha)r^n\cos\bigl(n\phi+\theta(\alpha)\bigr)+\{C'r^n\},$$

где член в фигурных скобках появляется, если n четно. Так можно представить инвариантный многочлен степени n (см. [14, п. 013]).

В цилиндрических координатах (6.8) примет вид

$$\begin{aligned} h(r,\phi,\alpha) &= \alpha C_1(\alpha)r^2+C_2(\alpha)r^4 \\ &\quad + \sum_{m=3}^{[n/2]} C_m(\alpha)r^{2m}+C(\alpha)r^n\cos\bigl(n\phi+\theta(\alpha)\bigr)+\{C'r^n\}+f(r,\phi,\alpha). \end{aligned} \tag{6.9}$$

При $\alpha\leqslant 0$ коэффициенты при r^2 и r^4 неотрицательны. Применим к ним оператор Лапласа Δ:

$$\Delta\bigl(\alpha C_1(\alpha)r^2+C_2(\alpha)r^4\bigr)=2\alpha C_1(\alpha)+12C_2(\alpha)r^2\geqslant 0, \tag{6.10}$$

причем равенство достигается только в одной точке $\{\alpha=0; r=0\}$.

Следовательно, при малых $|\alpha|$, $\alpha\leqslant 0$, и $|r|$ сама функция строго выпукла вниз и достигает в точках $\{r=0\}$ строгого минимума при фиксированном $\alpha\leqslant 0$, и линии уровня h представляют собой замкнутые кривые, обходящие вокруг точек $\{r=0\}$.

Опять рассмотрим функцию $h(x,y,0)$ и ее линии уровня. Возьмем любую из них (кроме тривиальной, состоящей из одной точки). Обозначим ее Γ. Кривая Γ замкнута. Пусть $U(\Gamma)$ – малая окрестность Γ, не содержащая особых точек h. Тогда при малых $\alpha>0$ $U(\Gamma)$ содержит замкнутую линию Γ_α уровня $h(x,y,\alpha)$. Кривая Γ_α ограничивает линии уровня, лежащие внутри нее. Исследуем особые точки $h(x, y, \alpha)$ при малых r и $\alpha > 0$. В этих точках $\frac{\partial}{\partial r} h = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \phi} h = 0$. Из (6.9) имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} h = 2\alpha C_1(\alpha) r + 4C_2(\alpha) r^3 + (\text{члены степени} \geqslant 4) = 0;$$

так как $r > 0$ (решение $r = 0$ нам уже известно), то можно сократить на r:

$$2\alpha C_1(\alpha) + 4C_2(\alpha) r^2 + (\text{члены степени} \geqslant 3) = 0. \tag{6.11}$$

Следовательно, при малых r корень существует и единствен (при фиксированном ϕ). Кроме того, легко видеть, что

$$\frac{\alpha(r)}{r^2} \to -\frac{2C_2(0)}{C_1(0)} > 0 \quad \text{при} \quad r \to 0+,$$

где $\alpha(r)$ – корень уравнения (6.11). Чтобы это увидеть, надо равенство (6.11) разделить на r^2. Точки, где производная $\frac{\partial}{\partial r} h$ равна нулю, образуют замкнутую кривую $\Omega(\alpha)$, обходящую вокруг начала координат. Также легко оценить, что в полярных координатах чем меньше α, тем меньше угол между этой кривой и окружностью $\{r\text{–const}\}$. Кроме того, в этих точках $\frac{\partial^2}{\partial r^2} h > 0$.

Исследуем точки, где $\frac{\partial}{\partial \phi} h = 0$. Из (6.9) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \phi} h = -C(\alpha) n r^n \sin\bigl(n\phi + \theta(\alpha)\bigr) + \frac{\partial}{\partial \phi} f. \tag{6.12}$$

В f входят члены степени $n + 1$ и выше. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \phi} h = C(\alpha) n r^n \sin\bigl(n\phi + \theta(\alpha)\bigr) + o(r^n),$$

отсюда

$$n\phi + \theta(\alpha) = \arcsin\left(\frac{o(r^n)}{nC(\alpha)}\right).$$

Это равенство определяет n кривых, проходящих через 0. Также можно оценить, что в полярных координатах чем меньше α, тем меньше касательные к этим кривым отклоняются от $\{\phi\text{–const}\}$. На этих кривых знаки $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} h$ чередуются. Особые точки функции h – это в точности точки пересечения этих кривых с кривой $\Omega(\alpha)$, на которой $\frac{\partial}{\partial r} h = 0$ (а также точка $r = 0$). Эти точки невырождены, и их сигнатуры чередуются при обходе по замкнутой кривой. Заметим, что седловая точка функции h – это точка пересечения одной седловой окружности и площадки $\{T\text{–const}, \alpha\text{–const}\}$. Поэтому значения h в седловых точках при фиксированном α совпадают. Аналогично, значения h в точках минимума совпадают.

Теперь нам осталось понять, как ведут себя сепаратрисы седловых точек.

Сепаратриса, выходящая из одной седловой точки, должна прийти в следующую ближайшую по кривой $\Omega(\alpha)$ седловую точку, иначе не избежать их пересечений. Здесь был использован тот факт, что значения функции h в седловых точках совпадают.

