Математические заметки

том 74 выпуск 5 ноябрь 2003

УДК 514.77+519.711.72+517.982.22

ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫЕ СЕТИ В N-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. П. Ильютко

В настоящей статье мы дадим полную классификацию локально минимальных сетей в нормированных пространствах $(\mathbb{R}^2, \rho)$, где единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x) = 1\}$ для нормы ρ совпадает с правильным m-угольником, $m = 2n$, вписанным в евклидову единичную окружность S^1.

Библиография: 9 названий.

1. Введение и постановка задачи. Настоящая работа посвящена описанию локальной структуры линейных кратчайших сетей в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, где единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \rho(x) = 1\}$ для нормы ρ совпадает с правильным m-угольником, $m = 2n$, вписанным в евклидову единичную окружность S^1 так, что пара его вершин лежит на оси абсцисс.

С точки зрения римановой геометрии локально минимальные сети являются естественным обобщением обычных геодезических. Напомним, что геодезическая, соединяющая пару фиксированных точек риманова многообразия, обладает следующим определяющим свойством: каждый ее фрагмент между достаточно близкими точками A и B является кратчайшей кривой среди всех кривых, соединяющих A и B. Предположим, что фиксировано не две точки риманова многообразия W, а некоторое конечное его подмножество M, состоящее из большего числа точек. Чтобы обобщить на этот случай понятие геодезических, естественно перейти от кривых к рассмотрению связных одномерных континуумов – *сетей*. Сеть, затягивающая множество $M \subset W$, называется *абсолютно минимальной*, если она имеет наименьшую возможную длину, и *локально минимальной*, если каждый достаточно малый ее фрагмент имеет наименьшую возможную длину, т.е. является абсолютно минимальной сетью. В этом смысле естественно говорить о локально минимальных сетях как о "разветвленных геодезических".

Понятие локально минимальной сети впервые неявным образом появилось при изучении следующей классической задачи, известной в литературе как проблема Штейнера в случае евклидовой длины: *среди всех сетей (связных одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество M точек плоскости, найти сеть наименьшей длины.*

При подготовке данной работы автор пользовался частичной поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 01-01-00583 и 01-15-99268, и Euler Program.

Эта задача была названа "проблемой Штейнера" в замечательной книге Ричарда Куранта и Герберта Е. Роббинса "*Что такое математика?*" в честь Якоба Штейнера (Jacob Steiner, 1796–1863), швейцарского математика, профессора Берлинского университета. Именно после появления этой очень популярной книги интерес к абсолютно минимальным сетям разгорелся с новой силой, и терминология, предложенная Курантом и Роббинсом, стала общепринятой.

Исторический обзор, посвященный проблеме Штейнера, см. в [1]–[4].

Отметим, что проблемой Штейнера занимались многие известные математики, такие как Винтер, Гилберт, Гильдебрандт, Грехем, Гэри, Джонсон, Ду, Кокейн, Мантуров, Мелзак, Морган, Поллак, Рубинштейн, Смит, Томас, Фоменко, Ханан, Хванг, Цислик и другие. Одна из причин этого неослабевающего интереса специалистов к минимальным сетям состоит в том, что у проблемы Штейнера имеется много различных интерпретаций и приложений. Например, заданное конечное множество M можно интерпретировать как набор конечных (терминальных) пунктов. Если, например, терминальные пункты – города, которые требуется соединить сетью дорог, то в этом случае минимальная сеть – это самая дешевая транспортная система, обеспечивающая коммуникации между данными конечными пунктами. Здесь естественно предполагается, что стоимость коммуникаций пропорциональна их длине.

Первые работы, посвященные изучению кратчайших сетей в смысле нормированной длины, появились в 60-е годы (см. [5]) в связи с бурным развитием электроники и робототехники. Интерес возник в связи с тем, что проводники на печатных платах имеют, как правило, вид ломаных линий, составленных из горизонтальных и вертикальных отрезков. По-видимому, первое систематическое исследование кратчайших сетей в смысле манхетенской длины (так называемых *кратчайших прямоугольных деревьев*) было предпринято в 1966 году Ханном [6], который описал несколько важных общих геометрических свойств таких сетей.

Спустя 10 лет Хванг [7] описал возможную структуру кратчайших прямоугольных деревьев в предположении, что данное множество затягивается хотя бы одним *невырожденным* кратчайшим деревом Γ_0. Последнее означает, что степень всех граничных вершин в дереве Γ_0 равна 1. Однако эффективный алгоритм, строящий кратчайшее прямоугольное дерево, найти не удалось. Объяснение этому было дано в 1977 году Гэри и Джонсоном [8], которые показали, что задача поиска кратчайшего прямоугольного дерева является NP-полной, т.е. скорее всего не существует полиномиального алгоритма решения этой задачи. Этот факт делает изучение ограничений на структуру кратчайших сетей еще более актуальной.

В настоящей работе получено полное описание локальной структуры кратчайших сетей в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, где единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x) = 1\}$ для нормы ρ совпадает с правильным m-угольником, $m = 2n$, вписанным в евклидову единичную окружность S^1 так, что пара его вершин лежит на оси абсцисс.

Введем некоторые понятия.

Определение. *Линейной сетью* называется сеть в $\mathbb{R}^2$, все ребра которой – прямолинейные отрезки (возможно вырожденные). Если все ребра не вырожденные, то сеть называется *вложенной*.

Определение. Сеть, затягивающая некоторое множество, называется *кратчай-*

шей, если ее длина не превосходит длины любой сети, затягивающей данное множество.

Определение. Сеть называется *локально минимальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является кратчайшим.

Пронумеруем все вершины m-угольника Σ против часовой стрелки, начиная с нуля, где вершина с номером i имеет координаты $(\cos(\pi i/n), \sin(\pi i/n))$, и обозначим эту вершину через P_i. Тем самым для каждой стороны m-угольника Σ заданы начало и конец этой стороны.

