УДК 514.77+519.711.72+517.982.22

Д. П. Ильютко

Разветвленные экстремали функционала λ-нормированной длины

В статье рассматриваются сети на λ-нормированных плоскостях, т.е. на нормированных плоскостях, для которых единичная окружность является правильным 2λ-угольником. Дается геометрический критерий экстремальности произвольного дерева на λ-нормированной плоскости, где $\lambda \neq 2, 3, 4, 6$. Затрагиваются также вопросы о λ-минимальной (экстремальной) реализации произвольной сети и о сходимости λ-экстремальных сетей при $\lambda \to \infty$.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение и постановка задачи

Понятие экстремальной сети или разветвленной экстремали, т.е. критической точки функционала нормированной длины (строгое определение см. ниже) появляется при обобщении задачи, известной в литературе как проблема Штейнера: *среди всех сетей, затягивающих данное конечное множество X точек евклидовой плоскости, найти сеть наименьшей длины.* Решение этой задачи называется *кратчайшей сетью*, затягивающей множество X. Сеть, кратчайшая в малом, называется *локально минимальной.* Эта задача была названа "проблемой Штейнера" в книге Р. Куранта и Г. Е. Роббинса "Что такое математика?" в честь Якоба Штейнера (Jacob Steiner, 1796–1863), швейцарского математика, профессора Берлинского университета. После появления этой книги терминология, предложенная Курантом и Роббинсом, стала общепринятой. По-видимому, так утверждают Ду и Хванг [1], Ферма [2] был первым, изучающим задачи такого типа. Его интересовал следующий вопрос: *как расположить на плоскости точку F так, чтобы сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек была наименьшей.* Более подробный исторический обзор, посвященный проблеме Штейнера, можно найти в работах [1]–[4]. Отметим, что у проблемы Штейнера имеется много различных интерпретаций и приложений. Например, заданное конечное множество X можно интерпретировать как набор конечных (терминальных) пунктов. Если, например, терминальные пункты – города, которые требуется соединить сетью дорог, то в этом случае минимальная сеть – это самая дешевая транспортная система, обеспечивающая коммуникации между данными конечными пунктами. Здесь естественно предполагается, что стоимость коммуникаций пропорциональна их длине.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00682), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1988.2003.1) и Программы поддержки молодых российских докторов (грант № МД-263.2003.01).

Другие приложения проблемы Штейнера – это разводка микросхем и построение эволюционных деревьев. Основная проблема при разводке микросхем – это минимизация длины проводников на печатных платах. Эти проводники имеют вид ломаных линий, составленных из горизонтальных и вертикальных отрезков. Таким образом, разводка микросхем имеет непосредственное отношение к проблеме Штейнера на манхеттенской плоскости. Напомним, что *манхеттенской плоскостью* называется нормированная плоскость, где норма вектора определяется как сумма модулей его координат. Эволюционные деревья часто моделируются кратчайшими сетями в филогенетических пространствах, т.е. в пространствах слов с соответствующей метрикой.

На практике приходится строить кратчайшие сети для достаточно большого числа точек. Поэтому больше внимания уделяется разработке алгоритмов, которые за приемлемое время находят кратчайшее дерево, затягивающее произвольное множество точек. Оказывается, что в случае евклидовой плоскости задача поиска кратчайшего дерева, затягивающего n различных точек плоскости, является NP-полной. Последнее означает, что, скорее всего, для этой проблемы не существует полиномиального алгоритма, т.е. алгоритма, решающего задачу за время $O(n^k)$, где k – некоторое фиксированное число. Были построены лишь приближенные полиномиальные алгоритмы, т.е. алгоритмы поиска дерева, близкого к кратчайшему. Следующие попытки поиска оптимального алгоритма были предприняты на манхеттенской плоскости. В 1966 г. Ханан [5] провел исследование *кратчайших прямоугольных деревьев*, т.е. кратчайших сетей на манхеттенской плоскости, и описал несколько важных общих геометрических свойств таких сетей. Он указал максимальную степень, которую могут иметь вершины кратчайшей сети на манхеттенской плоскости, а именно, что эта степень равна 4. Также Ханан показал, что всегда существует кратчайшее прямоугольное дерево, которое является подмножеством *решетки Ханана* – множества всех вертикальных и горизонтальных прямых, проходящих через данные точки из X. Позже Хванг [6] описал структуру некоторых кратчайших сетей на манхеттенской плоскости. После появления этих работ многие ученые пытались найти эффективный алгоритм, строящий кратчайшую сеть на манхеттенской плоскости. Однако в 1977 г. Гэри и Джонсон [7] показали, что задача поиска кратчайшего прямоугольного дерева тоже является NP-полной. Есть и другой подход к исследованию задачи Штейнера. Он состоит в описании более широкого класса сетей, чем класс кратчайших, а именно класса экстремальных сетей. Переход к изучению экстремальных сетей позволяет по-другому взглянуть на природу кратчайших сетей, делает более понятным их глобальные свойства. Хорошим примером такого подхода служит теория Морса, в которой изучаются все типы (невырожденных) критических точек, а не только абсолютные минимумы и максимумы, см. [8], [9].

Экстремальные сети хорошо изучены на евклидовой и манхеттенской плоскостях. Оказывается, в первом случае класс экстремальных сетей совпадает с классом локально минимальных сетей, а для манхеттенской плоскости имеется критерий экстремальности произвольной локально минимальной сети [10]. Отметим, что на евклидовой плоскости степень вершин экстремальной сети всегда не превосходит 3, а на манхеттенской плоскости – 4. Чтобы связать эти две нормированные плоскости, в начале 90-х годов Саррафзаде и Вонг [11] ввели понятие λ-нормированной плоскости, т.е. нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$, чья единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_\lambda(x) = 1\}$ совпадает с правильным 2λ-угольником, одна из осей симметрии которого лежит на оси абсцисс. Легко видеть, что манхеттенская плоскость является 2-нормированной, а евклидову плоскость можно рассматривать как ∞-нормированную.

Основное внимание в нашей статье уделяется экстремальным сетям на λ-нормированных плоскостях. Локальная структура локально минимальных сетей на λ-нормированных плоскостях, $\lambda \neq 2$, была описана Саррафзаде и Вонгом [11], а также Ли и Шеном [12]. Но в этих двух работах описание было неполным, так как отсутствовали некоторые возможные структуры вершин степени 3 для $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Полный же ответ был независимо получен Сванеполом [13] и автором настоящей статьи [14], [15]. Настоящая статья дает геометрический ответ на вопрос, когда локально минимальное дерево является экстремальным на λ-нормированной плоскости для всех λ, за исключением $\lambda = 2, 3, 4, 6$. Также исследуется вопрос о реализации дерева в виде локально минимального или экстремального дерева на λ-нормированной плоскости и поведение экстремального дерева на λ-нормированных плоскостях при $\lambda \to \infty$. Как и следовало ожидать, при достаточно больших λ структура экстремального дерева на λ-нормированной плоскости близка к структуре экстремального дерева на евклидовой плоскости, т.е. степени вершин те же и углы между смежными ребрами приблизительно одни и те же.

Рассмотрим на плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ произвольное конечное множество точек X. Под *сетью* мы будем понимать произвольное плоское дерево Γ с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством ребер $E(\Gamma)$. Будем говорить, что сеть Γ *затягивает множество* X, если $V(\Gamma)$ содержит множество X. Вершины из множества X называются *граничными* или *неподвижными* для сети Γ, а вершины из $V(\Gamma) \setminus X$ – *внутренними* или *подвижными* для сети Γ. Множество граничных вершин сети Γ обозначается через $\partial\Gamma$. Поскольку на нормированной плоскости экстремальные кривые, соединяющие две произвольные точки, имеют одинаковую длину, равную длине прямолинейного отрезка, соединяющего данные точки, то без ограничения общности мы будем рассматривать только линейные сети, т.е. сети, все ребра которых являются отрезками прямых. Максимальный путь в Γ, все внутренние вершины которого имеют в Γ степень 2 и являются внутренними вершинами для Γ, назовем *нитью*. *Длиной* $\ell(\Gamma)$ сети Γ назовем сумму $\sum_{xy \in E(\Gamma)} \rho_\lambda(x-y)$. Под *деформацией* сети Γ мы понимаем непрерывное однопараметрическое семейство $\{\Gamma_t\}$ сетей Γ_t с границей $\partial\Gamma$, полученных из Γ движением внутренних вершин, при этом вершины могут расщепляться (строгое определение см. ниже).

Определение. Сеть Γ называется *экстремальной*, если для любой деформации $\{\Gamma_t\}$, $t \in [0,1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0+} \ell(\Gamma_t) \geqslant 0.$$

Пусть Γ – произвольная линейная сеть и γ – некоторое ребро сети Γ, ориентированное одним из двух возможных способов. Если направление этого ребра приходит во внутреннюю точку стороны 2λ-угольника Σ, то будем говорить, что *замыкание направления ребра* γ равно этой стороне 2λ-угольника Σ, а если направление этого ребра приходит в вершину 2λ-угольника Σ, то будем говорить, что *замыкание направления ребра* γ равно этой вершине 2λ-угольника Σ. В первом случае ребро называется *неточечным*, а во втором – *точечным*. Обозначим через $\mathrm{fl}(\gamma)$ замыкание направления ребра γ.

Для любых подмножеств A и B из 2λ-угольника Σ обозначим через $\alpha(A,B)$ точную нижнюю грань углов между радиус-векторами точек $x\in A$ и $y\in B$. Если γ_1 и γ_2 – два смежных ребра, то в выражении $\alpha(\mathrm{fl}(\gamma_1),\mathrm{fl}(\gamma_2))$ под замыканиями $\mathrm{fl}(\gamma_i)$ будем понимать замыкания для ребер γ_i, $i=1,2$, ориентированных от их общей вершины.