Пусть имеются две вырожденные окружности общего вида и одинакового резонанса. Им соответствуют две системы координат и две функции $h(p,q,\alpha)$ и $h'(p',q',\alpha')$. Из предыдущих рассуждений понятно, что существует гомеоморфизм g, заданный в окрестности нуля $(0,0,0)$ в координатном пространстве (p,q,α), на окрестность нуля $(0,0,0)$ в координатном пространстве (p',q',α') такой, что:

1) g переводит плоскости $\{\alpha\text{–const}\}$ в плоскости $\{\alpha'\text{–const}\}$;

2) g переводит линии уровня функции $h(p,q)$ в линии уровня функции $h'(p',q')$.

Гомеоморфизм g определен на трансверсали к окружности, заданной равенством $\{T=0\}$. По определению $h=(p,q,\alpha)=H(p,q,\alpha,T=0)$. Для того чтобы можно было продолжить гомеоморфизм g на окрестность окружности, необходимо и достаточно, чтобы седловые окружности наматывались на срединную окружность с одинаковым числом вращения. Это число вращения – пара чисел (k,n). Отсюда следует, что когда они совпадают, тогда системы топологически эквивалентны.

Точно так же исследуются случаи при $n<5$.

Заметим, что мы фактически построили изоинтегральную топологическую эквивалентность, так как отображение g переводило многообразия $\{\alpha\text{–const}\}$ в $\{\alpha'\text{–const}\}$, а координата α совпадает по определению с интегралом F. Чтобы показать, что существует еще и изоэнергетическая эквивалентность, достаточно увидеть, что если разложить функцию F по переменным p, q, T, H, то это разложение будет иметь тот же самый вид, что и разложение H по переменным $p,q,T,\alpha=F$. Положим λ таким, что $dF=\lambda\,dH$.

Рассмотрим случай резонанса $n=1$. Тогда при T – const

$$H=\alpha/\lambda+C_1p^2+C_2q^3+\dots+\alpha(C_3q+\dots)+\dots\,,$$

где многоточием обозначены остальные члены в разложении. Отсюда легко получить, что

$$F=\alpha=\lambda H-C_1p^2-C_2q^3-\lambda H(C_3q+\dots)-\dots$$

Аналогично, в случае резонанса $n=2$ имеем

$$H=\alpha/\lambda+C_1p^2+C_2q^4+\dots+\alpha(C_3q^2+\dots)+\dots\,,$$
$$F=\alpha=\lambda H-C_1p^2-C_2q^4-\lambda H(C_3q^2+\dots)-\dots$$

В случае резонанса $n=3$:

$$H=\alpha/\lambda+P_3(p,q)+\dots+\alpha\big(C(p^2+q^2)+\dots\big)+\dots\,,$$
$$F=\alpha=\lambda H-P_3(p,q)+\dots-\lambda H\big(C(p^2+q^2)+\dots\big)-\dots$$

В случае резонанса $n=4$:

$$H=\alpha/\lambda+P_4(p,q)+\alpha\big(C(p^2+q^2)+\dots\big)+\dots\,,$$
$$F=\lambda H-P_4(p,q)-\lambda H\big(C(p^2+q^2)+\dots\big)-\dots$$

В случае резонанса $n > 4$:

$$H = \alpha/\lambda + (p^2+q^2)^2 + \dots + P_n(p,q) + \alpha\bigl(C(p^2+q^2) + \dots\bigr) + \dots\,,$$
$$F = \lambda H - (p^2+q^2)^2 - \dots - P_n(p,q) - \lambda H\bigl(C(p^2+q^2) + \dots\bigr) - \dots$$

Видно, что разложение F по p, q, H имеет тот же вид, что и разложение H по p, q, $F = \alpha$ (при T–const). Повторив все рассуждения применительно к разложению функции F по координатам p, q, T и H, мы построим изоэнергетическую эквивалентность. Теорема 3.4 доказана.

Список литературы

1. *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Фоменко А. Т.* Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР. 1986. Т. 287. №5. С. 1071–1075.
3. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 49–77.
4. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
6. *Калашников В. В.* О типичности боттовских интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 1994. Т. 185. №1. С. 107–120.
7. *Лерман Л. М., Уманский Я. Л.* Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек // Матем. сб. 1992. Т. 183. №12. С. 141–176; // Матем. сб. 1993. Т. 184. №4. С. 105–138.
8. *Bolsinov A. V.* Methods of Calculation of the Fomenko–Zieshang Invariant // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 147–183.
9. *Golubitsky M., Schaeffer D.* Singularities and group in bifurcation theory. V. 1 // Appl. Math. Sci. V. 51. New York e.a.: Springer, 1985.
10. *Нгуен Т. З.* О свойстве общего положения простых боттовских интегралов // УМН. 1990. Т. 45. №4. С. 161–162.
11. *Ito H.* Acation-angle coordinates at singularities for analytic integrable systems // Math. Z. 1991. V. 206. P. 363–407.
12. *Oshemkov A. A.* Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations // Adv. in Sov. Math. 1991. V. 6. P. 67–146.
13. *Орел О. Е.* Топологический анализ окрестности вырожденной одномерной орбиты пуассоновского действия $\mathbb{R}^2$ на симплектическом многообразии M^4 // УМН. 1993. Т. 48. №6. С. 165–166.
14. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фунд. направления. Т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 137–309.
15. *Bridges T., Cushman R.* Unipotent normal forms for symplectic maps // Physica. 1993. V. 65. P. 211–241.
16. *Kalashnikov V.* A class of Generic Integrable Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom. Preprint № 907. University of Utrecht, 1995.

E-mail: kalash@rosno.ru

Поступило в редакцию
26.VIII.1994