Рассмотрим ребро γ сети Γ. В теореме о локальной структуре изучаемых сетей положение ребер будет определяться неоднозначно. Поэтому для удобства формулирования теоремы мы будем характеризовать положения ребер следующими пятью типами. Будем говорить, что *ребро γ сети имеет точечный тип*, если направление этого ребра может приходить только в вершину m-угольника Σ. Будем писать $\mathrm{type}_e(\gamma) = *$, и для данного ребра обозначим через $\chi(\gamma)$ вершину из Σ, соответствующую направлению ребра γ. Будем говорить, что *ребро γ сети имеет неточечный тип*, если направление этого ребра может лежать на стороне m-угольника Σ, причем граничные вершины стороны могут быть включены, а могут и нет. Будем писать $\mathrm{type}_e(\gamma) = []$, $()$, $[)$ и $(]$ в зависимости от того включена граничная вершина стороны (соответствует "[" или "]") или нет (соответствует "(" или ")"), и для этих ребер определим $\chi(\gamma)$ как сторону m-угольника Σ, содержащую направление этого ребра.

Для любых подмножеств A и B из m-угольника Σ обозначим через $\alpha(A, B)$ точную нижнюю грань углов между радиус-векторами точек $x \in A$ и $y \in B$. Пусть γ_1 и γ_2 – произвольные ребра сети Γ. Будем говорить, что *пара (γ_1, γ_2) имеет погрешность k*, и будем писать $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = k$, если $\alpha\big(\chi(\gamma_1), \chi(\gamma_2)\big) = 2\pi/3 - k\pi/3n$.

Введем понятие *типа вершины x*, и обозначим его через $\mathrm{type}_v(x)$. Пусть вершина x сети Γ имеет степень l, и $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ – выходящие из этой вершины ребра, направления которых являются последовательными при обходе начала координат в положительном направлении от оси абсцисс. Положим $\mathrm{type}_v(x) = \big(\mathrm{type}_e(\gamma_1), \dots, \mathrm{type}_e(\gamma_l); \mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2), \mathrm{fall}(\gamma_2, \gamma_3), \dots, \mathrm{fall}(\gamma_{l-1}, \gamma_l)\big)$.

Основная теорема. *Вложенная линейная сеть Γ с некоторой границей в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$ является локально минимальной, если и только если вершины сети Γ имеют степень, которая не превосходит* 6, *и следующие типы* (*с точностью до поворота*):

1) *если степень вершины x сети Γ равна* 1, *то эта вершина граничная и* $\mathrm{type}_v(x) = \{[]\}$;
2) *если степень вершины x сети Γ равна* 2, *то*
   (a) *для внутренней вершины* $\mathrm{type}_v(x) = \{[], []; 3-n\}$;
   (b) *для граничной вершины при* $2n \equiv k \pmod 3$, $k = 1, 2, 3$, *имеем* $\mathrm{type}_v(x) = \{[], []; l\}$, *причем* $3 - n \leqslant l \leqslant k$;
3) *если степень вершины x сети Γ равна* 3, *то*
   (a) *при* $2n \equiv 0 \pmod 3$ *имеем* $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], []; 3, 3\}$;
   (b) *при* $2n \equiv k \pmod 3$, $k = 1, 2$ *имеем* $\mathrm{type}_v(x) = \{*, [], *; k, k\}$;
   (c) *если вершина граничная и* $2n \equiv 0 \pmod 3$, *то* $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], *; 0, 3\}$;
   (d) *если вершина граничная и* $2n \equiv 2 \pmod 3$, *то* $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], *; 2, 2\}$;
4) *если степень вершины x сети Γ равна* 4, *то* $m = 4, 6, 8$ *или* 12, *и*

(a) *при* $m = 4$, 8 *или* 12 *имеем* $\mathrm{type}_v(x) = \{*, *, *, *; m/4, m/4, m/4\}$;
(b) *при* $m = 6$ *имеем* $\mathrm{type}_v(x) = \{*, [], *, []; 3, 3, 3\}$;
(c) *если вершина граничная и* $m = 6$, *то* $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], *, *; 3, 3, 3\}$;

5) *если степень вершины* x *сети* Γ *равна* 5 *или* 6, *то эта вершина – граничная,* $m = 6$, *и*
(a) *если степень вершины равна* 5, *то* $\mathrm{type}_v(x) = \{[], *, *, *, *; 3, 3, 3, 3\}$;
(b) *если степень вершины равна* 6, *то* $\mathrm{type}_v(x) = \{*, *, *, *, *, *; 3, 3, 3, 3, 3\}$.

Автор благодарен профессору А. О. Иванову и профессору А. А. Тужилину за постоянное внимание к работе.

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые важные определения, которые нам понадобятся в дальнейших рассуждениях.

Определение. *Топологическим графом* G называется топологическое пространство, полученное из конечной совокупности отрезков $\{I_\alpha\}$ некоторой склейкой по их концам. Пусть $\pi\colon \sqcup_\alpha I_\alpha \to G$ – каноническая проекция. Образы внутренностей отрезков I_α при отображении π называются *ребрами* графа G, а π-образы концевых точек отрезков I_α – *вершинами*. Граф G *связен*, если он связен как топологическое пространство.

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин. Такой граф G будем называть *графом с границей* $\partial G = B$. Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины – *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Пусть G – произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой), и $P \in G$ – некоторая его точка. *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ *точки* P графа G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G, отличных от P, если P – вершина. Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами – внутренности отрезков в U, соединяющих эти точки. Полученную звезду обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке* P. Определим *каноническую границу* ∂G_U *локального графа* G_U, включив в нее все вершины из ∂U, а также вершину P, если P – граничная вершина графа G. Другими словами, $\partial G_U = (\partial G \cap U) \cup (G \cap \partial U)$.