Рассмотрим произвольную пару (γ,γ') смежных ребер, ориентированных от их общей вершины. Определим знак этой пары $\epsilon(\gamma,\gamma')$ следующим образом:

- для линейно независимых ребер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma,\gamma')=1$, если базис (γ,γ') положительно ориентирован на $\mathbb{R}^2$, и $\epsilon(\gamma,\gamma')=-1$ в противном случае;
- для линейно зависимых ребер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma,\gamma')=1$.

Определим для пары (γ,γ') *погрешность* $\mathrm{fall}(\gamma,\gamma')$ и *ориентированную погрешность* $\mathrm{fall}_0(\gamma,\gamma')$, положив

$$\mathrm{fall}(\gamma,\gamma')=k,\qquad \text{если}\quad \alpha(\mathrm{fl}(\gamma),\mathrm{fl}(\gamma'))=\frac{2\pi}{3}-\frac{k\pi}{3\lambda}\,,$$

и

$$\mathrm{fall}_0(\gamma,\gamma')=\epsilon(\gamma,\gamma')\,\mathrm{fall}(\gamma,\gamma').$$

Рассмотрим произвольный ориентированный путь $\mathscr{P}=\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ в сети Γ, где γ_i – последовательные ребра пути $\mathscr{P}$. При каждом $1\leqslant i\leqslant n-1$ внутренней вершине пути $\mathscr{P}$, инцидентной ребрам γ_i и γ_{i+1}, поставим в соответствие знак $\epsilon(\gamma_i,\gamma_{i+1})$.

Определение. Путь $\mathscr{P}$ называется *правильно повернутым*, если все внутренние вершины пути $\mathscr{P}$, граничные в сети Γ, имеют одинаковый знак. Ориентация правильно повернутого пути $\mathscr{P}$ называется *канонической*, если знак каждой внутренней вершины пути $\mathscr{P}$, граничной в сети Γ, положителен.

Определим для канонически ориентированного пути $\mathscr{P}$, все внутренние ребра которого точечны, *ориентированную погрешность* $\mathrm{fall}_0(\mathscr{P})$, положив

$$\mathrm{fall}_0(\mathscr{P})=\max_{j,l}\biggl(\mathrm{fall}_0(\gamma_1^j,\gamma_2)+\sum_{i=2}^{n-2}\mathrm{fall}_0(\gamma_i,\gamma_{i+1})+\mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1},\gamma_n^l)\biggr),$$

где $\partial\,\mathrm{fl}(\gamma_i)=\{\gamma_i^1,\gamma_i^2\}$, $i=1$ или n, – граница подмножества $\mathrm{fl}(\gamma_i)$ окружности Σ.

Пусть Π – множество канонически ориентированных путей в Γ, все внутренние ребра которых точечны. Положим

$$\mathrm{Fall}_0(\Gamma)=\max_{\mathscr{P}\in\Pi}\mathrm{fall}_0(\mathscr{P}).$$

Определение. Кусочно регулярную кривую назовем *монотонной*, если направления всех векторов скорости этой кривой приходят на одну и ту же сторону 2λ-угольника Σ.

Определение. Сеть Γ_l будем называть *линеаризацией сети* Γ, если она получена заменой всех нитей сети Γ на прямолинейные отрезки.

Основная теорема. *Произвольная сеть* Γ *на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2,\rho_\lambda)$, *где* $\lambda\neq 2,3,4,6$, *экстремальна тогда и только тогда, когда все ее вершины степени* 1 *являются граничными, все ее нити – монотонные кривые и* $\mathrm{Fall}_0(\Gamma_l)\leqslant 3$.

Автор благодарен А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 2. Предварительные сведения

Определение. *Топологическим графом* G называется топологическое пространство, полученное из конечной совокупности отрезков $\{I_\alpha\}$ некоторой склейкой по их концам. Пусть $\pi\colon\bigsqcup_\alpha I_\alpha\to G$ – каноническая проекция. Образы внутренностей отрезков I_α при отображении π называются *ребрами* графа G, а π-образы концевых точек отрезков I_α – *вершинами.* Граф G *связен*, если он связен как топологическое пространство.

Замечание. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые топологические графы являются простыми, т.е. не содержат петель и кратных ребер.

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин. Такой граф G будем называть *графом с границей* $\partial G=B$. Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины – *внутренними* или *подвижными.* Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными.*

Определение. Граничное ребро графа G называется 1*-граничным*, если оно инцидентно граничной вершине степени 1. Совокупность всех смежных 1-граничных ребер, из общей вершины которых выходит не более одного не 1-граничного ребра, назовем *усами.* Вершину графа G, инцидентную усам, назовем *вершиной усов.*

Пусть G – произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой) и $P\in G$ – некоторая его точка. *Допустимой окрестностью* $U\subset G$ *точки* P *графа* G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G, отличных от P, если P – вершина. Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U\cup\{P\}$, а ребрами – внутренности отрезков в U, соединяющих эти точки. Полученную звезду обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке* P. Определим *каноническую границу* ∂G_U локального графа G_U, включив в нее все вершины из ∂U, а также вершину P, если P – граничная вершина графа G. Другими словами, $\partial G_U=(\partial G\cap U)\cup(G\cap\partial U)$.

Определение. Пусть G – произвольный связный топологический граф и ∂G – его граница. *Линейной сетью типа* G или, более коротко, *сетью типа* G называется непрерывное отображение Γ из G в $\mathbb{R}^n$, аффинное на каждом ребре графа G. Граф G в этом случае называется *параметризующим графом сети* Γ или *ее типом.*

Определение. Ограничения отображения Γ на вершины, ребра, границу, связный подграф параметризующего графа, локальный граф называются соответственно *вершинами*, *ребрами*, *границей* $\partial\Gamma$, *подсетью*, *локальной сетью* сети Γ. Более того, в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все структуры, возникающие на параметризующем графе, такие, как инцидентность, смежность, ориентация и т.д., переносятся на сети.

Определение. Ребро $\gamma = \Gamma|_e$ сети Γ называется *вырожденным*, если оно является отображением в точку. *Вырожденная компонента сети* Γ – это максимальная связная компонента множества вырожденных ребер сети. *Приведенная компонента сети* Γ – это или ее вырожденная компонента, или вершина, которая не принадлежит вырожденным компонентам.

Определение. Сеть Γ называется *погруженной*, если она не содержит вырожденных ребер. Погруженную сеть Γ назовем *вложенной*, если отображение Γ взаимно однозначно с образом. *Для простоты изложения мы часто будем отождествлять вложенную сеть с ее образом.*

Определение. Пусть G – топологический граф с границей ∂G и $\overline{G}$ – подграф графа G. Граница $\partial\overline{G}$ графа $\overline{G}$ называется *индуцированной из графа* G, если она состоит из всех вершин графа $\overline{G}$, принадлежащих ∂G, а также из тех вершин, которые в $\overline{G}$ и G имеют различные степени.

Определение. Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ – произвольная сеть, $\partial\Gamma\colon \partial G \to \mathbb{R}^2$ – ее граница. Сеть $\overline{\Gamma}\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\overline{\Gamma}\colon \partial\overline{G} \to \mathbb{R}^2$ называется *подсетью сети* Γ, если $\overline{\Gamma} = \Gamma|_{\overline{G}}$, где $\overline{G}$ является подграфом графа G и его граница $\partial\overline{G}$ индуцирована из G. Если подсеть $\overline{\Gamma}$ отлична от Γ, то она называется *собственной подсетью сети* Γ.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ – произвольная сеть и $I = [0,1]$ – некоторый отрезок.

Определение. Непрерывное отображение $\Psi\colon G \times I \to \mathbb{R}^n$ такое, что для каждого ребра e из G отображение $\Psi|_{e\times I}$ является аффинным и для всех $g \in G$ имеет место равенство $\Psi(g,0) = \Gamma(g)$, называется *деформацией сети* Γ. Положим $\Psi(g,t) = \Gamma_t(g)$ и в дальнейшем будем называть деформацией само однопараметрическое семейство $\{\Gamma_t\colon G \to \mathbb{R}^2\}$. Всегда, если не оговорено противное, будем предполагать, что деформация неподвижна на границе, т.е. $\Psi(v,t) = \Gamma(v)$ для любой вершины $v \in \partial G$ и любого $t \in [0,1]$.

Рассмотрим теперь траекторию движения каждой точки сети Γ при деформации Γ_t. Для этого фиксируем некоторую точку $g \in G$ и рассмотрим кривую $\Gamma_t(g)$. Вдоль Γ определено поле $\left.\dfrac{d\Gamma_t(g)}{dt}\right|_{t=0}$, которое называется *полем деформации* Γ_t.

Пусть H – произвольный подграф в топологическом графе G. Обозначим через $G/_wH$ топологическое пространство, полученное из G отождествлением точек каждой связной компоненты графа H. Пространство $G/_wH$ наделяется естественной структурой топологического графа. Граф $G/_wH$ называется *слабым факторграфом графа* G по подграфу H. При этом каноническую проекцию $\pi\colon G \to G/_w H$ будем называть *слабой проекцией.* Будем говорить, что граф G_2 может быть *слабо спроецирован на граф* G_1, если существует $H \subset G_2$, для которого $G_1 = G_2/_w H$.

Пусть $\Gamma_1\colon G_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_2\colon G_2 \to \mathbb{R}^n$ – произвольные сети.

Определение. Будем говорить, что сеть Γ_2 может быть *слабо спроецирована на сеть* Γ_1, если существует слабая проекция $\pi\colon G_2 \to G_1$ такая, что $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \pi$.

Пусть Γ и Γ' – произвольные сети, причем Γ' может быть слабо спроецирована на Γ.

Определение. Произвольную деформацию сети Γ' назовем *деформацией с расщеплением сети* Γ. При этом сеть Γ' будем называть *типом* такого расщепления.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ – произвольная сеть в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Тогда *длиной* $\ell(\Gamma)$ *сети* Γ назовем сумму длин ее ребер, т.е. следующее выражение:

$$\ell(\Gamma) = \sum_{uv \in E(G)} \rho(\Gamma(u) - \Gamma(v)),$$

где $E(G)$ – множество ребер графа G.

Определение. Сеть Γ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой деформации Γ'_t, $t \in [0,1]$, где $\Gamma'_{t=0} = \Gamma'$ – произвольный тип расщепления сети Γ, выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0+} \ell(\Gamma'_t) \geqslant 0.$$

Сеть Γ называется *локально экстремальной*, если любая локальная сеть в Γ является экстремальной относительно своей канонической границы.

Определение. Сеть Γ называется *слабо критической* или *слабо экстремальной*, если для любой деформации (без расщепления) Γ_t, $t \in [0,1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0+} \ell(\Gamma_t) \geqslant 0.$$

Определение. Будем говорить, что сеть Γ *затягивает множество* X, если $\partial\Gamma = X$.

Определение. Сеть, затягивающая некоторое множество, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длины любой сети, затягивающей данное множество. Сеть называется *локально минимальной*, если любая локальная сеть является кратчайшей относительно своей канонической границы.

Утверждение 2.1. *Каждая подсеть локально минимальной (экстремальной) сети является локально минимальной (экстремальной).*

Утверждение 2.2. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ – *произвольная слабо экстремальная сеть типа* G *с границей* $\partial\Gamma\colon \partial G \to \mathbb{R}^n$. *Тогда длина сети* Γ *не больше длины любой сети* $\overline{\Gamma}\colon G \to \mathbb{R}^n$ *того же типа* G *и с той же границей* $\partial\overline{\Gamma} = \partial\Gamma$.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что найдется сеть $\overline{\Gamma}\colon G \to \mathbb{R}^n$ типа G и с границей $\partial\overline{\Gamma} = \partial\Gamma$ такая, что $\ell(\overline{\Gamma}) < \ell(\Gamma)$. Для каждого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ рассмотрим сеть $\Gamma_\alpha\colon G \to \mathbb{R}^n$, определяемую условием $\Gamma_\alpha(u) = \alpha\overline{\Gamma}(u) + (1-\alpha)\Gamma(u)$ для каждой вершины u из G. Так как $\partial\overline{\Gamma} = \partial\Gamma$, то для каждой вершины $u \in \partial G$ имеем $\Gamma_\alpha(u) = \alpha\overline{\Gamma}(u) + (1-\alpha)\Gamma(u) = \Gamma(u)$, т.е. $\partial\Gamma_\alpha = \partial\Gamma$. Найдем длину сети Γ_α. Имеем

$$\begin{aligned}\ell(\Gamma_\alpha) &= \sum_{uv\in E(G)} \rho(\Gamma_\alpha(u) - \Gamma_\alpha(v)) \\ &= \sum_{uv\in E(G)} \rho\bigl(\alpha(\overline{\Gamma}(u) - \overline{\Gamma}(v)) + (1-\alpha)(\Gamma(u) - \Gamma(v))\bigr) \\ &\leqslant \alpha\ell(\overline{\Gamma}) + (1-\alpha)\ell(\Gamma),\end{aligned}$$

где $E(G)$ – множество ребер графа G. Таким образом, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0+} \frac{\ell(\Gamma_\alpha) - \ell(\Gamma)}{\alpha} \leqslant \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\alpha\ell(\overline{\Gamma}) + (1-\alpha)\ell(\Gamma) - \ell(\Gamma)}{\alpha} = \ell(\overline{\Gamma}) - \ell(\Gamma) < 0.$$

Последнее неравенство противоречит слабой экстремальности сети Γ.

Утверждение 2.3. *Погруженная сеть локально минимальна тогда и только тогда, когда она является локально экстремальной.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную погруженную сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$.

Необходимость. Пусть сеть Γ локально минимальна. Так как кратчайшая сеть является экстремальной, а локальная минимальность означает, что каждая локальная сеть является кратчайшей, то она же и экстремальна. Следовательно, сеть Γ локально экстремальна.

Достаточность. Пусть сеть Γ локально экстремальна, т.е. каждая локальная сеть экстремальна. Рассмотрим произвольную экстремальную локальную сеть $\Gamma_{\mathrm{loc}}\colon G_{\mathrm{loc}} \to \mathbb{R}^n$. Из определения локальной сети следует, что она является звездой, т.е. сетью с не более чем одной вершиной степени больше 1.

Пусть $\Gamma_{\min}\colon G_{\min} \to \mathbb{R}^n$ – кратчайшая вложенная сеть, затягивающая $\partial\Gamma_{\mathrm{loc}}$. Тогда $G_{\min}$ является деревом. Рассмотрим произвольное дерево $G'_{\min}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) дерево $G'_{\min}$ слабо проецируется на дерево $G_{\min}$;

(2) все граничные вершины в $G'_{\min}$ имеют степень 1 (чтобы построить дерево $G'_{\min}$, достаточно расщепить все граничные вершины дерева $G_{\min}$).

Рассмотрим новую сеть $\Gamma'_{\min} = \Gamma_{\min} \circ \pi\colon G'_{\min} \to \mathbb{R}^n$, где $\pi\colon G'_{\min} \to G_{\min}$ – слабая проекция. Заметим, что $\ell(\Gamma'_{\min}) = \ell(\Gamma_{\min})$.

Из структуры дерева G_{loc} следует, что дерево $G'_{\min}$ может быть слабо спроецировано на G_{loc} (для этого нужно стянуть все внутренние ребра в точку, а затем если все вершины дерева G_{loc} являются граничными, то стянуть еще одно ребро). Рассмотрим новую сеть

$$\Gamma'_{\mathrm{loc}} = \Gamma_{\mathrm{loc}} \circ \pi'\colon G'_{\min} \to \mathbb{R}^n,$$

где $\pi'\colon G'_{\min} \to G_{\mathrm{loc}}$ – слабая проекция. Заметим, что $\ell(\Gamma'_{\mathrm{loc}}) = \ell(\Gamma_{\mathrm{loc}})$. Поскольку по условию дерево Γ_{loc} экстремально, то дерево Γ'_{loc} слабо экстремально. Из утверждения 2.2 следует, что $\ell(\Gamma'_{\mathrm{loc}}) = \ell(\Gamma'_{\min})$. Таким образом, мы имеем $\ell(\Gamma_{\mathrm{loc}}) = \ell(\Gamma'_{\mathrm{loc}}) = \ell(\Gamma'_{\min}) = \ell(\Gamma_{\min})$. Следовательно, сеть Γ_{loc} – кратчайшая, т.е. сеть Γ локально минимальная.

Из этого утверждения вытекает

Теорема 2.1. *Каждая погруженная экстремальная сеть в нормированном пространстве* $(\mathbb{R}^n, \rho)$ *является локально минимальной.*

Замечание. Не каждая погруженная локально минимальная сеть является экстремальной.

Определение. *Субградиентом* выпуклой вниз функции $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется такой ковектор $\xi \in T^*_x\mathbb{R}^n$, что

$$\xi(y - x) \leqslant F(y) - F(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Далее, если $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая поверхность и $x \in \mathscr{M}$ – произвольная ее точка, то проходящая через x гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности $\mathscr{M}$ в точке x, если $\mathscr{M}$ лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π. Нормаль к опорной гиперплоскости, направленную в то из ограниченных этой гиперплоскостью полупространств, внутренность которого не пересекается с $\mathscr{M}$, назовем *внешней нормалью* к поверхности $\mathscr{M}$ в точке x. Множество $N_x\mathscr{M}$ всех внешних нормалей к поверхности $\mathscr{M}$ в точке x называется *нормальным конусом.*

Конормой ρ^*, соответствующей норме ρ, называется следующая функция на ковекторах:

$$\rho^*(\xi) = \max\{\xi(\nu) \mid \nu \in \Sigma\},$$

где $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \rho(z) = 1\}$ – единичная сфера.

При стандартном отождествлении пространств $T^*_x\mathbb{R}^n$ и $T_x\mathbb{R}^n$ *субдифференциал* $S_F(x)$ *выпуклой функции* F *в точке* x, т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x, является непустым выпуклым ограниченным подмножеством нормального конуса в точке x к поверхности уровня этой функции, проходящей через x. При этом функция F дифференцируема в x, если и только если множество $S_F(x)$ состоит из одной точки, совпадающей в этом случае с градиентом функции F. Если $F = \rho$ – некоторая норма, то имеет место следующий результат [16].

Утверждение 2.4. *Субдифференциал* $S_\rho(x)$ *в точке* $x \neq 0$ *совпадает с множеством всех внешних нормалей единичной конормы к поверхности уровня нормы* ρ, *проходящей через* x.

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ – произвольная сеть. Для каждой приведенной компоненты $H_\Gamma \subset \Gamma$ обозначим через E_{H_Γ} и V_{H_Γ} множество ребер и вершин сети H_Γ. Через $\overline{\partial} H_\Gamma$ обозначим множество вершин из H_Γ, инцидентных невырожденным ребрам сети Γ. Далее, для каждой вершины $x \in \overline{\partial} H_\Gamma$ обозначим через $N_{H_\Gamma}(x)$

множество невырожденных ребер сети Γ, инцидентных x. Если γ – произвольное ребро сети, то обозначим через $\partial\gamma$ пару его концевых вершин. Положим $\rho(\{A, B\}) = \rho(B - A)$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ – произвольная точка и $\eta \in T_x\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ – любой вектор. Через $p(\eta)$ будем обозначать субградиент функции ρ в точке x, причем если η и $x \neq 0$ коллинеарны, то $p(\eta)$ – любой такой ковектор, а если η и $x \neq 0$ линейно независимы, то $p(\eta)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: вектор $p(\eta)$ ортогонален в смысле евклидова скалярного произведения радиальной проекции луча $x + t\eta$, $t \geqslant 0$, на сферу Σ. Для произвольного невырожденного ребра $\gamma = [x, y]$ и произвольных векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ положим $p_x(\gamma, \eta_1, \eta_2)$ равным ρ-импульсу $p_{xy}(\eta_1, \eta_2)$, который определяется равенством $p_{xy}(\eta_1, \eta_2) = p_1(\eta_1 - \eta_2) = -p_2(\eta_2 - \eta_1)$, где $p_i(\eta)$ – субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $n_i = (-1)^i(y - x)/\|y - x\|$. Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Справедлива следующая теорема, доказанная А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным [16].