Определение. Пусть G – произвольный связный топологический граф, и ∂G – его граница. *Параметрической сетью топологии* G на топологическом пространстве X называется непрерывное отображение Γ из G в X. Топологический граф в этом случае называется *параметризующим графом параметрической сети* Γ или *ее топологией*.

Определение. Ограничение отображения Γ на вершины, ребра, границу, связный подграф параметризующего графа, локальный граф называются соответственно *вершинами, ребрами, границей, подсетью, локальной сетью* параметрической сети Γ.

Определение. Пусть X – гладкое многообразие. Параметрическая сеть $\Gamma\colon G \to X$ называется *гладкой* (*регулярной, кусочно-гладкой, кусочно-регулярной*), если ограничение отображения Γ на замыкание каждого ребра графа G является таковым.

Определение. Кусочно-регулярные параметрические сети без кратных ребер и петель называются *погруженными.* Погруженную параметрическую сеть Γ назовем *вложенной*, если отображение Γ взаимно однозначно с образом.

Определение. Ребро γ сети Γ называется *точечным*, если оно – отображение в точку. Ребро γ сети Γ называется *квазирегулярным*, если оно или регулярно, или точечно. Сеть Γ *квазирегулярна*, если все ее ребра квазирегулярны.

Определение. *Линейной сетью* называется сеть в $\mathbb{R}^n$, все ребра которой – прямолинейные отрезки (возможно вырожденные).

Определение. *Точечная компонента* сети Γ – это связная компонента множества точечных ребер сети. *Приведенная компонента* сети Γ – это или ее точечная компонента, или вершина, которая не принадлежит точечным компонентам.

Пусть $\Gamma\colon G \to X$ – произвольная параметрическая сеть, и $I = [a, b]$ – некоторый отрезок.

Определение. Непрерывное отображение $\Psi\colon G \times I \to X$ такое, что для всех $g \in G$ имеет место равенство $\Psi(g, a) = \Gamma(g)$, называется *деформацией параметрической сети* Γ. Если исходная параметрическая сеть Γ является гладкой (регулярной, кусочно-гладкой, кусочно-регулярной), то мы будем предполагать, что каждая параметрическая сеть $\Psi(\cdot, t) = \Gamma_t$ является таковой, и что для каждого замыкания $\bar{e}$ ребра e графа G ограничение отображения Ψ на $\bar{e} \times I$ является гладким (для регулярных сетей) или кусочно-гладким (для кусочно-гладких или кусочно-регулярных сетей).

Пусть H – произвольный подграф в топологическом графе G. Обозначим через G/H топологическое пространство, полученное из G отождествлением точек, попавших в связные компоненты графа H. Пространство G/H наделяется естественной структурой топологического графа. Граф G/H называется *фактор-графом* графа G по подграфу H. Будем говорить, что граф G_2 может быть *спроектирован на граф* G_1, и будем писать $\pi\colon G_2 \to G_1$, если существует $H \subset G_2$ такое, что $G_1 = G_2/H$. Аналогично определяется проекция G_1 на G_2.

Пусть $\Gamma_1 : G_1 \to X$ и $\Gamma_2 : G_2 \to X$ – произвольные квазирегулярные параметрические сети.

Определение. Будем говорить, что параметрическая сеть Γ_2 может быть *спроектирована на* Γ_1, если существует проекция $\pi\colon G_2 \to G_1$ такая, что $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \pi$.

Пусть Γ и Γ' – произвольные параметрические сети, причем Γ' может быть спроектирована на Γ.

Определение. Произвольную деформацию сети Γ' назовем *деформацией с расщеплением* сети Γ. При этом сеть Γ' будем называть *типом такого расщепления.*

3. Локально минимальные сети. Пусть X – конечномерное линейное пространство с некоторой нормой $\|\cdot\|$ и $\gamma\colon [a, b] \to X$ – некоторая непрерывная кривая. Кривая γ называется *измеримой*, если существует предел $l(\gamma)$ длин ломаных, вписанных в эту кривую. Число $l(\gamma)$ называется в этом случае *длиной кривой* γ. Если кривая γ кусочно-гладкая, то она измерима и

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

Пусть Γ – произвольная кусочно-гладкая сеть на X. Тогда *длиной* $l(\Gamma)$ *сети* Γ назовем сумму длин ее ребер.

Определение. Сеть Γ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой неподвижной на границе деформации Γ'_t, $t \in [0,1]$, где $\Gamma'_{t=0} = \Gamma'$ – произвольный тип расщепления сети Γ, выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0+} l(\Gamma'_t) \geqslant 0.$$

Определение. Сеть Γ называется *слабо критической* или *слабо экстремальной*, если для любой неподвижной на границе деформации (без расщепления) Γ_t, $t \in [0,1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0+} l(\Gamma_t) \geqslant 0.$$

Определение. Сеть Γ называется *локально экстремальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является экстремальным.

Определение. Сеть Γ называется *слабо локально экстремальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является слабо экстремальным.

Определение. Сеть, затягивающая некоторое множество, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длины любой сети, затягивающей данное множество.

Определение. Сеть называется *локально минимальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является кратчайшим.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Вложенная сеть локально минимальна тогда и только тогда, когда она является локально экстремальной.*

Определение. *Субградиентом* выпуклой вниз функции $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется такой ковектор $\xi \in T_x^*\mathbb{R}^n$, что

$$\xi(y-x) \leqslant F(y) - F(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Далее, если $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая поверхность и $x \in X$ – произвольная ее точка, то проходящая через x гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности X в точке x, если X лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π. Нормаль к опорной гиперплоскости, направленную в то из ограниченных этой гиперплоскостью полупространств, внутренность которого не пересекается с X, назовем *внешней нормалью* к поверхности X в точке x. Множество N_xX всех внешних нормалей к поверхности X в точке x называется *нормальным конусом*.