Теорема 2.2. *Пусть* $(\mathbb{R}^n, \rho)$ – *нормированное пространство. Сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ *с границей* $\partial\Gamma$ *слабо экстремальна, если и только если для каждого отображения* $\eta\colon V_G \to \mathbb{R}^n$, *где* $\eta(\partial G) = 0$, *следующая сумма по всем приведенным компонентам* H_Γ *сети* Γ *неотрицательна*:

$$\mathfrak{D}(\Gamma, \eta) = \sum_{H_\Gamma} \Biggl\{ \sum_{x \in \overline{\partial} H_\Gamma} \Biggl\langle \sum_{\substack{\gamma \in N_{H_\Gamma}(x)\\ \gamma = [x,y]}} p_x(\gamma, \eta(x), \eta(y)), \eta(x) \Biggr\rangle + \sum_{\gamma \in E_{H_\Gamma}} \rho(\eta|_{\partial\gamma}) \Biggr\} \geqslant 0.$$

Замечание. Из теоремы 2.2 и из линейности сети вытекает, что для проверки слабой экстремальности сети достаточно знать поле деформации только в вершинах сети и рассматривать только линейные деформации, т.е. деформации, при которых каждая точка сети движется прямолинейно и равномерно. Поскольку между полями вдоль сети Γ, равными нулю на границе, и линейными деформациями сети Γ имеется взаимно однозначное соответствие, то в дальнейшем будем отождествлять поля деформации с самими деформациями и называть их просто *деформациями сети.*

Хотя, формально, для проверки экстремальности сети нужно проверить (с помощью теоремы 2.2) слабую экстремальность бесконечного числа сетей – различных типов расщеплений исходной сети, в действительности эту проверку достаточно провести лишь для конечного числа типов расщепления.

Построим набор представителей, из слабой экстремальности которых вытекает экстремальность сети. Пусть Γ – произвольная сеть, H_Γ – некоторая ее приведенная компонента и $\overline{\Gamma} = \Gamma/H_\Gamma$ – сеть, полученная из Γ факторизацией по H_Γ. Обозначим через $\pi\colon \Gamma \to \overline{\Gamma}$ каноническую проекцию, и пусть $x = \pi(H_\Gamma)$. Прообраз произвольной локальной сети $\overline{\Gamma}_{\mathrm{loc}}(x) \subset \overline{\Gamma}$ для $\overline{\Gamma}$ с центром в x при отображении π назовем *сильно локальной сетью приведенной компоненты* H_Γ.

Пусть Γ – произвольная погруженная сеть, не содержащая внутренних вершин степени 2.

Определение. Тип расщепления Γ' сети Γ назовем *базовым*, если сильно локальная сеть T каждой его приведенной компоненты $H_{\Gamma'}$ является бинарным деревом, т.е. содержит вершины степени 1 или 3. При этом если $H_{\Gamma'}$

соответствует внутренней вершине сети Γ, то все вершины степени 1 дерева T не принадлежат $H_{\Gamma'}$. Если же $H_{\Gamma'}$ соответствует граничной вершине из Γ, то $H_{\Gamma'}$ содержит ровно одну вершину x дерева T степени 1, причем в этом случае $\partial\Gamma' \cap H_{\Gamma'} = \{x\}$.

Отметим, что у каждой погруженной сети Γ, которая не содержит внутренних вершин степени 2, имеется лишь конечное (ненулевое) число базовых типов расщепления.

Справедлива следующая теорема, доказанная А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным [16].

Теорема 2.3. *Погруженная сеть* Γ *экстремальна в нормированном пространстве* $(\mathbb{R}^n, \rho)$, *если и только если каждый базовый тип расщепления* Γ' *сети* Γ *является слабо экстремальной сетью.*

Остальная часть статьи посвящена сетям на λ-нормированных плоскостях, где $\lambda \neq 2, 3, 4, 6$. Сначала мы докажем основную теорему–критерий экстремальности сети. Само доказательство занимает много места, поэтому мы приведем только его эскиз, сформулировав основные утверждения. В последней части статьи мы рассмотрим вопросы о реализации сети в виде локально минимальной или экстремальной сети на λ-нормированной плоскости и о сходимости экстремальных сетей при $\lambda \to \infty$.

§ 3. Эскиз доказательства основной теоремы

Доказательство основной теоремы базируется на следующих утверждениях.

Сначала сформулируем критерий локальной минимальности произвольной сети [14], [13].

Теорема 3.1. *Погруженная сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *является локально минимальной на* λ*-нормированной плоскости, где* $\lambda \neq 2, 3, 4, 6$, *тогда и только тогда, когда степень каждой вершины не больше* 3, *каждая вершина степени* 1 *является граничной и для любых двух смежных ребер* γ_1 *и* γ_2 *выполняется одно из неравенств*:

1) $-\lambda \leqslant \operatorname{fall}(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant 3 - \lambda$, *если* γ_1 *и* γ_2 *инцидентны внутренней вершине степени* 2;
2) $|\operatorname{fall}(\gamma_1, \gamma_2)| \leqslant 3$, *если* γ_1 *и* γ_2 *инцидентны внутренней вершине степени* 3;
3) $\operatorname{fall}(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant 3$, *если* γ_1 *и* γ_2 *инцидентны граничной вершине.*

Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ – произвольная погруженная сеть.

Утверждение 3.1. *Каждая нить экстремальной погруженной сети на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ *является монотонной кривой, и ее длина равна длине прямолинейного отрезка, который соединяет концы этой нити.*

Доказательство. Достаточно показать, что каждая нить экстремальной сети на λ-нормированной плоскости является монотонной кривой.

Рассмотрим произвольную нить экстремальной сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, состоящую из последовательности ребер $\gamma_1 = [x_1, x_2]$, $\dots$, $\gamma_k = [x_k, x_{k+1}]$, и ориентируем эту нить от x_1.

Допустим, что эта нить не является монотонной кривой. Рассмотрим первое l такое, что $\gamma_1,\dots,\gamma_l$ – не монотонный путь. Без ограничения общности будем предполагать, что направления ребер $\gamma_1,\dots,\gamma_{l-1}$ приходят на сторону $[P_0,P_1]$ из 2λ-угольника Σ.

Так как сеть экстремальна, то согласно теореме 3.1 имеется ровно две возможности:

1) или направление ребра $\gamma_l=[x_l,x_{l+1}]$ приходит на сторону $(P_1,P_2]$;
2) или направление ребра $\gamma_l=[x_l,x_{l+1}]$ приходит на сторону $[P_{2\lambda-1},P_0)$.

Рассмотрим первую возможность (вторая рассматривается аналогично).

Пусть $\gamma_q=[x_q,x_{q+1}]$, $q<l$, – это первое ребро, направление которого приходит на сторону $[P_0,P_1)$.

Рассмотрим линейную деформацию сети Γ, при которой вершины x_{q+1},x_{q+2}, $\dots,x_l$ движутся со скоростью

$$\eta=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\lambda}\right),\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right),$$

а остальные остаются на месте. По теореме 2.2

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(\Gamma,\eta)&=\langle p_{x_{q+1}}(\gamma_q,\eta,0)+p_{x_{q+1}}(\gamma_{q+1},\eta,\eta)+\dots+p_{x_l}(\gamma_{l-1},\eta,\eta)+p_{x_l}(\gamma_l,\eta,0),\eta\rangle\\&=\langle p_{x_{q+1}}(\gamma_q,\eta,0)+p_{x_l}(\gamma_l,\eta,0),\eta\rangle=-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\lambda}<0\end{aligned}$$

для любого λ, поэтому сеть Γ не является экстремальной. Это противоречие завершает доказательство утверждения.

Из утверждения 3.1 получаем

Утверждение 3.2. *Погруженная сеть* $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ *является экстремальной сетью на* λ*-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2,\rho_\lambda)$ *тогда и только тогда, когда все ее нити – монотонные кривые и линеаризация* Γ_l *сети* Γ *является экстремальной сетью на* λ*-нормированной плоскости.*

Из утверждения 3.2 следует, что для описания структуры экстремальных сетей достаточно ограничиться изучением сетей, которые не содержат нитей.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что рассматриваемая сеть не содержит нитей.

Для любых подмножеств A и B из 2λ-угольника Σ обозначим через $\beta(A,B)$ точную верхнюю грань углов между радиус-векторами точек $x\in A$ и $y\in B$. Если γ_1 и γ_2 – два смежных ребра, то в выражении $\beta(\mathrm{fl}(\gamma_1),\mathrm{fl}(\gamma_2))$ под замыканиями $\mathrm{fl}(\gamma_i)$ будем понимать замыкания для ребер γ_i, $i=1,2$, ориентированных от их общей вершины.

Определение. Погруженная сеть на λ-нормированной плоскости, содержащая по крайней мере две вершины степени больше 1, называется *существенной*, если она является деревом и одновременно удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых двух смежных ребер γ_i и γ_j выполняются неравенства

$$\frac{\pi}{\lambda}\left[\frac{2\lambda-1}{3}\right]\leqslant\alpha(\mathrm{fl}(\gamma_i),\mathrm{fl}(\gamma_j))\leqslant\beta(\mathrm{fl}(\gamma_i),\mathrm{fl}(\gamma_j))\leqslant\frac{\pi}{\lambda}\left(\left[\frac{2\lambda}{3}\right]+1\right),$$

причем в случае, когда γ_i и γ_j инцидентны граничной вершине и $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$, выполняется неравенство

$$\beta(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)) \leqslant \frac{2\pi}{3}$$

(в частности, все вершины сети имеют степени не выше 3);

2) все вершины степени 1 и 2 граничные, а степени 3 внутренние;
3) каждое неточечное ребро является 1-граничным, в частности, все не 1-граничные ребра точечные;
4) каждая вершина степени 3, инцидентная двум не 1-граничным ребрам, инцидентна точечному 1-граничному ребру, в частности, при $2\lambda \equiv 1, 2 \pmod 3$ каждая вершина степени 3 инцидентна точечному 1-граничному ребру;
5) в каждой вершине степени 2, инцидентной ребрам γ_1 и γ_2 таким, что одно из них является 1-граничным, выполняется равенство

$$\alpha(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)) = \frac{\pi}{\lambda}\left[\frac{2\lambda - 1}{3}\right];$$

6) при $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$ в каждой вершине степени 3, инцидентной ребрам γ_1, γ_2 и γ_3 таким, что два из них, например γ_2 и γ_3, являются точечными 1-граничными, выполняется

$$\alpha(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2)) \neq \alpha(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_3)).$$

Замечание. Отметим, что любая существенная сеть локально минимальна.

Теорема 3.2. *Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ – произвольное погруженное локально минимальное дерево на λ-нормированной плоскости и $\mathfrak{M}$ – набор его максимальных существенных подсетей. Тогда дерево Γ экстремально, если и только если каждая сеть из $\mathfrak{M}$ экстремальна.*

Рассмотрим произвольную существенную сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости. Из определения существенной сети следует, что сеть Γ имеет всего один базовый тип расщепления $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$. Пусть $z = \{\Gamma\colon u \to \mathbb{R}^2\}$ – произвольная вершина сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$, инцидентная ребрам γ_i, которые ориентированы от нее. Обозначим через $\mathscr{H}(z) = \Gamma'|_{H(u)}\colon H(u) \to \mathbb{R}^2$ приведенную компоненту сети Γ' такую, что $\mathscr{H}(z)(H(u)) = \Gamma(u)$. При этом если z является внутренней вершиной степени 3, то $H(u) = u' = u$, и если z – граничная вершина степени 2, то $H(u) = [u', v']$, где v' – граничная вершина степени 1, а u' – внутренняя вершина степени 3. Положим $z' = \{\Gamma'\colon u' \to \mathbb{R}^2\}$.

Определение. Вершина z' называется *представителем вершины z сети* Γ в сети Γ'.

Определение. Пусть степень вершины z равна 2. Деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой в вершине z'*, если или $\eta(u') = 0$, или угол между $\eta(u')$ и направлением не 1-граничного ребра γ_k равен $\frac{\pi}{\lambda}\left[\frac{\lambda+1}{3}\right]$, а угол между $\eta(u')$ и направлением γ_l, $l \neq k$, не больше $\frac{\pi}{\lambda}\left[\frac{\lambda+2}{3}\right]$.

Пусть степень вершины z равна 3 и два ребра, скажем γ_2 и γ_3, являются неточечными. Этот случай имеет место только для $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = 3$.

Определение. В сделанных предположениях деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой в вершине* z', если или $\eta(u') = 0$, или $\eta(u')$ имеет точечное направление, которое образует с направлением ребра γ_i, $i = 1, 2$, угол не больше $\frac{\pi}{3}$.

Пусть степень вершины z равна 3 и по крайней мере два ребра являются точечными.

Определение. В сделанных предположениях деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой в вершине* z', если вектор $\eta(u')$ коллинеарен точечному направлению некоторого ребра γ_i, причем оставшиеся из инцидентных z ребер не образуют усы. При этом $\eta(u')$ не сонаправлен с ребром γ_p, если одно из оставшихся ребер γ_q и γ_r, где $q \neq p$, $r \neq p$, скажем γ_q, не является 1-граничным, а другое, γ_r, удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) > 3\bigl[\frac{\lambda+2}{3}\bigr] - \lambda$, когда γ_r или не является 1-граничным ребром, или является неточечным;
2) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) \geqslant 3\bigl[\frac{\lambda+2}{3}\bigr] - \lambda$ или $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) = \mathrm{fall}(\gamma_p, \gamma_r)$, когда γ_r является точечным 1-граничным ребром.

Аналогично, $\eta(u')$ не противоположно направлен ребру γ_p, если одно из оставшихся ребер γ_q и γ_r, где $q \neq p$, $r \neq p$, скажем γ_q, не является 1-граничным, а другое, γ_r, удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) < 3\bigl[\frac{\lambda}{3}\bigr] - \lambda$, когда γ_r не является 1-граничным ребром;
2) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) \leqslant 3\bigl[\frac{\lambda}{3}\bigr] - \lambda$, когда γ_r является неточечным;
3) $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) \leqslant 3\bigl[\frac{\lambda}{3}\bigr] - \lambda$ или $\mathrm{fall}(\gamma_q, \gamma_r) = \mathrm{fall}(\gamma_p, \gamma_r)$, когда γ_r является точечным 1-граничным ребром.

Определение. Деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *допустимой*, если она допустима в каждой вершине сети Γ' и удовлетворяет следующему условию: если $\gamma = \{\Gamma'\colon [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^2\}$ – произвольное ребро сети Γ' и векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ одновременно не равны нулю и не параллельны образу ребра γ, то вектор $\eta(u_1) - \eta(u_2)$ параллелен образу ребра γ (условия $\eta(u_i) \neq 0$, $i = 1, 2$, и определение приведенной компоненты гарантируют, что γ – невырожденное ребро).

Теорема 3.3. *Пусть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ – произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ и $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ – единственный базовый тип ее расщепления. Тогда сеть Γ экстремальна, если и только если $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ для каждой допустимой деформации $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$.*

Определение. Деформация $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ сети Γ' называется *строго допустимой*, если она допустима, не равна нулю в каждой внутренней вершине графа G' и удовлетворяет следующему условию: если $\gamma = \{\Gamma'\colon [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^2\}$ – произвольное не 1-граничное невырожденное ребро сети Γ', то векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ не параллельны, а вектор $\eta(u_1) - \eta(u_2)$ параллелен образу ребра γ.

Замечание. Не для каждой существенной сети существует хотя бы одна строго допустимая деформация.

Используя понятие строго допустимой деформации, получаем следующую теорему.

Теорема 3.4. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *– произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ *и* $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ *– единственный базовый тип ее расщепления. Тогда сеть* Γ *экстремальна, если и только если каждая собственная подсеть сети* Γ *экстремальна и для каждой строго допустимой деформации* $\eta\colon V_{G'} \to \mathbb{R}^2$ *выполнено неравенство* $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$.

Замечание. Из равенства $\mathfrak{D}(\Gamma', a\eta) = a\mathfrak{D}(\Gamma', \eta)$ для любого $a \geqslant 0$ вытекает, что неравенство $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$ из теоремы 3.4 достаточно проверить лишь для конечного числа строго допустимых деформаций. В качестве деформаций можно выбрать деформации η с $\|\eta\| = 1$, где $\|\eta\| = \max_{x\in V_{G'}} \|\eta(x)\|$. Пусть $\Lambda(\Gamma') = \{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ – все строго допустимые деформации для Γ' с единичной нормой. Далее, каждая сеть имеет конечное число собственных подсетей, и для проверки их экстремальности можно воспользоваться теоремой 3.4. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 3.5. *Пусть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *– произвольная существенная сеть на λ-нормированной плоскости* $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ *с единственным базовым типом* $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ *своего расщепления и* $\Gamma_m\colon G_m \to \mathbb{R}^2$, $m = 1, \dots, l$, *– все ее существенные собственные подсети с базовыми типами* $\Gamma'_m\colon G'_m \to \mathbb{R}^2$ *своего расщепления. Тогда сеть* Γ *экстремальна, если и только если для всех строго допустимых деформаций* $\eta \in \Lambda(\Gamma')$ *и* $\eta_m \in \Lambda(\Gamma'_m)$ *выполнены неравенства* $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geqslant 0$, $\mathfrak{D}(\Gamma'_m, \eta_m) \geqslant 0$. *Таким образом, условие экстремальности существенной сети сводится к проверке справедливости конечного числа неравенств на компоненты векторов* η *и* η_m.

С помощью теорем 2.2 и 3.5 можно доказать следующий результат.

Теорема 3.6. *Произвольная существенная сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *экстремальна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

Доказательство основной теоремы. *Достаточность.* Пусть для линеаризованного дерева Γ выполняется неравенство $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$. Тогда то же самое неравенство выполнено и для любой существенной подсети дерева Γ. Из теоремы 3.6 вытекает, что каждая существенная подсеть дерева Γ экстремальна. Следовательно, по теореме 3.2 дерево Γ экстремально.

Необходимость. Пусть дерево Γ экстремально. Тогда по теореме 3.2 экстремальна каждая существенная подсеть Γ_s дерева Γ. Из теоремы 3.6 вытекает, что $\mathrm{Fall}_0(\Gamma_s) \leqslant 3$ для каждой сети Γ_s.