При стандартном отождествлении пространств $T_x^*\mathbb{R}^n$ и $T_x\mathbb{R}^n$, *субградиентное множество* $S_F(x)$ *выпуклой функции* F *в точке* x, т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x, является непустым выпуклым ограниченным подмножеством нормального конуса в точке x к поверхности уровня этой функции, проходящей через x. При этом, функция F дифференцируема в x, если и только если множество $S_F(x)$ состоит из одной точки, совпадающей в этом случае с градиентом функции F. Если $F = \rho$ – некоторая норма, то легко доказывается следующий результат, см. [9].

Предложение 3.1. *Субградиентное множество $S_\rho(x)$ в точке $x \neq 0$ совпадает с множеством всех внешних нормалей единичной конормы к поверхности уровня нормы ρ, проходящей через x.*

Пусть $x \in \mathbb{R}^2$ – произвольная точка, и $\eta \in T_x\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^2$ – любой вектор. Через $p(\eta)$ будем обозначать субградиент функции ρ в точке x, причем, если η и $x \neq 0$ коллинеарны, то $p(\eta)$ – любой такой ковектор, а если η и $x \neq 0$ линейно независимы, то $p(\eta)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: вектор $p(\eta)$ ортогонален, в смысле евклидова скалярного произведения, радиальной проекции луча $x+t\eta$, $t \geqslant 0$, на окружность $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(z) = 1\}$.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ – произвольная квазирегулярная параметрическая сеть. Для каждой приведенной компоненты $H \subset \Gamma$ обозначим через E_H и V_H множество ребер и вершин сети H. Через ∂H обозначим множество вершин из H, являющихся граничными в сети Γ. Через $\bar\partial H$ обозначим множество вершин из H, инцидентных регулярным ребрам сети Γ. Далее, для каждой вершины $x \in \bar\partial H$ обозначим через $N_H(x)$ множество регулярных ребер сети Γ, инцидентных x. Если γ – произвольное ребро сети, то обозначим через $\partial\gamma$ пару его концевых вершин. Положим $\rho(\{A,B\}) = \rho(B-A)$.

Для произвольного регулярного ребра $\gamma = [x,y]$ и произвольных векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^2$ положим $p_x(\gamma,\eta_1,\eta_2)$ равным ρ-импульсу $p_{xy}(\eta_1,\eta_2)$, который определяется равенством $p_{xy}(\eta_1,\eta_2) = p_1(\eta_1-\eta_2) = -p_2(\eta_2-\eta_1)$, где $p_i(\eta)$ – субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $n_i = (-1)^i(y-x)/\|y-x\|$. Здесь n_i – внешняя нормаль в смысле евклидова скалярного произведения к отрезку $[x,y]$ в точке y, если $i=2$, и в точке x, если $i=1$.

Справедлива следующая теорема, доказанная Ивановым и Тужилиным, см. [9].

Теорема 3.1. *Пусть $(\mathbb{R}^2,\rho)$ – нормированное пространство. Квазирегулярная параметрическая линейная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с границей β является слабой экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для каждого отображения $\eta\colon V_G \to \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G) = 0$, следующая сумма по всем приведенным компонентам H сети Γ неотрицательна*:

$$\sum_H \biggl\{ \sum_{x\in\bar\partial H} \Bigl\langle \sum_{\gamma\in N_H(x),\gamma=[x,y]} p_x\bigl(\gamma,\eta(x),\eta(y)\bigr),\eta(x)\Bigr\rangle + \sum_{\gamma\in E_H} \rho(\eta|_{\partial\gamma}) \biggr\} \geqslant 0.$$

Из утверждения 3.1 следует, что для описания локальной структуры кратчайшей сети достаточно описать локальную структуру экстремальной сети. Отметим, что проверка экстремальности сети может быть сведена к проверке (с помощью теоремы 3.1) слабой экстремальности бесконечного числа параметрических сетей – различных типов расщеплений исходной сети. Тем не менее, оказывается, эту проверку достаточно провести лишь для конечного числа типов расщепления.

Построим набор представителей, из слабой экстремальности которых вытекает экстремальность сети. Пусть Γ – параметрическая сеть, H – некоторая ее приведенная компонента, и $\overline{\Gamma} = \Gamma/H$ – сеть, полученная из Γ факторизацией по H. Обозначим через $\pi\colon \Gamma \to \overline{\Gamma}$ каноническую проекцию, и пусть $x = \pi(H)$. Прообраз произвольной локальной сети $\overline{\Gamma}_{\mathrm{loc}}(x) \subset \overline{\Gamma}$ для $\overline{\Gamma}$ с центром в x при отображении π назовем *сильно локальной сетью* приведенной компоненты H.

Определение. Тип расщепления Γ' сети Γ назовем *базовым*, если сильно локальная сеть T каждой его вырожденной компоненты H является бинарным деревом. При этом, если H соответствует внутренней вершине сети Γ', то все вершины степени 1 дерева T не принадлежат H. Если же H соответствует граничной вершине Γ', то H содержит ровно одну вершину v дерева T степени 1, причем в этом случае $\partial H = \{v\}$.

Отметим, что у каждой вложенной сети Γ имеется лишь конечное (не нулевое) число базовых типов расщепления.

Справедлива следующая теорема, доказанная Ивановым и Тужилиным, см. [9].