Пусть $\mathscr{P} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ – произвольный канонически ориентированный путь в дереве Γ, все внутренние ребра которого точечны. Если ребро γ_p не является точечным, то ребро из $\partial\,\mathrm{fl}(\gamma_p)$, на котором достигается максимум для $\mathrm{fall}_0(\mathscr{P})$, обозначим так же через γ_p, $p = 1, n$. Обозначим через z_i внутренние вершины из $\mathscr{P}$, инцидентные γ_i и γ_{i+1}, а через $\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_q$ – все максимальные подпути в $\mathscr{P}$, лежащие в существенных сетях (q может быть равно нулю). По предположению $\mathrm{fall}_0(\mathscr{P}_k) \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant q$.

Пусть $\{z_{i_l}\}_{l=1}^r$ – все внутренние вершины из $\mathscr{P}$, которые не входят в пути $\mathscr{P}_k$, $1 \leqslant k \leqslant q$, и $\mathrm{fall}_0(\gamma_{i_l}, \gamma_{i_l+1}) = 3\left[\frac{\lambda}{3}\right] - \lambda + 3$ (r может быть равно нулю). Тогда из локальной минимальности дерева Γ и определения существенной сети следует, что путь $\mathscr{P}$ содержит по крайней мере $q+r-1$ внутренних вершин z_{j_m}, для которых $\mathrm{fall}_0(\gamma_{j_m}, \gamma_{j_m+1}) \leqslant 3\left[\frac{\lambda}{3}\right] - \lambda - 3$.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{fall}_0(\mathscr{P}) &\leqslant \sum_{k=1}^{q} \mathrm{fall}_0(\mathscr{P}_k) + \sum_{l=1}^{r} \mathrm{fall}_0(\gamma_{i_l}, \gamma_{i_l+1}) + (q+r-1)\left(3\left[\frac{\lambda}{3}\right] - \lambda - 3\right) \\ &\leqslant (q+2r)\left(3\left[\frac{\lambda}{3}\right] - \lambda\right) + 3 \leqslant 3.\end{aligned}$$

Если $q + r = 0$, то $\mathrm{fall}_0(\mathscr{P}) \leqslant 0$.

Следовательно, $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

§ 4. Топологическая и планарная λ-минимальные (экстремальные) реализации сети

Рассмотрим две произвольные вложенные сети $\Gamma_i \colon G \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$.

Определение. Сети Γ_1 и Γ_2 называются *планарно эквивалентными*, если существует деформация в классе вложенных сетей, переводящая одну сеть в другую, причем граница переходит в границу. Здесь деформация не обязана быть неподвижной на границе.

Замечание. Классическое определение планарной эквивалентности состоит в том, что две вложенные сети планарно эквивалентны, если существует гомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$ на себя, сохраняющий ориентацию и переводящий одну сеть в другую, причем граница переходит в границу. На самом деле, эти определения планарной эквивалентности эквивалентны, но для удобства мы будем использовать только первое.

Рассмотрим произвольный топологический граф G.

Определение. Будем говорить, что топологический граф G *допускает топологическую λ-минимальную (экстремальную) реализацию*, если существует вложенная локально минимальная (экстремальная) сеть $\Gamma \colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости.

Определение. Будем говорить, что вложенная сеть $\Gamma \colon G \to \mathbb{R}^2$ *допускает планарную λ-минимальную (экстремальную) реализацию*, если существует планарно эквивалентная ей вложенная локально минимальная (экстремальная) сеть $\overline{\Gamma} \colon G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости.

Рассмотрим произвольную вложенную сеть $\Gamma \colon G \to \mathbb{R}^2$. Из определения λ-минимальной (экстремальной) реализации сразу вытекает утверждение.

Утверждение 4.1. *Если сеть Γ допускает планарную λ-минимальную (экстремальную) реализацию, то и топологический граф G допускает топологическую λ-минимальную (экстремальную) реализацию.*

Определение. Дерево T с некоторой границей называется *деревом Штейнера*, если степени всех вершин не больше 3, а все вершины степени 1 являются граничными. Дерево называется *бинарным*, если все его граничные вершины имеют степень 1, а внутренние – 3.

Определение. Две вершины называются *соседними*, если они инцидентны одному и тому же ребру.

Из структуры локально минимальных сетей сразу вытекает

Теорема 4.1. 1) *Топологическое дерево T допускает топологическую λ-минимальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.*

2) *Вложенное дерево $\Gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$ допускает планарную λ-минимальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.*

Оказывается, теорема 4.1 верна и для λ-экстремальной реализации.

Теорема 4.2. *Вложенное дерево $\Gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$ допускает планарную λ-экстремальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.*

Доказательство. *Необходимость* следует из того факта, что каждое экстремальное дерево является и локально минимальным. Поэтому по теореме 4.1 дерево T является деревом Штейнера.

Достаточность. Нам надо построить экстремальное дерево $\overline{\Gamma}\colon T \to \mathbb{R}^2$, планарно эквивалентное вложенному дереву $\Gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$, где T является деревом Штейнера. Мы будем строить дерево $\overline{\Gamma}$, все ребра которого точечны.

1) Рассмотрим сначала случай, когда вложенное дерево Γ является бинарным.

Пусть $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. В этом случае в качестве дерева $\overline{\Gamma}$ можно взять дерево, у которого углы между смежными ребрами равны $\frac{2\pi}{3}$. Тогда $\mathrm{Fall}_0(\overline{\Gamma}) = 0$. Следовательно, дерево $\overline{\Gamma}$ экстремально.

Пусть $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, где $\varkappa = 1, 2$. Построим такое дерево $\overline{\Gamma}$, чтобы в соседних вершинах погрешности были расположены как показано на рис. 1, 2.

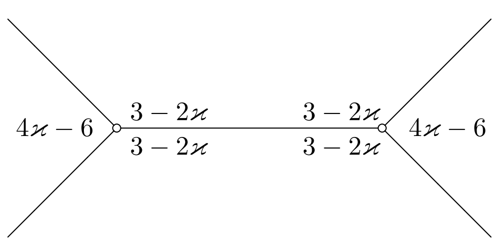

Рис. 1. Расстановка погрешностей

Построим дерево $\overline{\Gamma}$ по индукции, где индукцию будем проводить по количеству вершин дерева Γ степени больше 1.

Пусть дерево Γ содержит n вершин степени больше 1. Для $n = 1$ дерево $\overline{\Gamma}$ строится произвольным образом.

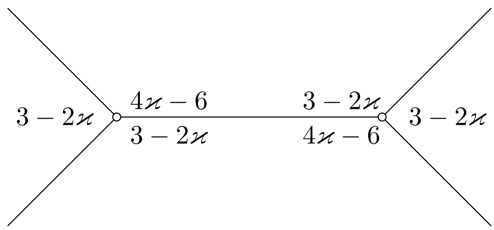

Рис. 2. Расстановка погрешностей

Пусть утверждение индукции верно для n. Рассмотрим дерево Γ, содержащее $n+1$ вершину $z_1,\dots,z_{n+1}$ степени больше 1. Так как Γ является деревом, то Γ содержит вершину усов, например z_{n+1}. Рассмотрим поддерево H дерева Γ, в котором вершины $z_1,\dots,z_n$ имеют степень 3, а остальные – 1, т.е. дерево H является бинарным. По предположению индукции для дерева H существует планарно эквивалентное ему дерево $\overline{H}$, у которого в соседних вершинах погрешности расположены так, как показано на рис. 1, 2. Дерево $\overline{\Gamma}$ получается из дерева $\overline{H}$ путем добавления внутренней вершины степени 3, в которой углы между смежными ребрами удовлетворяют нашему требованию.

Докажем, что полученное дерево экстремально. Для этого мы покажем, что $\mathrm{Fall}_0(\overline{\Gamma})=2$, отсюда и будет следовать экстремальность $\overline{\Gamma}$. Рассмотрим произвольный ориентированный путь $\mathscr{P}$ в $\overline{\Gamma}$ и последовательность ориентированных погрешностей для него. Согласно нашей расстановке в этой последовательности после двух ±1 или после ±2 будет следовать ∓2, две ∓1 или одна ∓1, на которой последовательность закончится. Поэтому $\mathrm{Fall}_0(\overline{\Gamma})=2$.

2) Для произвольного вложенного дерева Γ дерево $\overline{\Gamma}$ строится так, как и в бинарном случае, а в вершинах степени 2 берется угол, равный π. Для так построенного дерева $\overline{\Gamma}$ будет выполнено неравенство $\mathrm{Fall}_0(\overline{\Gamma})\leqslant 3$, поэтому дерево $\overline{\Gamma}$ экстремально.

Следствие 4.1. *Топологическое дерево T допускает топологическую λ-экстремальную реализацию тогда и только тогда, когда T является деревом Штейнера.*

§ 5. Стандартная евклидова плоскость как предел λ-нормированных плоскостей при $\lambda\to\infty$

Напомним, что нормированная плоскость $(\mathbb{R}^2,\rho_\lambda)$ называется λ-нормированной, если единичная окружность $\Sigma=\{x\in\mathbb{R}^2\mid \rho_\lambda(x)=1\}$ является правильным 2λ-угольником. Таким образом, стандартная евклидова норма является пределом λ-норм при $\lambda\to\infty$. Экстремальные сети на λ-нормированной плоскости будем называть *λ-экстремальными*.

Напомним, что вложенная сеть на стандартной евклидовой плоскости является локально минимальной (экстремальной), если и только если все вершины степени 1 являются граничными, угол между каждой парой смежных ребер не меньше $\frac{2\pi}{3}$ и угол между каждой парой смежных ребер для внутренней вершины степени 2 равен π. Из структуры локально минимальных и экстремальных сетей вытекает, что если мы рассмотрим произвольную локально минимальную или экстремальную сеть на λ-нормированной плоскости и устремим λ к бесконечности, то получим экстремальную сеть на стандартной евклидовой плоскости (классы локально минимальных и экстремальных сетей на стандартной евклидовой плоскости совпадают). Возникает вопрос: верен ли обратный результат, т.е. для любой ли экстремальной сети на стандартной евклидовой плоскости можно построить последовательность сетей на λ-нормированных плоскостях, которые при $\lambda \to \infty$ сходятся к данной?

5.1. Сходимость сетей. Рассмотрим на плоскости произвольную вложенную сеть Γ и последовательность вложенных сетей $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, планарно эквивалентных сети Γ.

Определение. Будем говорить, что последовательность сетей

$$\{\Gamma_n : G \to \mathbb{R}^2\}_{n=1}^{\infty}$$

сходится к сети $\Gamma : G \to \mathbb{R}^2$, и будем писать $\Gamma_n \to \Gamma$, если для каждой вершины v параметризующего графа G последовательность $\{\Gamma_n(v)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\Gamma(v)$. Под сходимостью здесь понимаем стандартную сходимость последовательности на стандартной евклидовой плоскости, т.е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $m > N$ справедливо неравенство $\|x_m - x\| < \varepsilon$.

Определение. Будем говорить, что сеть Γ *допускает λ-минимальную* (*экстремальную*) *реализацию*, если существует собственное движение стандартной евклидовой плоскости, переводящее сеть Γ в локально минимальную (экстремальную) сеть на λ-нормированной плоскости.

Из структуры локально минимальных сетей на стандартной евклидовой плоскости и экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях следует

Теорема 5.1. *Локально минимальное дерево, содержащее вершины степени* 3, *на стандартной евклидовой плоскости λ-экстремально реализуется, если и только если* $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$.

Из теоремы 5.1 сразу вытекает

Следствие 5.1. *Для любого вложенного экстремального дерева Γ на стандартной евклидовой плоскости существует последовательность вложенных λ-экстремальных деревьев, подпоследовательность которой сходится к Γ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Пусть дано произвольное вложенное дерево Γ. Рассмотрим последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных деревьев на λ-нормированных плоскостях, у которой каждая сеть Γ_k на $(\lambda^* + k - 1)$-нормированной плоскости, где $2(\lambda^* + k - 1) \equiv 0 \pmod 3$, совпадает с деревом Γ. Из структуры экстремальных сетей следует, что дерево Γ экстремально на любой λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Подпоследовательность, состоящая из таких сетей, будет сходиться к Γ.

Определение. Пусть вершина z степени k погруженного дерева $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ инцидентна последовательным при обходе вершины z против часовой стрелки ребрам $\gamma_1,\dots,\gamma_k$, ориентированным от их общей вершины. Для каждой пары соседних ребер (γ_i,γ_{i+1}), где $i=1,\dots,k$ и $\gamma_{k+1}=\gamma_1$, обозначим через $\angle(\gamma_i,\gamma_{i+1})\in[0,2\pi)$ *ориентированный угол между ребрами* γ_i и γ_{i+1}, который проходится от ребра γ_i до ребра γ_{i+1} против часовой стрелки. Таким образом, каждой вершине дерева Γ с точностью до циклического порядка ставится в соответствие последовательность ориентированных углов, которую мы будем обозначать через $\bigl(\alpha_{1,2}(z),\alpha_{2,3}(z),\dots,\alpha_{k,k+1}(z)\bigr)$. Последовательность $(\beta_{1,2},\beta_{2,3},\dots,\beta_{k,k+1})$, где $\beta_{i,i+1}\in[0,2\pi)$, называется *допустимой последовательностью степени* k, если $\sum_{i=1}^k\beta_{i,i+1}=2\pi$.

Лемма 5.1. *Рассмотрим произвольное вложенное дерево* $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$. *Тогда найдется такое* $\varepsilon>0$, *что для каждой вершины* z *степени* k *дерева* Γ *и любой допустимой последовательности* $\bigl(\beta_{1,2}(z),\beta_{2,3}(z),\dots,\beta_{k,k+1}(z)\bigr)$ *степени* k *такой, что* $|\alpha_{i,i+1}(z)-\beta_{i,i+1}(z)|<\varepsilon$, *существует планарно эквивалентное дереву* Γ *вложенное дерево* $\overline{\Gamma}\colon G\to\mathbb{R}^2$, *полученное заменой в каждой вершине* z *углов* $\alpha_{i,i+1}(z)$ *на* $\beta_{i,i+1}(z)$ *и имеющее ребра той же длины, что и у дерева* Γ.

Определение. Дерево $\overline{\Gamma}$ из леммы 5.1 назовем *ε-приближением дерева* Γ.

Лемма 5.2. *Пусть* $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ – *произвольное вложенное дерево с* 1*-граничным ребром* $\gamma=\{\Gamma\colon e\to\mathbb{R}^2\}$. *Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел* ε_n, $\varepsilon_n\to0$ *при* $n\to\infty$, *причем каждому* ε_n *поставлено в соответствие* ε_n*-приближение* $\Gamma_n\colon G\to\mathbb{R}^2$ *дерева* Γ *такое, что* $\Gamma_n\big|_e\to\gamma$ *при* $n\to\infty$. *Тогда* $\Gamma_n\to\Gamma$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Пусть $\Gamma\colon G\to\mathbb{R}^2$ – произвольное вложенное дерево с 1-граничным ребром $\gamma=[x,y]$, где x – граничная вершина степени 1, и $\Gamma_n\colon G\to\mathbb{R}^2$ – ε_n-приближение дерева Γ, где $\Gamma_n\big|_e\to\gamma$ и $\varepsilon_n\to0$ при $n\to\infty$.

Берем произвольную вершину $v\in G$. Рассмотрим пути $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}_n$ в Γ и Γ_n соответственно, где путь $\mathscr{P}$ соединяет вершину x и $\Gamma(v)$, а $\mathscr{P}_n$ – вершину x и $\Gamma_n(v)$. Пусть $\mathscr{P}=\{\gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_{k-1}\}$. Поскольку дерево Γ_n является ε_n-приближением Γ_n дерева Γ, то $\mathscr{P}_n=\{\gamma^n,\gamma_1^n,\dots,\gamma_{k-1}^n\}$, где ребро γ_j^n имеет ту же длину l_j, что и γ_j, а направление φ_j^n ребра γ_j^n сходится к направлению φ_j ребра γ_j при $n\to\infty$, так как пути содержат конечное число ребер. Имеем

$$\Gamma(v)=le^{\varphi}+\sum_{j=1}^{k-1}l_je^{i\varphi_j},\qquad \Gamma_n(v)=le^{\varphi^n}+\sum_{j=1}^{k-1}l_je^{i\varphi_j^n},$$

где l – длина ребра γ, а φ – направление. Таким образом,

$$\|\Gamma(v)-\Gamma_n(v)\|\leqslant l\|e^{i\varphi}-e^{i\varphi^n}\|+\sum_{j=1}^{k-1}l_j\|e^{i\varphi_j}-e^{i\varphi_j^n}\|.$$

Следовательно, $\Gamma_n(v)\to\Gamma(v)$ при $n\to\infty$ (так как $\varphi^n\to\varphi$ и $\varphi_j^n\to\varphi_j$ при $n\to\infty$).

Теорема 5.2. *Для любого вложенного экстремального дерева* Γ *на стандартной евклидовой плоскости существует последовательность вложенных* λ*-экстремальных деревьев, сходящаяся к* Γ *при* $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\gamma = [x, y]$, где вершина x имеет степень 1, – произвольное 1-граничное ребро дерева Γ. Построим сходящуюся к Γ последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных λ-экстремальных деревьев.

Для $2\lambda \equiv 0 \pmod 3$ возьмем деревья, совпадающие с Γ.

Для других λ, $2\lambda \equiv \varkappa \pmod 3$, где $\varkappa = 1, 2$, построим λ-экстремальные деревья Γ_λ, являющиеся $\frac{3\pi}{\lambda}$-приближением дерева Γ. Строим деревья Γ_λ, как в доказательстве теоремы 4.2, только для граничных вершин степени 2 возьмем углы, равные

$$\alpha + \frac{(6 - \varkappa)\pi}{3\lambda} + \varepsilon_\lambda,$$

где α – это угол в дереве Γ, соответствующий данной граничной вершине степени 2, а $0 \leqslant \varepsilon_\lambda < \frac{\pi}{\lambda}$ выбирается из условия, что все ребра из Γ_λ точечны.

Поскольку $\alpha \geqslant \frac{2\pi}{3}$, то по основной теореме все сети Γ_λ являются λ-экстремальными. Используя движения λ-нормированных плоскостей, мы совместим граничную вершину, соответствующую x, с самой вершиной x так, чтобы направление ребра, соответствующего γ, отличалось от направления ребра γ не больше, чем на $\frac{\pi}{2\lambda}$. Используя леммы 5.1 и 5.2, мы получаем, что построенная последовательность сходится к Γ.

5.2. Строгая сходимость сетей. Рассмотрим на плоскости произвольную вложенную сеть Γ и последовательность вложенных сетей $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, планарно эквивалентных сети Γ.

Определение. Будем говорить, что последовательность сетей

$$\{\Gamma_n : G \to \mathbb{R}^2\}_{n=1}^{\infty}$$

строго сходится к сети $\Gamma : G \to \mathbb{R}^2$, и будем писать $\Gamma_n \xrightarrow{s} \Gamma$, если для каждой граничной вершины $v \in \partial G$ параметризующего графа G справедливо равенство $\Gamma_n(v) = \Gamma(v)$ и для каждой внутренней вершины v параметризующего графа G последовательность $\{\Gamma_n(v)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\Gamma(v)$.

Из доказательства следствия 5.1 сразу вытекает

Утверждение 5.1. *Для любого вложенного экстремального дерева* Γ *на стандартной евклидовой плоскости существует последовательность вложенных* λ*-экстремальных деревьев, подпоследовательность которой строго сходится к* Γ *при* $\lambda \to \infty$.