Теорема 3.2. *Вложенная линейная сеть Γ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, если и только если каждый базовый тип расщепления Γ' сети Γ является слабо экстремальной параметрической сетью.*

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Пусть Γ – вложенная линейная сеть, все ребра которой – отрезки, соединяющие начало координат O с точками из Σ, причем все вершины сети Γ, лежащие на m-угольнике Σ, являются граничными (вершина O сети Γ может быть как граничной, так и внутренней). Предположим, что степень вершины O больше 1 и сеть Γ – экстремаль функционала нормированной длины в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$. Тогда*

1) *если $m = 6$ и вершина O сети Γ внутренняя, то степень вершины O сети Γ меньше или равна 4;*
2) *если $m = 6$ и вершина O сети Γ граничная, то степень вершины O сети Γ меньше или равна 6;*
3) *если $m = 4$, 8, 12, то степень вершины O сети Γ меньше или равна 4;*
4) *в остальных случаях степень вершины O сети Γ меньше или равна 3.*

Доказательство. Рассмотрим тип расщепления Γ' сети Γ с единственной вырожденной компонентой H, образ которой при отображении Γ' совпадает с O. При этом, если O – внутренняя вершина, то H – ребро, соединяющее внутренние вершины x и y, а если вершина O граничная, то H – путь xy, yz такой, что x и y – внутренние вершины, а z – граничная вершина степени 1. Более того, сеть Γ' выберем так, чтобы вершина x была инцидентна ровно двум смежным невырожденным ребрам γ_1 и γ_2.

Напомним, что P_k – вершина m-угольника Σ с номером k. Рассмотрим ребро γ_1. Имеется две возможности: или γ_1 соединяет O с некоторой вершиной P_{i_1} из m-угольника Σ, или γ_1 соединяет O с какой-нибудь точкой P, лежащей внутри интервала (P_{i_1-1}, P_{i_1}). Аналогично, для ребра γ_2 имеется две возможности: или $\gamma_2 = OP_{i_2}$ для некоторой вершины P_{i_2} из m-угольника Σ, или $\gamma_2 = OQ$ для какой-нибудь точки Q, лежащей внутри интервала (P_{i_2}, P_{i_2+1}). Таким образом, имеется четыре случая в зависимости от расположения вершин из γ_1 и γ_2. Так как повороты сети Γ вокруг начала координат O на угол кратный π/n не меняют экстремальные свойства сети Γ, без ограничения общности будем предполагать, что $n-1 \geqslant i_2 > i_1 \geqslant 0$. Для каждого случая рассмотрим деформацию сети Γ' в классе линейных сетей, при которой вершина x равномерно движется по прямой со скоростью $\eta = (\cos(\pi j/n), \sin(\pi j/n))$, где $j = i_1 + (i_2 - i_1 - 1)/2$, если разность $i_2 - i_1$ нечетна, и $j = i_1 + (i_2 - i_1)/2$, если $i_2 - i_1$ четна. При этом вершина y остается на месте.

Так как линейная сеть Γ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, тип расщепления Γ' сети Γ является слабой экстремалью, поэтому из теоремы 3.1 вытекает, что выполняется следующее неравенство:

$$\langle p_x(\gamma_1, \eta, 0) + p_x(\gamma_2, \eta, 0), \eta\rangle + \rho(\eta) \geqslant 0,$$

где $\rho(\eta) = 1$ и $p_x(\gamma_k, \eta, 0) = p_{xP_{i_k}}(\eta, 0) = p_1(\eta - 0) = p_1(\eta)$ – субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $w = (x - P_{i_k})/\|P_{i_k} - x\|,\ k = 1, 2$.

Оказывается, во всех имеющихся случаях предыдущее неравенство эквивалентно одному и тому же неравенству

$$i_2 - i_1 \geqslant \frac{m}{3} - 1. \tag{1}$$

Неравенство (1) влечет, что среди сетей Γ с максимально возможной степенью вершины O существует сеть, у которой все отличные от O граничные вершины являются вершинами из Σ. Поэтому для получения ограничения на возможные степени вершины O сети Γ достаточно рассмотреть случай, когда ребра из Γ соединяют начало координат и вершины m-угольника Σ. Пусть Γ – такая сеть, степень вершины O равна s, и $\gamma_{j+1} = OP_{i_j},\ j = 0, \dots, s-1,$ – последовательные при положительном обходе вершины O ребра из Γ. Обозначим через k_j количество вершин m-угольника Σ между соседними ребрами с номерами j и $j+1$. Найдем наименьшее k_j, при котором выполняется неравенство (1). Имеем

a) $k_j = 2n/3 - 2$, если $2n \equiv 0 \pmod 3$;

b) $k_j = (2n-1)/3 - 1$, если $2n \equiv 1 \pmod 3$;

c) $k_j = (2n-2)/3 - 1$, если $2n \equiv 2 \pmod 3$.

Найдем теперь ограничение на s в каждом из трех случаев.

a) Пусть $2n \equiv 0 \pmod 3$. Так как количество вершин m-угольника Σ равно $2n$, получаем $s(2n/3 - 2) + s \leqslant 2n$, откуда $s \leqslant 3 + 9/(2n-3)$. Функция $9/(2n-3)$ монотонно убывает. Отсюда следует, что степень вершины O при $m = 6$ меньше или равна 6, при $m = 12$ – меньше или равна 4, при остальных m – меньше или равна 3.

b) Пусть $2n \equiv 1 \pmod 3$; тогда $s((2n-1)/3 - 1) + s \leqslant 2n$, откуда $s \leqslant 3 + 3/(2n-1)$. Поэтому степень вершины O при $m = 4$ меньше или равна 4, при остальных m – меньше или равна 3.

c) Пусть $2n \equiv 2 \pmod 3$; тогда $s((2n-2)/3 - 1) + s \leqslant 2n$, откуда $s \leqslant 3 + 6/(2n-2)$. Поэтому степень вершины O при $m = 8$ меньше или равна 4, при остальных m – меньше или равна 3.

Оказывается, что в случае, когда $m = 6$ и вершина O – внутренняя, полученную оценку $s \leqslant 6$ можно усилить. Пусть Γ – такая сеть. Мы покажем, что s не может быть равна 5 и 6. Поэтому $s \leqslant 4$, что и завершает доказательство теоремы.

Пусть $s = 6$. Из неравенств (1) следует, что возможен единственный вариант, а именно, когда сеть Γ состоит из 6 ребер $\gamma_{k+1} = OP_k,\ k = 0, \dots, 5$.

Рассмотрим тип расщепления Γ' сети Γ с единственной вырожденной компонентой H, образ которой при отображении Γ' совпадает с O и которая представляет собой путь x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_5 и γ_6, вершина x_2 инцидентна ребру γ_4, вершина x_3 инцидентна ребру γ_3, а вершина x_4 – ребрам γ_1 и γ_2. Рассмотрим деформацию сети Γ' в классе линейных сетей, при которой вершины x_i равномерно движутся по прямым, причем x_1 движется со скоростью $\eta_1 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$, вершина x_2 – со скоростью $\eta_2 = (-1, 0)$, вершина x_3 – со скоростью $\eta_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, и вершина

x_4 – со скоростью $\eta_4 = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. В соответствии с теоремой 3.1, так как выражение

$$\begin{aligned}&\langle p_{x_1}(\gamma_5,\eta_1,0)+p_{x_1}(\gamma_6,\eta_1,0),\eta_1\rangle+\langle p_{x_2}(\gamma_4,\eta_2,0),\eta_2\rangle+\langle p_{x_3}(\gamma_3,\eta_3,0),\eta_3\rangle\\&\qquad+\langle p_{x_4}(\gamma_1,\eta_4,0)+p_{x_4}(\gamma_2,\eta_4,0),\eta_4\rangle+\rho(\eta_1-\eta_2)+\rho(\eta_2-\eta_3)+\rho(\eta_3-\eta_4)\\&\quad=0-1-1-1+0-1+1+1+1=-1\end{aligned}$$

отрицательно, тип расщепления Γ' не является слабо экстремальной сетью, а значит, и сеть Γ не экстремальна.

Пусть $s=5$. Из неравенств (1) следует, что возможны два, с точностью до поворота, варианта, а именно, когда сеть Γ состоит из 5 ребер $\gamma_{k+1}=OP_k,\ k=0,\dots,4$, или когда сеть Γ состоит из 4 ребер $\gamma_{k+1}=OP_k,\ k=0,\dots,3$, и ребра γ_5, соединяющего точку O и точку, лежащую на интервале (P_4,P_5). Разберем первый случай (второй случай разбирается аналогично).

Рассмотрим тип расщепления Γ' сети Γ с единственной вырожденной компонентой H, образ которой при отображении Γ' совпадает с O и которая представляет собой путь x_1x_2, x_2x_3, причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_4 и γ_5, вершина x_2 инцидентна ребру γ_3, а вершина x_3 – ребрам γ_1 и γ_2. Рассмотрим деформацию сети Γ' в классе линейных сетей, при которой вершины x_i равномерно движутся по прямым, причем x_1 движется со скоростью $\eta_1=(-1,0)$, вершина x_2 – со скоростью $\eta_2=(-1/2,\sqrt{3}/2)$, и вершина x_3 – со скоростью $\eta_3=(1/2,\sqrt{3}/2)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. В соответствии с теоремой 3.1, так как выражение

$$\begin{aligned}&\langle p_{x_1}(\gamma_5,\eta_1,0)+p_{x_1}(\gamma_4,\eta_1,0),\eta_1\rangle+\rho(\eta_1-\eta_2)+\langle p_{x_2}(\gamma_3,\eta_2,0),\eta_2\rangle\\&\qquad+\rho(\eta_2-\eta_3)+\langle p_{x_3}(\gamma_1,\eta_3,0)+p_{x_3}(\gamma_2,\eta_3,0),\eta_3\rangle=0-1-1+0-1+1+1=-1\end{aligned}$$

отрицательно, тип расщепления Γ' не является слабо экстремальной сетью, а значит и сеть Γ не экстремальна. Доказательство закончено.

Доказательство основной теоремы опирается на следующие шесть лемм, которые из-за недостатка места мы приведем без доказательства.

Лемма 3.1. *Если для двух ненулевых векторов η_1 и η_2 выполнены неравенства $\langle\theta,\eta_1\rangle\geqslant 0$ и $\langle\theta,\eta_2\rangle\geqslant 0$, где θ – фиксированный ковектор, то неравенство $\langle\theta,\eta\rangle\geqslant 0$ выполнено для любого ненулевого вектора η, лежащего внутри угла, образованного векторами η_1 и η_2.*

Лемма 3.2. *Пусть $\eta_1=a(\cos\varphi,\sin\varphi)$, и точка $\frac{a}{\rho(\eta_1)}(\cos\varphi,\sin\varphi)$ принадлежит полуинтервалу $[P_i,P_{i+1})$. Тогда*

$$\rho(\eta_1)=a\frac{\cos(\varphi-\frac{\pi}{n}(i+\frac{1}{2}))}{\cos\frac{\pi}{2n}}.$$

Лемма 3.3. *Пусть* $\eta_1 = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$ *и* $\eta_2 = b(\cos\psi, \sin\psi)$. *Тогда*

1) *если* $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \pi$ *или* $\varphi - \psi \geqslant \pi$, *то*

$$\rho(\eta_2 - \eta_1) = \frac{b\cos(\psi - \frac{\pi}{n}(i+1/2)) - a\cos(\varphi - \frac{\pi}{n}(i+1/2))}{\cos(\pi/2n)},$$

где точка $(\eta_2 - \eta_1)/\rho(\eta_2 - \eta_1)$ *принадлежит полуинтервалу* $[P_i, P_{i+1})$;

2) *если* $0 \leqslant \varphi - \psi \leqslant \pi$ *или* $\psi - \varphi \geqslant \pi$, *то*

$$\rho(\eta_1 - \eta_2) = \frac{a\cos(\varphi - \frac{\pi}{n}(i+1/2)) - b\cos(\psi - \frac{\pi}{n}(i+1/2))}{\cos(\pi/2n)},$$

где точка $(\eta_1 - \eta_2)/\rho(\eta_1 - \eta_2)$ *принадлежит полуинтервалу* $[P_i, P_{i+1})$.