Замечание. Не для каждого вложенного экстремального дерева на стандартной евклидовой плоскости существует последовательность λ-экстремальных сетей, сходящаяся к данному дереву при $\lambda \to \infty$. Проблемы могут возникнуть в случае, когда сеть содержит граничные вершины степени 2 и 3.

Длину произвольной сети $\Gamma : G \to \mathbb{R}^2$ на λ-нормированной плоскости $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$ обозначим через $\ell_\lambda(\Gamma)$, а на стандартной евклидовой плоскости $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ – через $\ell_e(\Gamma)$.

Лемма 5.3. *Рассмотрим на плоскости* $\mathbb{R}^2$ *произвольный вектор* η *и произвольную сеть* $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$. *Тогда* $\rho_\lambda(\eta) \to \|\eta\|$ *при* $\lambda \to \infty$ *и* $\ell_\lambda(\Gamma) \to \ell_e(\Gamma)$ *при* $\lambda \to \infty$.

Пусть G – произвольный топологический граф с границей ∂G, и пусть задано граничное отображение $\partial\colon \partial G \to \mathbb{R}^2$. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ произвольную последовательность $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных деревьев $\Gamma_n\colon G \to \mathbb{R}^2$ типа G с границей ∂ и последовательность λ_n-нормированных плоскостей $(\mathbb{R}^2, \rho_{\lambda_n})$ такую, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Лемма 5.4. *Пусть существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n),$$

равный l. *Тогда существует дерево* (*возможно, содержащее вырожденные ребра*) $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ *типа* G *с евклидовой длиной* $\ell_e(\Gamma) = l$ *и с границей* ∂.

Доказательство. Положим

$$a = \inf_{\{\overline{\Gamma}\colon G\to\mathbb{R}^2 \mid \partial\overline{\Gamma}=\partial\}} \{|l - \ell_e(\overline{\Gamma})|\}.$$

Если $a = 0$, то утверждение настоящей леммы справедливо, так как непрерывная функция достигает на компакте верхней и нижней граней. Допустим, что $a > 0$.

По определению предела $\lim_{n\to\infty} \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) = l$ существует N_1 такое, что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство $|l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| < a/3$. По лемме 5.3 евклидова длина дерева Γ_n равна $\ell_e(\Gamma_n) = \lim_{\lambda\to\infty} \ell_\lambda(\Gamma_n)$. Следовательно, существует $M > 0$ такое, что для любого $\lambda > M$ справедливо неравенство $|\ell_e(\Gamma_n) - \ell_\lambda(\Gamma_n)| < a/3$. Поскольку $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то существует N_2 такое, что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство $\lambda_n > M$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. При $n > N$ имеем три неравенства:

$$|l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| < \frac{a}{3}, \qquad |\ell_e(\Gamma_n) - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| < \frac{a}{3}, \qquad |l - \ell_e(\Gamma_n)| \geqslant a.$$

Получили противоречие, так как

$$\begin{aligned} a \leqslant |l - \ell_e(\Gamma_n)| &= |l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) + \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) - \ell_e(\Gamma_n)| \\ &\leqslant |l - \ell_{\lambda_n}(\Gamma_n)| + |\ell_{\lambda_n}(\Gamma_n) - \ell_e(\Gamma_n)| < \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

Теорема 5.3. *Для любого вложенного бинарного экстремального дерева на стандартной евклидовой плоскости существует последовательность вложенных бинарных* λ*-экстремальных деревьев, строго сходящаяся к нему при* $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\Gamma^*\colon G^* \to \mathbb{R}^2$, $\partial\Gamma^* = \partial$, – произвольное вложенное бинарное экстремальное дерево евклидовой длины $\ell_e(\Gamma^*) = l^*$ на стандартной евклидовой плоскости. Из алгоритма Хванга–Мелзака [17] вытекает единственность экстремального дерева данного типа и данной границы на стандартной евклидовой плоскости, поэтому, поскольку евклидова норма строго выпукла, по утверждению 2.2 для любого дерева $\Gamma\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂, отличного от Γ^*, справедливо неравенство

$$\ell_e(\Gamma) > \ell_e(\Gamma^*) = l^*. \tag{$*$}$$

Рассмотрим одно из деревьев $\Gamma_\lambda\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂, слабо экстремальное на $(\mathbb{R}^2, \rho_\lambda)$. Отметим, что Γ_λ может содержать вырожденные ребра. Из выпуклости ρ_λ вытекает, что $\ell_\lambda(\Gamma_\lambda) \leqslant \ell_\lambda(\Gamma)$ для любого дерева $\Gamma\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂. Для каждого дерева Γ_λ, содержащего вырожденные ребра, рассмотрим погруженное дерево $\Gamma'_\lambda\colon G'_\lambda \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\Gamma'_\lambda \circ \pi = \Gamma^*$, где $\pi\colon G^* \to G'_\lambda$ – слабая проекция.

Пусть K – множество всех λ таких, что $\ell_\lambda(\Gamma'_\lambda) < \ell_\lambda(\Gamma)$ для любого погруженного дерева $\Gamma\colon G^* \to \mathbb{R}^2$ с границей ∂. Докажем, что множество K конечно, т.е. начиная с некоторого λ на каждой λ-нормированной плоскости существует погруженное слабо экстремальное дерево типа G^* и с границей ∂. Предположим, что множество таких λ счетно. Поскольку с точностью до эквивалентности существует конечное число деревьев G'_λ, на которые можно слабо спроецировать дерево G^*, то из последовательности $\{\lambda\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, для которой все сети Γ'_{λ_n} имеют одинаковый тип G' и одинаковую границу ∂', где $\partial' \circ \pi = \partial$. Рассмотрим последовательность длин $\{l_{\lambda_n} = \ell_{\lambda_n}(\Gamma'_{\lambda_n})\}_{n=1}^\infty$. Поскольку эта последовательность ограничена с обеих сторон, то из нее можно выделить сходящуюся к некоторому конечному l' подпоследовательность $\{l_{\lambda_{n_k}}\}_{k=1}^\infty$. По лемме 5.4 найдется дерево $\Gamma'\colon G' \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\ell_e(\Gamma') = l'$ и $\partial\Gamma' = \partial'$. Рассмотрим дерево $\overline{\Gamma}\colon G^* \to \mathbb{R}^2$, определяемое равенством $\overline{\Gamma} = \Gamma' \circ \pi$. Заметим, что дерево $\overline{\Gamma}$ содержит вырожденные ребра, имеет границу $\partial = \partial' \circ \pi$ и евклидову длину l'. Из леммы 5.3 вытекает, что $\ell_\lambda(\Gamma^*) \to \ell_e(\Gamma^*) = l^*$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $\ell_{\lambda_n}(\Gamma_{\lambda_n}) < \ell_{\lambda_n}(\Gamma^*)$, получаем $l' \leqslant l^*$, что противоречит неравенству $(*)$.

Таким образом, начиная с некоторого λ существуют на λ-нормированных плоскостях слабо экстремальные погруженные деревья Γ_λ типа G^* и с границей ∂. Поскольку G^* является бинарным деревом, то базовый тип расщепления дерева Γ_λ совпадает с самим деревом, поэтому дерево Γ_λ экстремально. Из структуры экстремальных деревьев следует, что каждое дерево Γ_λ планарно эквивалентно дереву Γ^* и последовательность $\{\Gamma_\lambda\}$ сходится к Γ^* при $\lambda \to \infty$.

Список литературы

[1] D. Z. Du, F. K. Hwang, J. F. Weng, “Steiner minimal trees for regular polygons”, *Discrete Comput. Geom.*, **2** (1987), 65–84.

[2] P. de Fermat, *Abhandlungen über Maxima und Minima*, Akad. Verlagsges., Leipzig, 1934.

[3] V. Jarnik, M. Kössler, “O minimalnich grafeth obeahujiicich n danijch bodu”, *Cas. Mat. Fys.*, **63** (1934), 223–235.

[4] W. D. Smith, “How to find Steiner minimal trees in Euclidean d-space”, *Algorithmica*, **7** (1992), 137–177.

[5] M. Hanan, “On Steiner's problem with rectilinear distance”, *SIAM J. Appl. Math.*, **14** (1966), 255–265.

[6] F. K. Hwang, "On Steiner minimal trees with rectilinear distance", *SIAM J. Appl. Math.*, **30** (1976), 104–114.

[7] M. R. Garey, D. S. Johnson, "The rectilinear Steiner problem is NP-complete", *SIAM J. Appl. Math.*, **32** (1977), 826–834.

[8] Г. А. Карпунин, "Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера", *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 64–90.

[9] Г. А. Карпунин, *Теория Морса минимальных сетей*, Дис. … канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2001.

[10] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2003.

[11] M. Sarrafzadeh, C. K. Wong, "Hierarchical Steiner tree construction in uniform orientations", *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, **11**:9 (1992), 1095–1103.

[12] D. T. Lee, C. F. Shen, "The Steiner minimal tree problem in the λ-geometry plane", *Algorithms and computation* (Osaka, 1996), Lecture Notes in Comput. Sci., **1178**, Springer-Verlag, 1996, 247–255.

[13] K. J. Swanepoel, "The local Steiner problem in normed planes", *Networks*, **36**:2 (2000), 104–113.

[14] Д. П. Ильютко, "Локально минимальные сети в N-нормированных пространствах", *Матем. заметки*, **74**:5 (2003), 657–669.

[15] Д. П. Ильютко, "N-нормированные плоскости", в кн.: А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2003, 319–341.

[16] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *Branching solutions to one-dimensional variational problems*, World Scientific, Singapore, 2001.

[17] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей*, The Edwin Mellen Press, Lewiston, Queenston, Lampeter, 1999.

Д. П. Ильютко (D. P. Il'yutko)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ilyutko@yandex.ru

Поступила в редакцию
22.03.2005