Лемма 3.4. *Пусть* $m = 6$, $\eta_1 = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\eta_2 = b(\cos\psi, \sin\psi)$, *где* $\varphi \in [2\pi/3, \pi]$, $\psi \in [-\pi/3, \pi/3]$. *Тогда* $\rho(\eta_1 - \eta_2)$ *больше или равно* $\rho(\eta_1)$ *и* $\rho(\eta_2)$.

Лемма 3.5. *Пусть* $m = 6$, $\eta_1 = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\eta_2 = b(\cos\psi, \sin\psi)$, *где* $\varphi \in [\pi/2, 2\pi/3]$, $\psi \in [0, \pi/3]$. *Тогда* $\langle p_{OP_3}(\eta_1, 0) + p_{OP_2}(\eta_1, 0), \eta_1\rangle + \rho(\eta_1 - \eta_2) \geqslant 0$.

Лемма 3.6. *Пусть* $m = 6$, $\eta_1 = a(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\eta_2 = b(\cos\psi, \sin\psi)$, *где* $\varphi \in [2\pi/3, \pi]$, $\psi \in [\pi, 4\pi/3]$. *Тогда* $\langle p_{OP_2}(\eta_1, 0), \eta_1\rangle + \rho(\eta_1) + \rho(\eta_2 - \eta_1) \geqslant \rho(\eta_2)$.

Доказательство основной теоремы. Пусть Γ – вложенная локально минимальная сеть и x – произвольная ее вершина. Покажем, что тип вершины x описывается теоремой. Пусть $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ – локальная сеть с центром в x для Γ. По определению сеть $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ кратчайшая. Так как сдвиги не меняют экстремальные свойства сети, без ограничения общности будем предполагать, что x находится в начале координат. В силу утверждений 3.1, 3.2 и неравенства (1) вершина x сети $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ имеет не превосходящую 6 степень и один из следующих типов:

1) если степень вершины x равна 1, то $\mathrm{type}_v(x) = \{[]\}$;
2) если степень вершины x равна 2, то при $2n \equiv k \pmod 3$, $k = 1, 2, 3$, имеем $\mathrm{type}_v(x) = \{[], []; l\}$, причем $3 - n \leqslant l \leqslant k$;
3) если степень вершины x равна 3, то
   (a) при $2n \equiv 0 \pmod 3$ имеем $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], []; 3, 3\}$ или $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], *; 0, 3\}$;
   (b) при $2n \equiv k \pmod 3$, $k = 1, 2$, имеем $\mathrm{type}_v(x) = \{*, [], *; k, k\}$;
   (c) при $2n \equiv 2 \pmod 3$ имеем $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], *; 2, 2\}$;
4) если степень вершины x равна 4, то $m = 4, 6, 8$ или 12, и
   (a) при $m = 4, 8$ или 12 имеем $\mathrm{type}_v(x) = \{*, *, *, *; m/4, m/4, m/4\}$;
   (b) при $m = 6$ имеем $\mathrm{type}_v(x) = \{*, [], *, []; 3, 3, 3\}$ или $\mathrm{type}_v(x) = \{[], [], *, *; 3, 3, 3\}$;
5) если степень вершины x равна 5 или 6, то эта вершина граничная, $m = 6$ и
   (a) если степень вершины x равна 5, то $\mathrm{type}_v(x) = \{[], *, *, *, *; 3, 3, 3, 3\}$;
   (b) если степень вершины x равна 6, то $\mathrm{type}_v(x) = \{*, *, *, *, *, *; 3, 3, 3, 3, 3\}$.

Остается доказать, что вершина x не может иметь некоторые из вышеперечисленных типов. Для каждого типа, перечисленного выше, который не входит в утверждение основной теоремы, легко можно указать базовый тип расщепления $\Gamma'_{\mathrm{loc}}(x)\colon G'_{\mathrm{loc}}(x) \to \mathbb{R}^2$

и отображение $\eta\colon V_{G'_{\mathrm{loc}}(x)} \to \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G'_{\mathrm{loc}}(x)) = 0$, такие, что $\Gamma'_{\mathrm{loc}}(x)$ в силу теоремы 3.1 не является слабо экстремальной сетью. Последнее в силу утверждения 3.1 противоречит тому, что сеть $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ кратчайшая.

Докажем обратное утверждение. Пусть вершина x сети Γ имеет один из перечисленных в утверждении основной теоремы типов и, как выше, находится в начале координат O. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ – кратчайшая сеть. Для этого в силу теоремы 3.2 и утверждения 3.1 достаточно рассмотреть все базовые типы расщепления $\Gamma'_{\mathrm{loc}}(x)$ сети $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ и проверить их на слабую экстремальность. Дальнейшее доказательство будет следовать из теоремы 3.1 и из лемм 3.1–3.6.

Из-за недостатка места мы рассмотрим, например, случай, когда единичная окружность Σ является 6-угольником и степень вершины x равна 5. Будем считать, что случаи, когда x имеет степень меньшую 5, уже разобраны. Пусть сеть $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ состоит из 5 ребер $\gamma_1 = OP_0$, $\gamma_2 = OP$ и $\gamma_k = OP_k$, $k = 3, \dots, 5$, где P_k – вершина 6-угольника с номером k, и точка P лежит на интервале (P_1, P_2).

Из-за большого числа базовых типов расщеплений ограничимся рассмотрением лишь одного из них и проверим его на слабую экстремальность. Пусть базовый тип расщепления $\Gamma'_{\mathrm{loc}}(x)\colon G'_{\mathrm{loc}}(x) \to \mathbb{R}^2$ сети $\Gamma_{\mathrm{loc}}(x)$ представляет собой сеть с единственной вырожденной компонентой H', образ которой при отображении $\Gamma'_{\mathrm{loc}}(x)$ совпадает с O и которая представляет собой путь $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5$, причем вершины x_2, x_3 и x_4 инцидентны ребрам γ_3, γ_2 и γ_4 соответственно, вершина x_5 инцидентна ребрам γ_1 и γ_5, а вершина x_1 граничная.

По теореме 3.1 слабая экстремальность сети $\Gamma'_{\mathrm{loc}}(x)$ равносильна следующему условию: для каждого отображения $\eta\colon V_{G'_{\mathrm{loc}}(x)} \to \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G'_{\mathrm{loc}}(x)) = 0$, имеет место неравенство:

$$\begin{aligned}\rho(\eta(x_2)) &+ \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2)\rangle + \rho(\eta(x_2) - \eta(x_3)) \\ &+ \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3)\rangle + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4)\rangle \\ &+ \rho(\eta(x_4) - \eta(x_5)) + \langle p_{x_5}(\gamma_1, \eta(x_5), 0) + p_{x_5}(\gamma_5, \eta(x_5), 0), \eta(x_5)\rangle \geqslant 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

Если $\eta(x_2)$ лежит в угле от $-2\pi/3$ до $2\pi/3$, т.е. $\langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2)\rangle \geqslant 0$, используя неравенство $\rho(\eta(x_2)) + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_2)) \geqslant \rho(\eta(x_3))$, мы получим, что неравенство (2) вытекает из неравенства

$$\begin{aligned}\rho(\eta(x_3)) &+ \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3)\rangle + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4)\rangle \\ &+ \rho(\eta(x_4) - \eta(x_5)) + \langle p_{x_5}(\gamma_1, \eta(x_5), 0) + p_{x_5}(\gamma_5, \eta(x_5), 0), \eta(x_5)\rangle \geqslant 0,\end{aligned}$$

которое верно, так как сеть с граничной вершиной x и с ребрами γ_1, γ_2, γ_4 и γ_5 имеет $\mathrm{type}_v(x) = \{*, (), *, *; 3, 0, 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 4(c) основной теоремы, который уже разобран в силу предположения. Поэтому нам остается рассмотреть случай, когда $\eta(x_2)$ лежит в угле от $2\pi/3$ до $4\pi/3$. Аналогично доказывается, что достаточно рассмотреть лишь те $\eta(x_3)$, которые лежат в угле от 0 до π, те $\eta(x_4)$, которые лежат в угле от π до $5\pi/3$ и те $\eta(x_5)$, которые лежат в угле от $-\pi/2$ до $\pi/6$.

Рассмотрим два случая, которые и завершат доказательство основной теоремы.

1) $\eta(x_4)$ лежит в угле от π до $4\pi/3$, $\eta(x_2)$ лежит в угле от $2\pi/3$ до $4\pi/3$, $\eta(x_3)$ лежит в угле от 0 до π, $\eta(x_5)$ лежит в угле от $-\pi/2$ до $\pi/6$. Неравенство (2) в силу лемм 3.4 и 3.5 вытекает из неравенства

$$\rho(\eta(x_2)) + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2)\rangle + \rho(\eta(x_2) - \eta(x_3)) \\ + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3)\rangle + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4)\rangle \geqslant 0,$$

которое верно, так как сеть с граничной вершиной x и с ребрами γ_2, γ_3 и γ_4 имеет $\mathrm{type}_v(x) = \{(), *, *; 3, 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 3(c) основной теоремы, который уже разобран в силу предположения.

2) $\eta(x_4)$ лежит в угле от $4\pi/3$ до $5\pi/3$, $\eta(x_2)$ лежит в угле от $2\pi/3$ до $4\pi/3$, $\eta(x_3)$ лежит в угле от 0 до π, $\eta(x_5)$ лежит в угле от $-\pi/2$ до $\pi/6$. Неравенство (2) в силу леммы 3.4 вытекает из следующих двух неравенств:

$$\rho(\eta(x_2)) + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2)\rangle + \rho(\eta(x_2) - \eta(x_3)) + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3)\rangle \geqslant 0,$$
$$\rho(\eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4)\rangle + \rho(\eta(x_4) - \eta(x_5)) \\ + \langle p_{x_5}(\gamma_1, \eta(x_5), 0) + p_{x_5}(\gamma_5, \eta(x_5), 0), \eta(x_5)\rangle \geqslant 0.$$

Первое неравенство верно из-за того, что сеть с граничной вершиной x и с ребрами γ_2 и γ_3 имеет $\mathrm{type}_v(x) = \{(), *; 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 2(b) основной теоремы, который уже разобран в силу предположения, а второе из-за того, что сеть с граничной вершиной x и с ребрами γ_1, γ_4 и γ_5 имеет $\mathrm{type}_v(x) = \{*, *, *; -6, 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 3(c) основной теоремы, который также уже разобран в силу предположения. Доказательство основной теоремы закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F. Steiner minimal trees for Regular Polygons // Disk. and Comp. Geometry. 1987. V. 2. P. 65–84.

[2] Fermat P. Abhandlungen uber Maxima und Minima // Oswalds, Klassiker der Exakten Wissenschaften. № 238, 1934.

[3] Jarnik V., Kössler M. O minimalnich grafeth obeahujiicich n danijch bodu // Cas. Pest. Mat. a Fys. 1934. V. 63. P. 223–235.

[4] Smith W. D. How to find Steiner minimal trees in Euclidean d-space // Algoritmica. 1992. №7. P. 137–177.

[5] Francis R. L. A note on the optimum location of new machines in existing plant loyouts // J. Indust. Engrg. 1963. V. 14. P. 57–59.

[6] Hanan M. On Steiner's Problem with Rectilinear Distance // SIAM J. Appl. Math. 1966. V. 14. P. 255–265.

[7] Hwang F. K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 30. P. 104–114.

[8] Garey M. R., Johnson D. S. The Rectilinear Steiner Problem is NP-Complete. // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 32. P. 826–834.

[9] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2001.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
03.09.2001
Исправленный вариант
21.04.2003